MAKALAH ANALISA NUMERIK DAN KOMPUTASI

"PENYELESAIAN PERSAMAAN LINEAR DAN NON LINEAR DENGAN METODE NUMERIK"

Oleh :

MUHAMMAD FIRYANUL RIZKY 1708561006

PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA
FAKULTAS MIPA
UNIVERSITAS UDAYANA
2018

BAB I
PENDAHULUAN

Metode numerik mengkombinasikan dua perangkat penting dalam implementasinya: matematika dan komputer. Keilmuan Informatika memanfaatkan metode dan analisa numerik untuk menjelaskan definitif dari perhitungan sistem kerja komputer, yang disandarkan pada azaz-azas dan hukum-hukum algoritma komputer. Dengan perkembangan yang revolusioner komputer PC saat ini, dari sisi kecepatan eksekusi data dan kontrol, *space* memori yang semakin besar, dan harga yang semakin terjangkau, kehadiran komputer menjadi sangat essensial di dalam aktivitas saintis. Bukan hanya hardware yang berevolusi secara dramatis, proses pertumbuhan software juga bertransformasi secara radikal beberapa tahun terakhir. Pemrograman komputasi numerik dalam skala besar pun sudah bukan hal yang merepotkan lagi, seperti yang terjadi pada dekade awal dengan kendala keterbatasan memori, dan eksekusi program yang amat lambat. Dalam melakukan kegiatan komputasi numerik, berarti berinteraksi dengan alat (komputer yang digunakan), metode (implementasi analisa numerik dalam program yang dimiliki), dan teori (sifat unik dari kasus yang dihadapi). Komputer sebagai alat memiliki kemampuan:

1. dapat melakukan operasi penyimpanan karena ada memori,
2. dapat melakukan operasi-operasi tertentu atas data yang disimpan di memori;
3. dapat menyajikan kembali isi memori dalam media display menurut format yang dikehendaki.

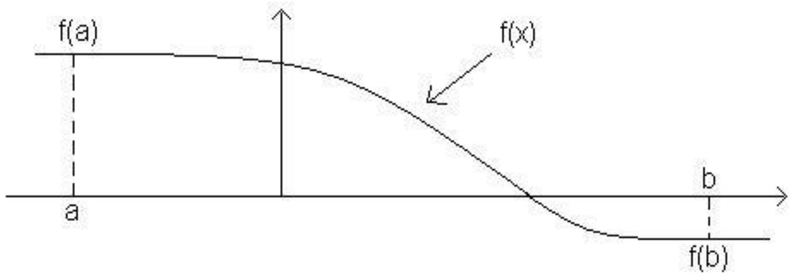
Ketiga hal tersebut berkaitan erat dengan data program informasi. Program adalah deretan operasi yang sengaja ditulis untuk sebuah proses komputasi. Program adalah resep tentang bagaimana komputasi itu harus dilaksanakan. Sebagai sebuah fakta tentang obyek komputasi, program disimpan dalam memori komputer untuk dijalankan, yaitu membuat komputer melaksanakan tiap operasi yang terdapat dalam program, satu demi satu, dari operasi pertama, kedua dan seterusnya. Himpunan instruksi yang dimiliki atau dikenal oleh komputer itulah yang disebut sebagai bahasa komputer atau bahasa pemrograman komputer. Jadi kehebatan komputer pada akhirnya hanya terletak dalam kemampuannya untuk membedakan apakah yang tersimpan dalam alamat atau *address* A dalam memori adalah data untuk dioperasikan atau instruksi untuk dilaksanakan, dan hanya merupakan pencerminan dari kemampuan manusia untuk mengkomunikasikan keinginannya dalam wujud program untuk dilaksanakan komputer. Disinilah peran algoritma, yaitu istilah baku untuk proses komputasi berulang untuk memecahkan persoalan dalam dunia nyata yang rumusan matematikanya bersifat eksplisit. Deskripsi harfiah langkah demi langkahnya adalah salah satu jalan untuk mengekspresikan algoritma. Flowchart adalah visual atau grafik representasi dari algortima, yang menggunakan deretan blok-blok dan panah, yang masing-masing menyatakan operasi atau langkah operasi. Sedangkan, *pseudocode* adalah kode (*code*) yang menjembatani *gap* antara flowchart dan kode komputer, dan format penulisannya lebih dekat pada pemrograman komputer

BAB II
TEORI DASAR

2.1 SISTEM PERSAMAAN NON LINEAR

Dalam usaha mendapatkan persamaaan matematika yang menjabarkan model dari suatu persoalan nyata, sering solusi yang dicari berupa suatu nilai variabel x sedemikian rupa, sehingga terpenuhi persamaan f (x) = 0 yang digunakan dalam model. Untuk beberapa kasus, melalui faktorisasi f(x) = 0 dapat diperoleh penyelesaian seperti yang diinginkan, namun bentuk yang lebih rumit telah mampu memberikan solusi melalui analisis matematik.

Apa yang dimaksud dengan menentukan x hingga terpenuhi persamaan f(x) = 0 ? secara geometri ini berarti mencari suatu titik hal mana f(x) tepat memotong sumbu x, sehingga f(x) = 0. jika dianggap f(x) sesungguhnya memotong sumbu x, maka dapat dicari suatu interval [a,b], sedemikian rupa sehingga f(a) dan f(b) mempunyai tanda berbeda.



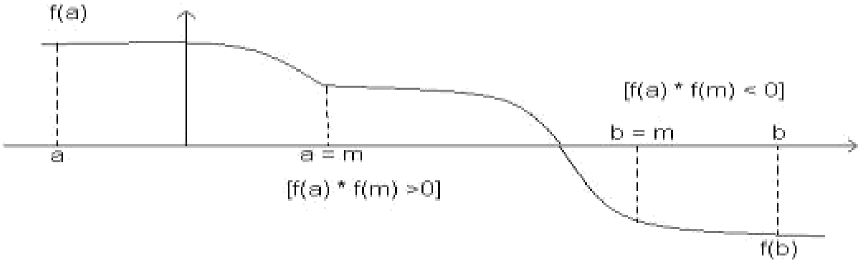
Gambar. 1

Dengan pembatasan interval ini, secara cermat dapat dicari x = λ yang memberikan nilai f (λ) = 0 sebagai berikut :
bagi dua interval [a,b] dan evaluasi nilai f(x) pada titik tengah interval.
Apabila f(m) = 0 berarti x = m, bila tidak sama dicari posisi nilai m apakah berada pada interval [a,m] atau interval [m,b] ; yaitu dengan memeriksa perbedaan tanda :
jika f (a) dan f(m) berbeda tanda berarti λ di [a,m]
jika f(a) dan f(m) mempunyai tanda sama berarti λ di [n,b]
proses pembagian interval dapat diulang sampai ditemukan nilai λ yang memberikan f(λ) = 0.

1. Metode Biseksi

Tahap pertama menetapkan nilai sembarang a dan b sebagai batas segmen nilai fungsi yang dicari. Batasan a dan b memberikan hanya bagi fungsi f(x) untuk x = a dan x = b. Langkah selanjutnya adalah memeriksa apakah f(a)*f(b) < 0. Bila terpenuhi berarti terdapat akar fungsi dalam segmen tinjauan. Jika tidak kembali harus ditentukan nilai a dan b agar f (a)* f(b) < 0 terpenuhi.

Dengan rumusan $m = \frac{a+b}{2}$, diperiksa apakah nilai mutlak f (m) < 10^{-6}(batas simpangan kesalahan),Jika besar nilai x = m adalah solusi yang dicari. Jika tidak terpenuhi, ditetapkan batasan baru dengan mengganti nilai b = m apabila f(a)*f(m) < 0, dan mengganti a = m bila f(a)*f(m) > 0.

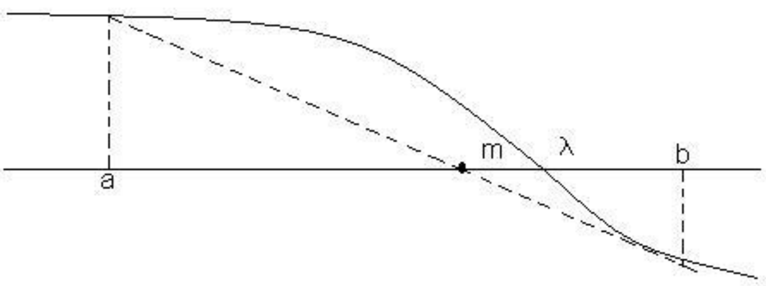


Gambar. 2

Jika f(a) < f(b) dalam nilai mutlaknya, maka akar persamaan akan terletak lebih dekat ke f(a), (lihat gambar 2).

2. Metode Regulasi Falsi

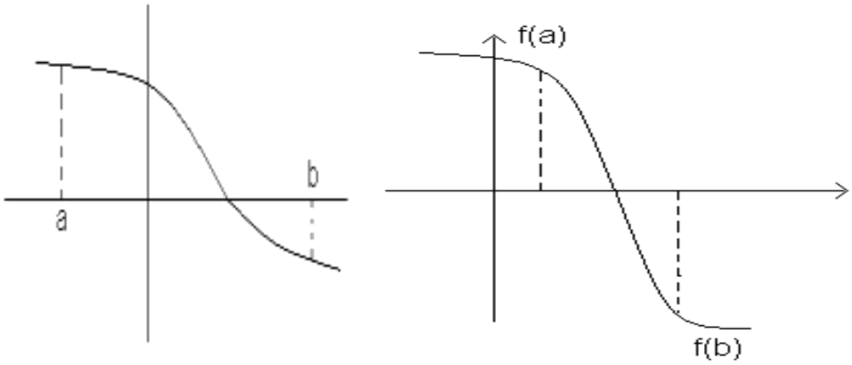
Cara yang lebih efektif mendapatkan nilai m adalah menghubungkan f(a) dan f(b) dengan garis lurus dan perpotongan garis dengan sumbu x merupakan nilai m. Seperti pada gambar 3. Cara penetapan m ini dikenal dengan cara Regulasi Falsi dan Algoritmanya sama denganMetode Biseksi.



Gambar. 3

Proses dengan cara ini memberikan perhitungan yang cepat dibandingkan dengan Metode Biseksi. Pada algoritma, proses dihentikan jika dicapai nilai mutlak f(m) < 10-6, Tetapi untuk kecermatan hasil dari matriks ini belum cukup. Syarat kecermatan yang tepat adalah :

$$|f(m)| < 10^{-6} \quad |[a_{baru} | - b_{baru}] < 10^{-6} .$$

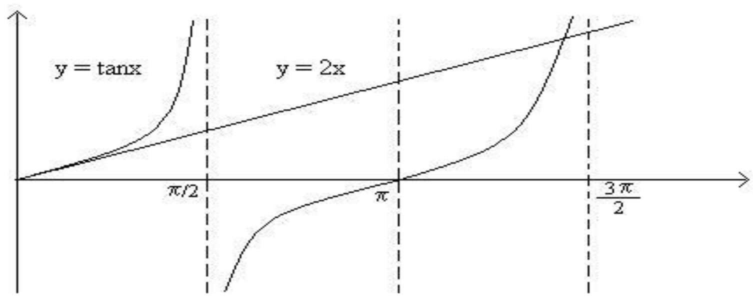


Gambar 4

Untukmenghindarimasalah yang mungkin terjadi pada prilaku persamaan yang tidak dapat dilacak, perla pembatasan tinjauan interval sesuai dengan sifat fungsi. Hal ini penting dalam metode numerik untuk memperoleh solusi nyata. Contoh :

$$Cot\ x = \frac{1}{2}x$$

untuk mncari besaran x persamaan ini maka bentuk persamaannya diubah menjadi
f (x) = tan x – 2x = 0
dengan mengabaikan akar x = 0 yang bukan solusi persamaan dasar, terlihat bahwa Metode Biseksi dan regulasi Falsi tidak akan memberikan solusi. Karena fungsi f(x) buka fungsi kontinyu untuk nilai kelipatan ganjil dari $\pi/2$ (lihat gambar).



Gambar. 5

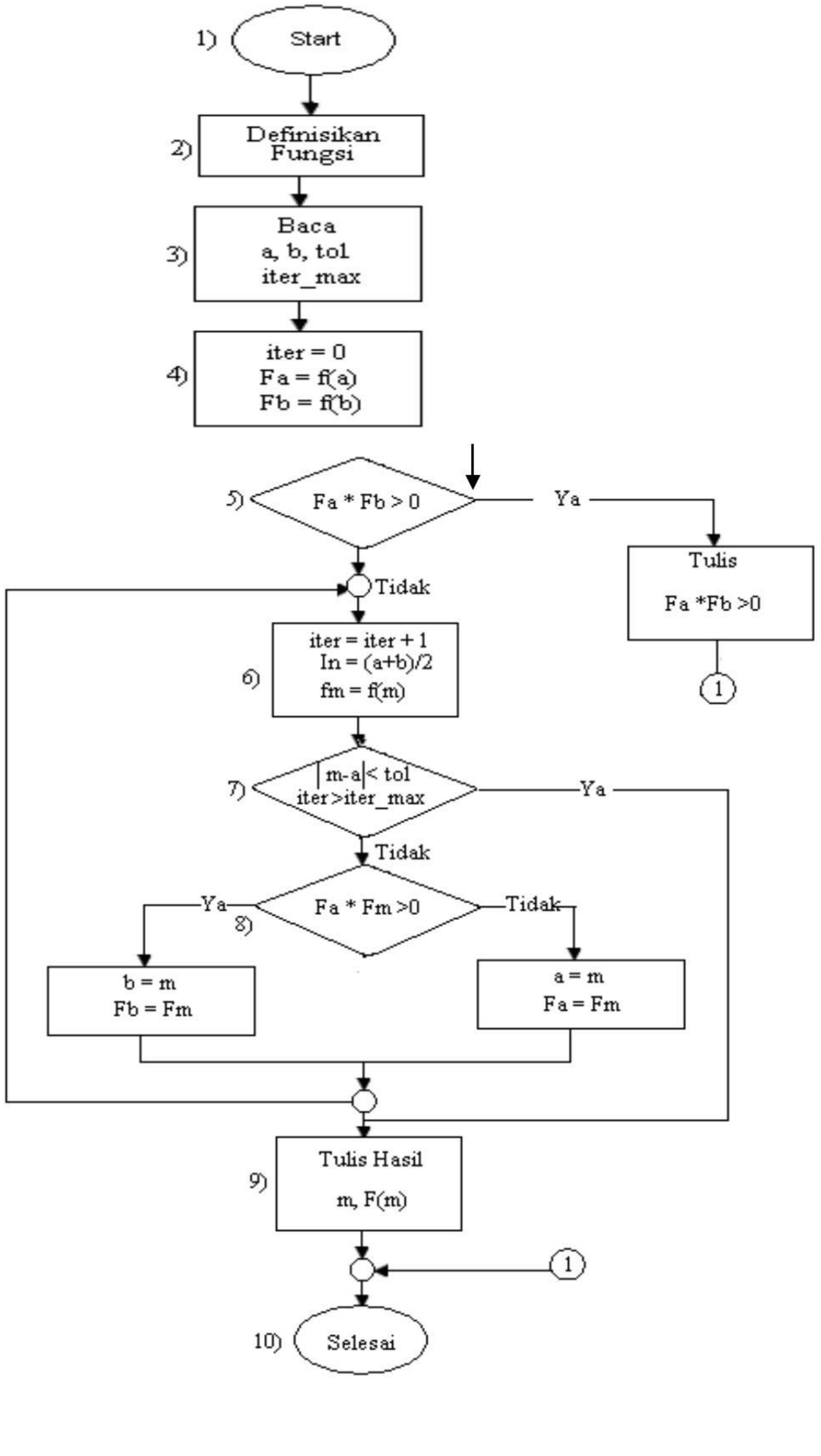
3.Algoritma Program Metode Biseksi

1. Tentukan a, b, toleransi dan jumlah iterasi maksimum.
2. Periksa apakah f(a) x f(b) > 0, jika ya keluar dari program karena pada solusi yang diberikan tidak terdapat akar persamaan.
3. Hitung nilai m = $(a+b)/2$
4. Jika nilai mutlak (b-a) < toleransi tuliskan m sebagai hasil perhitungan dan akhiri program, jika tidak lanjutkan kelangkah selanjutnya. Jika jumlah iterasi > iterasi maksimum akhiri program.
5. Jika f(a) x f(b) < 0, maka b = m, jika tidak a = m
6. Kembali ke langkah c

4.Algoritma Program Metode Regulasi Falsi

1. Tentukan a, b, toleransi dan jumlah iterasi maksimum.
2. Periksa apakah f(a) x f(b) > 0 jika ya keluar dari program
3. Hitung nilai m = $a - f\,(b)\ x\ (b - a) / \left[f\,(b) - f\,(a) \right]$
4. Jika nilai mutlak (m-a) < toleransi tuliskan m sebagai hasil perhitungan dan akhiri program, jika tidak lanjutkan kelangkah selanjutnya.
5. Jika jumlah iterasi > iterasi maksimum
   akhiri program Kembali kelangkah c.

A.Flowchart Metode Biseksi



B. Flowchart Metode Regulasi Falsi

Sama dengan Flowchart Metode Biseksi, kecuali pada langkah ke 6 digantikan dengan :

$$iter = iter + 1$$

$$m = a - \frac{F_b * (b - a)}{(F_b - F_a)}$$

$$F_m = F(m)$$

1. Program Metode Biseksi

soal: tan (x) – x – 0,5 = 0

```
{Program Metode Biseksi}
Daftar Variabel
        a= batas bawah
        b= batas atas
        tol       = toleransi
        max-iter = jumlah iterasi maksimum}
Var
        A, m, b, F_a, F_m, F_b, tol     : real;
        Max_iter, it                    : integer;
        Epsilon                         : real;
Function f(x : real)                    : real;
Begin
        F : = sin (x) / cos (x) – x – 0,5;
End;
Begin
        Write (‘batasbawah              = ‘); read (a);
        Write (‘batasatas               = ‘); read (b);
        Write (‘toleransi               = ‘); read (tol);
        Write (‘jumlahiterasi max       = ‘); read (max_iter);

        It : = 0;
        F_a : = f (a);
        F_b : = f (b) ;
        If (f_a*f_b> 0) then writeln (‘nilaiF(a) x F(b) > 0 ‘);
        Else
        Begin
                Write (‘It. a     m        b         f(a)      f(b)’);
                Written (‘ abs [f(b) – f(a)] / 2’);
                Epsilon : = tol + 1
                While ((it <max_iter) and (epsilon >tol)) do
                Begin
                        It : = it + 1;
                        m : = (a + b) / 2 ;
                        F_m : = f (m);
                        Write (it : 3,’   ‘, a : 8 : 5,’    ‘, m : 8 : 5,’    ‘,b : 8 : 5,’ ‘);
                        Writeln (F_a : 8 : 5,’ ‘, F_m : 8 : 5,’ ‘, abs (F_b – F_a) /2:4);
                        Epsilon : = abs (m – a) ;
                        If (F_a * F_m< = 0) Then
                        Begin
                                B : = m ;
```

```
                    F_b : = F_m;
                End
                Else
                Begin
                    a : = m;
                    F_a : = F_m ;
                End;
            End;
            If (it < = max_iter) then
            Begin
                Writeln ('Toleransi terpenuhi');
                Writeln (' hasil akhir = ', m : 9 : 7);
            End
            Else writeln ('toleransi telah terpenuhi ');
        End;
End.
```

Ambil :

Batas bawah = 0
Batas atas = 1
Toleransi = 0,0000001
Jumlahiter_max = 30

Program Regulasi Falsi sama dengan Biseksi, hanya rumus menentukan m yang diganti seperti pada Flowchart.

C. Metode Iterasi

Bentuk lain dari metode penentuan akar persamaan adalah dengan memulai suatu perkiraan harga dari akar persamaan. Mulai x_0 (perkiraan awal), x_1, x_2, ... x_k, akhirnya konvergen pada λ, yaitu x_k yang cukup dekat pada λ sesuai dengan tingkat kecermatan yang diinginkan. (metode iterasi tunggal).
Dalam hal ini fungsi f(x) ditulis sbb :

$f(x) = x - g(x) = 0$, sehingga $\lambda = g(\lambda)$ .... (1)

kemudian

$x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, 2, ...$ (2)

(1) dan (2) rumusan iterasi

Contoh

$x^3 - 3x - 20 = 0$

solusi : rubah persamaan dalam bentuk f(x) = x – g(x) sebagai berikut dengan empat cara :

1) $x - (3x + 20)^{1/3} = 0$	$x_0 = 10$
2) $x - (x^3 - 20) / 3 = 0$	$x_1 = 3{,}68$
3) $x - 20 / (x^2 - 3) = 0$	$x_2 = 3{,}14$
4) $x - (3 + 20 / x)^{1/2} = 0$	$x_3 = 3{,}08$

$X_{k+1} = (3x_k + 20)^{1/3}$, $k = 0, 1, 2, ...$

Perkiraan awal $x_0 = 5$, diperoleh :

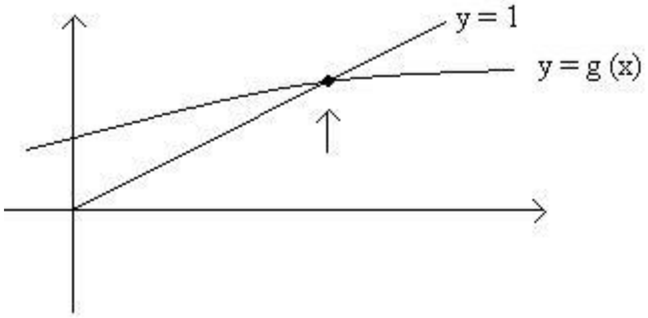
$X_0 = 5$

$X_1 = (3*5 + 20)^{1/3} = 3{,}2771$

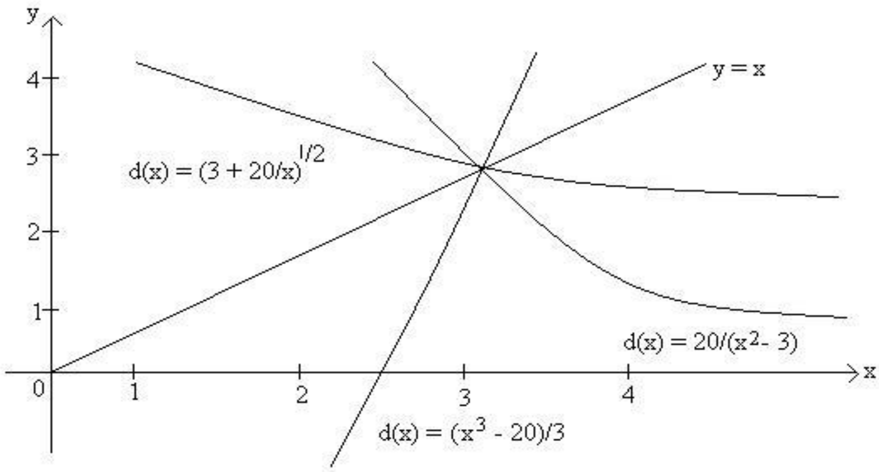
$X_2 = (3*3{,}2771 + 20)^{1/3} = 3{,}1008$
$X_3 = (3*3{,}1008 + 20)^{1/3} = 3{,}0830$
$X_4 = (3*3{,}0830 + 20)^{1/3} = 3{,}0811$
$X_5 = (3*3{,}0811 + 20)^{1/3} = 3{,}0809$
$X_6 = (3*3{,}0809 + 20)^{1/3} = 3{,}0809$
$X_7 = (3*3{,}0809 + 20)^{1/3} = 3{,}0809$

Karena x sudah konstan pada harga 3,0809

Secara grafik :



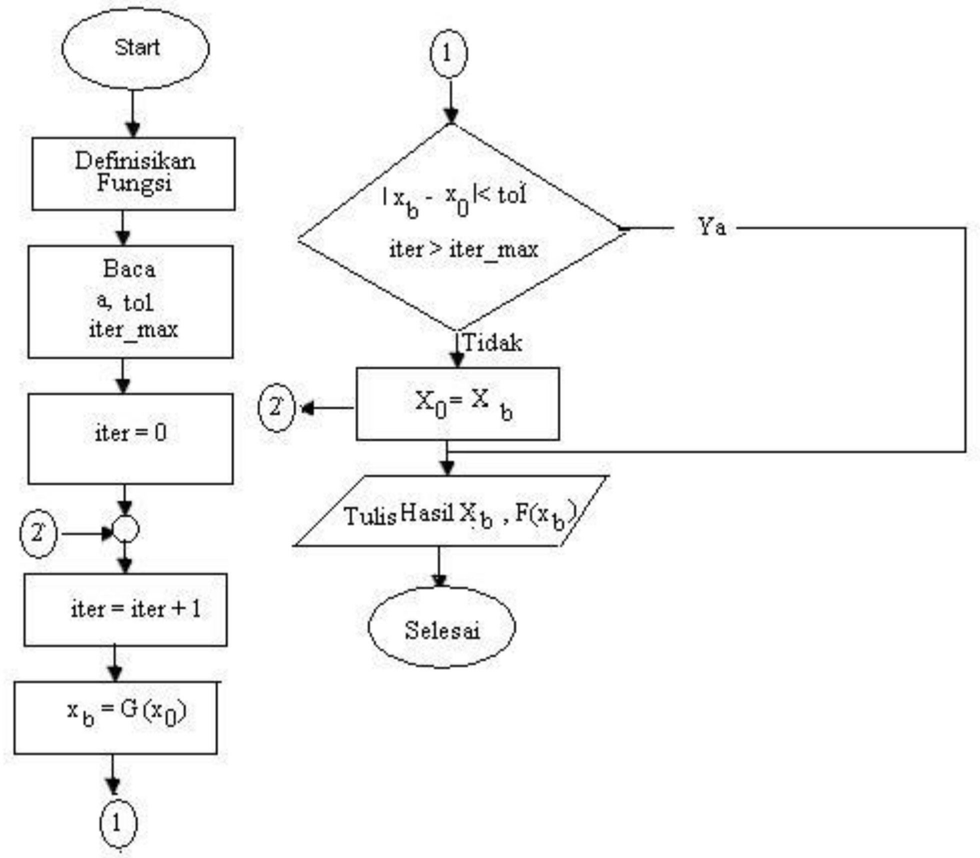
Dari ketiga persamaan untuk mendapatkan akar persamaan menghasilkan grafik sebagai berikut :



Algoritma Program Iterasi

1. Tentukan x_0, toleransi, dan jumlah iterasi maksimum
2. Hitung $x_{baru} = g(x_0)$
3. Jika nilai $(x_{baru} - x_0) <$ toleransi tuliskan x_{baru} sebagai hasil perhitungan, jika tidak lanjutkan kelangkah berikutnya.
4. Jika jumlah iterasi > iterasi maksimum akhiri
   program $X_0 = x_{baru}$ dan kembali kelangkah
   (b)

Flowchart

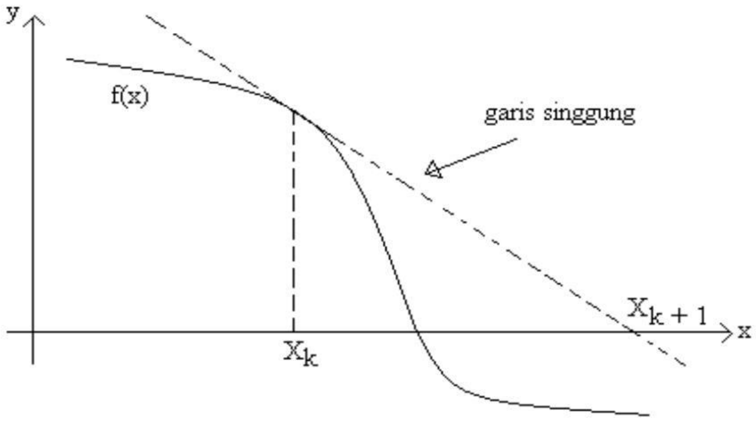


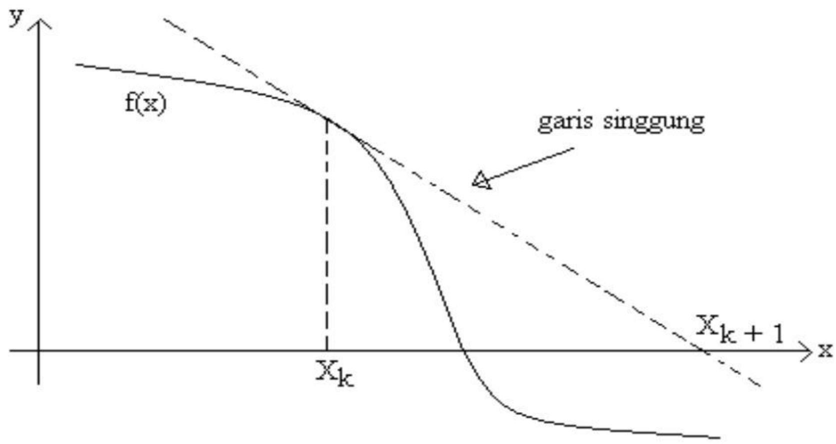
Program Iterasi
{Program iterasi untuk fungsi
e^x + x^2 -3x - 2=0
x-(e^x+x^2-2)/3=0
dengan g(x)= (e^x+x^2-2)
DaftarVariabel
Xo = hargaawal
tol = toleransi
max_iter =jumlahiterasimaksimum}
Var
xo,xb,tol,x :real;
max_iter,it :integer;
epsilon :real;
function g(x:real):real;
begin
g:= (x*x+exp(x)-2)/3;
end;
Begin
write('hargaawal =');read(xo);
write('toleransi =');read (tol);
write('jumlahiterasi max =');read(max_iter);
it:=0;
writeln(' it x g(x) f(x) ');
epsilon :=tol+1;
while(it<max_iter) and (epsilon>tol) Do

```
     Begin
it :=It+1;
xb := g(xo);
epsilon := abs (x-xo);
writeln( it:3,' ',xo:8:5,' ',xb:8:5,'   ',epsilon:4);
xo:=xb;
    End;
if (it <=max_iter)Then
    Begin
writeln ('Toleransi terpenuhi');
writeln('Hasil akhir =',xb:9:7);
    End
     Else writeln ('toleransi tidak terpenuhi');
readln;
     End.
```

3.4 Metode Newton – Raphson

Metode yang lebih baik dalam memilih g’(x) adalah dengan membuat garis singgung dari f(x) untuk nilai x yang dipilih , dan dengan menggunakan besaran x dari perpotongan garis singgung terhadap sumbu diperoleh nilai x baru.





Dari diagram ini terlihat tangensial (garis singgung) f(x) adalah :

$$f'(x) = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{(x_k - x_{k+1})}$$

$$f'(x) = \frac{f(x_k)}{(x_k - x_{k+1})}$$

sehingga

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Contoh :

f (x) = x^3 – 3x – 20

f'(x) = $3x^2$ – 3

dengan demikian

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x^3_k - 3x_k - 20}{(3x^2_k - 3)}$$

perkiraan awal x_0 = 5

x_0 = 5

x_1 = 3,75

x_2 = 3,2018

x_3 = 3,0859

x_4 = 3,0809

x_5 = 3,0809

Konvergensi Metode Newton – Raphson

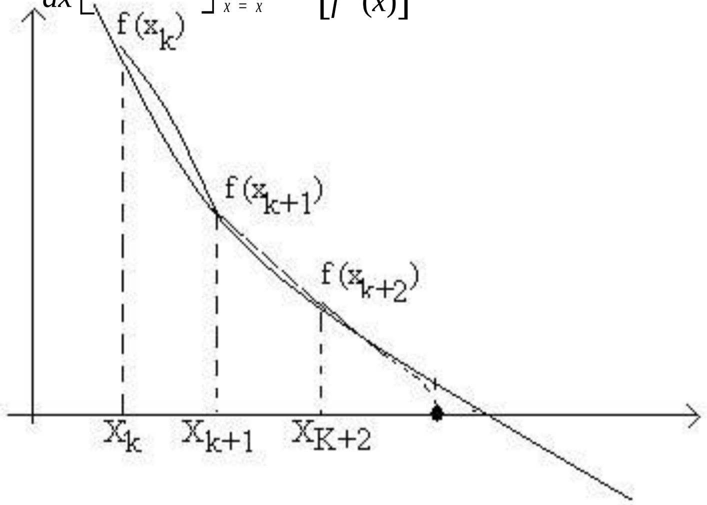
Memperhatikan rumusan

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad k = 0,1,2,.....$$

dan syarat konvergensi [g' (x)] < 1

berarti :

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left[x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right]_{x=x} = \frac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2} < 1$$



Apabila nilai turunan fungsi susah untuk dicapai, nilai ini dapat didekati dengan harga – harga fungsi dari hasil dua tahapan proses sebelumnya. Jika nilai x_k dan x_{k+1} telah didapat maka :

$$\frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{f(x_{k+1})} = \frac{x_{k+1} - x_k}{f(x_k) - f(x_{k+1})} \qquad \textit{atau}$$

$$x_{k+2} = x_{k+1} - f(x_{k+1}) \frac{x_{k+1} - x_k}{f(x_{k+1}) - f(x_k)}$$

(jahiding : 2010)

Prinsip: Buat garis singgung kurva f(x) di titik di sekitar akar fungsi.Titik tempat garis singgung itu memotong garis nol ditentukan sebagai akar fungsi. Dalam melakukan penghitungan dengan menggunakan metode ini maka perhitungan dapat dihentikan ketika kesalahan relatif semu sudah mencapai / melampaui batas yang diinginkan (fachrudin : 2009).

Algoritma Program Newton – Raphson

Tentukan x_0, toleransi dan jumlah iterasi maximum

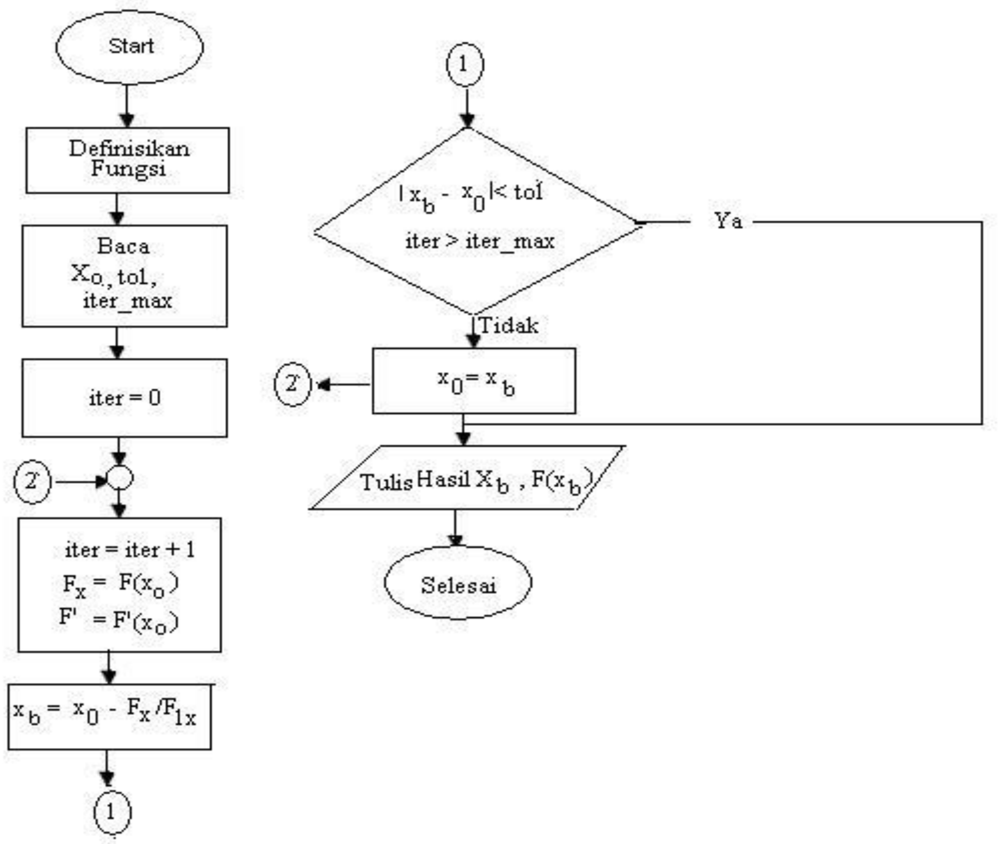
Hitung $x_{baru} = x_k - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Jika nilai mutlak ($x_{baru} - x_0$) < toleransi tuliskan x_{baru} sebagai hasil perhitungan, jika tidak lanjutkan kelangkah berikutnya.

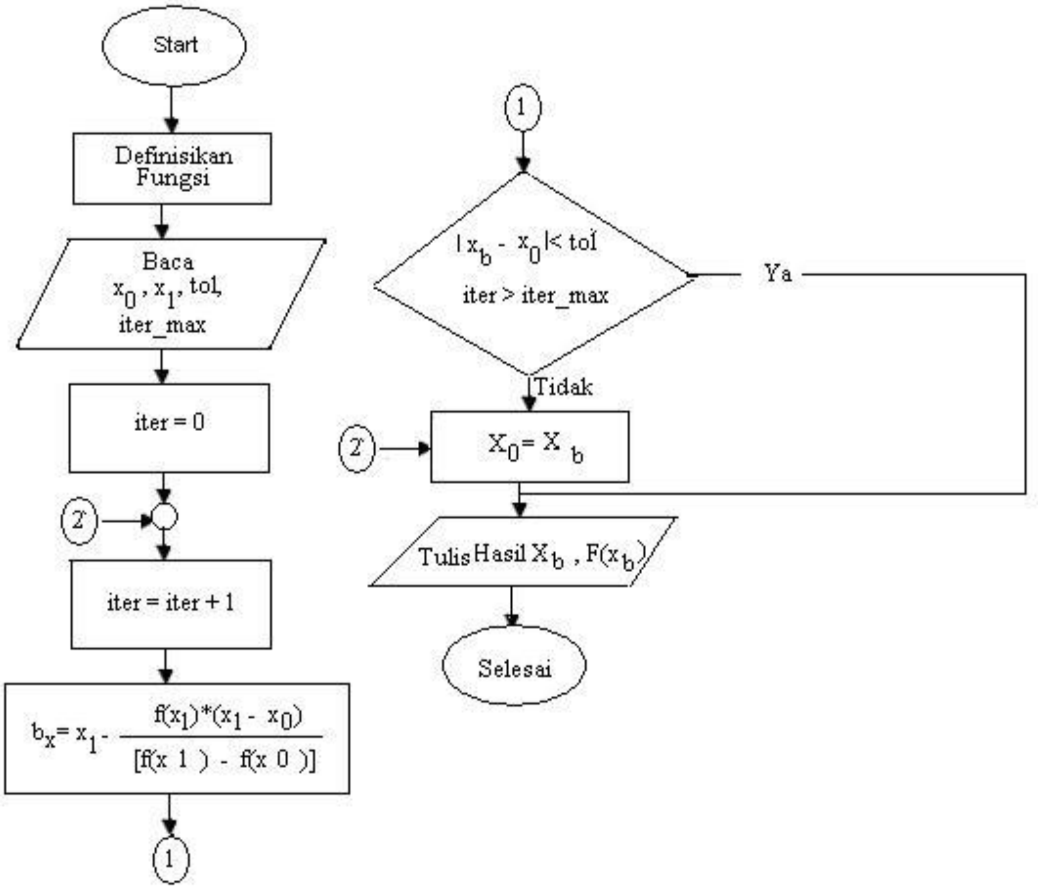
Jika jumlah iterasi > iterasi maksimum akhiri

program x = x_{baru}, dan kembali ke langkah b

Flowchart



Flowchart Metode SECANT



{Program Iterasi untuk fungsi}

$e^x + x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow x - (e^x + x^2 - 2) / 3 = 0$

dengan $g(x) = (e^x + x^2 - 2) / 3$

DaftarVariabel

X_0	= hargaawal
Tol	= Toleransi
Max_iter	= Jumlahiterasi maximum}

Var

```
    X0, Xb, tol      : real;
    Max_iter, it     : integer;
    Epsilon : real;
Function g (x : real ) : real;
Begin
    g : = (x*x + eps^x – 2) / 3;
end;
Begin
    Write (‘,Harga awal              =’); read (x0); =’);
    Write (‘,Toleransi               read (x0); =’); rea
    Write (‘,Jumlahi terasi max      (max_iter);
    It : = 0 ; Writeln (‘ it x                                f(x)’);
    g(x) Epsilon : = tol + 1;
    While (it < = max_iter) and (epsilon >tol )); do
    Begin
        It : = it + 1;
```

```
                    X0 : = g (x0);
                    Epsilon : = abs ( xb – x0);
  Writeln (it : 3,'                              ',x0 : 8 : 5,' ', xb : 8 : 5,'',epsilon : 4);
                    X0 : = Xb ;
          End;
          If (it < = max_iter) Then
          Begin
                    Writeln ('Toleransi terpenuhi');
                    Writeln ('hasil akhir = ', xb : 9 : 7);
          End;
          Else writeln (' Toleransi tidak terpenuhi ');
End.
```

Catatan

Ambil

Hargaawal	= 1
Toleransi	= 0,0000001
Jumlahiterasi max	= 20

{ Program Newton –Raphson}

```
Daftarvariabel
          X0              = Hargaawal
          Tol             = Toleransi
          Max_iter        = MaksimumIterasi}
Var
          X0, Xb, tol     : real;
          Max_iter, it    : integer;
          Epsilon         : real;
Function f(x : real ) : real;
Begin
          f : = x*x – 3*x + exp (x) – 2;
end;
function f1 (x : real)    : real;
Begin
          F1 : = 2*x-3 + exp (x);
End ;
Begin
          Write (', Harga awal                    =') ; read (x0);
          Write (', Toleransi                     =') ; read (tol);
          Write (', Jumlah iterasi max            =') ; read (max_iter);
          It : = 0;
          Writeln ('It     x        f(x)     epsilon ');
          Epsilon         : = tol + 1;
          While ( (' it < = max_iter) and (epsilon >tol));
          Do
          Begin
                    It        : = it + 1
                    Xb        : = x0 – f(x0) / f1 (x0);
                    Epsilon : = abs (xb – x0);
                    Writeln (it : 3,'',xb : 8 : 5,'', f(xb) : 8 : 5,'',epsilon : 4);
                    X0 : = xb ;
          End;
```

```
        If ( it< = max_iter) then
        Begin
                Writeln ('Toleransi terpenuhi ');
                Writeln ('Hasil akhir = ', xb : 9 : 7);
        End;
        Else writeln ('Toleransi tidak terpenuhi ');
End.
```

2.2 SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Bentuk Umum sistem persamaan liniear dan linear

1. Sistem persamaan linear dengan 2 variabel / SPL 2 variabel

$a_1 x + b_1 y = c_1$

$a_2 x + b_2 y = c_2$

xdan y adalah variabel

$a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 \in R$

Cara menyelesaikannya dengan :

a. Metode Eliminasi
b. Metode Substitusi
c. Metode Campuran Eliminasi dan Substitusi
d. MetodeGrafik

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian dari SPL berikut

$x - y = 2$

$3x - 7y = -2$

1. Eliminasi

$$\begin{array}{lll} x - y = 2 & x3 & 3x - 3y = 6 \\ 3x - 7y = -2 & x1 & 3x - 7y = -2 \\ \hline & & 4y = 8 \\ & & y = 2 \end{array} \; -$$

$$\begin{array}{lll} x - y = 2 & x7 & 7x - 7y = 14 \\ 3x - 7y = -2 & x1 & 3x - 7y = -2 \\ \hline & & 4x = 16 \\ & & x = 4 \end{array} \; -$$

2. Substitusi

Dari persamaan (1) y = x – 2 disubstitusikan kepersamaan (2) diperoleh

3x – 7(x – 2) = -2

3x – 7x + 14 = -2

-4x = -16

x = 4

Untuk x = 4 disubstitusikan kepersamaan (1)

4 – y = 2

y = 4 – 2

= 2

3. Campuran Eliminasi dan Substitusi

$x - y = 2 \; x3 \;\; 3x - 3y = 6$

$3x - 7y = -2 \; x1 \;\; 3x - 7y = -2$

4y = 8

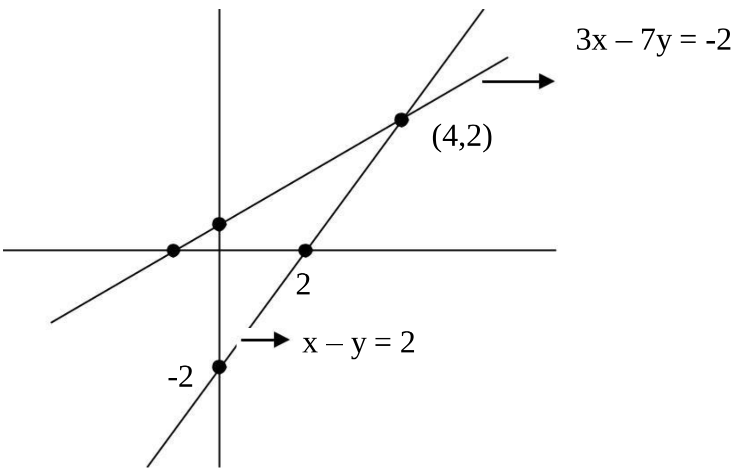
y = 2

y = 2 disubstitusikan kepersamaan (1)

x – 2 = 2

x= 4

4. Grafik



Dengan grafik dapat dilihat :

a. Jika kedua garis berpotongan pada satu titik (himpunan penyelesainnya tepat satu anggota)
b. Jika kedua garis sejajar, tidak mempunyai himpunan penyelesaian
c. Jika kedua garis berhimpit (himpuna npenyelesaiannya mempunyai anggota tak terhingga)

2. Sistem persamaan linear dengan 3 variabel / SPL 3 variabel

$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$
$a_2 x + b_2 y + c_2 y = d_2$
$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$

x, y, z adalah variabel

$a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , b_3 , c_1 , c_2 , c_3 , d_1 , d_2 , d_3 \in R$

Contoh :Tentukan himpunan penyelesaian dari SPL berikut :

$x + y - z = 3$
$2x + y + z = 5$
$x + 2y + z = 7$

Dengan Metode campuran Eliminasi dan Substitusi :

Misal dimulai dengan mengeliminasi z

(1) dan (2)

$x + y - z = 3$
$2x + y + z = 5$

3x + 2y = 8 .... (4)

(1) dan (3)

$2x + y + z = 5$
$x + 2y + z = 7$

--- −

x - y = -2............................(5)

(4) dan (5)

3x + 2y = 8	x 1	3x + 2y = 8

$x - y = -2 \quad \times 3 \quad 3x - 3y = -6$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; -$$

$5y = 14$

$y = 14/5$

$$\left.\begin{array}{ll} 3x + 2y = 8 \\ x - y = -2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \times 1 \\ \times 2 \end{array} \left|\begin{array}{l} 3x + 2y = 8 \\ 2x - 2y = -4 \end{array}\right.$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; +$$

$5x = 4$

$x = 4/5$

x = 4/5 dan y = 14/5 disubstitusi kepersamaan (1) :

x + y – z = 3

4/5 + 14/5 – z = 3

18/5 – z = 3

z = 18/5 – 3

z = 3/5

JadiHP : {4/5,14/5,3/5}

1. SISTEM PERSAMAAN LINEAR DAN KUADRAT

BentukUmum :

y = px + q

$y = ax^2 + bx + c$

p, q, a, b dan c $\in$ R

Cara menyelesaikannya :

1. Substitusi

   Substitusikan y = px + q ke $y = ax^2 + bx + c$

   Diperoleh :

   $px + q = ax^2 + bx + c$

   $ax^2 + (b-p)x + (c-q) = 0$

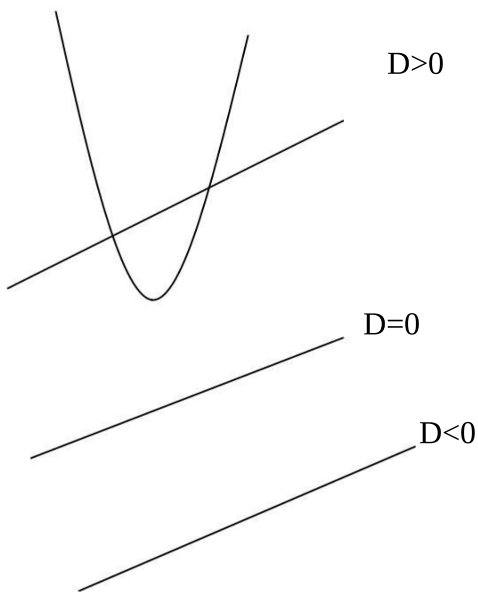
   dengan $D = (b-p)^2 – 4.a.(c-q)$

ada 3 kemungkinan himpunan penyelesainnya :

a. Jika D = 0 (parabola berpotongan dengan garis di satu titik)
b. Jika D >0 (parabola berpotongan dengan garis di dua titik)
c. Jika D < 0 (parabola dangaris tidak berpotongan)

2. Grafik

   Ada 3 kemungkinan :



Contoh :

Tentukan himpunan penyelesian dari :

$y = 2 - x$

$y = x^2$

jawab :

Substitusikan $y = 2 - x$ ke $y = x^2$ diperoleh :

$x^2 = 2 - x$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x - 1)(x + 2) = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (1)^2 - 4.(1).(2) = 1 + 8 = 9$

$D > 0$ (ada 2 penyelesaian)

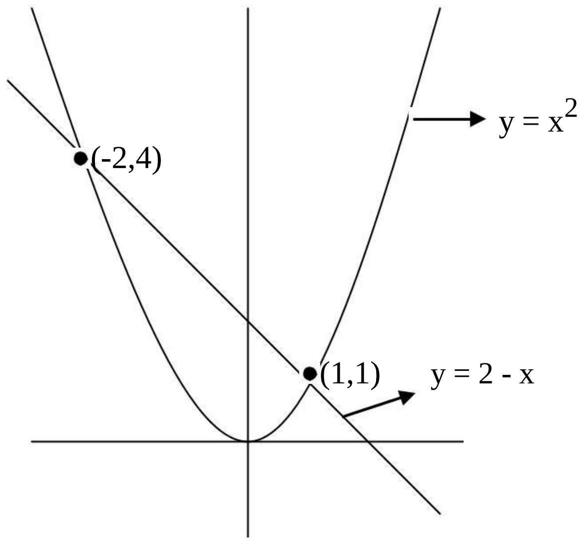
$x = 1$ atau $x = -2$

$x = 1$ disubstitusikan ke $y = 2 - x = 2 - 1 = 1$

$x = -2$ disubstitusikan ke $y = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

Jadi himpunan penyelesaian {(1,1),(-2,4)}

Dengan grafik dapat digambarkan sebagai berikut :



2. SISTEM PERSAMAAN KUADRAT - KUADRAT

BentukUmum :

$y = ax^2 + bx + c$

$y = px^2 + qx + r$

Cara menyelesaikannya :

1. Substitusi

   Persamaan (1) disubstitusikan kepersamaan (2) diperoleh :

   $(a - p)x^2 + (b - q)x + (c - r) = 0$ dengan

   $D = (b - q)^2 - 4.(a - p).(c - r)$

   Kemungkinan penyelesaiannya :

   a. Jika $D > 0$ (parabola saling berpotongan di dua titik)
   b. Jika $D = 0$ (parabola saling berpotongan di satu titik)
   c. Jika $D < 0$ (parabola tidak saling berpotongan)

1. Grafik

   Dengan menggambar kedua parabola dalam satu sistem koordinat

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian dari

$y = x^2$

$y = 8 - x^2$

Jawab :

Substitusikan (1) ke (2)

$x^2 = 8 - x^2$

$2x^2 - 8 = 0$

$x^2 - 4 = 0$

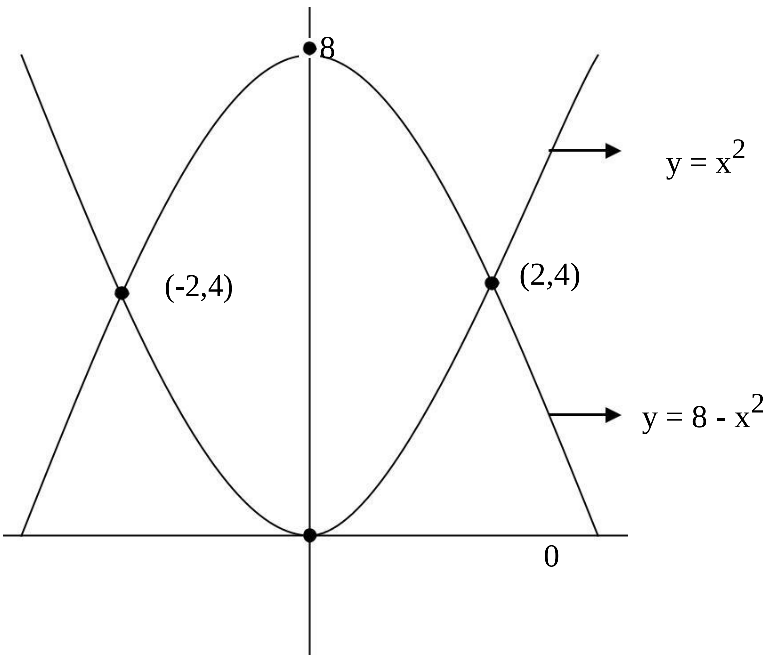
$(x - 2)(x + 2) = 0$

$x = 2$ atau $x = -2$

$x = 2$ diperoleh $y = 2^2 = 4$

$x = -2$ diperoleh $y = (-2)^2 = 4$

JadiHP : {(2,4) , (-2,4)}



3. MERANCANG MODEL MATEMATIKA YANG BERKAITAN DENGAN SPL

Contoh :

Sepuluh tahun yang lalu umur kakek enam kali umur adikku. Lima tahun yang akan datang jumlah umur kakek dan adikku sama dengan 93 tahun. Jika umur nenek lebih muda 6 tahun dari kakek. Berapa umur nenek sekarang.

Jawab :

Misal umur kakek sekarang adalah x

Umur adikku sekarang adalah y

Diperoleh persamaan :

a. $x - 10 = 6(y - 10)$

   $x - 6y = -50$ .... (1)

b. $(x + 5)+(y + 5) = 93$

   $x + y + 10 = 93$

   $x + y = 83$..................(2)

   Eliminasi persamaan (1)dan(2)

   $x - 6y = -50$

   $x + y = 83$

   $-7y = -133$

   $y = 19$

   $x + y = 83$

   $x = 83 - 19 =$

   64

Contoh :

Diketahui $y = px - 14$ dan $y = 2x^2 + 5x - 12$, tentukan batas-batas p supaya

a. Berpotongan di 2 titik
b. Bersinggungan
c. Tidak berpotongan maupun bersinggungan

Jawab :

$y = px - 14$ substitusikan ke $y = 2x^2 + 5x - 12$

diperoleh :

$2x^2 + 5x - 12 = px - 14$

$2x^2 + (5 - p)x + 2 = 0$

$D = (5 - p)^2 - 4.2.2$

$= 25 - 10p + p^2 - 16$

$= p^2 - 10p + 9$

a. Berpotongan di dua titik ($D > 0$)

$p^2 - 10p + 9 > 0$

$(p - 1)(p - 9) > 0$

$p < 1$ atau $p > 9$

b. Bersinggungan di satu titik ($D = 0$)

$p^2 - 10p + 9 = 0$

$(p - 1)(p - 9) = 0$

$p = 1$ atau $p = 9$

c. Tidak berpotongan dan menyinggung ($D < 0$)

$p^2 - 10p + 9 < 0$

$(p - 1)(p - 9) < 0$

$1 < p < 9$

DAFTAR PUSTAKA

Tim Matematika SMA, 2004. **Matematika 1 Untuk SMA Kelas X**, Jakarta :

PT. Galaxy Puspa Mega.

SartonoWirodikromo, 2006. **Matematika untuk SMA Kelas X**, Jakarta :PenerbitErlangga.

MGMP Matematika Kota Semarang, 2007.**LKS Matematika SMA / MA**, Semarang : CV. JabbaarSetia.