Tarea 3

Estadística Bayesiana

Distribución *a priori* y Estimación

Monografía de Estadística Bayesiana, Arturo Erdely Ruiz y Eduardo Gutiérrez Peña

1. Información subjetiva. Sea T la temperatura máxima (en grados Celsius) que se registrará en el sur de la Ciudad de México el día de mañana.

(a) Determine subjetivamente (pero lo más honestamente posible) el valor de a tal que, *en tú opinión*, $\mathbb{P}[T \leq a] = 0.10$ (primer decil).

(b) De la misma manera, determine el valor de b tal que $\mathbb{P}[T \leq b] = 0.50$ (valor mediano).

(c) Finalmente, determine el valor de c tal que $\mathbb{P}[T \leq c] = 0.75$ (tercer cuartil).

(d) Usando solamente las respuestas de los incisos (a) y (b), encuentre la distribución Normal que mejor se ajuste a tus asignaciones. Calcule el valor de $\mathbb{P}[T \leq c]$ bajo esta distribución.

(e) Comparando (c) con (d), ¿hay concordancia? En caso negativo, ¿cuál crees que sea la causa?

2. Invarianza de la distribución inicial de Jeffreys ante reparametrizaciones. Suponga que $Y_1, \ldots, Y_n$ es una muestra de v.a.i.i.d. Exponencial(θ), donde $\mathbb{E}[Y_i] = \theta$. Obtenga la distribución inicial de Jeffreys para θ.

3. Estimación puntual. Obtenga el estimador puntual $\hat{\theta}^* \in \Theta \subset \mathbb{R}$ bajo la siguiente función de utilidad:

$$U(\widehat{\theta}, \theta) = -\left(\frac{\widehat{\theta} - \theta}{\widehat{\theta}} \right)^2$$

4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de n v.a.i.i.d. $Normal(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 conocida. Suponga que la distribución inicial de μ es $\mu \sim Normal(\eta, \tau^2)$ con η y τ^2 conocidas.

(a) Construya un intervalo de credibilidad Bayesiano HPD (*highest posterior density*) del $100(1-\alpha)\%$ para μ.

(b) Construya un intervalo de predicción del $100(1-\alpha)\%$ para X_{n+1}.

(c) Considere una distribución inicial uniforme para μ, haciendo $\tau^2 \to \infty$, obtenga (a) y (b).