

ANÁLISIS DE SERIES DE TIEMPO

ESTADISTICA
III



Francisco Sánchez Villarreal

2021

METODOS DESCRIPTIVOS

Introducción.

Una particularidad del ser humano es la de ser conciente del tiempo. La sucesión de eventos que se dan en su vida personal o en el ambiente que le rodea y la forma como estos se relacionan le ha permitido desarrollar los conceptos de presente, pasado y futuro, pero también otras sutilezas como el que hubiera pasado ante la presencia o ausencia de un factor influyente. No sólo eso, sino que lo que puede pasar en el futuro ante la presencia o ausencia de un factor. Explicar el pasado y predecir el futuro es motivo de constante reflexión y estudio desde los orígenes de la humanidad. Esta preocupación dio lugar al pensamiento mágico y en las comunidades primitivas los sacerdotes o sacerdotisas ocupaban un papel preponderante en la interpretación de eventos que asociaban a favor o en contra del futuro de los gobernantes. Oráculos como el de la ciudad de Delfos en la antigua Grecia tienen un importante papel en la historia. Hay que admitir que en la actualidad los astrólogos y adivinos no han perdido su status y personas de todos los niveles económicos y culturales recurren frecuentemente a las más diversas formas de adivinación, desde las cartas del Tarot y los mapas astrales hasta los residuos de café. La incertidumbre se asocia tanto a problemas muy íntimos como a situaciones más mundanas. Es motivo de preocupación del hombre de la calle tanto como de los equipos de estrategia y planeación de empresas y gobiernos.

La ciencia enfrenta a las formas subjetivas de predecir el futuro con técnicas estadísticas unas muy sencillas y otras muy complejas. Algunas técnicas se pueden ubicar en el plano descriptivo y otras en el plano inferencial al considerar la presencia de una distribución de probabilidad. Todas desde luego pretenden minimizar los errores en los pronósticos y todas se apoyan en algunos principios fundamentales:

- Disponer de información acerca del pasado.
- La información debe ser cuantificable en alguna forma de datos asociados a intervalos en el tiempo.
- Se supone que existe cierta inercia en los fenómenos estudiados que se traduce en patrones que se repiten al menos parcialmente en el futuro.

Al analizar un grupo de datos referidos intervalos de tiempo en forma ordenada, lo cual constituye una serie de tiempo, es posible identificar algunos elementos o componentes en el patrón de una serie de tiempo:

- Tendencia
- Variaciones cíclicas

- Variaciones estacionales
- Variaciones irregulares o al azar.

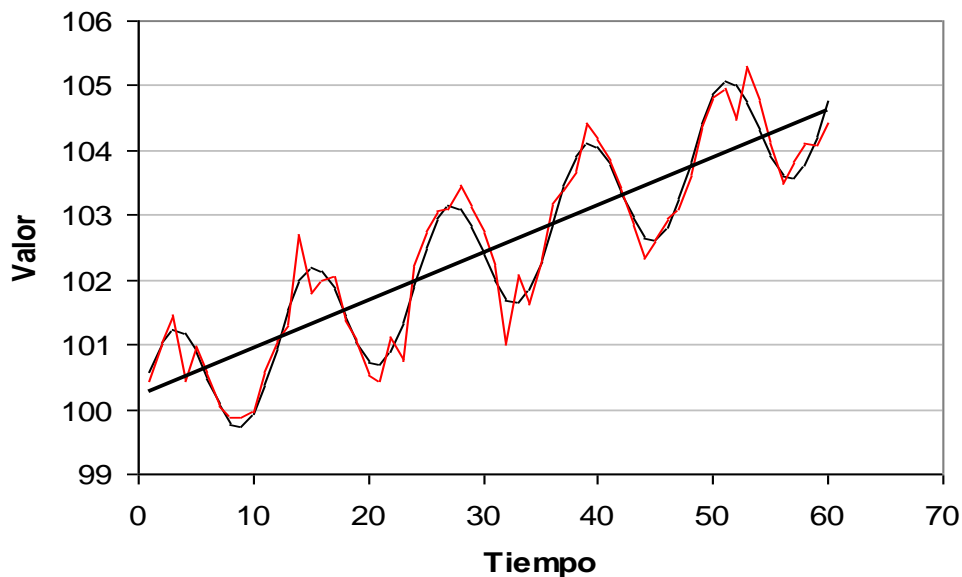
Tendencia (T). Se asocia a la dirección general que presenta la gráfica de una serie de tiempo. La tendencia puede manifestarse en forma de una recta o de una función más compleja.

Variaciones cíclicas(C). Se refiere a las oscilaciones de larga duración, usualmente años, alrededor de la tendencia. Los ciclos en economía se asocian a períodos de prosperidad o de depresión. Usualmente requieren de muchas observaciones para identificar su presencia.

Variaciones estacionales (E). Son oscilaciones de corta duración (meses, semanas o días) que suelen presentar fenómenos como las ventas de artículos deportivos o el consumo de energía eléctrica.

Variaciones irregulares o aleatorias (I). Son debidas a la presencia de factores no cuantificados o desconocidos que influyen en el comportamiento del fenómeno.

Serie de Tiempo



Error cuadrático medio

Una forma de evaluar la bondad de ajuste del modelo es a través del error cuadrático medio. Este se calcula como el promedio de los cuadrados de los residuales.

$$ECM = \frac{\sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2}{n}$$

MEDIAS MOVILES Y METODOS DE SUAVIZAMIENTO

Medias Móviles.

Uno de los procedimientos más simples de pronóstico consiste en tomar el promedio k períodos atrás y considerarlo como la mejor opción de pronóstico para el siguiente período. Transcurrido un período se incorpora la última observación al promedio y se desecha la última para calcular nuevamente la media. Si particularmente $k=1$, entonces la última observación se considera el mejor pronóstico para el subsiguiente.

$$\hat{Y}_{t+1} = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \dots + Y_{t-(k-1)}}{k} \quad \hat{Y}_{t+1} = \sum_{i=0}^{K-1} \frac{Y_{t-i}}{k}$$

Una forma alternativa de cálculo, en función de la media móvil anterior consiste en sumar la diferencia entre la más reciente observación y la última del cálculo anterior dividida entre el número de períodos considerados en la media móvil.

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + \frac{Y_t}{k} - \frac{Y_{t-k}}{k}$$

Si se calculan las medias móviles en forma consecutiva se observa un alisamiento de la serie. Entre mayor sea el valor de k, mayor efecto de alisamiento. Esta práctica de alisamiento o suavizamiento de series se usa con frecuencia a manera de filtro de las variaciones aleatorias.

Las medias móviles simples otorgan el mismo peso a todas las observaciones pasadas, pero también existe la posibilidad de otorgar una ponderación a las observaciones de modo que tienen mayor peso las observaciones más recientes. El problema para el investigador es la selección de los ponderadores.

$$\hat{Y}_{t+1} = \sum_{i=0}^{K-1} W_i Y_{t-i} \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^{K-1} W_i = 1$$

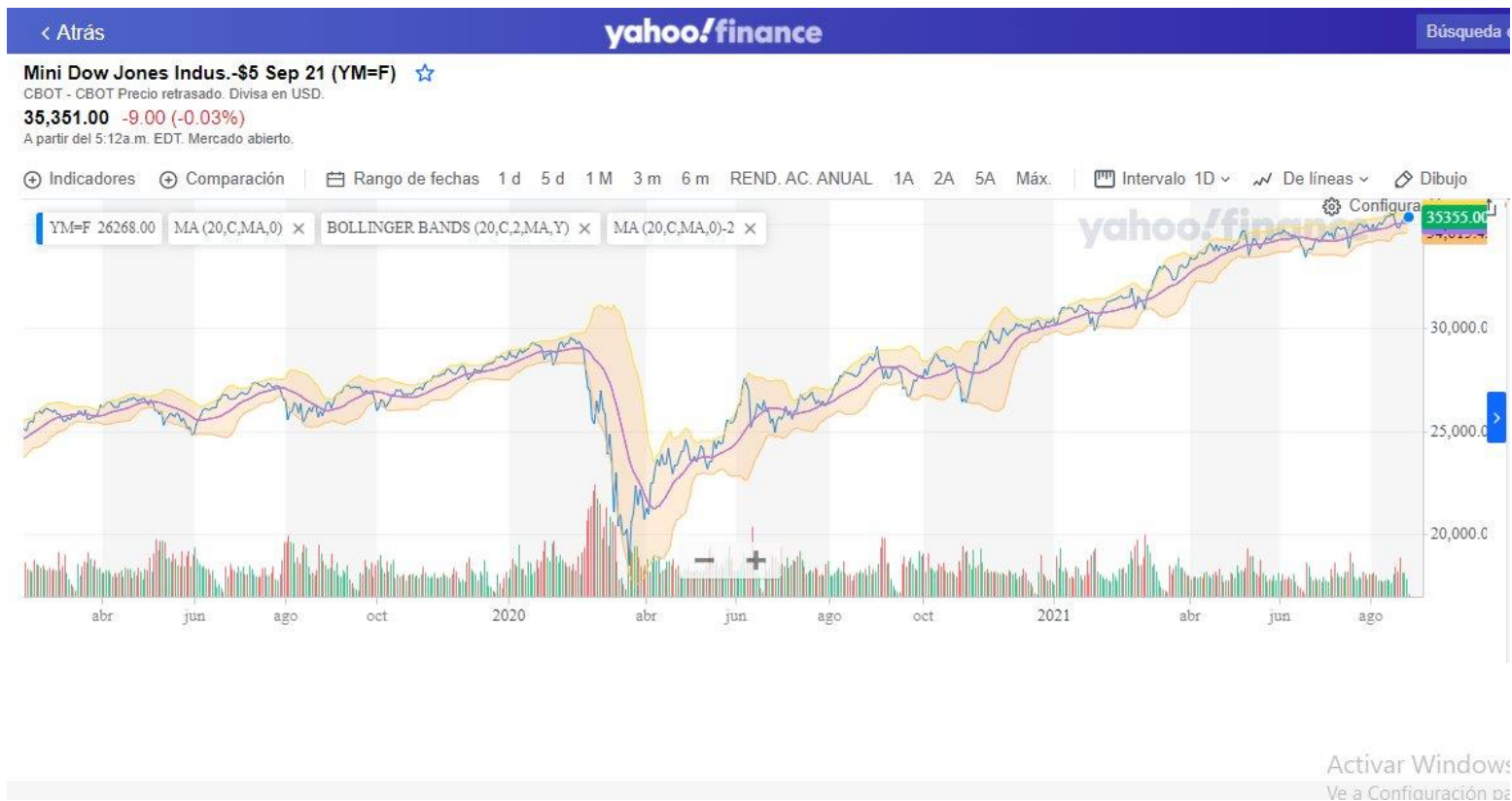
En el campo bursátil, el análisis técnico se orienta al estudio y predicción de las acciones del mercado, tales como movimientos de precios y tendencias. Entre sus principales herramientas se incluyen indicadores y diversos tipos de gráficas que incorporan las medias móviles en diferentes formas. Las gráficas de medias móviles son utilizadas para definir estrategias de mercado como las siguientes:

1.- Si la media móvil cruza al gráfico de precios de abajo a arriba es señal de venta.

2.- Si la media móvil cruza al gráfico de precios de arriba a abajo es señal de compra.

Una buena media móvil es la que actúa como soporte y resistencia del gráfico. Cuanto mayor sea el número de contactos entre la media y el gráfico, mejor será la media móvil elegida.

Considérese la serie de tiempo del Índice de Dow Jones con el valor al cierre del día y las medias móviles de y bandas de Bollinger Período febrero 2019 a agosto 2021. (Fuente: <http://yahoo.finance.com/>)



Suavizamiento Exponencial Simple.

Para comprender mejor como opera el suavizamiento exponencial simple, partamos de la fórmula de medias móviles en una serie estacionaria.

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + \frac{Y_t}{k} - \frac{Y_{t-k}}{k}$$

Ahora supóngase que por alguna razón Y_{t-k} no está disponible y que en su lugar se utiliza como aproximación \hat{Y}_t . Entonces la fórmula anterior quedaría expresada:

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + \frac{Y_t}{k} - \frac{\hat{Y}_t}{k}$$

Si se factoriza el pronóstico al tiempo t, la siguiente fórmula equivalente permite ver que el pronóstico al tiempo t+1 otorga un peso de 1/k y al pronóstico del período anterior (1-(1/K)).

$$\hat{Y}_{t+1} = \frac{1}{k}Y_t + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\hat{Y}_t$$

Ahora supóngase que la más reciente observación recibe una ponderación α , donde α está en el intervalo (0,1) y el pronóstico más reciente recibe una ponderación (1- α). El resultado es la fórmula de suavizamiento exponencial simple.

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha)\hat{Y}_t$$

Si se sustituye en forma iterativa hacia atrás en esta fórmula se observa la forma como participan las ponderaciones para las observaciones anteriores.

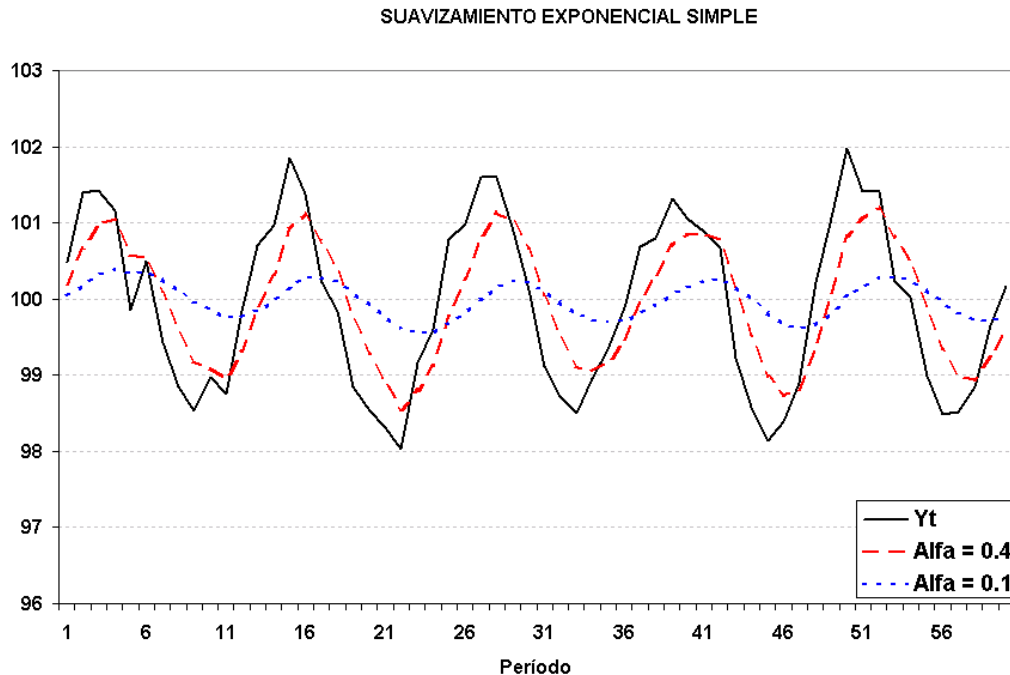
$$\begin{aligned}\hat{Y}_{t+1} &= \alpha Y_t + (1 - \alpha)(\alpha Y_{t-1} + (1 - \alpha)\hat{Y}_{t-1}) \\ &= \alpha Y_t + (1 - \alpha)\alpha Y_{t-1} + (1 - \alpha)^2 \hat{Y}_{t-1} \\ &= \alpha Y_t + (1 - \alpha)\alpha Y_{t-1} + (1 - \alpha)^2 (\alpha Y_{t-2} + (1 - \alpha)\hat{Y}_{t-2}) \\ &= \alpha Y_t + (1 - \alpha)\alpha Y_{t-1} + (1 - \alpha)^2 \alpha Y_{t-2} + (1 - \alpha)\hat{Y}_{t-2}\end{aligned}$$

La observación más reciente tiene una ponderación α y la anterior se reduce en una proporción (1- α), para formar una sucesión de valores decrecientes. Otra forma alternativa de expresar la fórmula de suavizamiento exponencial simple es la siguiente:

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + \alpha(Y_t - \hat{Y}_t)$$

En esta fórmula se puede apreciar el coeficiente α otorga mayor o menor importancia a la diferencia entre el pronóstico anterior y el valor observado. El coeficiente tiene un efecto análogo, pero en sentido inverso a la inclusión de más o menos observaciones en una media móvil. En la media móvil a medida que se

incluyen más observaciones se obtiene mayor suavizamiento. En el suavizamiento exponencial simple, a menor valor del coeficiente α , corresponde mayor suavizamiento. En este sentido Makridakis plantea que un valor de $\alpha=2/(k+1)$ es la mejor aproximación para hacer equivalente el suavizamiento exponencial simple a un procedimiento de medias móviles.



Suavizamiento Exponencial de Brown.

El suavizamiento exponencial simple adolece del problema de subestimar sensiblemente la serie si ésta presenta una tendencia creciente. El método de Brown utiliza un doble suavizamiento exponencial con el objeto de incorporar la presencia de la tendencia. La diferencia entre las dos series suavizadas es ponderada por dos coeficientes identificados como a_t y b_t . La predicción adopta la forma de una recta con a_t como ordenada al origen y b_t como la pendiente aplicada al número del período que se pretende pronosticar.

$$S'_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha) S'_{t-1} \quad \text{Suavizamiento exponencial simple}$$

$$S''_t = \alpha S'_t + (1 - \alpha) S''_{t-1} \quad \text{Doble suavizamiento exponencial simple}$$

$$a_t = 2S'_t - S''_t \quad \text{Ordenada al origen del pronóstico}$$

$$b_t = \frac{\alpha}{1 - \alpha} (S'_t - S''_t) \quad \text{Pendiente del pronóstico}$$

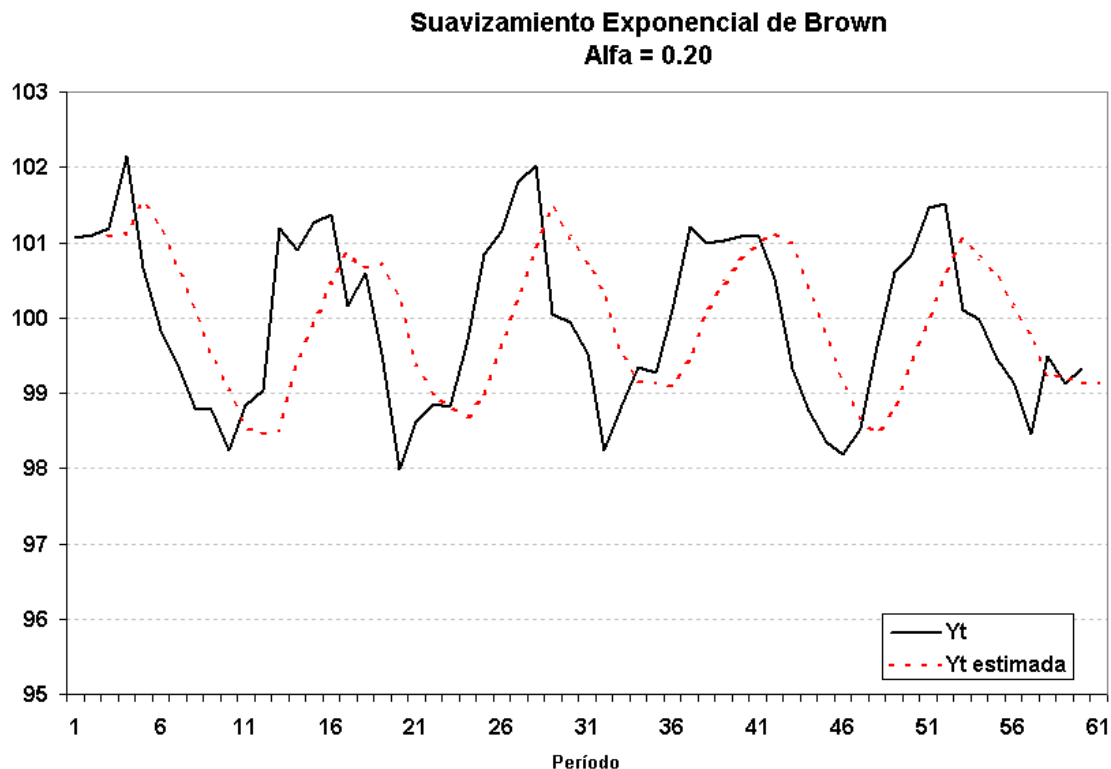
$$\hat{Y}_t = a_t - b_t m$$

Pronóstico m períodos adelante

A continuación se presentan los cálculos para la serie utilizada en el suavizamiento exponencial simple. En este caso se aplicó el parámetro Alfa = 0.20. Como valores iniciales para el suavizamiento simple y el doble se tomó la primera observación de la serie.

Alfa = 0.2						
Período t	Y_t	S'_t	S''_t	a_t	b_t	$a_{(t-1)} + b_{(t-1)}$
1	101.068	101.068	101.068			
2	101.096	101.074	101.069	101.078	0.00112	
3	101.184	101.096	101.074	101.117	0.00529	101.079
4	102.143	101.305	101.121	101.490	0.04613	101.122
5	100.664	101.177	101.132	101.222	0.01125	101.536
6	99.827	100.907	101.087	100.727	-0.04498	101.233
7	99.390	100.604	100.990	100.217	-0.09665	100.682
8	98.809	100.245	100.841	99.648	-0.14909	100.120
9	98.776	99.951	100.663	99.239	-0.17803	99.499
10	98.244	99.610	100.452	98.767	-0.21071	99.061
11	98.837	99.455	100.253	98.657	-0.19947	98.556
12	99.041	99.372	100.077	98.668	-0.17615	98.458

A continuación se presenta la gráfica de la serie completa, así como de los pronósticos.



Suavizamiento Exponencial de Holt .

Es un procedimiento usual en los medios de análisis financieros, es similar al de Brown, excepto que no aplica la fórmula de doble suavizamiento, sino un suavizamiento simple con el parámetro α y la tendencia se suaviza a partir de un parámetro adicional β . Ambos parámetros se asignan en forma externa sin depender de los datos de la serie, con lo cual se tiene mayor flexibilidad en el modelo. Para el cálculo utiliza tres ecuaciones:

$$L_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$$

$$\hat{Y}_{t+p} = L_t + pT_t$$

Donde

Y_t Es el valor de la serie original al tiempo t

L_t Es el valor suavizado de la serie.

α Es el parámetro de suavizamiento de la serie.

T_t Es la componente de tendencia suavizada.

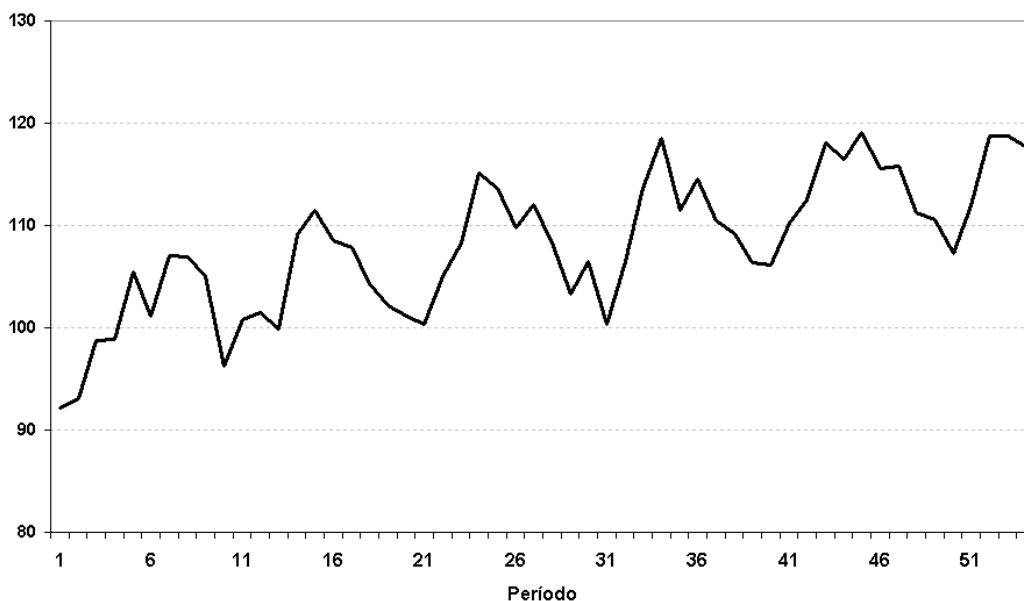
β Es el parámetro de suavizamiento de la tendencia.

p Es el período de pronóstico.

Considérese como ejemplo de aplicación la siguiente serie que presenta un comportamiento estacional que parece repetirse cada 10 períodos y una clara tendencia al alza.

1	92.2	13	99.9	25	113.6	37	110.5	49	110.6
2	93.1	14	109.1	26	109.8	38	109.2	50	107.3
3	98.7	15	111.5	27	112.1	39	106.4	51	111.9
4	98.9	16	108.5	28	108.3	40	106.1	52	118.7
5	105.5	17	107.8	29	103.3	41	110.2	53	118.7
6	101.1	18	104.3	30	106.5	42	112.5	54	117.7
7	107.1	19	102.2	31	100.3	43	118.1		
8	106.9	20	101.1	32	106.5	44	116.5		
9	105.0	21	100.3	33	113.6	45	119.1		
10	96.3	22	105.0	34	118.5	46	115.6		
11	100.8	23	108.3	35	111.5	47	115.8		
12	101.5	24	115.1	36	114.5	48	111.2		

Serie de Tiempo Estacional con Tendencia



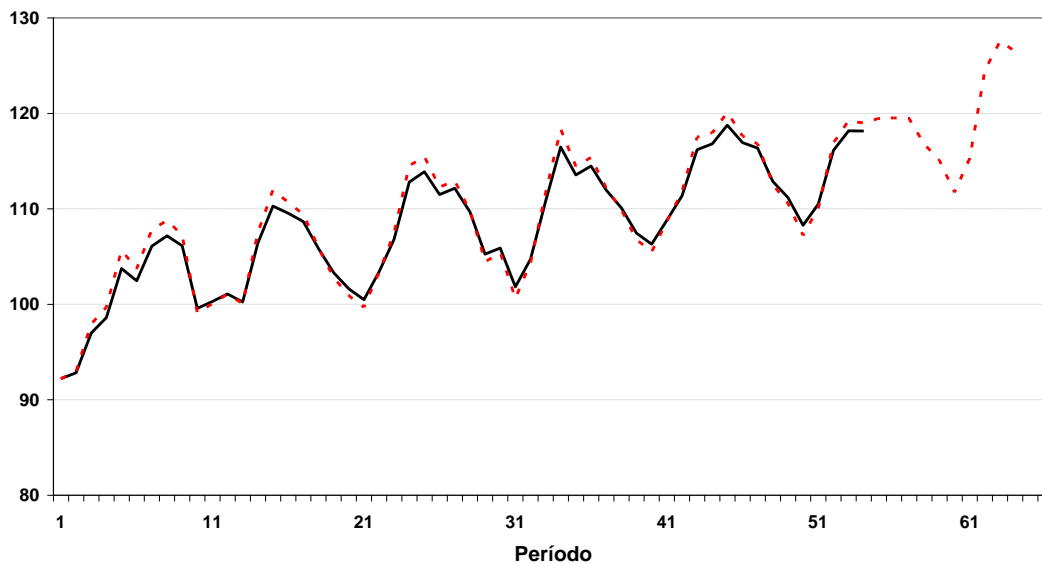
Para el arranque del procedimiento se asigna el valor de la primera observación a $L_1 = 92.2$ como consecuencia Y_1 estimada coincide con la observación. Un aspecto importante es la selección de los valores de los parámetros de suavizamiento. En este caso los valores utilizados son $\alpha = 0.7$ y $\beta = 0.2$. Para las observaciones subsiguientes se aplican las fórmulas iterativas referidas anteriormente. A continuación se reproducen los cálculos asociados a las primeras 10 observaciones.

Período t	Y _t	L _t	T _t	Y t est	e ² Residual
1	92.2	92.2000	0.0000	92.2	0.00000
2	93.1	92.8300	0.1260	93.0	0.02074
3	98.7	96.9768	0.9302	97.9	0.62891
4	98.9	98.6021	1.0692	99.7	0.59486
5	105.5	103.7514	1.8852	105.6	0.01866
6	101.1	102.4610	1.2501	103.7	6.81764
7	107.1	106.0833	1.7245	107.8	0.50106
8	106.9	107.1724	1.5974	108.8	3.49613
9	105.0	106.1309	1.0697	107.2	4.84266
10	96.3	99.5702	-0.4564	99.1	7.91726

El error cuadrático medio alcanza el valor 1.8777 y el grado de ajuste se puede observar en la siguiente gráfica. Para fines de pronóstico en nuestra experiencia funciona mejor una ligera modificación de la fórmula de Holt al desplazar la componente de tendencia pues así se preserva cierto efecto de la estacionalidad.

$$\hat{Y}_{t+p} = L_t + pT_{t-S+p}$$

Suavizamiento Exponencial de Holt



Suavizamiento Exponencial de Winters .

El procedimiento de suavizamiento de Holt fue refinado por Winters con la inclusión de un parámetro adicional para la estacionalidad. Su procedimiento incluye 3 parámetros de suavizamiento α , β , γ para la serie, la tendencia y la estacionalidad. Para el cálculo se emplean cuatro ecuaciones que reflejan los suavizamientos y el pronóstico.

$$L_t = \alpha \frac{Y_t}{S_{t-s}} + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$$

$$S_t = \gamma \frac{Y_t}{L_t} + (1 - \gamma)S_{t-s}$$

$$\hat{Y}_{t+p} = (L_t + pT_t)S_{t-s+p}$$

En este caso también se plantea una ligera modificación al desplazar la componente de tendencia.

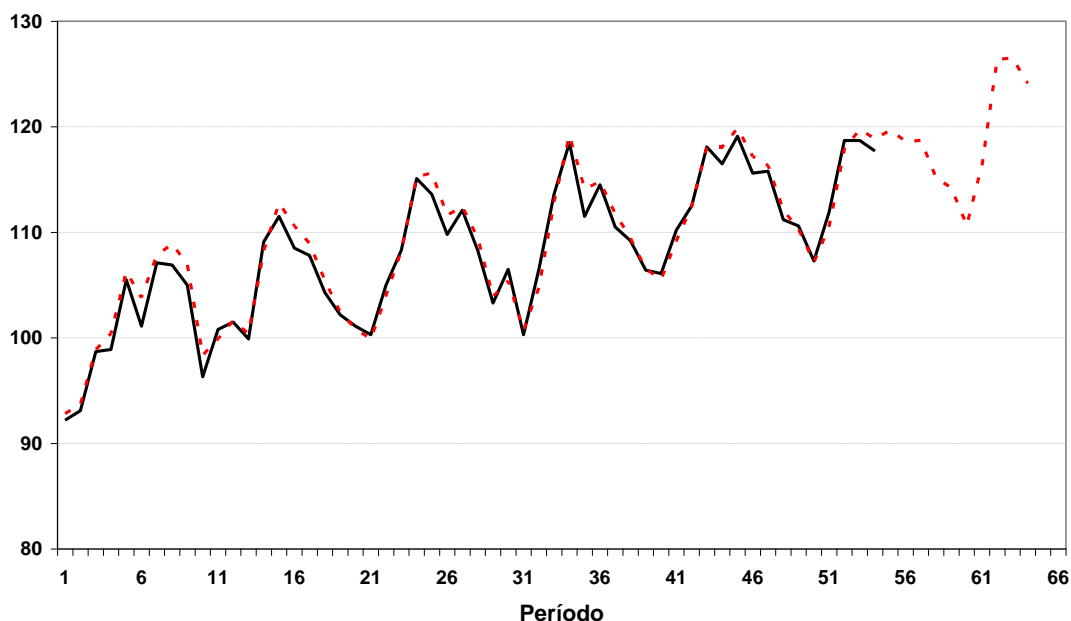
$$\hat{Y}_{t+p} = (L_t + pT_{t-s+p})S_{t-s+p}$$

Al aplicar el procedimiento a la serie anterior con valores $\alpha = 0.75$, $\beta=0.20$, $\gamma=0.75$ se obtienen los siguientes resultados para las primeras 10 observaciones.

Período t	Yt	Lt	Tt	St	Y t est	e2 Residual
1	92.2	100.59167	0.68357	0.91658	92.8	0.39255
2	93.1	101.49899	0.72832	0.91708	93.7	0.35904
3	98.7	106.27479	1.53781	0.92581	98.9	0.02993
4	98.9	107.07185	1.38966	0.92421	100.4	2.29574
5	105.5	112.72880	2.24312	0.93296	106.3	0.57531
6	101.1	110.01665	1.25207	0.92245	103.8	7.33948
7	107.1	114.89473	1.97727	0.92973	107.8	0.50268
8	106.9	115.45256	1.69338	0.92687	108.9	4.05736
9	105.0	114.24949	1.11409	0.92100	106.9	3.71527
10	96.3	107.26114	-0.50640	0.90361	98.3	4.08467

La suma de cuadrados de los residuales alcanza 1.3258. En la siguiente gráfica se muestra el ajuste y los pronósticos para los siguientes 10 períodos.

Suavizamiento Exponencial de Winter



MÉTODOS DE DESCOMPOSICIÓN

Método Aditivo

En el método aditivo se considera que los componentes de la serie se tiempo Y, tendencia, cíclico, estacional y aleatorio suman sus efectos. Lo que se pretende entonces es aislar los efectos bajo el supuesto de aditividad.

$$Y = T+C+E+I$$

El método consiste en identificar cada componente y restarla de la serie original. Se empieza con la tendencia, se sigue con el componente estacional y se concluye con el componente cíclico. El resto corresponde a la componente aleatoria.

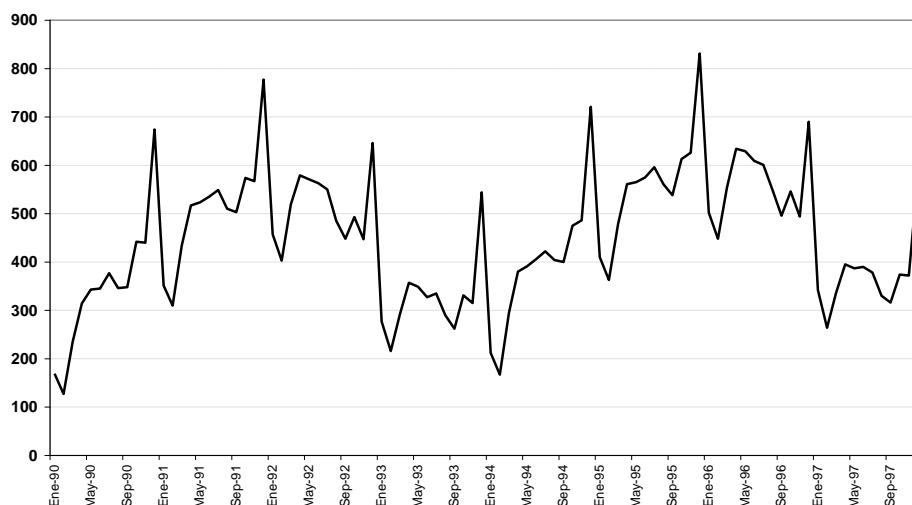
Ejemplo:

Considere la siguiente serie de tiempo correspondiente a 8 años de observaciones mensuales de 1990 a 1997.

Mes	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Ene	169	351	457	277	212	410	502	342
Feb	127	310	403	216	167	363	448	264
Mar	235	434	519	292	295	478	554	336
Abr	314	517	579	357	380	561	634	395
May	343	523	571	349	391	565	629	387
Jun	345	535	563	327	406	575	609	390
Jul	377	549	550	335	422	596	601	378
Ago	346	510	485	290	404	561	549	330
Sep	348	503	448	262	400	538	496	316
Oct	442	574	493	331	475	613	546	374
Nov	440	567	447	315	486	626	494	372
Dic	674	777	646	544	721	831	690	578

La gráfica de la serie de tiempo presenta evidencia de cierta tendencia ascendente, un efecto estacional mensual que repite el patrón anualmente y ciclos largos de 4 años de duración.

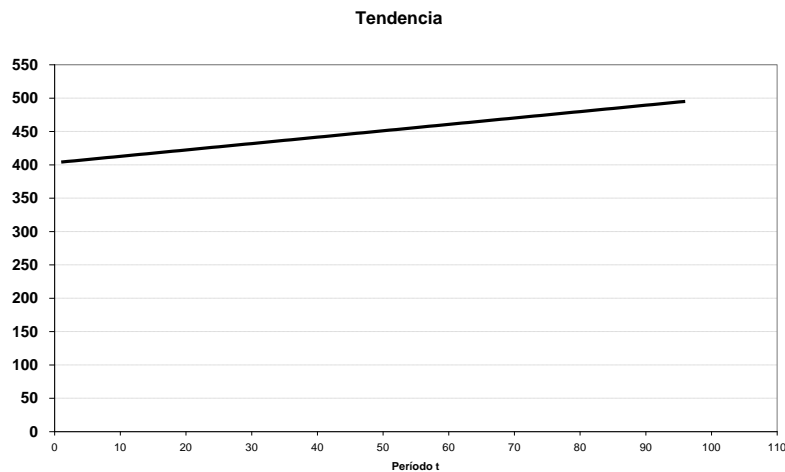
Serie de Tiempo Original



Eliminación de la Tendencia.

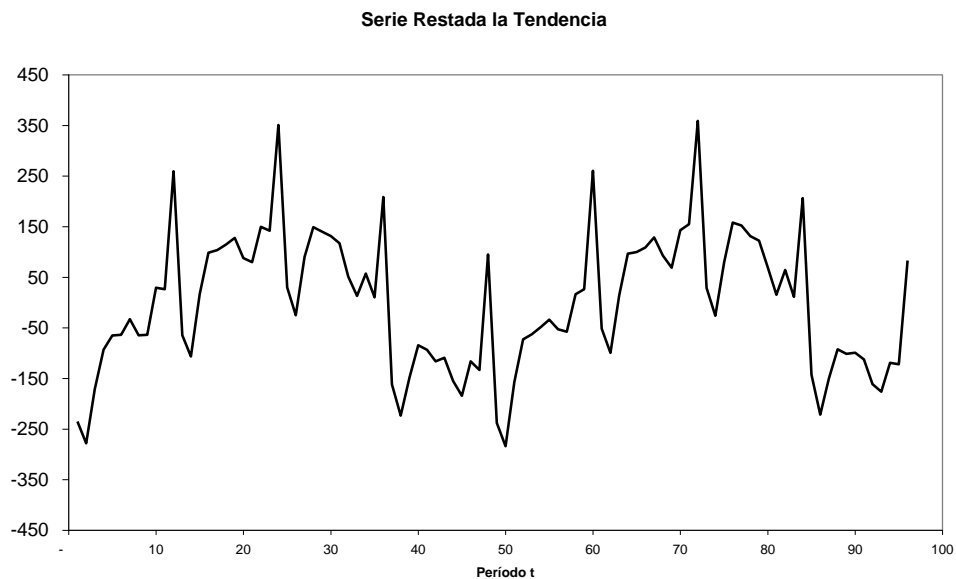
Se procede a ajustar un modelo de regresión simple a toda la serie de datos, considerando como variable independiente el período. Por comodidad a enero de 1990 se le asigna el $t=1$ y se concluye con $t=96$ para diciembre de 1997. El modelo ajustado es el siguiente:

$$\hat{Y}_t = 403.101535 + 0.957528t$$



Se estima \hat{Y}_t para las 96 observaciones y a la serie original se le resta la serie estimada por el modelo:

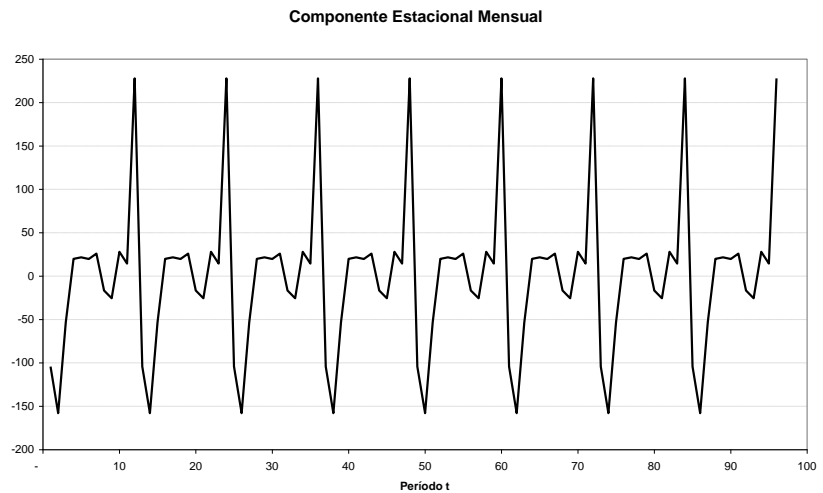
Una vez restada la componente de tendencia, la gráfica de la serie de diferencias permite apreciar un ligero efecto estabilizador en la serie, si se la compara con la serie original.



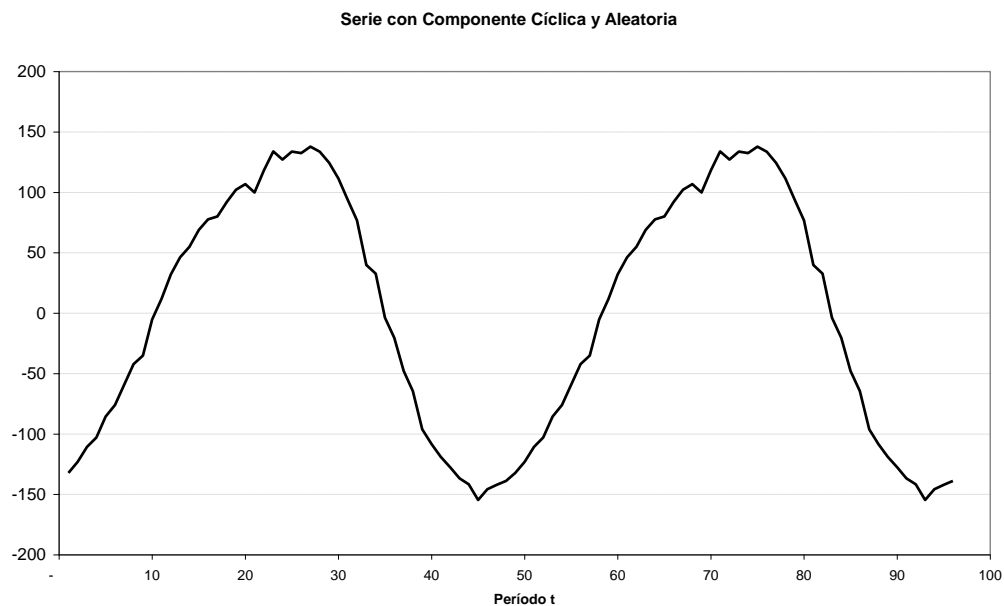
Eliminación de la componente estacional.

Como se observa un patrón estacional mensual, se parte de la serie de diferencias y se calcula el promedio de las observaciones correspondientes a cada mes. Estos promedios se restan de la serie original en los meses respectivos.

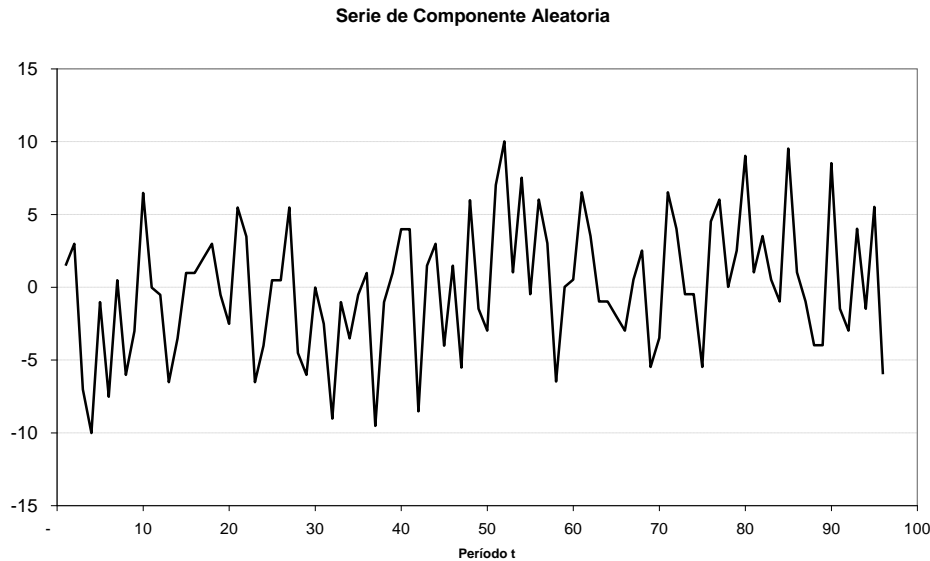
Mes	Promedio
Ene	-104.275
Feb	-157.983
Mar	-53.315
Abr	19.977
May	21.645
Jun	19.687
Jul	25.980
Ago	-16.603
Sep	-38.060
Oct	28.107
Nov	14.524
Dic	227.817



El efecto resultante de restar los promedios mensuales es una serie que presenta solamente por la componente cíclica y por la componente aleatoria. Ello se observa en la siguiente gráfica:



En la gráfica se puede observar que los ciclos cubren 48 períodos. Entonces se procede a calcular el promedio de las observaciones separadas en esa magnitud. Así la 1ª observación se promedia con la 49ª y se procede en forma sucesiva. Se procede entonces con el mismo procedimiento aplicado a la componente estacional, esto es, se restan los promedios calculados período a período. La diferencia resultante corresponde únicamente a la parte aleatoria.



Como resultado final cada valor de la serie se puede expresar como la suma de sus cuatro componentes. En la siguiente tabla se reproduce la descomposición de los primeros doce meses de la serie.

Período t	Mes	Valor	Tendencia	Estacional	Cíclico	Residual
1	Ene-90	169.0	404.059	-104.275	-132.264	1.481
2	Feb-90	127.0	405.017	-157.983	-123.014	2.981
3	Mar-90	235.0	405.974	-53.315	-110.639	-7.019
4	Abr-90	314.0	406.932	19.977	-102.889	-10.019
5	May-90	343.0	407.889	21.645	-85.514	-1.019
6	Jun-90	345.0	408.847	19.687	-76.014	-7.519
7	Jul-90	377.0	409.804	25.980	-59.264	0.481
8	Ago-90	346.0	410.762	-16.603	-42.139	-6.019
9	Sep-90	348.0	411.719	-25.560	-35.139	-3.019
10	Oct-90	442.0	412.677	28.107	-5.264	6.481
11	Nov-90	440.0	413.634	14.524	11.861	-0.019
12	Dic-90	674.0	414.592	227.817	32.111	-0.519

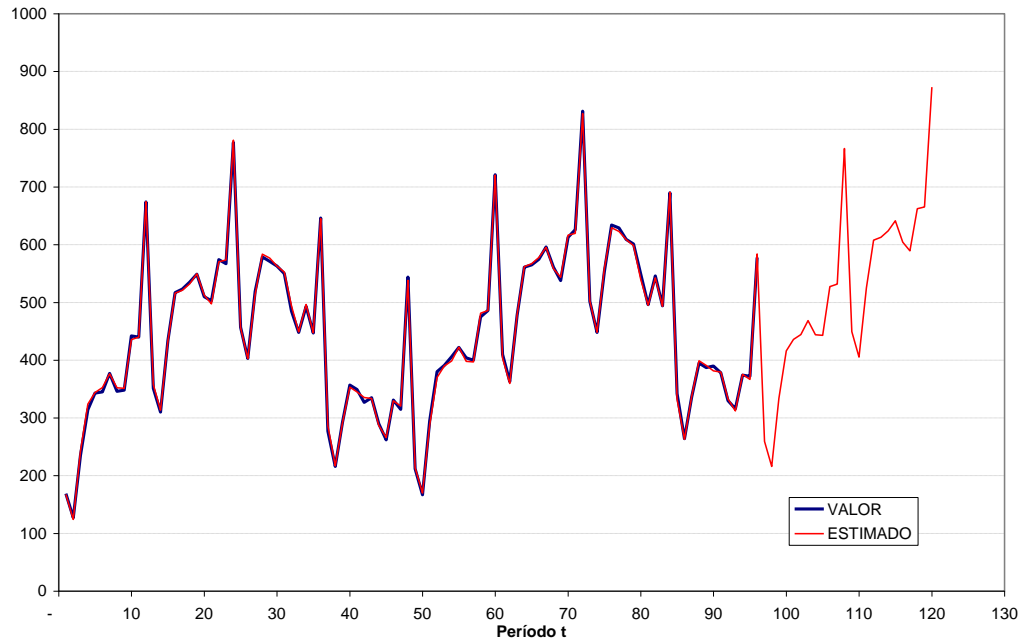
En el ejemplo el error cuadrático medio es igual a **20.110**. Su raíz cuadrada se considera como el error estándar de la estimación y en este caso es 4.484. Un valor muy pequeño si se considera que el valor promedio de la serie es de 448, representa un error relativo de 1%.

Predicción.

Se procede en forma inversa, esto es primero se toma la tendencia estimada para el período observado y para los períodos adicionales que se pretende pronosticar. A los valores estimados por la tendencia se les suma en forma congruente la componente estacional y la componente cíclica. En la siguiente gráfica se presentan los valores observados y pronosticados para las 96 observaciones originales, más 24 correspondientes a 2 años de pronóstico. En la estimación de

los meses observados no se considera la componente residual con objeto de ver como se ajusta la serie al considerar los componentes sistemáticos, esto es tendencia, estacional y cíclico y poder calcular el ECM.

Serie Original y Serie Pronosticada



Método Multiplicativo

En el método multiplicativo se considera que los componentes de la serie se tiempo Y , tendencia, cíclico, estacional y aleatorio multiplican sus efectos. El procedimiento de cálculo es similar al utilizado para el método aditivo, excepto que en lugar de restar en forma sucesiva, la serie se divide secuencialmente entre cada componente.

$$Y = T * C * E * I$$

MODELOS AUTORREGRESIVOS INTEGRADOS DE MEDIAS MOVILES (ARIMA)

En 1970 George E.P. Box y Gwilym M. Jenkins publican su ahora famoso libro *“Time Series análisis forecasting and control”* en donde presentan una metodología para identificar, estimar y diagnosticar modelos dinámicos de series temporales con la idea de que las estructuras subyacentes conduzcan al investigador a construir un modelo en el que la variable exógena está constituida por valores retrasados de la misma variable. Se argumenta como ventaja el que el investigador se ahorra el esfuerzo de especificación de variables y relaciones adicionales, pero por otra parte se renuncia a la presencia de otras variables relacionadas con el fenómeno que se estudia y la riqueza interpretativa que la acompaña.

Procesos Estocásticos y Series de Tiempo

Un proceso estocástico es sucesión ordenada de variables aleatorias Z_t asociadas a un conjunto índice de números reales. $\{Z_t; t \in T\}$. Si T es un conjunto finito o infinito pero numerable se dice que el proceso es discreto.

Una serie de tiempo se concibe como una sucesión de observaciones generadas por un proceso estocástico cuyo conjunto índice es el tiempo. Entonces $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ denota valores sucesivos de la serie a intervalos equidistantes. El proceso estocástico quedará plenamente caracterizado si se exhibe la función de densidad conjunta $f(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$.

Una clase importante de modelos estocásticos para describir series de tiempo son los llamados modelos estacionarios, los cuales suponen que el proceso permanece en equilibrio en torno a una media constante. Más adelante se analizará su definición formal. Sin embargo, la mayoría de las series de interés económico se representan mejor por modelos no estacionarios, ello motivó los métodos de suavizamiento exponencial revisados en la sección anterior de Brown, Holt y Winter entre otros.

Box y Jenkins mencionan que los modelos de suavizamiento exponencial óptimos corresponden a los llamados modelos autorregresivos integrados y de medias móviles (ARIMA) que se revisarán con mayor detalle.

Operadores

Operador de retraso

Se identifica por la letra B y se define como el valor retrasado de la serie indicado por el exponente del operador:

$$B^k Z_t = Z_{t-k} \text{ para } k = 1, 2, \dots$$

En particular

$$B^0 Z_t = Z_t$$

El operador se puede aplicar en forma sucesiva

$$B^k Z_t = B(B^{k-1} Z_t) = Z_{t-k}$$

Operador de diferencia

Se identifica por la letra delta invertida ∇ y se define como el la diferencia entre el valor correspondiente al período t y valor retrasado k períodos.

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1}$$

Ambos operadores, el de diferencia y el de retraso se relacionan de la siguiente forma:

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1} = Z_t - BZ_t = (1 - B)Z_t$$

$$\nabla = (1 - B)$$

Al aplicar el operador diferencia en forma sucesiva se tiene:

$$\nabla^k = (1 - B)^k$$

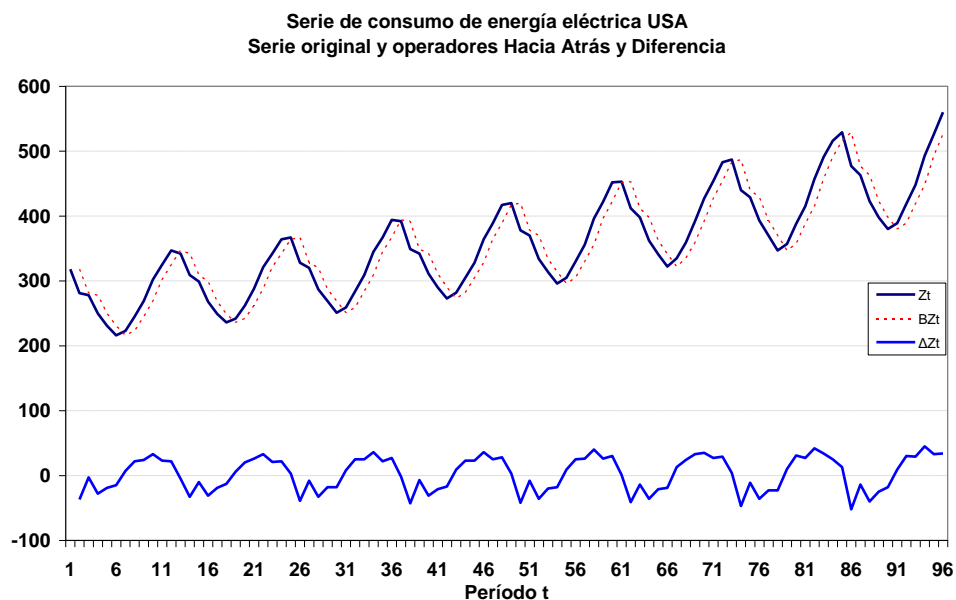
$$\nabla^k Z_t = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} (-1)^j Z_{t-j}$$

Ejemplo:

La siguiente serie de tiempo corresponde a consumo de energía eléctrica en USA durante el período enero de 1951 a diciembre de 1958. En la gráfica se presenta la serie original y las series generadas por los operadores Diferencia y Hacia Atrás aplicados para k=1.

Mes	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
Ene	318	342	367	392	420	453	487	529
Feb	281	309	328	349	378	412	440	477
Mar	278	299	320	342	370	398	429	463
Abr	250	268	287	311	334	362	393	423
May	231	249	269	290	314	341	370	398
Jun	216	236	251	273	296	322	347	380
Jul	223	242	259	282	305	335	357	389
Ago	245	262	284	305	330	359	388	419
Sep	269	288	309	328	356	392	415	448
Oct	302	321	345	364	396	427	457	493
Nov	325	342	367	389	422	454	491	526
Dic	347	364	394	417	452	483	516	560

Como se puede ver en la gráfica, la tendencia creciente de la serie original se elimina en la serie de primera diferencia.



Operador de retraso y polinomios.

Una combinación lineal de la forma:

$$Z_t - g_1 Z_{t-1} - g_2 Z_{t-2} - \dots - g_k Z_{t-k} = Z_t - \sum_{j=1}^k g_j Z_{t-j}$$

Donde Z_t es el valor de la serie en el período t y g_t es un ponderador para el valor del mismo período. La serie se puede considerar como un polinomio de retraso:

$$G(B)Z_t = Z_t - g_1 B Z_t - g_2 B^2 Z_t - \dots - g_k B^k Z_t = Z_t - \sum_{j=1}^k g_j B^j Z_t$$

De donde

$$G(B) = 1 - g_1 B - g_2 B^2 - \dots - g_k B^k = 1 - \sum_{j=1}^k g_j B^j$$

Un ejemplo de polinomio de retraso es la serie geométrica:

$$G(B) = 1 + g_1 B + g_2^2 B^2 + g_3^3 B^3 + \dots \text{ con } |g| < 1$$

En forma alternativa

$$G(B) = \frac{1}{1 - gB} \text{ con } |g| < 1$$

La representación de un modelo para una serie de tiempo mediante polinomios de retraso proporciona una forma resumida del modelo. Así un modelo de medias móviles puro MA(k), el cual se detallará más adelante, se puede representar de la siguiente forma:

$$Z_t - \mu = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_k B^k) a_t$$

En donde μ representa la media de la serie, θ_j un conjunto de parámetros del modelo y $\{a_t\}$ una sucesión de variables aleatorias. En notación de polinomio de retraso, el modelo se puede representar entonces:

$$Z_t - \mu = \theta(B) a_t$$

De manera análoga un modelo autorregresivo puro de orden k AR(k) se define como sigue, en donde ϕ_t representa los parámetros autorregresivos.

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_k B^k)(Z_t - \mu) = a_t$$

En notación de polinomio de retraso queda

$$\phi(B)(Z_t - \mu) = a_t$$

Desde luego se pueden plantear modelos que combinen parámetros autorregresivos y de medias móviles (ARMA):

$$\phi(B)(Z_t - \mu) = \theta(B) a_t$$

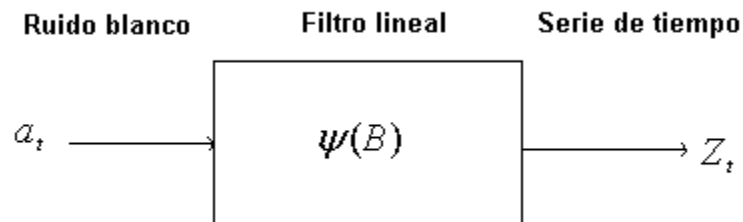
Es factible incorporar operadores de retraso y de diferencia que constituyen los llamados modelos integrados autorregresivos y de medias móviles (ARIMA):

$$\phi(B) \nabla^d Z_t = \theta(B) a_t$$

Filtros lineales.

Los modelos que se emplearán se basan en la idea propuesta por Yule (1924) de que una serie de tiempo se expresa como una sucesión de valores altamente dependientes y que se consideran generados por una serie de choques independientes a_t . Estos choques son variables aleatorias de una distribución que usualmente se supone normal con media cero y varianza σ^2 . La secuencia de valores $a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots$ es llamada ruido blanco por alusión al campo de las comunicaciones electrónicas.

El proceso de ruido blanco a_t es transformado al proceso Z_t por un filtro lineal.



El filtro lineal consiste en una suma ponderada de los valores del ruido blanco.

$$Z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots$$

$$= \mu + \psi(B) a_t$$

El operador lineal o polinomio que transforma la sucesión de ruido blanco en la serie de tiempo se conoce también como función de transferencia.

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$$

La sucesión ψ_1, ψ_2, \dots formada por los ponderadores, teóricamente puede ser finita o infinita. Si la sucesión es finita o infinita y convergente, se dice que el filtro es estable y el proceso resultante es estacionario y varía en torno a la media. De otra forma se dice que el proceso es no estacionario y la media es solamente un punto de referencia de la serie.

Procesos Estacionarios.

Un proceso estocástico se caracteriza completamente si se exhibe la función de distribución conjunta de todas las variables aleatorias que lo constituyen. En la

práctica es difícil que esto se pueda tener. Se recurre entonces a los momentos de primero y segundo orden (medias, varianzas y covarianzas).

$$E(Z_t) = \mu_t$$

En otros términos se tiene la esperanza de la suma ponderada, pero si la serie es infinita, no es tan simple como distribuir el operador esperanza.

$$\mu_t = \mu + E(a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots)$$

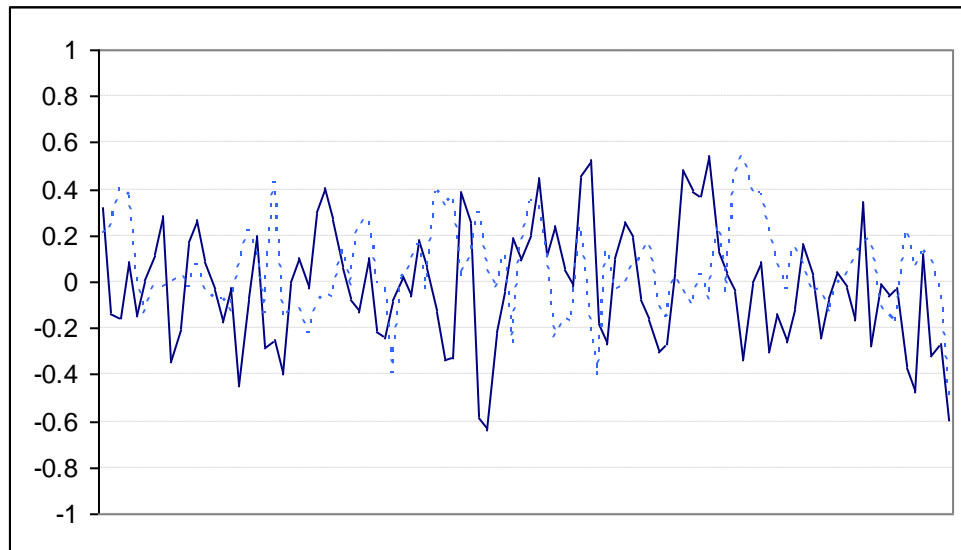
A menos que la suma de ponderadores converja.

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i| < \infty$$

Entonces la media de la serie no depende del tiempo

$$E(Z_t) = \mu$$

La serie eventualmente se puede alejar del valor medio, pero siempre volverá. En la siguiente gráfica se observan des realizaciones del mismo proceso estacionario, cuya media es cero.



La varianza del proceso se obtiene a partir de la definición

$$\gamma_0 = E(Z_t - \mu)^2$$

$$= E(a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots)^2$$

$$= E(a_t^2 + \psi_1^2 a_{t-1}^2 + \psi_2^2 a_{t-2}^2 + \dots) - E(2a_t \psi_1 a_{t-1} + 2a_t \psi_2 a_{t-2} + \dots + 2\psi_1 a_{t-1} \psi_2 a_{t-2} + \dots)$$

por independencia y considerando que las a_t tienen la misma varianza.

$$= \sigma^2 \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2 \quad \text{adopta un valor real si} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$$

La varianza no depende del tiempo.

La covarianza se define

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)] \\ &= E[(a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots)(a_{t+k} + \psi_1 a_{t+k-1} + \psi_2 a_{t+k-2} + \dots)] \\ &= \sigma^2 (-\psi_k + \psi_1 \psi_{k+1} + \psi_2 \psi_{k+2} + \dots) \\ &= \sigma^2 \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} - \psi_k \quad \text{también se debe cumplir la condición de convergencia.} \end{aligned}$$

Se observa que la covarianza tampoco depende del tiempo.

Cuando los momentos de primero y segundo orden de un proceso no dependen del tiempo se les designa como **estacionarios de segundo orden**.

Un proceso se define **estrictamente estacionario** si la función de densidad para un conjunto arbitrario de variables $Z_t, Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_{t+n}$ no cambia respecto a desplazamientos en el tiempo.

$$f(Z_t, Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_{t+n}) = f(Z_{t+m}, Z_{t+1+m}, Z_{t+2+m}, \dots, Z_{t+n+m})$$

Si un proceso es estrictamente estacionario cumple la estacionariedad de segundo orden y en consecuencia

Media $E(Z_t) = E(Z_{t+k}) = \mu$

Varianza $V(Z_t) = V(Z_{t+k}) = \sigma^2$

Autocovarianza $E(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu) = (Z_{t+m} - \mu)(Z_{t+m+k} - \mu) = \gamma_k$

En el supuesto de normalidad basta conocer los momentos de primero y segundo orden para considerar que una serie está completamente determinada. Para evitar la influencia de las unidades, en lugar de las autocovarianzas se consideran los coeficientes de autocorrelación.

$$\rho_k = \frac{E(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)}{E(Z_t - \mu)^2} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad \text{para } k=0,1,2,\dots$$

La serie de coeficientes de autocorrelación forma la función de autocorrelación.

Estimaciones de momentos.

En la práctica estos valores parametrales se desconocen y solamente se cuenta con una realización que se supone suficientemente larga a partir de la cual se calculan estimaciones de media, varianza y función de autocorrelación. Si se considera que el proceso que generó la serie es ergódica en el segundo momento, esto es que es estacionario y que las autocovarianzas se anulan al incrementar la distancia, entonces basta calcular una serie relativamente corta de coeficientes de autocorrelación para tener caracterizado el proceso. Algunos autores recomiendan a lo más $n/4$ donde n es el tamaño de la serie.

Estimación de la media

$$\tilde{Z} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t$$

Estimación de las autocovarianzas

$$C_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (Z_t - \tilde{Z})(Z_{t+k} - \tilde{Z}) \quad k=0,1,2,3,\dots$$

Estimación de los coeficientes de autocorrelación.

$$r_k = \frac{C_k}{C_0} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (Z_t - \tilde{Z})(Z_{t+k} - \tilde{Z})}{\sum_{t=1}^n (Z_t - \tilde{Z})^2}$$

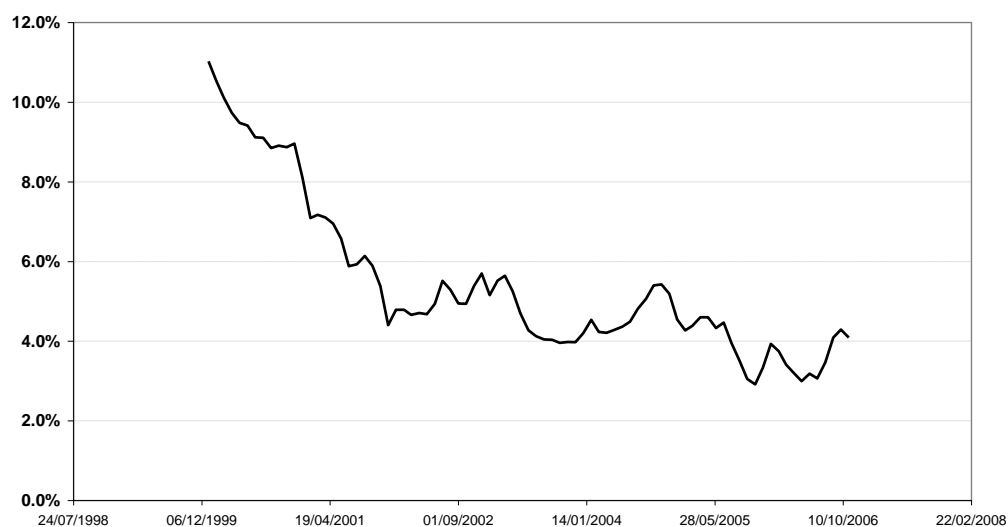
Ejemplo

Considérese la serie de tasas de inflación anualizadas y referidas mensualmente para el período enero de 2000 a noviembre de 2006 calculadas a partir de datos proporcionados por Banxico. En la siguiente página se presenta la serie, las estimaciones de los momentos, así como el los coeficientes de autocorrelación y gráficos.

Observe que las autocorrelaciones muestran una lenta caída característica de las series no estacionarias, que de hecho son las más frecuentes en la práctica.

Mes	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Ene	11.0%	8.1%	4.8%	5.2%	4.2%	4.5%	3.9%
Feb	10.5%	7.1%	4.8%	5.5%	4.5%	4.3%	3.7%
Mar	10.1%	7.2%	4.7%	5.6%	4.2%	4.4%	3.4%
Abr	9.7%	7.1%	4.7%	5.2%	4.2%	4.6%	3.2%
May	9.5%	7.0%	4.7%	4.7%	4.3%	4.6%	3.0%
Jun	9.4%	6.6%	4.9%	4.3%	4.4%	4.3%	3.2%
Jul	9.1%	5.9%	5.5%	4.1%	4.5%	4.5%	3.1%
Ago	9.1%	5.9%	5.3%	4.0%	4.8%	3.9%	3.5%
Sep	8.8%	6.1%	4.9%	4.0%	5.1%	3.5%	4.1%
Oct	8.9%	5.9%	4.9%	4.0%	5.4%	3.1%	4.3%
Nov	8.9%	5.4%	5.4%	4.0%	5.4%	2.9%	4.1%
Dic	9.0%	4.4%	5.7%	4.0%	5.2%	3.3%	

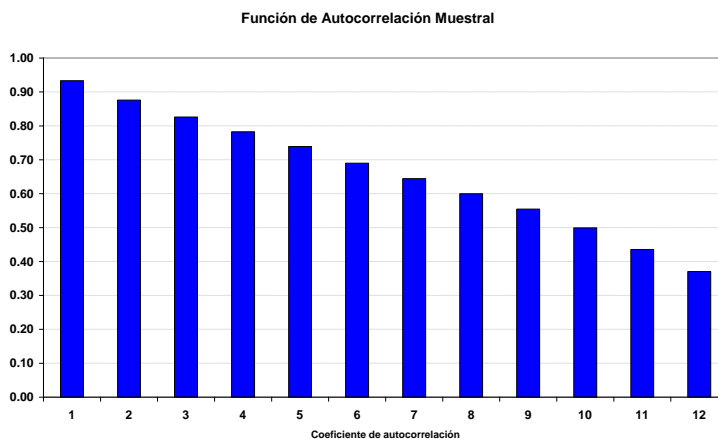
Tasa de Inflación Anualizada Mensual
Enero 200 a Noviembre 2006



Media aritmética de la serie 5.4%

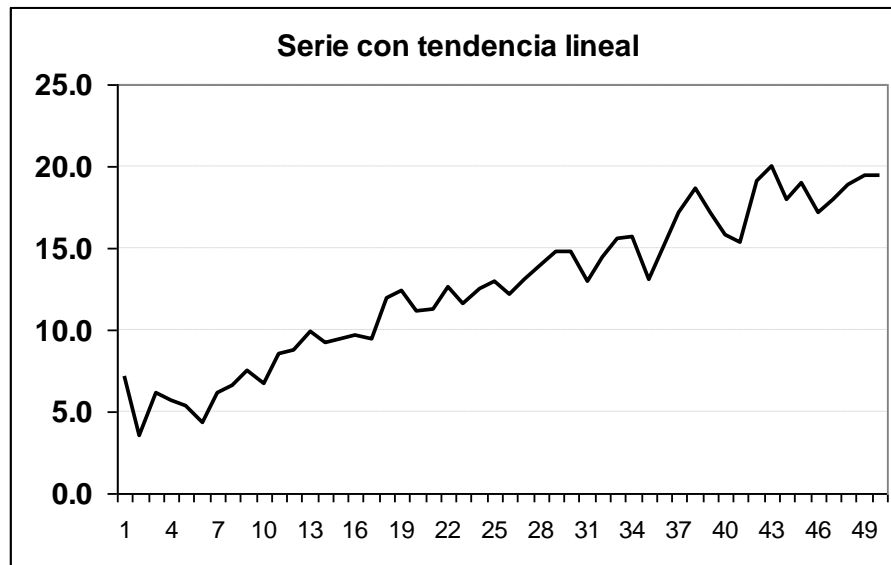
Autocovarianzas y coeficientes de autocorrelación de los primeros 12 órdenes.

C_0	0.00039225		
C_1	0.00036595	r_1	0.932946
C_2	0.00034355	r_2	0.875833
C_3	0.00032402	r_3	0.826041
C_4	0.00030686	r_4	0.782309
C_5	0.00028986	r_5	0.738968
C_6	0.00027061	r_6	0.689893
C_7	0.00025268	r_7	0.644180
C_8	0.00023519	r_8	0.599598
C_9	0.00021751	r_9	0.554511
C_{10}	0.00019578	r_{10}	0.499116
C_{11}	0.00017085	r_{11}	0.435573
C_{12}	0.0001452	r_{12}	0.370170



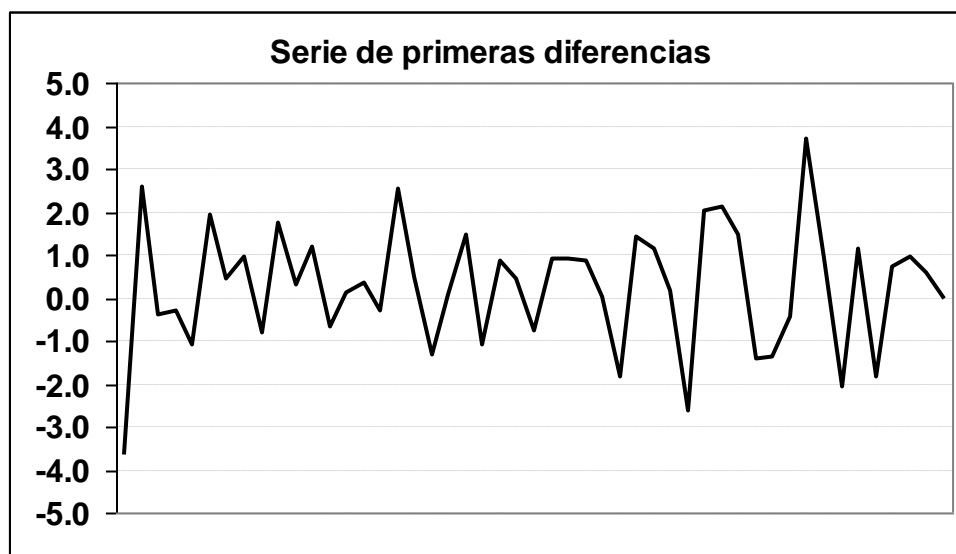
La falta de estacionariedad de la serie no es un problema muy serio, pues en general las series presentan una tendencia polinomial adaptativa que es factible de eliminar mediante la aplicación del operador de diferencias ∇ .

Por ejemplo considere un proceso definido por $Z_t = 5 + 0.3t + a_t$ con a_t distribuida normalmente con media cero y varianza 1.



Si a la serie anterior se le aplica la primera diferencia ∇Z_t quedará una serie estacionaria en cuanto a su nivel.

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1} = (5 + 0.3t + a_t) - (5 + 0.3(t-1) + a_{t-1}) = 0.3 + a_t - a_{t-1}$$



De manera análoga la aplicación sucesiva de diferencias eliminará la tendencia cuadrática, cúbica, etc. Hay que tener cuidado de no sobrediferenciar una serie, pues al diferenciar una serie estacionaria se incrementa la varianza de la serie y en cada paso de diferenciación se pierde una observación.

Modelos Autorregresivos AR(p)

Considérese un modelo en el cual la variable dependiente depende de p valores retrasados de la misma variable en la siguiente forma:

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t$$

Expresado en forma equivalente en términos del operador de retraso.

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \tilde{Z}_t = a_t$$

$$\phi(B) \tilde{Z}_t = a_t$$

Modelo AR(1)

Se revisará inicialmente el modelo más sencillo AR(1):

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + a_t$$

$$(1 - \phi_1 B) \tilde{Z}_t = a_t$$

Para que la serie generada por este modelo sea estacionaria, se requiere que la raíz de la siguiente ecuación se ubique dentro del círculo unitario.

$$1 - \phi x = 0$$

Por tanto debe cumplir $|\phi_1| < 1$ y en forma alternativa se tiene la siguiente expresión cuyos términos convergen a cero.

$$\tilde{Z}_t = (1 - \phi_1 B)^{-1} a_t = a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + \dots$$

Entonces el valor esperado y la varianza de la serie es:

$$E(\tilde{Z}_t) = E(a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + \dots) = E(a_t) + \phi_1 E(a_{t-1}) + \phi_1^2 E(a_{t-2}) + \dots = 0$$

$$\begin{aligned} V(\tilde{Z}_t) &= (V(a_t) + \phi_1^2 V(a_{t-1}) + \phi_1^4 V(a_{t-2}) + \dots) \\ &= \sigma^2 (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \dots) = \gamma_o = \frac{\sigma^2}{(1 - \phi_1^2)} \end{aligned}$$

De manera análoga las autocovarianzas se expresan

$$\gamma_k = \frac{\sigma^2 \phi_1^k}{(1 - \phi_1^2)} = \phi_1 \gamma_{k-1} \text{ para } k=1,2,3,\dots$$

Puesto que $\gamma_k = \gamma_{-k}$ se sigue:

$$\gamma_k = \frac{\sigma^2 \phi_1^{|k|}}{(1 - \phi_1^2)} \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Las autocorrelaciones quedan entonces definidas como sigue:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\sigma^2 \phi_1^k}{(1 - \phi_1^2)} / \left(\frac{\sigma^2}{(1 - \phi_1^2)} \right) = \phi_1^k$$

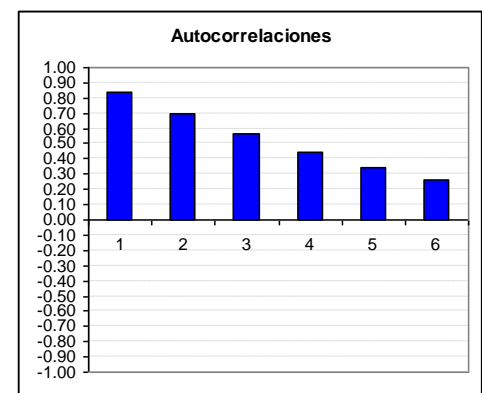
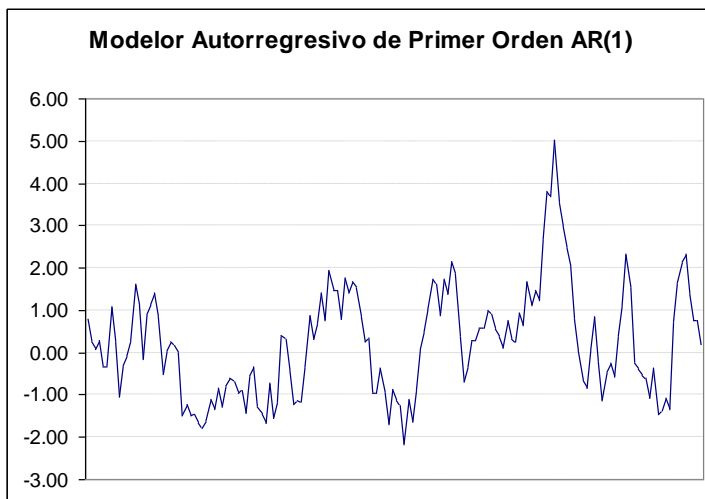
Se nota que las autocorrelaciones tenderán a cero conforme k se incrementa y que una estimación del parámetro ϕ_1 se obtiene mediante el coeficiente de autocorrelación de primer orden.

Ejemplo

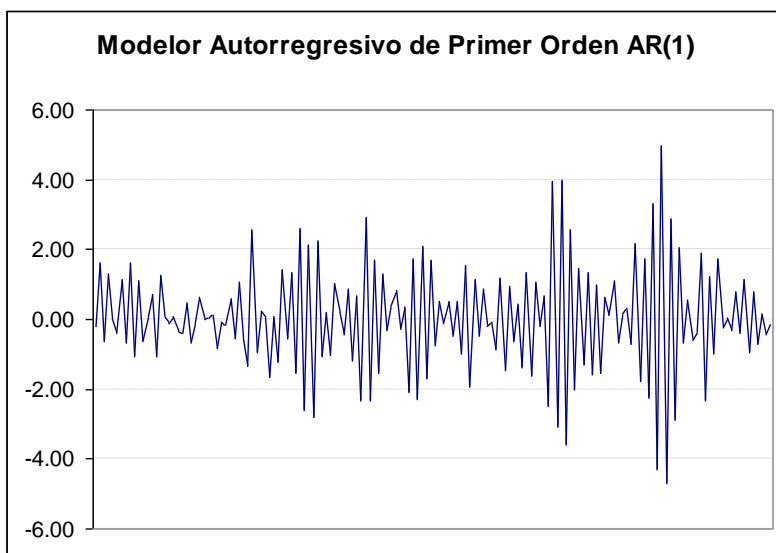
Se tiene una realización de 156 observaciones generadas por Montecarlo de un modelo AR(1) que tiene los siguientes parámetros y cuyo error se distribuye normal con media 0 y varianza 0.7. Se han calculado las autocorrelaciones teóricas y empíricas. Obsérvese la lenta caída de las autocorrelaciones.

$$\begin{aligned} \phi &= 0.8 \\ \mu &= 0 \\ \sigma^2 &= 0.7 \end{aligned}$$

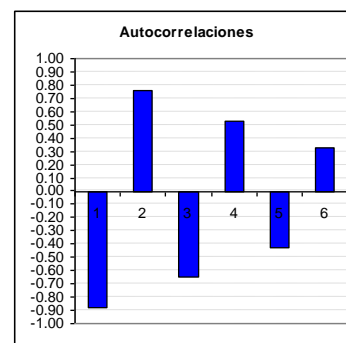
	Empírica	Teórica
1	0.8429854	0.80000
2	0.6935108	0.64000
3	0.5665632	0.51200
4	0.4398562	0.40960
5	0.3472216	0.32768
6	0.2575783	0.26214



Ahora se cambia únicamente el parámetro $\phi_1 = -0.8$. Se observa el comportamiento muy cortado de la serie y la caída alternada de las autocorrelaciones.



	Empírica	Teórica
1	-0.8794083	-0.80000
2	0.7603542	0.64000
3	-0.6485430	-0.51200
4	0.5239865	0.40960
5	-0.4232558	-0.32768
6	0.3288337	0.26214



Modelo AR(2)

De manera natural se sigue con el análisis del modelo AR(2).

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + a_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) \tilde{Z}_t = a_t$$

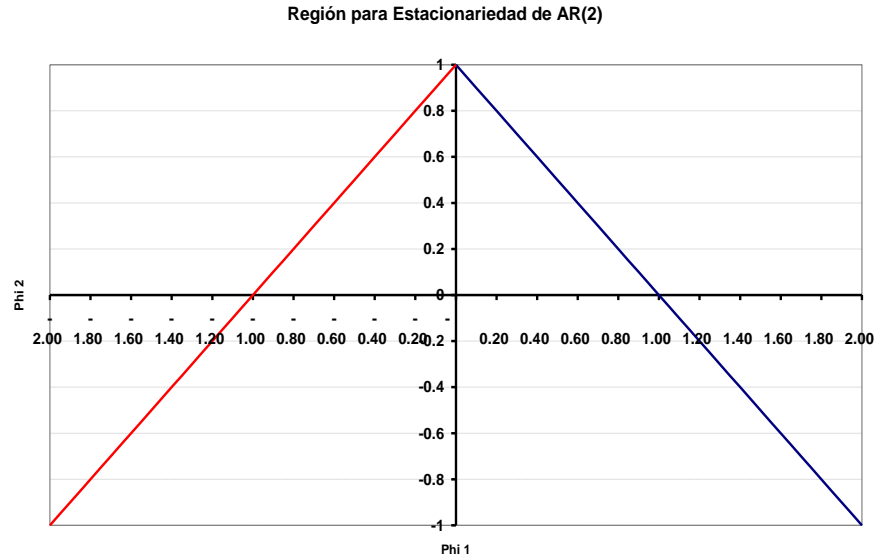
Para que la serie generada por este modelo sea estacionaria, se requiere que las raíces de la siguiente ecuación se ubiquen fuera del círculo unitario

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0$$

Esta condición es equivalente a las siguientes restricciones:

$$|\phi_1| < 1, \quad \phi_1 + \phi_2 < 1 \quad \text{y} \quad \phi_1 - \phi_2 < 1$$

Estas restricciones definen una zona de combinaciones factibles en el plano cartesiano en forma de triángulo dentro de los intervalos (-2,2) y (-1,1)



Ahora se establecen los primeros dos momentos del modelo para completar su definición.

$$E(\tilde{Z}) = 0$$

$$V(\tilde{Z}) = \frac{\sigma^2}{1 - \rho_1\phi_1 - \rho_2\phi_2}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \sigma^2 & \text{si } k = 0 \\ \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

Considérese γ_1 y γ_2

$$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_{-1} \quad \text{que por simetría equivale a } \gamma_1 = \phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_1 \quad \text{y por otra parte}$$

$$\gamma_2 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_0$$

Si estas dos últimas ecuaciones se dividen entre γ_0 se obtienen las ecuaciones de Yule Walter, las cuales permiten obtener los valores de las primeras dos autocorrelaciones en función de ϕ_1 y ϕ_2

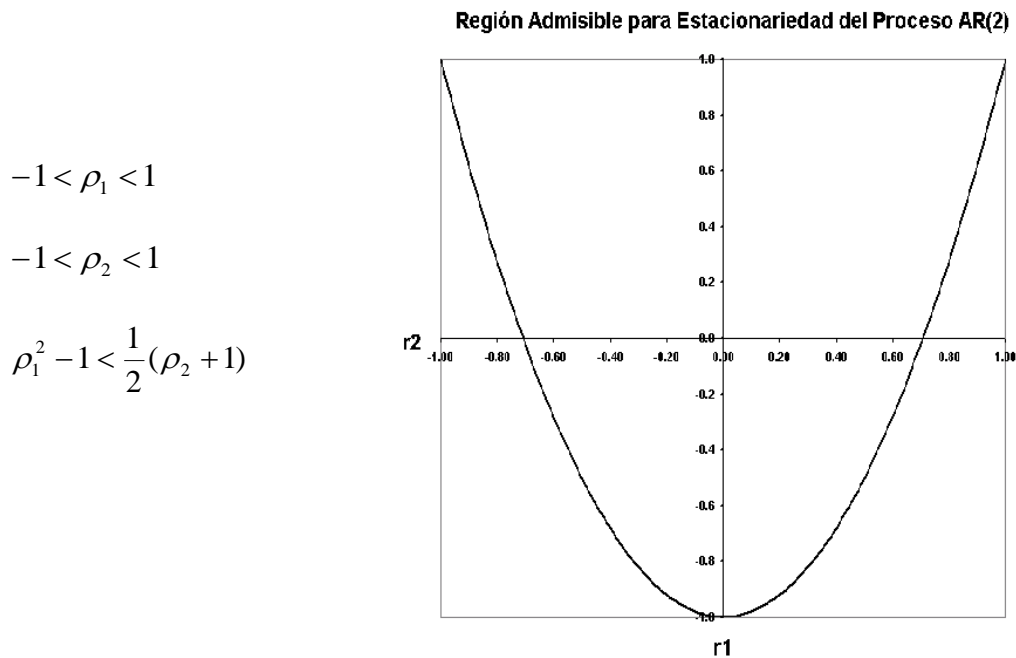
$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1$$

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2$$

De la primera ecuación $\rho_1 = \phi_1 / (1 - \phi_2)$ y al sustituir en la segunda ecuación se obtiene $\rho_2 = \phi_1^2 / (1 - \phi_2) + \phi_2$ y las siguientes autocorrelaciones por la ecuación recurrente:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad \text{para } k \geq 3$$

También es factible establecer condiciones de estacionariedad para el modelo AR(2) en función de los dos primeros coeficientes de autocorrelación y definen una superficie delimitada por una parábola.



Las autocorrelaciones decaerán exponencialmente hacia cero y serán positivas si la primera lo es. Si la primera es negativa, entonces presentarán signos alternados.

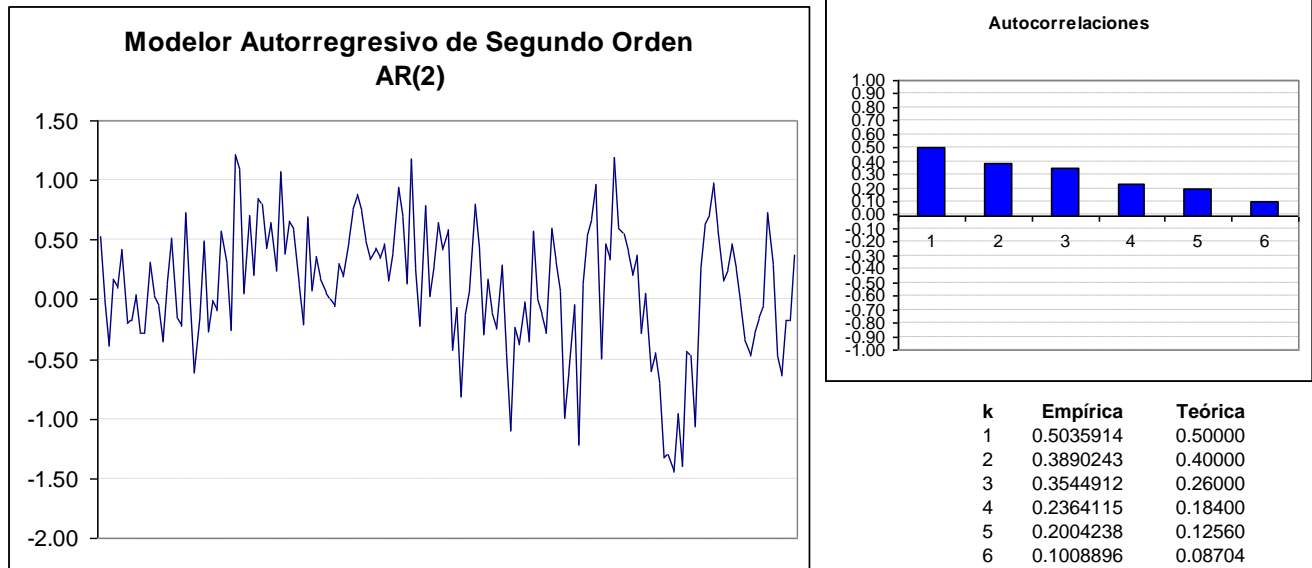
Al utilizar las ecuaciones de Yule Walter y resolverlas para ϕ_1 y ϕ_2 se tienen expresiones en función de las autocorrelaciones que al ser sustituidas por su cálculos empíricos dan estimaciones de los parámetros.

$$\phi_1 = \rho_1(1 - \rho_2) / (1 - \rho_1^2)$$

$$\phi_2 = (\rho_2 - \rho_1^2) / (1 - \rho_1^2)$$

Ejemplo:

Se tiene una realización de 156 observaciones del modelo AR(2) con los siguientes parámetros: $\phi_1 = 0.40$, $\phi_2 = 0.20$, $\sigma^2 = 0.50$. Rápidamente se verifica que es estacionario y la lenta caída de los valores de las autocorrelaciones.



Modelo AR(p)

El caso general de los modelos autorregresivos puros considera **p** parámetros.

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t$$

$$\tilde{Z}_t = \tilde{Z}_t - \mu$$

En términos del operador de retraso $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p) \tilde{Z}_t = a_t$

Para que el proceso AR(p) sea estacionario se requiere que las raíces del polinomio se encuentren fuera del círculo unitario.

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 + \dots + \phi_p x^p = 0$$

Una forma alternativa de verificar ello es que los siguientes determinantes que involucren a los parámetros autorregresivos sean positivos. Estas condiciones son una consecuencia de la aplicación del llamado Teorema de Schur.

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & \phi_p \\ \phi_p & -1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \phi_p & \phi_{p-1} \\ \phi_1 & -1 & 0 & \phi_p \\ \phi_p & 0 & -1 & \phi_1 \\ \phi_{p-1} & \phi_p & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \dots \quad D_p = \begin{vmatrix} -1 & 0 \dots & 0 \dots & \phi_p & \phi_{p-1} \dots & \phi_1 \\ \phi_1 & -1 \dots & 0 & 0 & \phi_p & \phi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_1 & \phi_2 \dots & \phi_p & 0 & 0 \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Una forma alternativa de verificar el supuesto de estacionariedad es mediante el sistema de ecuaciones de Yule Walter asociadas al proceso AR(p) que proporcionan las primeras p autocorrelaciones.

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ &\dots \dots \dots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p \end{aligned}$$

Las restantes son obtenidas a través de una relación recursiva

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad \text{para } k > p$$

Considérese ahora la matriz de coeficientes de autocorrelación para toda la muestra.

$$P_n = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \dots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \dots & \rho_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \rho_{n-3} & 1 \end{vmatrix} \quad P_1 = \begin{vmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{vmatrix} \quad P_2 = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix} \quad \dots \dots \dots$$

Para que la serie sea estacionaria se requiere que esta matriz así como sus menores sean positivos.

Modelos de Medias Móviles AM(q)

Los modelos de medias móviles, introducidos por Yule y Slutsky, representan un proceso como una suma finita de choques aleatorios independientes a_t ponderados por una serie de parámetros en la siguiente forma:

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

En forma equivalente se representa:

$$\tilde{Z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t \quad \text{o bien} \quad \tilde{Z}_t = \theta(B) a_t$$

Los parámetros θ que constituyen los coeficientes no definen una media móvil ponderada en el sentido estricto, pues éstos pueden ser negativos y su suma no necesariamente es igual a 1 como sucede en un promedio móvil.

Dado que la suma de los valores absolutos de los parámetros $\sum_{i=1}^p |\theta_i|$ involucra un número finito de elementos finitos, entonces todo proceso de medias móviles es estacionario.

Modelo MA (1)

De forma semejante a lo que se hizo con los modelos autorregresivos, iniciamos el análisis de los procesos de MA con el caso más sencillo.

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} \text{ o en términos del operador de retraso } \tilde{Z}_t = (1 - \theta_1 B)a_t$$

En forma inmediata se tiene el valor esperado y la varianza del proceso.

$$E(\tilde{Z}_t) = E(a_t - \theta_1 a_{t-1}) = E(a_t) - \theta_1 E(a_{t-1}) = 0$$

$$V(\tilde{Z}_t) = \gamma_0 = V(a_t - \theta_1 a_{t-1}) = E(a_t) + V(\theta_1 a_{t-1}) = \sigma^2 (1 + \theta^2)$$

Las autocovarianzas se obtienen:

$$\gamma_k = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1})(a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1})] = E(a_t) - \theta_1 E(a_{t-1}) = \begin{cases} -\theta_1 \sigma^2 & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

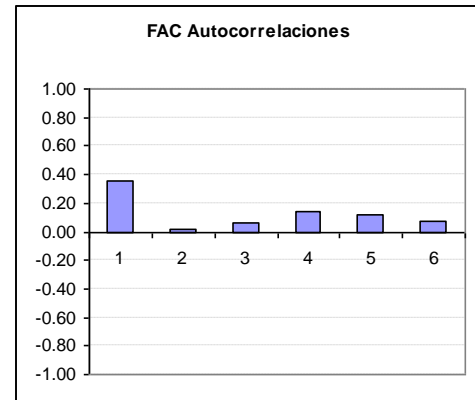
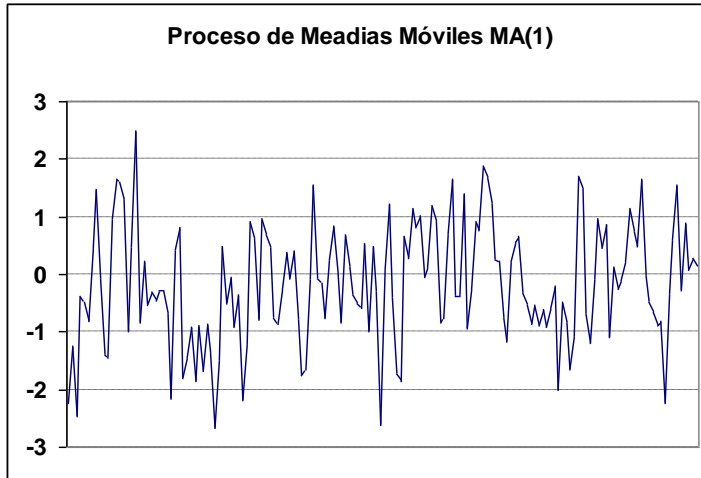
Las autocorrelaciones quedan definidas entonces

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

Al tener autocorrelaciones nulas más allá de 1 implica que el proceso MA(1) tenga memoria de un solo período. Por otro lado la única autocorrelación no puede tener valores muy elevados, pues de ser así implicaría una fuerte relación con valores anteriores y daría lugar a un proceso autorregresivo, de hecho se debe cumplir $|\rho_1| \leq 0.5$.

Ejemplo

A continuación se presenta una realización del proceso $\theta_1 = -0.4$ y con media del error cero y varianza del $\sigma^2 = 1$. Obsérvese que la primera autocorrelación coincide en gran medida con el valor teórico esperado y aunque teóricamente las autocorrelaciones son nulas para $k > 1$, se observan valores empíricos superiores a 0.1 para $k = 4, 5$



k	Empírica	Teórica
1	0.355437	0.34482759
2	0.014641	0
3	0.057497	0
4	0.137842	0
5	0.116645	0
6	0.070403	0

Invertibilidad

Cuando un proceso puede expresarse mediante un modelo AR, se dice que el proceso es invertible, esto es que se puede representar por un polinomio de retraso de la siguiente forma:

$\pi(B)\tilde{Z}_t = a_t$ donde $\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots$ es un polinomio de retraso que cumple con que la siguiente suma converja dentro del círculo unitario.

$$\pi(x) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i x^i$$

Todo proceso MA es estacionario y todo proceso AR es invertible. Las condiciones de invertibilidad de un proceso MA se obtienen de manera similar a las estacionariedad de un proceso AR.

La invertibilidad de un proceso es importante porque todo proceso invertible está determinado de manera única por su función de autocorrelación.

El proceso MA(1) es invertible si $|\theta| < 1$ lo que implica que $|\rho_1| < 0.5$

Modelo MA (2)

Ahora se analiza el modelo de medias móviles que involucra dos parámetros.

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \text{ o su equivalente } \tilde{Z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) a_t$$

Su media y varianza están dadas por

$$E(\tilde{Z}_t) = 0$$

$$V(\tilde{Z}_t) = \gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

Su función de autocovarianza y función de autocorrelación tienen las siguientes expresiones:

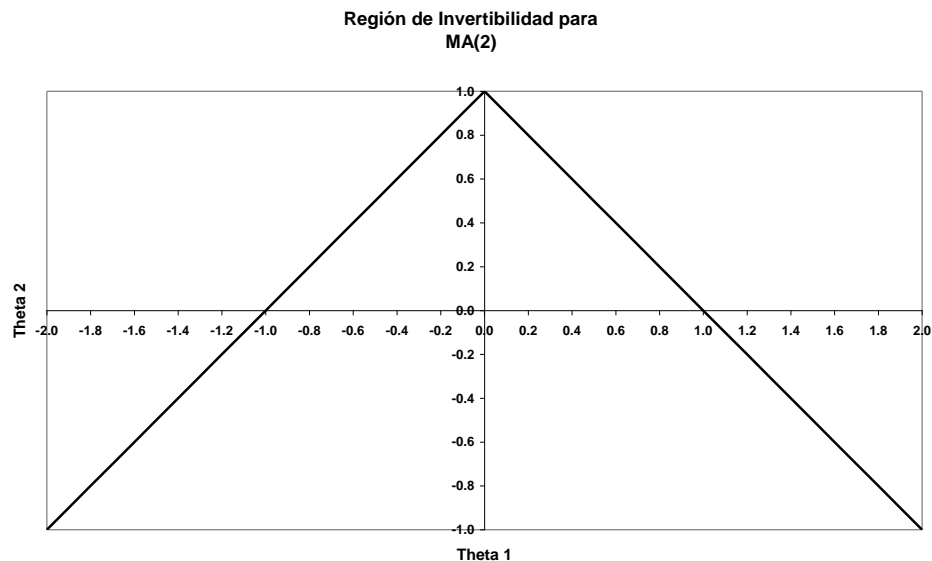
$$\gamma_k = \begin{cases} (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma^2 & k = 1 \\ -\theta_2\sigma^2 & k = 2 \\ 0 & k \geq 3 \end{cases} \quad \rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & k = 1 \\ \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & k = 2 \\ 0 & k \geq 3 \end{cases}$$

La forma de su función de autocorrelación determina que la memoria del proceso se limita a dos períodos. Para que el proceso MA(2) sea invertible se requiere que las raíces de la siguiente ecuación se encuentren fuera del círculo unitario.

$$1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 = 0$$

De donde se deducen condiciones alternativas de invertibilidad.

$$|\theta_2| < 1, \quad \theta_2 + \theta_1 < 1, \quad \theta_2 - \theta_1 < 1$$

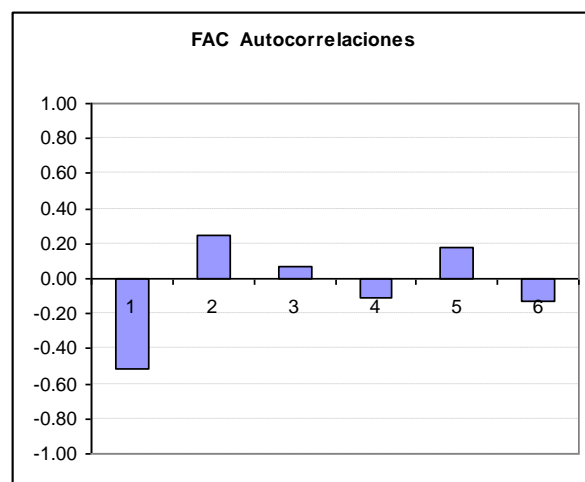
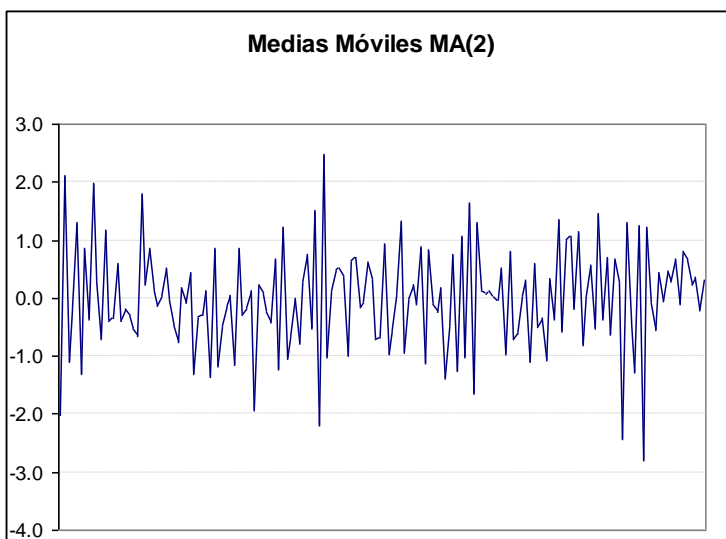


En forma equivalente se establecen restricciones con referencia a los coeficientes de autocorrelación

$$\rho_1^2 \leq 0.5 \quad y \quad |\rho_2| \leq 0.5$$

Ejemplo

A continuación se presenta una realización del proceso $\theta_1 = 0.6$, $\theta_2 = -0.4$ y con media del error cero y varianza del $\sigma^2=0.7$. Las primeras dos autocorrelaciones coinciden en gran medida con los valores teóricos esperados, pero las subsiguientes no se anulan.



k	Empírica	Teórica
1	-0.519674	-0.552632
2	0.249800	0.263158
3	0.073804	0
4	-0.106106	0
5	0.175084	0
6	-0.127639	0

Modelo MA (q)

Se ha referido la forma general del modelo de medias móviles de q parámetros.

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

Cuyos momentos de segundo orden y función de autocorrelación son los siguientes:

$$E(\tilde{Z}_t) = 0$$

$$V(\tilde{Z}_t) = \gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2$$

$$\gamma_k = \begin{cases} -\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k \geq q+1 \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k \geq q+1 \end{cases}$$

De manera análoga a lo observado en los procesos MA(1) y MA(2), la memoria del proceso MA(q) se limita a **q** períodos. Para que el proceso sea invertible se requiere que los q determinantes definidos en la siguiente forma sean positivos.

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & \theta_q \\ \theta_q & -1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \theta_q & \theta_{q-1} \\ \theta_1 & -1 & 0 & \theta_q \\ \theta_q & 0 & -1 & \theta_1 \\ \theta_q & \theta_{q-1} & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \dots \quad D_p = \begin{vmatrix} -1 & 0 \dots & 0 \dots & \theta_q & \theta_{q-1} \dots & \theta_1 \\ \theta_1 & -1 \dots & 0 & 0 & \theta_q \dots & \theta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_1 & \theta_2 \dots & \theta_q & 0 & 0 \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Modelo ARMA (p,q)

Constituyen una unión y generalización de los modelos autorregresivos y de medias móviles. En términos de polinomios de retraso de grados p y q se expresan de la siguiente forma:

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \tilde{Z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t$$

$$\phi(B) \tilde{Z}_t = \theta(B) a_t$$

El proceso ARMA(p,q) se puede referir como un proceso autorregresivo de orden p

$$\phi(B) \tilde{Z}_t = e_t \quad \text{donde} \quad e_t = \theta(B) a_t$$

También como un proceso de medias móviles de orden q.

$\tilde{Z}_t = \theta(B) b_t$ con b siguiendo un proceso autorregresivo de orden p $\phi(B) b_t = a_t$ de forma que $\theta(B) \tilde{Z}_t = \theta(B) \phi(B) b_t = \theta(B) a_t$

Modelo ARMA (1,1)

El más sencillo modelo ARMA involucra un modelo autorregresivo y uno de medias móviles, ambos de primer orden.

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

Cuyos primeros momentos son:

$$E(\tilde{Z}_t) = 0$$

$$\gamma_k \begin{cases} \phi_1 \gamma_1 + (1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1))\sigma^2 & k = 0 \\ \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma^2 & k = 1 \\ \phi \gamma_{k-1} & k \geq 2 \end{cases}$$

Los valores de γ_0 y γ_1 se pueden obtener en función de los parámetros autorregresivo y de medias móviles a partir del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + (1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1))\sigma^2 \\ \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \theta_1 \sigma^2 \end{aligned}$$

Cuya solución es

$$\gamma_0 = \frac{(1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2)\sigma^2}{1 - \phi_1^2}$$

$$\gamma_1 = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)\sigma^2}{1 - \phi_1^2}$$

De donde se deduce que la función de autocovarianza se puede expresar:

$$\gamma_k = \frac{\phi_1^{k-1}(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)\sigma^2}{1 - \phi_1^2} \quad \text{para } k=1,2,3,\dots$$

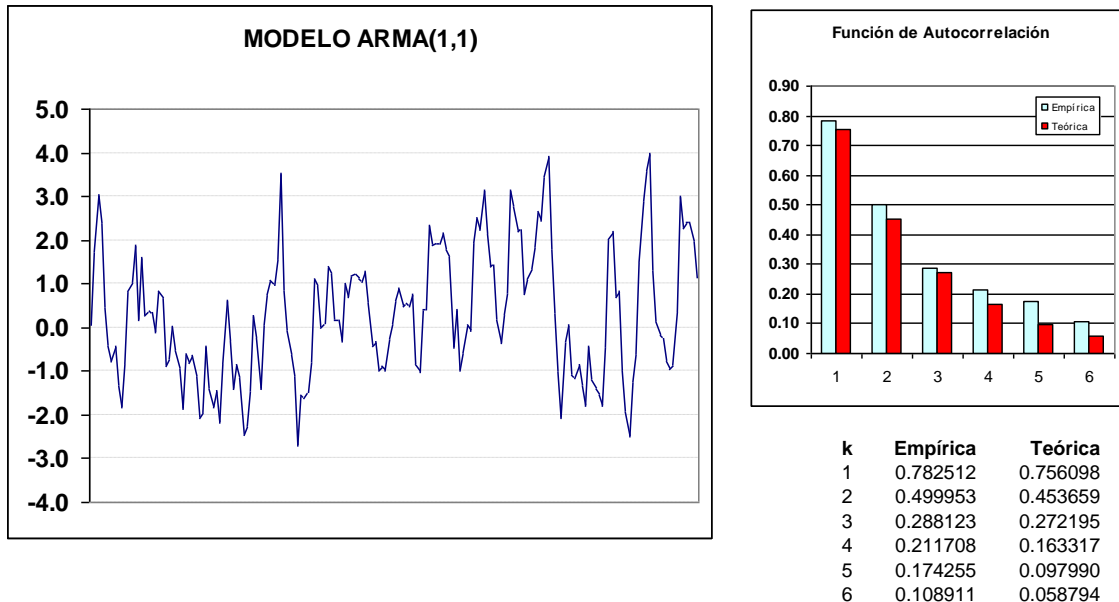
De donde la función de autocorrelación está dada por:

$$\rho_k = \frac{\phi_1^{k-1}(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2} \quad \text{para } k=1,2,3,\dots$$

Si se cumple la condición de estacionalidad $|\phi_1| < 1$ entonces la función de autocorrelación experimenta un decaimiento exponencial.

Ejemplo

A continuación se presenta una realización del proceso $\phi_1 = 0.6$, $\theta_1 = 0.4$ y con media del error cero y varianza del $\sigma^2=1.0$. Obsérvese la caída exponencial de las autocorrelaciones empíricas y teóricas que presentan una elevada coincidencia.



Modelo ARIMA (p,d,q)

Los modelos revisados plantean que los procesos son estacionarios, sin embargo para el caso de ciertos procesos no estacionarios, es posible lograr la estacionariedad con la aplicación de diferencias a la serie original. Se ha visto que al aplicar el operador diferencia ∇^d en forma sucesiva se logra eliminar tendencias de tipo polinomial y a la serie resultante ya estacionaria se le puede ajustar un modelo de tipo ARMA.

$$W_t = \nabla^d Z_t \text{ con } d \geq 1$$

Así un modelo ARIMA(p,d,q) queda definido en términos de los operadores de diferencia y retraso de la siguiente forma:

$$\phi(B) \nabla^d Z_t = \theta(B) a_t$$

Al sustituir se tiene un ARMA(p,q) para W_t

$$\phi(B) W_t = \theta(B) a_t$$

El adjetivo integrado hace alusión a que Z_t se obtiene al despejar de W_t e invertir el operador ∇^d y da como resultado una suma infinita o una integración de términos W_t .

$$Z_t = \nabla^{-d} W_t \text{ con } d \geq 1$$

Por ejemplo, para $d=1$

$$\nabla^{-1} = (1 - B)^{-1} = 1 + B + B^2 + B^3 + \dots$$

Para que el modelo sea estacionario e invertible se requiere que las raíces de $\phi(x) = 0$ y $\theta(x) = 0$ se encuentren fuera del círculo unitario.

La no estacionariedad de la serie de tiempo se puede deber a que la varianza no sea constante esto es se tenga σ_t^2 asociada a cada período como función de su media μ_t . La estabilización de la varianza se logra a través de una función potencia (The use of transformations, Biométrie, Bartlett, 3,39,1947) del tipo:

$$f(\mu_t) \propto \mu_t^{2(1-\lambda)}$$

de donde

$$T(\mu_t) \propto \begin{cases} \mu_t^\lambda & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \log(\mu_t) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Se sugiere entonces aplicar transformaciones del tipo

$$W_t = T(Z_t) = \begin{cases} Z_t^\lambda & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \log(Z_t) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

La forma de elegir la mejor transformación se discutirá más adelante con mayor detalle.

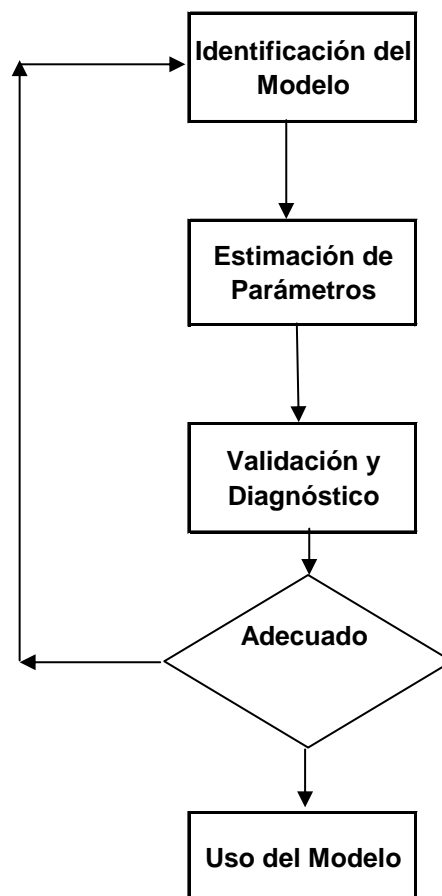
Construcción de Modelos ARIMA

Los modelos de la clase ARIMA, como se ha visto, incluyen varios tipos de parámetros cuyos valores son desconocidos. La forma específica del modelo más conveniente dentro de la clase ARIMA es una incógnita. En consecuencia se tienen que aplicar herramientas y procedimientos adicionales para reducir las alternativas y seleccionar el mejor modelo para una serie dada. La primera

recomendación que se hace es la de reducir el número de parámetros tanto como sea posible, esto es la parsimonia es la primera regla que hay que tomar en cuenta.

Otro aspecto esencial es que estos modelos requieren un mínimo de 50 observaciones para obtener resultados satisfactorios. De hecho Box y Jenkins recomiendan 100 ó más observaciones. Los mismos autores proponen una serie de etapas que constituyen un proceso iterativo para alcanzar un buen modelo, pues es usual que no se tenga una respuesta satisfactoria al primer intento. Estas etapas son Identificación, Estimación y Diagnóstico, las cuales aplicadas secuencialmente y con ayuda de herramientas auxiliares para cada etapa llevan a un proceso convergente hacia la mejor solución. En la siguiente sección se comentará cada etapa, así como sus herramientas auxiliares.

PROCEDIMIENTO ITERATIVO PARA CONSTRUIR MODELOS



Identificación.

En esta etapa se efectuarán pruebas de estacionariedad para determinar las necesidades de transformación y diferenciación de la serie y los órdenes de los parámetros autorregresivos y de medias móviles que se necesitarán.

Estacionarización.

La estrategia de análisis sugiere que en primer término se establezca la varianza. En su caso la búsqueda de una transformación adecuada es el primer objetivo. Se pretende encontrar un exponente λ de manera que el siguiente cociente sea constante:

$$\frac{\sigma_t}{\mu^{1-\lambda}} = Cte \text{ para } t = 1, 2, \dots, n$$

La serie transformada como se mencionó, será:

$$W_t = T(Z_t) = \begin{cases} Z_t^\lambda & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \log(Z_t) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

En donde μ y σ_t representan la media y la desviación estándar de la variable Z_t y n es el número de observaciones. Como se dispone de una sola realización del modelo, una alternativa propuesta por Víctor Guerrero es dividir la serie en H grupos contiguos del mismo tamaño y calcular estimaciones de la media y desviación estándar para cada grupo (S_h, \bar{Z}_h) y construir una tabla para evaluar cada valor del exponente.

Ejemplo

Considere la serie de valores del Índice Nacional de Precios al Consumidor de enero de 1969 a agosto de 1976.

INDICE NACIONAL DE PRECIOS AL CONSUMIDOR INPC								
Año	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976
Enero	30.210	31.780	33.349	34.814	37.117	45.996	54.237	60.759
Febrero	30.321	31.777	33.487	34.923	37.425	47.033	54.537	61.894
Marzo	30.349	31.872	33.614	35.113	37.754	47.396	54.880	62.502
Abril	30.430	31.914	33.786	35.335	38.352	48.041	55.344	62.939
Mayo	30.433	31.979	33.856	35.403	38.761	48.417	56.084	63.380
Junio	30.538	32.173	34.011	35.666	39.076	48.896	57.036	63.633
Julio	30.656	32.330	33.984	35.800	40.078	49.603	57.494	64.170
Agosto	30.690	32.481	34.294	36.037	40.722	50.128	57.992	64.787
Septiembre	30.978	32.561	34.407	36.200	41.691	50.696	58.413	
Octubre	31.301	32.568	34.441	36.226	42.224	51.702	58.713	
Noviembre	31.305	32.744	34.498	36.462	42.744	53.137	59.124	
Diciembre	31.541	33.021	34.660	36.586	44.405	53.552	59.606	

En la siguiente gráfica se observa la serie de datos y lo que se pretende es buscar el mejor valor del exponente λ para homogenizar la varianza. Se toman grupos de 12 meses y se excluye 1976 por tener menos de 12 observaciones.

En los siguientes cuadros se resumen los cálculos correspondientes a $\lambda = -1$. En la hoja de Excel: INPC 1969 1976 PARTICIPANTES.XLS se pueden efectuar los cálculos para otros valores del exponente.

INDICE NACIONAL DE PRECIOS AL CONSUMIDOR INPC

Mes	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
Enero	30.210	31.780	33.349	34.814	37.117	45.996	54.237
Febrero	30.321	31.777	33.487	34.923	37.425	47.033	54.537
Marzo	30.349	31.872	33.614	35.113	37.754	47.396	54.880
Abril	30.430	31.914	33.786	35.335	38.352	48.041	55.344
Mayo	30.433	31.979	33.856	35.403	38.761	48.417	56.084
Junio	30.538	32.173	34.011	35.666	39.076	48.896	57.036
Julio	30.656	32.330	33.984	35.800	40.078	49.603	57.494
Agosto	30.690	32.481	34.294	36.037	40.722	50.128	57.992
Septiembre	30.978	32.561	34.407	36.200	41.691	50.696	58.413
Octubre	31.301	32.568	34.441	36.226	42.224	51.702	58.713
Noviembre	31.305	32.744	34.498	36.462	42.744	53.137	59.124
Diciembre	31.541	33.021	34.660	36.586	44.405	53.552	59.606
Z_h	30.729333	32.266667	34.032250	35.713750	40.029083	49.549750	56.955000
S_h	0.445266	0.412589	0.428588	0.600719	2.342261	2.388577	1.888120

SERIE TRANSFORMADA

Lamda =

-1.000 Exponente

2.000

Año	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
Enero	912.644	1009.968	1112.156	1212.015	1377.672	2115.632	2941.652
Febrero	919.363	1009.778	1121.379	1219.616	1400.631	2212.103	2974.284
Marzo	921.062	1015.824	1129.901	1232.923	1425.365	2246.381	3011.814
Abril	925.985	1018.503	1141.494	1248.562	1470.876	2307.938	3062.958
Mayo	926.167	1022.656	1146.229	1253.372	1502.415	2344.206	3145.415
Junio	932.569	1035.102	1156.748	1272.064	1526.934	2390.819	3253.105
Julio	939.790	1045.229	1154.912	1281.640	1606.246	2460.458	3305.560
Agosto	941.876	1055.015	1176.078	1298.665	1658.281	2512.816	3363.072
Septiembre	959.636	1060.219	1183.842	1310.440	1738.139	2570.084	3412.079
Octubre	979.753	1060.675	1186.182	1312.323	1782.866	2673.097	3447.216
Noviembre	980.003	1072.170	1190.112	1329.477	1827.050	2823.541	3495.647
Diciembre	994.835	1090.386	1201.316	1338.535	1971.804	2867.817	3552.875

Media 944.47367 1041.29382 1158.36242 1275.80273 1607.35652 2460.40758 3247.13994

$\frac{S_h}{Z_h^{1-\lambda}}$ **0.00047144** **0.00039623** **0.00036999** **0.000470856** **0.00145721** **0.000970805** **0.000581472**

Media 0.0006740

Desv Est 0.0004004

CV **0.59407324**

Lamda **CV**

-1.0000 0.59407324

-0.5000 0.63026232

0.0000 0.67289961

0.5000 0.72160722

1.0000 0.74551917

Al ensayar diferentes valores de Lamda, se puede ver que para -1.00 se obtiene el coeficiente de variación más pequeño y se puede concluir que una transformación recíproca puede funcionar bien en este caso.

$$T(Z_t) = 1/Z_t$$

Estabilización del nivel de la serie.

Una vez que se ha seleccionado la transformación apropiada para estabilizar la varianza, se procede a estabilizar el nivel de la serie mediante la aplicación iterada del operador diferencias un número adecuado de veces. El elemento de diagnóstico para determinar el grado de diferenciación de la serie es la función de autocorrelación, ya que un decaimiento rápido de las autocorrelaciones de la serie es un indicativo de que la serie es estacionaria. Sin embargo, en términos empíricos es importante contar con un criterio que permita considerar cuando el valor de un coeficiente de autocorrelación no es significativamente diferente de cero. En general se utilizan las siguientes aproximaciones de la varianza de las autocorrelaciones propuestas por Bartlett.

$$V(r_k) = \frac{1}{n} \sum_{v=-\infty}^{\infty} [\rho_v^2 + \rho_{v+k} \rho_{v-k} - 4\rho_k \rho_v \rho_{v-k} + 2\rho_v^2 \rho_k^2]$$

Para la varianza de una autocorrelación estimada de orden k mayor que un valor q, correspondiente a un proceso MA (q) atrás del cual la autocorrelación teórica es cero, la aproximación de Bartlett se reduce a:

$$V(r_k) = \frac{1}{n} \left\{ 1 + 2 \sum_{v=1}^q \rho_v^2 \right\} \text{ para } k > q$$

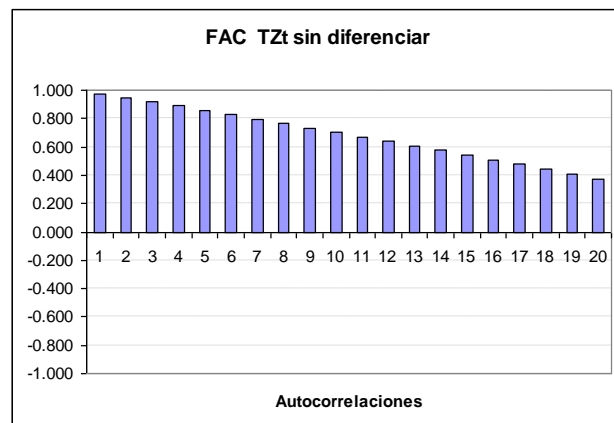
Para el supuesto de que la serie es ruido blanco esto es q=0 entonces

$$V(r_k) = \frac{1}{n} \left(\frac{n-k}{n+2} \right)$$

Para n>50 se considera la aproximación a la distribución normal con media cero y varianza dada por la expresión anterior.

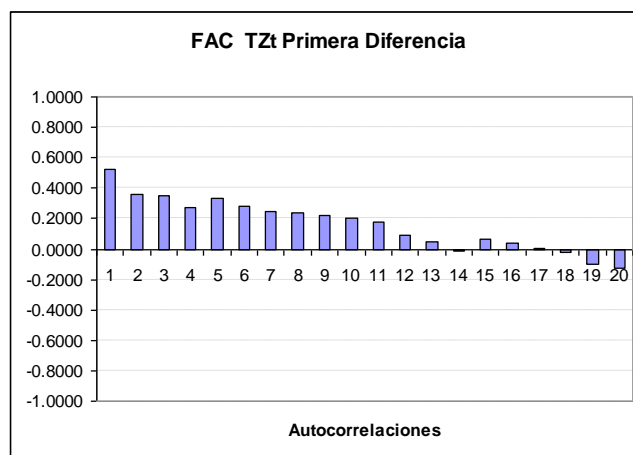
La función de autocorrelación para la serie transformada de INPC sin diferenciación tiene un comportamiento característico de una serie no estacionaria de caída muy lenta.

k	r _k
1	0.973
2	0.946
3	0.918
4	0.889
5	0.859
6	0.828
7	0.797
8	0.765
9	0.735
10	0.704
11	0.672
12	0.640
13	0.608
14	0.575
15	0.542
16	0.509
17	0.476
18	0.443
19	0.409
20	0.375



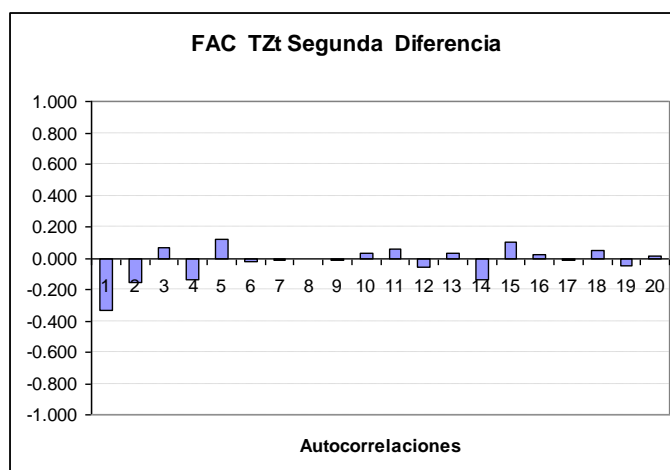
Al aplicar en operador diferencia a la serie transformada y calcular la FAC se observa todavía una caída lenta de las autocorrelaciones lo que sugiere una mayor diferenciación.

k	r _k
1	0.5250
2	0.3630
3	0.3490
4	0.2720
5	0.3320
6	0.2810
7	0.2470
8	0.2350
9	0.2210
10	0.2070
11	0.1740
12	0.0880
13	0.0500
14	-0.0120
15	0.0620
16	0.0390
17	0.0010
18	-0.0250
19	-0.0990
20	-0.1230



Después de tomar una segunda diferencia, la FAC se presenta la primera autocorrelación como dominante, lo que puede sugerir un modelo de medias móviles.

k	r _k
1	-0.334
2	-0.156
3	0.065
4	-0.141
5	0.119
6	-0.018
7	-0.015
8	0.000
9	-0.013
10	0.029
11	0.056
12	-0.058
13	0.029
14	-0.142
15	0.101
16	0.019
17	-0.015
18	0.049
19	-0.051
20	0.013



Autocorrelaciones parciales.

La identificación de un proceso de medias móviles se puede llevar a efecto mediante la función de autocorrelación y de los intervalos de confianza, pero la identificación de un proceso autorregresivo con la sola ayuda de la FAC puede presentar serias dificultades. Las autocorrelaciones parciales cubren esta limitante. Como se sabe, la autocorrelación parcial entre dos variables mide la relación lineal existente entre ellas manteniendo constante la presencia de otras variables. Así, si se considera una proceso autorregresivo de primer orden AR(1), se sabe que la función de autocorrelación adopta la forma: $\rho_k = \phi^k$, esto es una

lenta caída exponencial, en tanto que un proceso de medias móviles corta abruptamente su función de autocorrelación.

Considérese que se desea calcular la autocorrelación lineal de segundo orden excluyendo la influencia de la autocorrelación de primer orden en un modelo AR(1). El coeficiente correlación parcial de segundo orden se calcula en función de los coeficientes de autocorrelación simples de la siguiente forma:

$$\rho_{02.1} = \frac{\rho_{02} - \rho_{01}\rho_{12}}{\sqrt{(1 - \rho_{01}^2)(1 - \rho_{12}^2)}}$$

Sabemos que $\rho_{01} = \rho_{12} = \phi$ y que $\rho_{02} = \phi^2$, entonces el numerador es cero y todas las demás también lo son.

Las autocorrelaciones parciales ϕ_{kj} son calculadas en forma empírica mediante las siguientes expresiones secuenciales:

$$\hat{\phi}_{11} = r_1$$

$$\hat{\phi}_{22} = (r_2 - r_1^2)/(1 - r_1^2)$$

$$\hat{\phi}_{kj} = \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kk}\hat{\phi}_{k-1,k-j} \quad k=2,\dots \quad J=1,2,\dots,k-1$$

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{\left(r_k - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1} r_{k-j} \right)}{\left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1} r_j \right)} \quad k=3,4,\dots$$

Quenouille (1949) demostró que bajo el supuesto de un modelo AR(p) y con $p \leq k-1$ entonces $\hat{\phi}_{kk}$ se distribuye normal con media cero y varianza $1/n$. En consecuencia es muy fácil calcular intervalos de confianza para los coeficientes de autocorrelación al sumar y restar la raíz cuadrada de $1/n$ multiplicada por el coeficiente de confianza (usualmente 1.96, para 95% de confianza).

Los comportamientos característicos de los diferentes procesos se refieren a continuación en forma resumida en el siguiente cuadro y que ayudan al investigador a identificar el tipo de proceso que conviene a la serie en estudio.

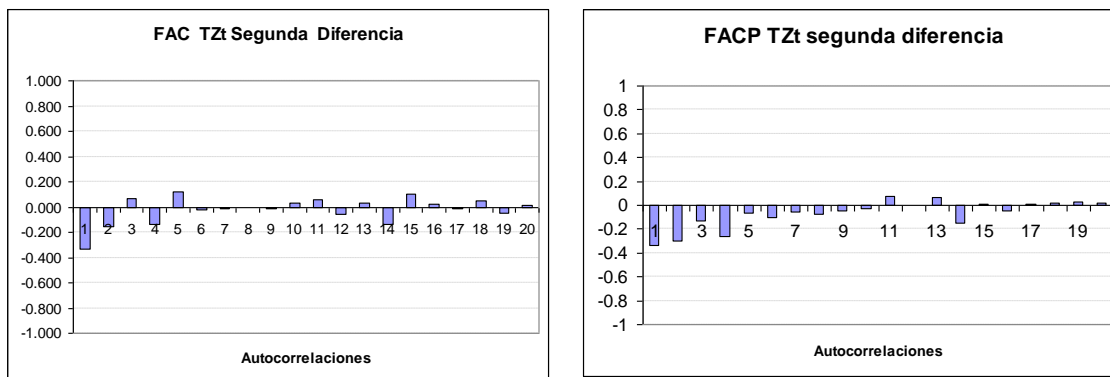
AR(p)	Converge a 0 con $k > p$	Solamente las primeras k autocorrelaciones parciales son distintas de 0
MA(q)	Solamente las primeras q autocorrelaciones son distintas de 0	Sucesión infinita que converge a 0
ARMA(p,q)	Comportamiento irregular de las primeras q autocorrelaciones y después convergencia a 0	Sucesión infinita que converge a 0

Si se vuelve a la serie transformada y tomadas las segundas diferencias del INPC se obtiene el reporte de autocorrelaciones simples y parciales mediante el SPSS. Por nuestra cuenta calculamos errores estándares e intervalos.

k	r_k	ee r_k	1.96(ee r_k)	ϕ_{kk}	ee ϕ_{kk}	1.96(ee ϕ_{kk})
1	-0.334	0.104	0.204	-0.334	0.105	0.207
2	-0.156	0.104	0.203	-0.301	0.105	0.207
3	0.065	0.103	0.202	-0.128	0.105	0.207
4	-0.141	0.102	0.201	-0.263	0.105	0.207
5	0.119	0.102	0.200	-0.068	0.105	0.207
6	-0.018	0.101	0.198	-0.099	0.105	0.207
7	-0.015	0.101	0.197	-0.053	0.105	0.207
8	0.000	0.100	0.196	-0.077	0.105	0.207
9	-0.013	0.099	0.195	-0.047	0.105	0.207
10	0.029	0.099	0.194	-0.024	0.105	0.207
11	0.056	0.098	0.192	0.071	0.105	0.207
12	-0.058	0.098	0.191	0.004	0.105	0.207
13	0.029	0.097	0.190	0.064	0.105	0.207
14	-0.142	0.096	0.189	-0.148	0.105	0.207
15	0.101	0.096	0.187	0.005	0.105	0.207
16	0.019	0.095	0.186	-0.046	0.105	0.207
17	-0.015	0.094	0.185	0.014	0.105	0.207
18	0.049	0.094	0.184	0.016	0.105	0.207
19	-0.051	0.093	0.182	0.031	0.105	0.207
20	0.013	0.092	0.181	0.015	0.105	0.207

A continuación se presentan las gráficas correspondientes. Se puede observar que solamente la primera autocorrelación simple (-0.334) cae fuera del intervalo definido por 1.96 veces el error estándar y como consecuencia se pueden considerar estadísticamente significativas. Las autocorrelaciones parciales

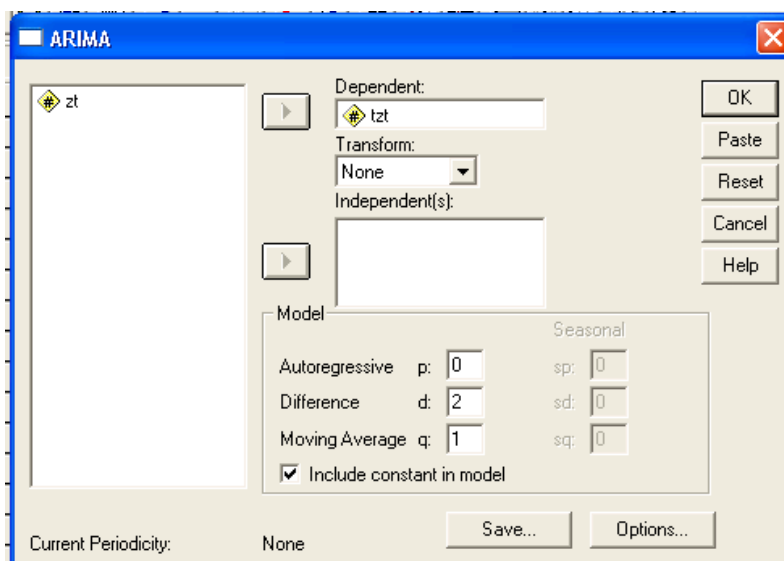
presentan una lenta caída, donde las primeras dos autocorrelaciones parciales y la cuarta son significativamente diferentes de cero. Ello sugiere un modelo de medias móviles apoyado en segundas diferencias de la serie transformada original MA(2,1).



Estimación de parámetros.

El siguiente paso consiste en la estimación de los parámetros del modelo. El método utilizado es el de máxima verosimilitud. El paquete SPSS utiliza el algoritmo de Melard para series que no presentan valores perdidos. Alternativamente utiliza el algoritmo de Kalman cuando existen observaciones perdidas.

El proceso de ajuste del modelo mediante SPSS se realiza mediante el procedimiento ARIMA que se localiza en la opción **Time series** del menú de análisis. En la ventana de diálogo se indica la variable **tzt** que identifica a la variable transformada como el recíproco. Se marca 2 en el parámetro de diferencias y 1 en el parámetros de medias móviles.



En la opción de save se solicita que el pronóstico se extienda hasta la observación 98 para tener 6 pronósticos adicionales a las 92 observaciones que tiene la serie original transformada.

Al ejecutar el procedimiento inmediatamente se presenta el reporte.

Se observa que el proceso iterativo, apoyado en el algoritmo de Marquard y la secuencia de valores desde los iniciales hasta los finales alcanzados después de 5 iteraciones.

Initial values:

MA1 .37551
CONSTANT .00000

Marquardt constant = .001
Adjusted sum of squares = .00000177

Iteration History:

Iteration	Adj. Sum of Squares	Marquardt Constant
1	.00000167	.00100000
2	.00000165	.00010000
3	.00000165	.00001000
4	.00000165	.00000100
5	.00000165	.00000010

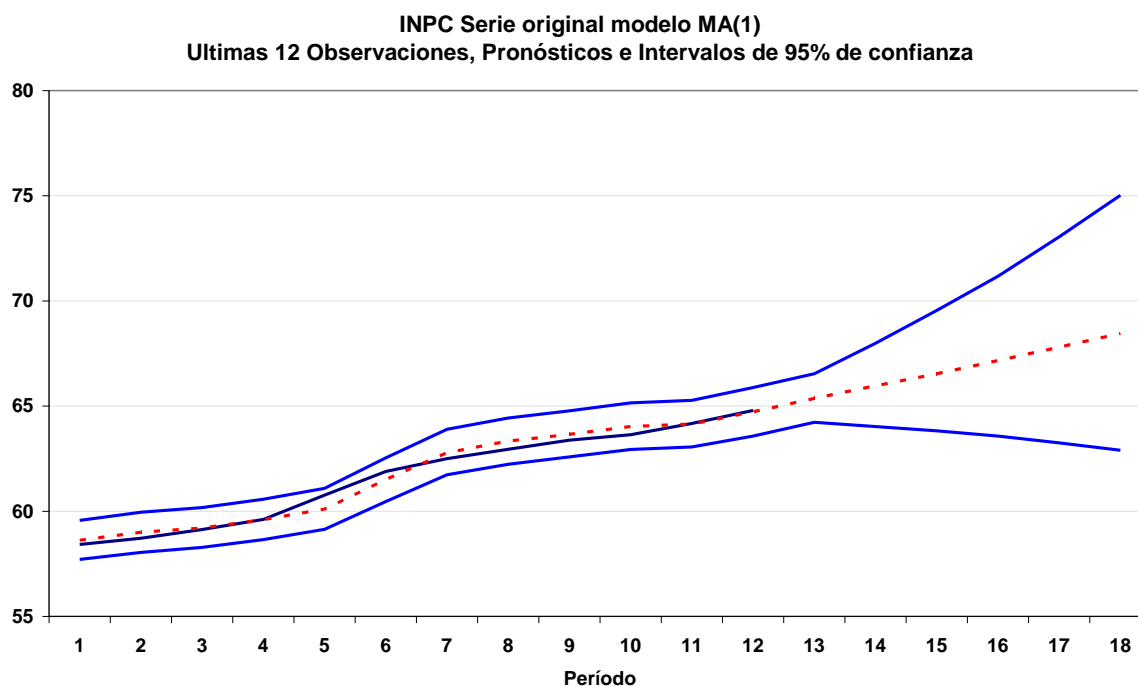
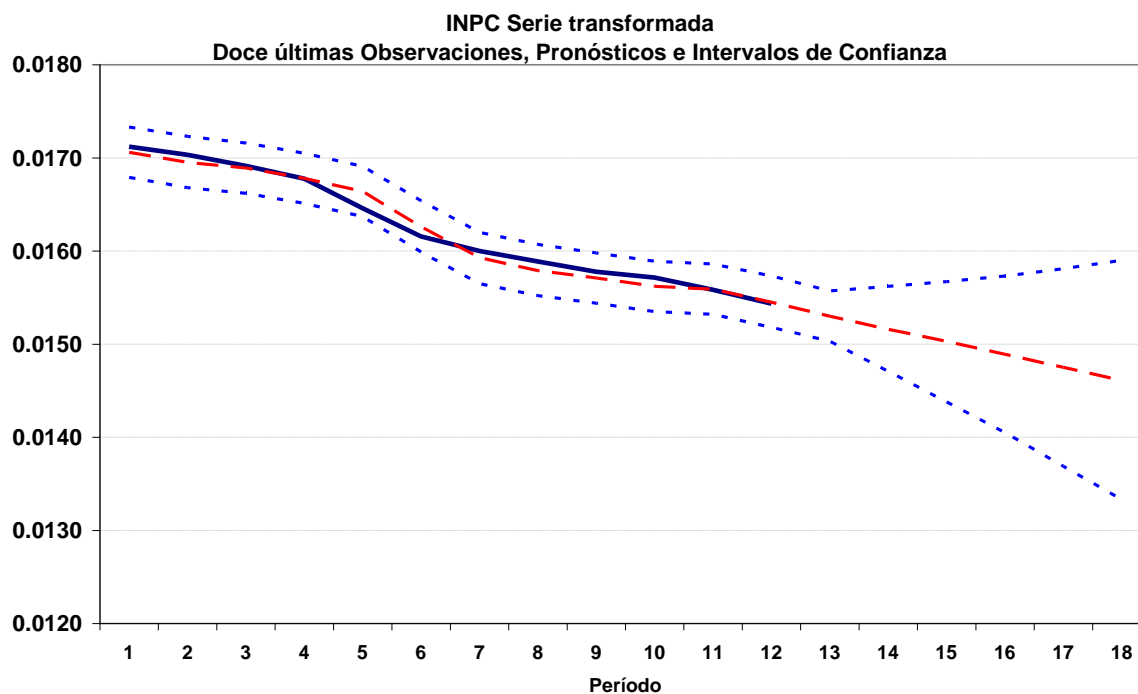
El valor estimado por SPSS para el parámetro de medias móviles θ es 0.68144755 y lo acompaña de su error estándar y el cociente del estimador puntual del parámetro entre el error estándar, para así tener la estadística T, que resulta ser significativamente distinta de 0.

	B	SEB	T-RATIO	APPROX. PROB.
MA1	.68144755	.07872634	8.6559029	.00000000
CONSTANT	-.00000053	.00000469	-.1136877	.90974433

Si ponemos atención a la tabla de datos, se puede observar que SPSS ha incluido nuevas variables. La estimación puntual correspondiente a cada período, el residual, los límites de un intervalo de 95% de para el pronóstico y el error estándar del pronóstico.

	zt	tzt	fit_1	err_1	lcl_1	ucl_1	sep_1
1	30.21000000	.0331016
2	30.32100000	.0329804
3	30.34900000	.0329500	.03286	.00009	.03253	.03319	.00017
4	30.43000000	.0328623	.03288	-.00001	.03259	.03317	.00015
5	30.43300000	.0328591	.03278	.00008	.03250	.03306	.00014
6	30.53800000	.0327461	.03281	-.00006	.03253	.03308	.00014
7	30.65600000	.0326200	.03267	-.00005	.03240	.03295	.00014
8	30.69000000	.0325839	.03253	.00006	.03226	.03280	.00014
9	30.97800000	.0322810	.03251	-.00023	.03224	.03278	.00014
10	31.30100000	.0319479	.03213	-.00019	.03186	.03241	.00014

En la parte baja de la tabla se puede observar que los pronósticos se extienden hasta la observación 98, como se solicitó, lo mismo sucede con los intervalos de confianza. En las siguientes gráficas se observa la serie transformada y la serie en su escala original. Los pronósticos e intervalos de confianza han sido sometidos a la transformación inversa.



Diagnóstico.

Como criterios de diagnóstico de la bondad del modelo se presentan varias estadísticas. En primer término se tiene la suma de cuadrados de los residuales. En este caso 0.00000165

$$SSQ = \sum_{t=1}^n (Z_t - \hat{Z}_t)^2$$

Otra estadística que reporta SPSS es el logaritmo de la función de verosimilitud que se supone alcanza el valor máximo con los estimadores calculados. Para este caso 673.9

$$L = n \ln(\hat{\sigma}_a) - \frac{SSQ}{2\hat{\sigma}_a^2} - \frac{n \ln(2\pi)}{2}$$

Number of residuals	90
Standard error	.00013643
Log likelihood	673.96273
AIC	-1343.9255
SBC	-1338.9258

Analysis of Variance:

	DF	Adj. Sum of Squares	Residual Variance
Residuals	88	.00000165	.00000002

También reporta el criterio de información de Akaike que se calcula en función del logaritmo de la verosimilitud y el número de parámetros.

$$AIC = -2L + 2m$$

Donde **m** es el número de parámetros del modelo

Otra estadística adicional es el Criterio Bayesiano de Schwartz que SPSS calcula de la siguiente forma:

$$SBC = -2L - \ln(n)m$$

Modelos Estacionales

Los modelos autorregresivos, integrados y de medias móviles que se han expuesto bajo condiciones de estacionariedad o de no estacionariedad y las diferencias y transformaciones que se requieren para inducir la estacionariedad resultan de bastante utilidad, sin embargo en los fenómenos reales son frecuentes los comportamientos estacionales motivados por el tiempo, cuyos cambios de temperatura, regímenes pluviométricos y otros fenómenos atmosféricos afectan el comportamiento de la economía. También los hábitos de comportamiento colectivo, tales como los períodos vacacionales y migraciones temporales tienen efectos importantes y dan lugar a cambios cíclicos. Antes se han visto métodos descriptivos para expresar este tipo de series en forma aditiva o multiplicativa en sus componentes de tendencia, estacionales y cíclicos. Una extensión de los modelos ARIMA revisados propone una alternativa más eficiente que los métodos descriptivos y aún que métodos basados en series de Fourier o combinaciones de funciones basadas en senos y cosenos.

Como analogía al operador diferencia utilizado anteriormente se introduce el operador diferencia estacional:

$$\nabla_E^k Z_t = (1 - B^E)^k Z_t$$
$$= \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} (-1)^j Z_{t-jE} \quad \text{para } k=0,1,2,\dots \text{ y } E=1,2,\dots$$

Si $E=12$ y $k=2$ se tendría:

$$\nabla_{12}^2 Z_t = (1 - B^{12})^2 Z_t = Z_t - 2Z_{t-12} + Z_{t-24}$$

Entonces se pueden definir modelos estrictamente estacionales de la forma:

$$\Phi(B^E) \nabla_E^D (Z_t - \mu) = \Theta(B^E) a_t \quad \text{o siguiendo la notación más simple}$$

$$\text{ARIMA } (0,0,0)(P,D,Q)_E$$

Modelo ARIMA (0,0,0)(1,0,0)_E

El modelo estacional autorregresivo de primer orden, en analogía con el AR(1), constituye el más sencillo.

$$\tilde{Z}_t = \Phi \tilde{Z}_{t-E} + a_t \quad \text{donde} \quad \tilde{Z}_t = Z_t - \mu$$

Evidentemente su esperanza es nula, pero su varianza está dada por:

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= V(\tilde{Z}_t) = E(\tilde{Z}_t^2) = E[(\Phi \tilde{Z}_{t-E} + a_t)^2] \\
 &= E[\Phi^2 \tilde{Z}_{t-E}^2 + 2\Phi \tilde{Z}_{t-E} a_t + a_t^2] \\
 &= \Phi^2 E(\tilde{Z}_{t-E}^2) + 2\Phi E(\tilde{Z}_{t-E} a_t) + E(a_t^2) \\
 &= \Phi^2 \gamma_0 + \sigma^2
 \end{aligned}$$

De donde $\gamma_0 = \Phi^2 \gamma_0 + \sigma^2$ y al despejar se tiene

$$\gamma_0 = \sigma^2 / (1 - \Phi^2)$$

Las autocovarianzas se expresan de manera general por:

$$\gamma_{iE} = \Phi^i \sigma^2 / (1 - \Phi^2) \text{ para } i > 0$$

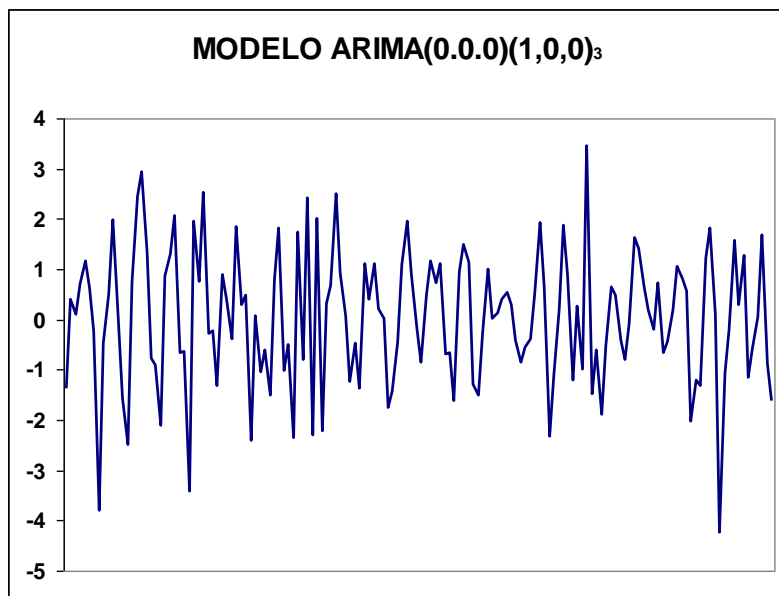
$$\text{y } \gamma_k = 0 \text{ para } k \neq iE$$

De donde es fácil concluir que la FAC se expresa como:

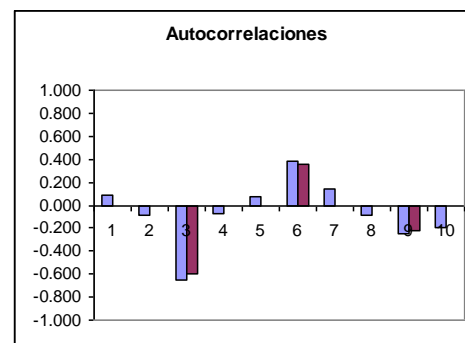
$$\rho_k = \begin{cases} \Phi^i & \text{para } k = iE \text{ con } i = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{para } k \neq iE \end{cases}$$

Ejemplo

A continuación se presenta una realización del proceso $\tilde{Z}_t = -0.6Z_{t-3} + a_t$ con media del error cero y varianza del $\sigma^2 = 1.0$. Obsérvese la significancia de las autocorrelaciones que son múltiplo del parámetros de estacionalidad (3) y la oscilación de su signo.



Función de Autocorrelación		
Período	Empírica	Teórica
1	0.091	0.000
2	-0.089	0.000
3	-0.655	-0.600
4	-0.076	0.000
5	0.077	0.000
6	0.389	0.360
7	0.141	0.000
8	-0.082	0.000
9	-0.250	-0.216
10	-0.201	0.000



Modelo ARIMA (0,0,0)(0,0,1)_E

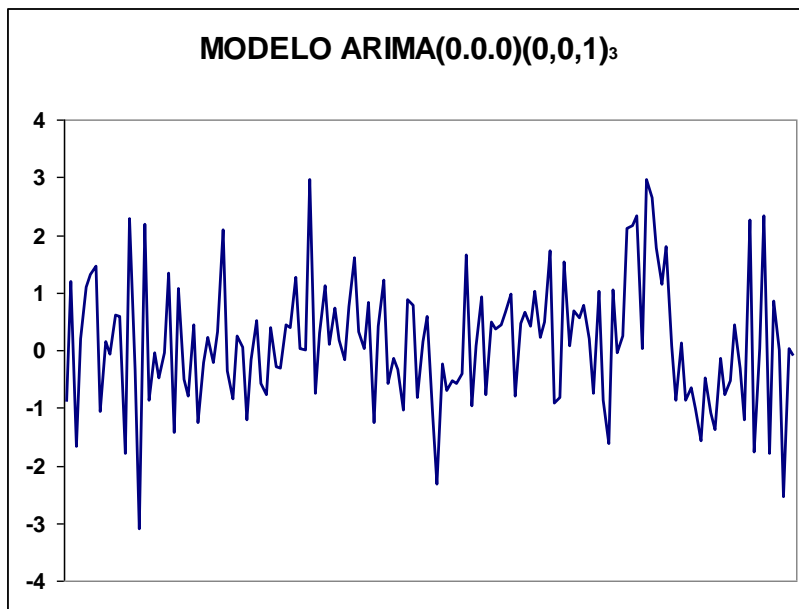
El modelo estacional de medias móviles de primer orden, en analogía con el MA(1), es el siguiente modelo que lógicamente resulta interesante revisar.

$$\tilde{Z}_t = a_t - \Theta a_{t-E}$$

Sus autocovarianzas y función de autocorrelación se resumen en las siguientes expresiones.

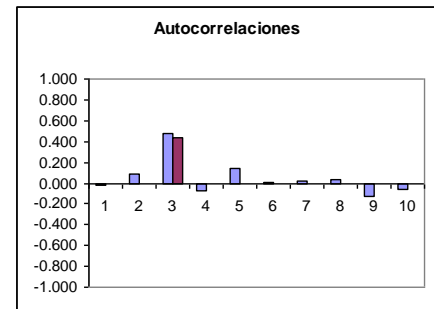
$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \Theta^2)\sigma^2 & \text{para } k = 0 \\ -\Theta\sigma^2 & \text{para } k = E \\ 0 & \text{en otro lado} \end{cases} \quad \rho_k = \begin{cases} \Theta/(1 + \Theta^2) & \text{para } k = E \\ 0 & \text{para } k \neq E \end{cases}$$

Por ejemplo, obsérvese una realización del modelo $\tilde{Z}_t = +a_t - 0.6a_{t-3}$. La función de autocorrelación presenta un valor significativo par $k=3$ y los demás coeficientes se anulan, aunque la autocorrelación empírica presenta algunos valores distintos de cero, pero no significativos.



Función de Autocorrelación

Período	Empírica	Teórica
1	-0.016	0.000
2	0.082	0.000
3	0.471	0.441
4	-0.072	0.000
5	0.137	0.000
6	0.004	0.000
7	0.014	0.000
8	0.036	0.000
9	-0.125	0.000
10	-0.063	0.000



Modelo Multiplicativo ARIMA (p,d,q)(P,D,Q)_E

Las series que observamos en la práctica desde luego presentan una combinación de efectos que en observaciones mensuales se pueden asociar tanto a los meses recientes, como a los mismos meses de años anteriores.

Así los efectos puramente estacionales se combinan con efectos de corto plazo.

$$\Phi(B^E) \nabla_E^D (Z_t - \mu) = \Theta(B^E) a_t$$

Donde los errores a_t no se comportan como ruido blanco sino generadas por un proceso ARIMA(p,d,q)

$$\phi(B) \nabla^d a_t = \theta(B) a_t$$

La multiplicación de ambos efectos da lugar al modelo general

$$\phi(B) \Phi(B^E) \nabla^d \nabla_E^D (Z_t - \mu) = \theta(B) \Theta(B^E) a_t$$

Evidentemente las expresiones para las autocovarianzas y funciones de autocorrelación se complican notablemente y como consecuencia el proceso de identificación. El analista se ve en la necesidad de construir su modelo por etapas y analizar varios modelos alternativos.

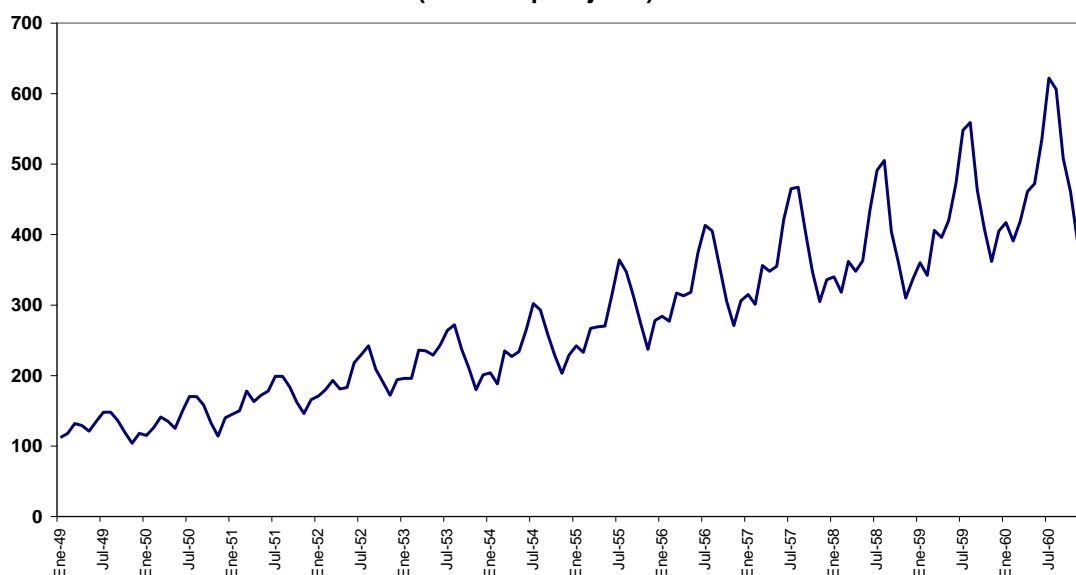
Ejemplo Serie Línea Aérea.

Como ejemplo de un modelo multiplicativo estacional considérese los datos de la llamada serie G que Box y Jenkins incluyen en su texto. Estos 144 datos corresponden al número de pasajeros internacionales en miles que viajaron por una compañía aérea entre enero de 1949 y diciembre de 1960.

Mes	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
Ene	112	115	145	171	196	204	242	284	315	340	360	417
Feb	118	126	150	180	196	188	233	277	301	318	342	391
Mar	132	141	178	193	236	235	267	317	356	362	406	419
Abr	129	135	163	181	235	227	269	313	348	348	396	461
May	121	125	172	183	229	234	270	318	355	363	420	472
Jun	135	149	178	218	243	264	315	374	422	435	472	535
Jul	148	170	199	230	264	302	364	413	465	491	548	622
Ago	148	170	199	242	272	293	347	405	467	505	559	606
Sep	136	158	184	209	237	259	312	355	404	404	463	508
Oct	119	133	162	191	211	229	274	306	347	359	407	461
Nov	104	114	146	172	180	203	237	271	305	310	362	390
Dic	118	140	166	194	201	229	278	306	336	337	405	432

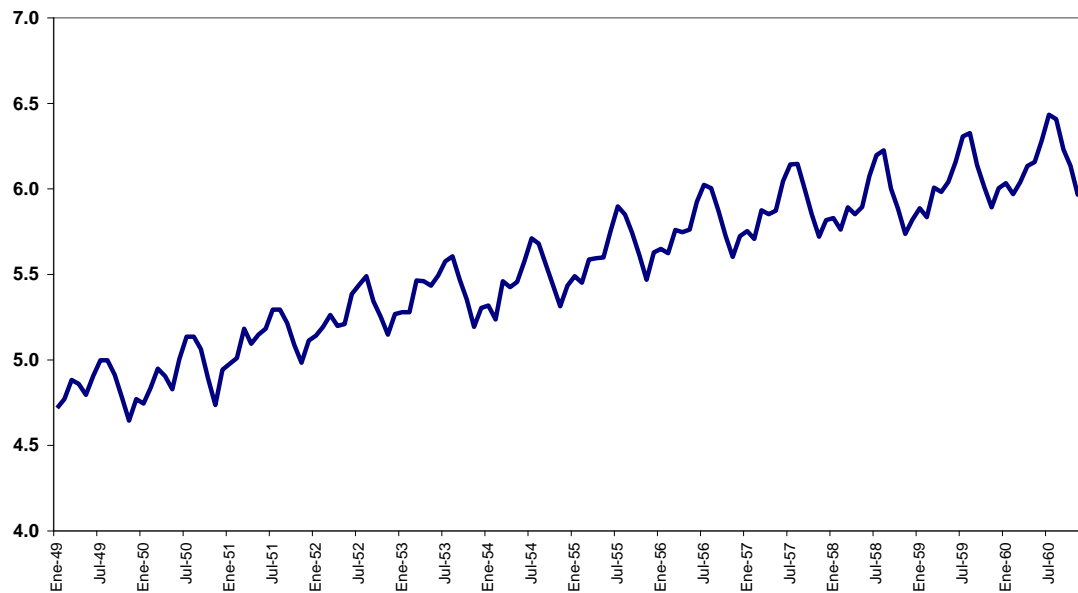
En principio se procede a graficar la serie y se observa un evidente efecto de incremento de la varianza directamente relacionada con el tiempo. Los puntos máximos corresponden a los meses de julio y agosto de cada año y los mínimos a noviembre.

Datos de Pasajeros de Línea Aérea
Serie G de Box y Jenkins
 (miles de pasajeros)



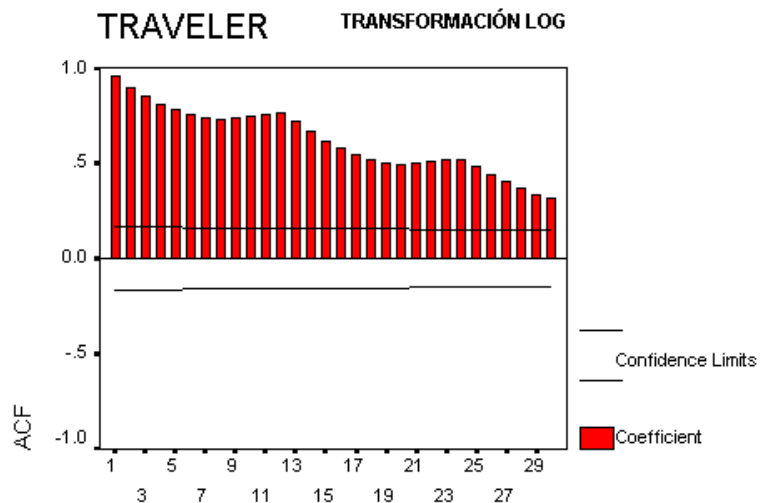
Se comienza por estabilizar la varianza de la serie se procede a transformarla y se toma el logaritmo natural. En la siguiente gráfica se puede apreciar que la serie presenta un comportamiento estable, resta sin embargo corregir la tendencia para dejarla estacionaria.

Datos Logaritmo Natural de Pasajeros de Línea Aérea
Serie G de Box y Jenkins



A continuación se procede a calcular la función de autocorrelaciones simples FAC y la función de autocorrelaciones parciales para la serie transformada. Los valores y gráfica de la función de autocorrelación muestran el comportamiento característico de una serie no estacionaria. Esto es, elevados valores y muy lento descenso. La oscilación de la FAC se debe al efecto estacional.

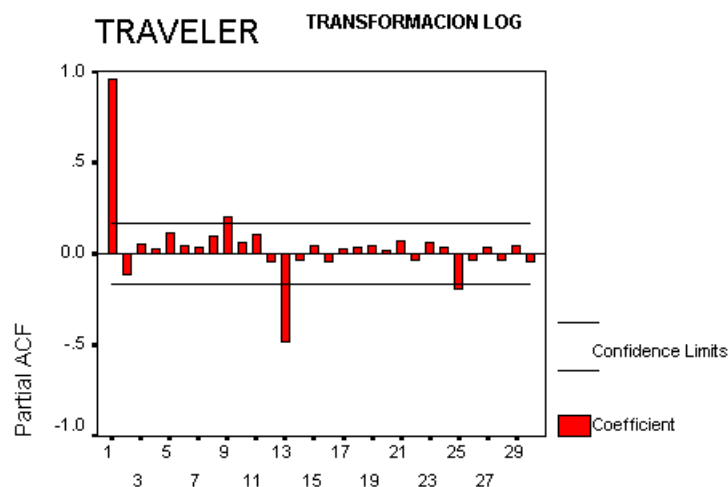
AUTOCORRELACION			
k	FAC	k	FAC
1	0.954	16	0.576
2	0.899	17	0.544
3	0.851	18	0.519
4	0.808	19	0.501
5	0.779	20	0.490
6	0.756	21	0.498
7	0.738	22	0.506
8	0.727	23	0.517
9	0.734	24	0.520
10	0.744	25	0.484
11	0.758	26	0.437
12	0.762	27	0.400
13	0.717	28	0.364
14	0.663	29	0.337
15	0.618	30	0.315



La función de autocorrelación parcial muestra valores significativos para $k=1,13$ y 25 .

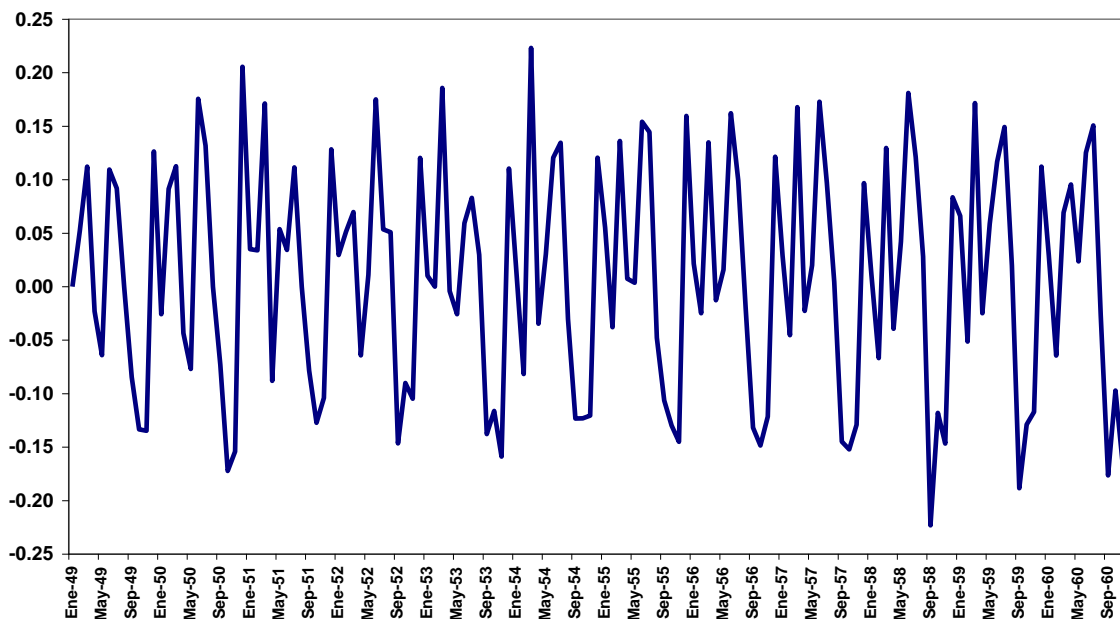
AUTOCORRELACION PARCIAL

k	FACP	k	FACP
1	0.954	16	-0.044
2	-0.118	17	0.028
3	0.054	18	0.037
4	0.024	19	0.042
5	0.116	20	0.014
6	0.044	21	0.073
7	0.038	22	0.033
8	0.100	23	0.061
9	0.204	24	0.031
10	0.064	25	-0.194
11	0.106	26	-0.035
12	-0.042	27	0.036
13	-0.485	28	-0.035
14	-0.034	29	0.044
15	0.042	30	-0.045



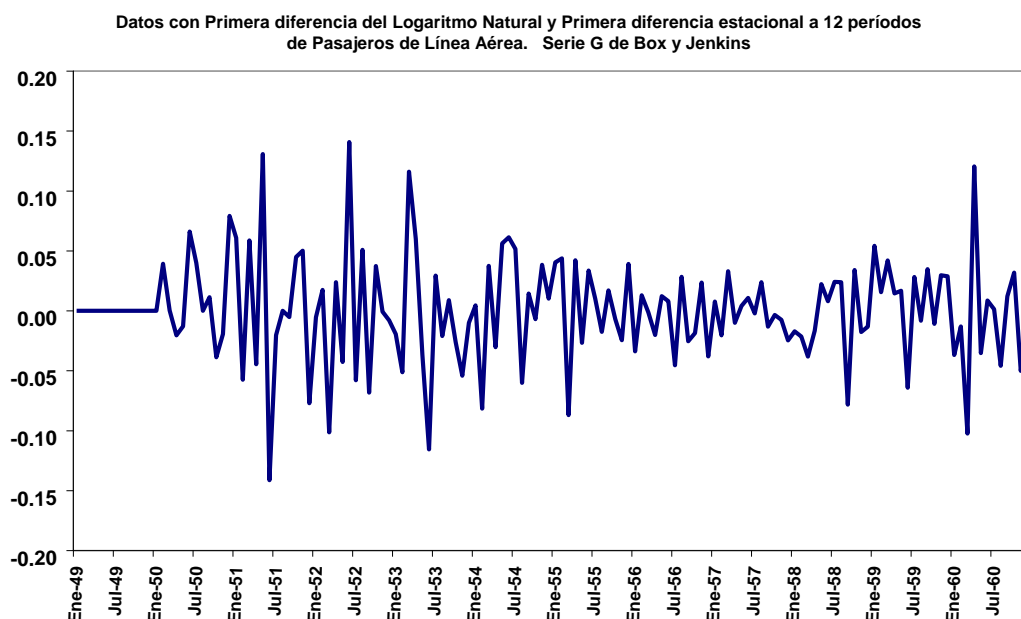
Se procede entonces a diferenciar la serie para eliminar la tendencia. La siguiente gráfica muestra que la serie es estacionaria. El patrón repetitivo muestra la influencia de la parte estacional.

Datos con Primera diferencia del Logaritmo Natural de Pasajeros de Línea Aérea
Serie G de Box y Jenkins



Se procede ahora a tomar una primera diferencia estacional de 12 períodos. La gráfica de la serie con la aplicación de esta segunda diferencia ya no muestra el patrón sistemático y no aparecen las primeras 13 observaciones, pues la primera

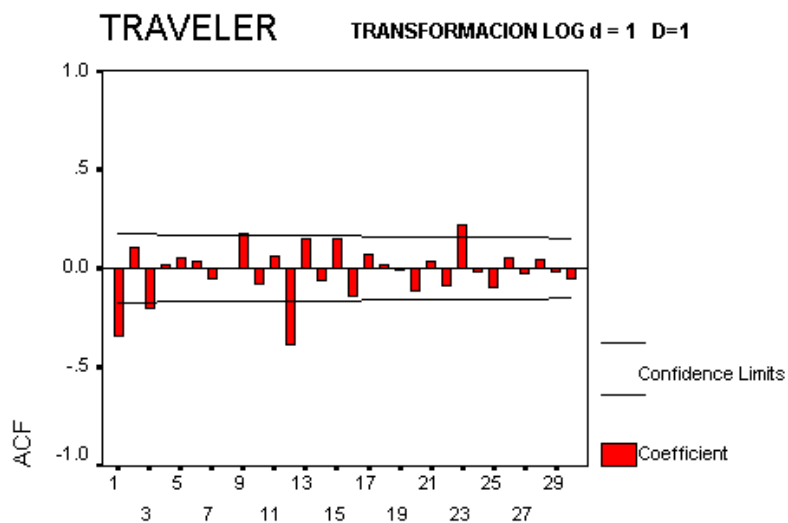
se pierde por la diferencia simple y las siguientes 12 para contar con los desplazamientos que requiere la diferencia estacional.



A continuación se vuelven a calcular las funciones de autocorrelación simples y parciales para tratar de identificar un modelo o modelos alternativos.

AUTOCORRELACION

k	FAC	k	FAC
1	0.341	16	-0.139
2	0.105	17	0.070
3	-0.202	18	0.016
4	0.021	19	-0.011
5	0.056	20	-0.117
6	0.031	21	0.039
7	-0.056	22	-0.091
8	-0.001	23	0.223
9	0.176	24	-0.018
10	-0.076	25	-0.100
11	0.064	26	0.049
12	-0.387	27	-0.030
13	0.152	28	0.047
14	-0.058	29	-0.018
15	0.150	30	-0.051

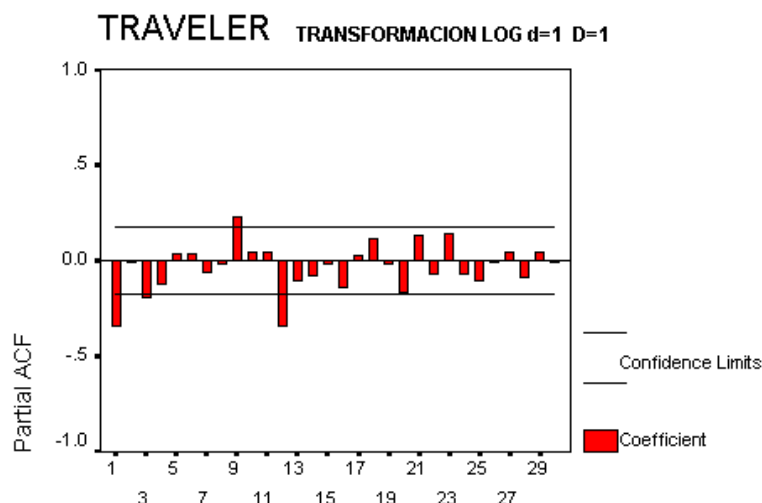


La FAC muestra correlaciones significativas para $k=1$, 12 y 23 cierta caída con signos alternados después de $k=1$ y 12.

La autocorrelación parcial por su parte muestra valores significativos para $k=1,9$ y 12 . También presenta cierto aspecto de caída exponencial después de $k=1$ y 12 . Se podría considerar que hay presencia tanto de elementos autorregresivos, como de elementos de medias móviles.

AUTOCORRELACION PARCIAL

k	FACP	k	FACP
1	-0.341	16	-0.140
2	-0.013	17	0.026
3	-0.193	18	0.115
4	-0.125	19	-0.013
5	0.033	20	-0.167
6	0.035	21	0.132
7	-0.060	22	-0.072
8	-0.020	23	0.143
9	0.226	24	-0.067
10	0.043	25	-0.103
11	0.047	26	-0.010
12	-0.339	27	-0.044
13	-0.109	28	-0.090
14	-0.077	29	0.047
15	-0.022	30	-0.005



En observancia de parsimonia, se plantea un modelo con un parámetro autorregresivo en la parte simple y un parámetro de medias móviles en la parte estacionaria, esto es un modelo $ARIMA(1,1,0)(0,1,1)_{12}$.

Se procede al ajuste mediante SPSS con los siguientes resultados después de 5 iteraciones:

$$\hat{\phi} = -0.34112$$

$$\hat{\Theta} = 0.40120$$

Constante = -0.00006

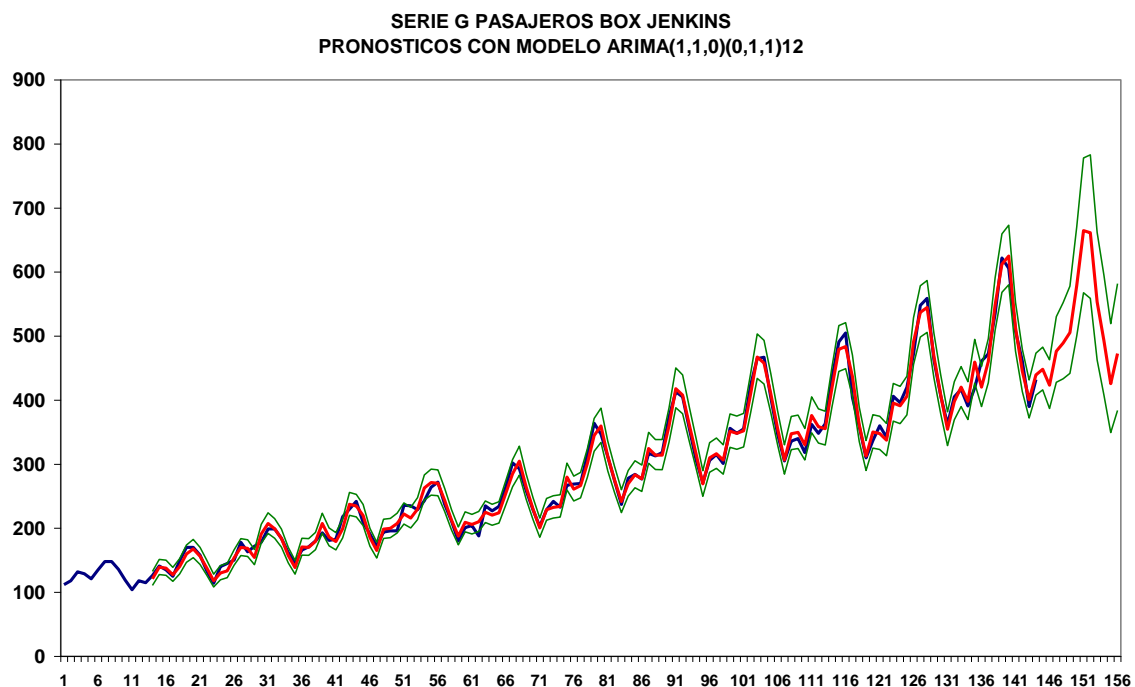
Esto es el modelo quedaría de la forma: $(1 + 0.34112B)Z_t = (1 - 0.4012B^{12})a_t$

Las estadísticas de ajuste que reporta SPSS son:

Error estándar	0.03740388
Log likelihood	243.747
Criterio de Información de Akaike	- 481.49399
Criterio Bayesiano de Shwartz	- 472.8684
Suma de cuadrados	0.18561353
Grados de libertad	128
Varianza residual	0.00139905

Parámetros	Error estándar	Tcalculada	Probabilidad
$\hat{\phi} = -0.33951036$	0.08244750	-4.1178976	0.00006811
$\hat{\Theta} = 0.56291903$	0.08546761	6.5863437	0.00000000
Cte -0.00017482	0.000122245	-0.1430072	0.88650939

La serie de observaciones en escala original, las predicciones incluyendo un año adicional y los intervalos de 95% de confianza para las predicciones se pueden observar en la siguiente gráfica.



Para confirmar que el modelo es adecuado se calcularon las autocorrelaciones para los residuales y éstas resultaron no significativas. Así se puede considerar que los residuales se comportan como blanco.

Box y Jenkins ajustan un modelo alternativo para esta serie de la forma $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_{12}$ que proporciona resultados muy similares en los pronósticos y en los criterios de Akaike y Shwartz. Ello nos lleva a la conclusión de que para una serie en particular pueden existir diferentes alternativas y se deben evaluar bajo diferentes puntos de vista considerando siempre la parsimonia, la bondad de ajuste, la interpretabilidad y la capacidad de pronóstico. El modelaje de series de tiempo responde a una técnica pero también a un arte.