UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FINANZAS MATEMÁTICAS UN ENFOQUE UNIFICADO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A :

ARTURO RUBÉN VIZZUETT GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. PABLO PADILLA LONGORIA
2010

DATOS

1. Datos del alumno
   Apellido Paterno: Vizzuett
   Apellido Materno: García
   Nombre(s): Arturo Rubén
   Teléfono: 53 41 23 78
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Carrera: Actuaría
   Número de Cuenta: 302625338

2. Datos del tutor
   Grado: Dr.
   Nombre(s): Pablo
   Apellido Paterno: Padilla
   Apellido Materno: Longoria

3. Datos del sinodal 1
   Grado: M. en C.
   Nombre(s): Jorge Humberto
   Apellido Paterno: Del Castillo
   Apellido Materno: Spindola

4. Datos del sinodal 2
   Grado: Dr.
   Nombre(s): Alberto
   Apellido Paterno: Contreras
   Apellido Materno: Cristán

5. Datos del sinodal 3
   Grado: Act.
   Nombre(s): Alberto
   Apellido Paterno: Cadena
   Apellido Materno: Martínez

6. Datos del sinodal 4
   Grado: Act.
   Nombre(s): Enrique
   Apellido Paterno: Maturano
   Apellido Materno: Rodríguez

7. Datos del trabajo escrito.
   Título: Finanzas matemáticas,
   Subtítulo: un enfoque unificado.
   Número de páginas: 158 p.
   Año: 2010

AGRADECIMIENTOS

A la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, alma mater que me llena de orgullo. Me siento muy feliz por formar parte de ella. Ahí conocí a grandes personas y amigos, con los que compartí lo que ha sido la mejor etapa de mi vida. A pesar de que fue un camino largo y en ocasiones complicado, lo disfruté cada día.

Al Dr. Pablo Padilla Longoria, tutor y amigo, por su ayuda, gran trayectoria y compromiso con la docencia, y por su apoyo para publicar el presente trabajo.
Al Act. Alberto Cadena por su asesoría y también al profesor Agustín Cano, por permitirme el uso de algunas notas de sus cursos.

A mi Abuelita, Ti@s, Prim@s, porque siempre me han demostrado gran unidad, y sé que cuento con su cariño y apoyo incondicional. A mis Abuelos y a mi primo que ya no están aquí, porque fueron los más nobles y cariñosos.

A mis hermanas Ana y Ale, por ser muy inteligentes, lindas y cariñosas. Siempre tendrán mi apoyo y comprensión. Las amo y les deseo mucho éxito en sus carreras.

A mi Padre, quien me vio iniciar este trabajo: Sé que estarías muy feliz y orgulloso de mi, al igual que yo lo estoy de ti, por tu inteligencia, amabilidad, temple, sencillez, carisma, comprensión, apoyo, bondad y amor para todos los que te rodeaban. Mi héroe: la única persona a la que admiro y le brindo todo mi respeto. Eres una mitad de mi ser.
Un gran ejemplo de armonía en vida y muerte. No sólo fuiste el mejor padre y ser humano del mundo, sino que alcanzaste la meta del hombre: Trascender.
Eres mi razón para seguir adelante y por ti llevaré mi vida siguiendo tus enseñanzas y valores, y en tu nombre protegeré a los más grandes tesoros que has dejado aquí.
Te amo con todas mis fuerzas. Siempre estarás presente en mi corazón.

Finalmente, a la otra persona más valiosa y que más amo en el mundo, mi Madre. Porque eres la otra mitad de lo que soy. Siempre he sentido tu inmenso amor, la fuerza con la que has luchado por nosotros, en nuestra educación y superación. Ahora somos un equipo que estará más unido que nunca. Quiero que sepas que siempre estaré a tu lado y que siempre contarás con todo mi amor y apoyo. Porque tú eres la persona más hermosa en mi vida, un reflejo y complemento de mi Padre. Eres mi adoración, y junto con mis hermanas, son las mujeres más importantes que se me ha encomendado proteger, y prometo que así será.

Este es el fruto de lo que mis Padres sembraron. A ellos les dedico y les agradezco infinitamente lo que soy.

Los amo con todo mi corazón.

When you're down and troubled and you need some loving care, and nothing, nothing is going right: close your eyes and think in me, and soon i will be there, to brighten up even your darkest night.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Actualmente, el estudio y valuación de instrumentos financieros, en particular derivados y portafolios de inversión, han adquirido notable importancia en el área de las finanzas.

Empresas e individuos buscan alternativas de inversión que obviamente compensen el sacrificio de su capital excedente, con utilidades/rendimientos que satisfagan y cumplan con sus expectativas.

Para el inversionista, esto ha constituido desde siempre un problema de medición de riesgos y optimización, el cual sugiere contar con una metodología que le ayude a la toma de decisiones bajo un criterio económicamente racional, y no solo empírico, en un ambiente de incertidumbre.

Herramientas matemáticas tales como la probabilidad, la estadística, los procesos estocásticos, las series de tiempo, el cálculo diferencial e integral, y el cálculo actuarial, permiten realizar modelos que ayudan a sustentar con base en el método científico, la ciencia de las inversiones.

Ciertamente, el comportamiento de los mercados financieros es impredecible, ya que su movimiento depende de varios factores. Por ejemplo, la fijación de precios es un proceso que depende de la conjunción de la oferta y la demanda, es decir, del comportamiento humano de los consumidores y de los proveedores de bienes y servicios. Los primeros deben decidir cuánta cantidad están dispuestos a consumir a determinado precio, y los segundos deben decidir cuánta cantidad tienen que producir para satisfacer la demanda. Esto es un proceso de ajuste continuo, hasta que se encuentra un precio de equilibrio, y que está en constante movimiento, dando origen a la volatilidad del mercado.

Las variables micro y macroeconómicas son indicadores muy importantes de la situación, que también se consideran antes de realizar una inversión, afectando nuevamente la dirección de los mercados financieros.

Por otro lado, la información es un bien que también influye en las decisiones de los agentes económicos. La información no siempre es de fácil acceso y bajo costo. Incluso hay información privilegiada o secreta. Solamente un mercado de competencia perfecta ofrecería acceso a toda la información para poder analizarla y tomar decisiones correctas (racionalidad).

Las noticias (en general) del país y del mundo, alertan a los inversionistas y los hacen actuar de acuerdo a la situación, lo que se traduce en problemas de equilibrio del mercado.

Estos y otros factores conforman la tolerancia o aversión al riesgo de un inversionista.

Aún bajo una actitud racional, evidentemente el comportamiento futuro humano y del mercado es impredecible, por lo que no es posible construir modelos que se ajusten, lo describan y pronostiquen con exactitud, y aún más difícil, a través del tiempo y la situación económica.

No obstante, existen modelos muy importantes y de amplio uso, que permiten estimar y valuar instrumentos financieros. Estos modelos están integrados por una parte determinista (valores conocidos) y una parte estocástica que trata de describir la aleatoriedad del comportamiento de los activos o instrumentos para cuya valuación fueron creados. A su vez consideran supuestos que no siempre se cumplen.

Incluso, hay diferentes métodos para valuar un mismo instrumento, como por ejemplo, por métodos numéricos, simulación, programación dinámica, programación lineal, programación cuadrática, optimización por cálculo diferencial, etc, y los resultados son muy aproximados entre sí.

Los rendimientos de un activo son una variable aleatoria X a través del tiempo. Por lo mismo, es posible asociarle una función de distribución de probabilidad acumulada $\mathrm{P}[X \leq x]$, una función de densidad de probabilidad $\mathrm{P}[X = x]$, y con medidas de sus precios históricos como sus momentos (esperanza, varianza, etc), se trata de predecir su comportamiento futuro. También hay diferentes medidas de riesgo, indicadores de mercado, que se pueden utilizar en la implementación de los métodos de valuación.

Entonces, estos modelos le permiten al inversionista, valuar y acotar los posibles resultados de su inversión, y por lo tanto, tomar decisiones con un análisis previo que le brinde un poco más de certidumbre.

La Bolsa Mexicana de Valores (BMV) y el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer), ofrecen atractivas oportunidades de inversión que bajo el mencionado estudio, son de interés general.

El presente trabajo titulado "Finanzas matemáticas, un enfoque unificado", se divide en cuatro partes en las que se desarrollan la parte teórica y práctica de la valuación de instrumentos financieros derivados y la construcción eficiente de portafolios de inversión, junto con su implementación computacional.

En el capítulo I se presentan definiciones de conceptos y temas preliminares para el entendimiento del desarrollo formal de los derivados y las carteras, en los capítulos II y III respectivamente.

En el capítulo IV se presenta el diseño de un portafolio de inversión 'teórico' y se compara con un portafolio estándar ofrecido por una institución financiera.

En este capítulo se mezclan herramientas de los capítulos II y III, además de herramientas estadísticas con la finalidad de integrar el contenido temático, tal y como el título lo propone.

Cabe destacar que algunos términos serán mencionados en los correspondientes términos y/o abreviaturas en inglés (en letras *itálicas*), porque en general son de uso más frecuente en el argot financiero. Por ejemplo:

- *Call*: Opción de compra.
- *Forward (FWD)*: Contrato adelantado.
- *Put*: Opción de venta.
- *Payoff*: Pago.

Como implementación computacional, los ejemplos que se muestran en este trabajo se resolvieron con macros que se desarrollaron conjuntamente para mostrar numérica o gráficamente, temas y modelos tratados a lo largo del mismo, las cuales se pueden utilizar como material extra para aprender a programar en Visual Basic.

Estos archivos están disponibles en la versión digital de este trabajo y en la siguiente página:
http://cid-116b0a0370bf81e3.skydrive.live.com/browse.aspx/.Public?lc=2058

Son 6 archivos de extensión .xlsx cuyas características se describen a continuación:

- Graficador de portafolios: Para graficar el diagrama de pagos de la combinación entre *call, call c, put, put c, forward* y *forward c,* presentes en determinadas cantidades y con precios de ejercicio *K* elegidos por el usuario. Así por ejemplo, se pueden visualizar extensión de opciones (estrategias) con formas y nombres ya conocidos (*straddle, strangle, bullish, bearish, butterfly,* etc).
- Futuros (*mark to market*): Permite dar seguimiento día a día a un contrato de futuros. Los precios diarios del subyacente se pueden introducir manualmente o seleccionar

que se simulen por Monte Carlo. El programa muestra numérica y gráficamente la posición diaria del comprador y vendedor, su saldo en cuenta, y los casos cuando hay llamada de reposición de margen.

- Árboles binomiales: Para valuar opciones (*call, call c, put* y *put c*) de tipo europeas y americanas, por el método binomial, apreciando gráficamente la construcción del árbol formado por nodos y arcos. Este programa devuelve el valor de la opción elegida por el usuario, el valor de la opción en cada nodo, el valor de Δ (fracción de subyacente) y B (el bono) en cada nodo, los *payoffs*, la probabilidad de riesgo neutral π, la tendencia del activo, y en caso de tratarse de una opción tipo americana, también indica los nodos en los que es óptimo ejercer.
- *Black Scholes* vs Árboles binomiales: Muestra una comparación de la valuación de opciones (*call, call c, put* y *put c*) tipo europeas, realizada con este par de métodos, y una gráfica que muestra la convergencia del modelo binomial de n subperiodos a *Black Scholes*, cuando n tiende a infinito. En la Hoja2 del archivo, se evalúa *Black Scholes* a diferentes tiempos para vencer (T-t), para mostrar gráficamente cómo el valor de la opción se aproxima al diagrama de pagos cuando T-t tiende a cero (vencimiento).
- Simulación Monte Carlo: Realiza la valuación de opciones (*call, call c, put* y *put c*) tipo europeas, por el método de simulación Monte Carlo. El precio del subyacente se simula n veces (elegido por el usuario) a tiempo T (vencimiento), con la ecuación del movimiento Browniano geométrico. El sistema devuelve el valor de la opción y se puede comparar contra los métodos anteriores (binomial y *Black Scholes*). En la Hoja2 se simulan n trayectorias de precios de un subyacente con incrementos de tiempo δt. Los resultados se muestran numérica y gráficamente.
- Portafolios de inversión: Ofrece la opción de construir un portafolio, seleccionando de entre un total de 17 acciones pre cargadas que cotizan en la BMV. El sistema devuelve numérica y gráficamente la cartera de mínimo riesgo, la frontera eficiente, la cartera de mercado, la línea de mercado de capitales, las betas de los activos seleccionados, rendimientos, varianzas, covarianzas y porcentajes de cada portafolio de la frontera eficiente y las matrices necesarias para estos cálculos.

CAPÍTULO I
DINÁMICA DE LOS MERCADOS FINANCIEROS

En este capítulo se mencionan brevemente y de manera introductoria la historia, antecedentes y una explicación más detallada de los mercados financieros, los productos financieros derivados y la teoría de carteras.

También definiremos conceptos que son necesarios al hablar de inversiones y que serán mencionados a lo largo de este trabajo.

REFERENCIAS:

[1] Herrero, F. G. (2004). *Riesgo, Rentabilidad y Eficiencia de Carteras de Valores.* Bilbao: Desclée De Brouwer.

[2] Kane, A. *Principios de Inversiones. 5° Ed.* Mc Graw Hill.

[3] Kolb, R. W. (1993). *Inversiones.* México: Limusa.

[4] Notas del Curso: '*Finanzas matemáticas*'. Profesor: Pablo Padilla Longoria. Facultad de Ciencias, UNAM.

1.1 DEFINICIONES DE RIESGO, RIESGO FINANCIERO E INVERSIÓN

Una de las principales funciones del Actuario es la administración de riesgos, es decir, el conjunto de políticas, procedimientos y acciones que permiten identificar, modelar, medir, limitar, y vigilar los riesgos inherentes a los que se está expuesto, por ejemplo, en una operación financiera, para encontrar coberturas, establecer criterios prudenciales y planes de contingencia.

Siendo los riesgos financieros (en particular, riesgo de mercado) el tema central de este trabajo, empezaremos por definir este concepto.

El riesgo es la **probabilidad** de que un evento aleatorio (o flujo de efectivo esperado en nuestro caso), ocurra y sea adverso, es decir, que ocurran pérdidas. El riesgo puede ser cuantificable a través de herramientas estadísticas, al asociarle una función de distribución al evento. Sin embargo, puede darse el caso de que un evento suceda sin que nunca antes haya pasado (impacto de nula probabilidad).

El riesgo se relaciona con el azar y la incertidumbre, pero en ésta última no hay una condición y no puede ser medible o cuantificable.

De manera general, el riesgo puede clasificarse en riesgo especulativo y riesgo intrínseco.

El riesgo especulativo es aquel que implica la posibilidad de sufrir una pérdida u obtener una ganancia. Un ejemplo del riesgo especulativo es la inversión en valores ó la operación con derivados, ya que están sujetas a las variaciones del mercado, y dependiendo si el movimiento es favorable o no, se obtienen ganancias o pérdidas.

El riesgo intrínseco únicamente hace referencia a la posibilidad de enfrentar una pérdida. Un ejemplo del riesgo intrínseco es aquél que enfrentan las aseguradoras, pues exclusivamente cubren el riesgo sobre pérdidas o eventos.

Una clasificación particular del riesgo es:

- De negocio: Aquel que la empresa asume para crear una ventaja competitiva.
- Estratégico: La empresa lo asume por operar en ciertas regiones del mundo.
- **Financiero:** Es inherente por operar en los mercados financieros.

Según la Comisión Nacional Bancaria y de Valores, el **riesgo financiero** se divide en:

Riesgo

- **Cuantificable:** Existe una distribución de frecuencia de eventos de pérdidas (i.e., se cuenta con información histórica).
  - **Discrecional:** Aquellos que las entidades están dispuestas a asumir deliberadamente.
    - **Mercado o sistémico:** Es la probabilidad de tener cambios en el valor de las posiciones activas o pasivas debido a movimientos en los factores de riesgo. Este riesgo no es diversificable.
    - **Crédito:** Probabilidad de tener pérdidas debido al incumplimiento de una parte a la que se le prestó dinero.
    - **Liquidez:** Probabilidad de que se presenten pérdidas por la venta de los activos que tiene una empresa por debajo de su valor de mercado.
  - **No discrecional:** Aquellos que las entidades no asumen deliberadamente.
    - **Operativo:** Aquellos que se presentan en la operación diaria de la empresa como fallas en el procedimiento, sistemas, maquinaria, etc.
    - **Tecnológico:** Pérdida potencial por daños, interrupción, alteración o fallas derivadas del uso o dependencia en el hardware, software, sistemas, aplicaciones, redes y cualquier otro canal de distribución de información.
    - **Legal:** Pérdidas ocasionadas por fallas en los procedimientos judiciales o cambios en la normatividad.
- **No cuantificable:** No se cuenta con información histórica; son eventos de incertidumbre.

Cuadro 1.1 Clasificación del riesgo financiero.

Por otro lado, una inversión es el sacrificio o compromiso de los recursos con los que se dispone hoy, en espera de un beneficio futuro (obtención de mayores recursos).

Note que el beneficio futuro es incierto, dado que cualquier inversión tiene asociado un riesgo.

Cabe destacar que existen excepciones como las llamadas inversiones en instrumentos libres de riesgo, ya que se encuentran respaldados por el gobierno al emitir deuda como alternativa de financiamiento.

Por otro lado, los activos reales de la economía son los activos utilizados para producir bienes y servicios, tales como la tierra, los edificios, las máquinas y el conocimiento que se requiere para producirlos. Los activos financieros son derechos sobre los activos reales o sobre los ingresos generados por ellos.

Mientras que los activos reales generan ingresos para la economía, los activos financieros definen la asignación de ingresos o patrimonio entre los inversionistas.

A pesar de que a lo largo de este trabajo nos centraremos particularmente en los activos financieros, no debemos olvidar que el éxito o fracaso de los activos financieros que decidimos comprar dependerá del rendimiento de los activos reales subyacentes.

1.2 ESTRUCTURA DE LOS MERCADOS

Un mercado es el lugar físico o virtual donde interactúan la oferta y la demanda para la fijación de precios, a través de un grupo de personas organizadas que están en constante comunicación para realizar transacciones comerciales.

Los lugares establecidos para la compra/venta de los activos financieros constituyen un mercado financiero. Al igual que las instituciones financieras se crearon para dar respuesta a las demandas de los inversionistas, los mercados financieros también se desarrollan para cubrir las necesidades de los operadores económicos particulares.

Podemos distinguir 4 tipos de mercados:

- **Mercados de búsqueda directa:** Son los mercados menos organizados. Compradores y vendedores se buscan directamente. Se caracterizan por la participación esporádica y los bienes no estándares a bajo precio.
- **Mercados de corredores/comisionistas (*broker*):** En los mercados en que la transacción de un bien es activa, consiguen rendimientos ofreciendo sus servicios de búsqueda a compradores y vendedores. Los intermediarios en mercados particulares desarrollan un conocimiento especializado sobre la valoración de los activos que se comercializan en ese mercado. Un ejemplo de este tipo de mercado es el **mercado primario,** en el que se ofertan las nuevas emisiones de valores al público, y los bancos de inversión se encargan de conectarlo con los inversionistas.
- **Mercados de mediadores (*dealer*):** Surgen cuando aumentan las transacciones de un tipo en particular de activos. Los mediadores se especializan en varios activos, compran esos activos por su cuenta y más tarde los venden para

conseguir rendimientos (la diferencia entre los precios de compra y venta). Ahorran el costo de la búsqueda porque los participantes en los mercados pueden buscar fácilmente los precios a los que pueden comprar/vender a los corredores de bolsa. Las transacciones se realizan en el **mercado secundario.**

- **Mercados de subastas:** Es el mercado más integrado. En él, convergen todos los operadores económicos para comprar/vender. Como ejemplos, podemos identificar las bolsas de valores **BMV, NYSE** (*New York Stock Exchange*), etc. La ventaja de los mercados de subastas sobre los de mediadores, es que no necesitan buscar entre los mediadores para encontrar el mejor precio. Si todos los participantes convergen, pueden acordar mutuamente los precios y ahorrarse la discusión por el precio de compra o venta.

1.3 EL MERCADO FINANCIERO EN MEXICO

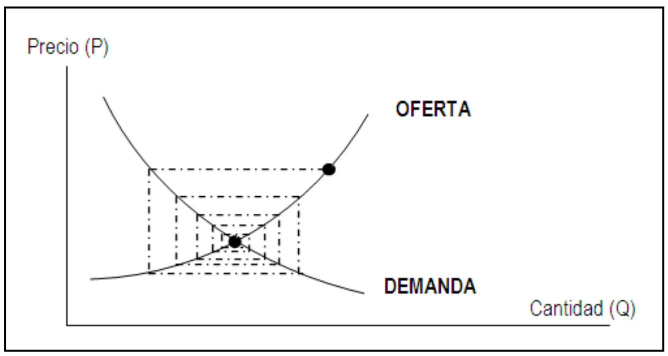


Figura 1. 1 Las curvas de oferta y demanda se intersectan en el punto de equilibrio y determinan el precio.

Los mercados financieros tradicionalmente están segmentados en**:**

- **Mercado de dinero:** Es el mercado donde se negocian instrumentos financieros de deuda gubernamentales, privado y bancarios de corto plazo (menor a un año), altamente líquidos, de bajo riesgo y sus rendimientos oscilan sobre la tasa líder, como por ejemplo: bonos cupón cero (Cetes, Aceptaciones Bancarias, Papel Comercial, T-Bill's, etc.) bonos con cupones fijos, bonos con cupones variables y bonos con cupones indizados a la inflación.
- **Mercado de capitales:** Incluyen valores a largo plazo y de mayor riesgo. Los valores son mucho más diversos que los del mercado de dinero. Por esta razón, se subdividen en: mercados de deuda a largo plazo, de renta fija (instrumentos de deuda: bonos, obligaciones), de renta variable (bursátil: acciones, CPO) y mercado de derivados (opciones y futuros).
- **Mercado de valores:** Es el mercado donde se realiza la selección de carteras, y la oferta y la demanda determinan el precio de los activos. Sus participantes son las empresas y el Estado, quienes emiten instrumentos financieros como una

forma de financiamiento, y los ahorradores que tienen un excedente de capital y transfieren fondos a quienes lo necesitan con el fin de obtener rentabilidad.

El mercado de valores se subdivide en:

1) **Mercado primario:** En el que se ofertan nuevas emisiones de valores.
2) **Mercado secundario:** Donde los valores ya existentes se compran o venden en las bolsas o en el mercado OTC.

   En México, el mercado secundario está constituido por:

   - **BMV** (Bolsa Mexicana de Valores): Se realizan las operaciones bursátiles (emisión, colocación e intercambio de acciones y valores que otorgan derechos de adquisición o suscripción). Certifica las cotizaciones de dichos activos en el mercado.
   - **MexDer** (Mercado Mexicano de derivados): Es el mercado donde se negocian futuros[1], opciones y swaps. En años recientes se ha convertido en un mercado muy importantes en el mundo de las finanzas y las inversiones. El MexDer, ofrece contratos de futuros que permiten darle certidumbre a los proyectos personales y de negocios, a fin de controlar riesgos ante fluctuaciones en: tipo de cambio, tasas de interés, precio de acciones y el IPC de la BMV.
   - **Mercado de deuda pública:** Se negocian instrumentos de deuda pública, los cuales son emitidos por el Estado, a través de instituciones del Sistema Financiero Mexicano, tales como Bonos y CETES (Certificados de la Tesorería).

El Sistema Financiero Mexicano es el conjunto de instituciones, instrumentos y operaciones mediante las cuales se lleva a cabo la intermediación financiera, y está conformado por las actividades de ahorro, inversión, captación de recursos y financiamiento. Se clasifica en:

- Instituciones reguladoras, tales como la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), El Banco de México (BM), la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF), etc.
- Instituciones Cooperativas: Casas de Bolsa, Bancos, Aseguradoras, Banca de Desarrollo, etc.

1.3.1 TEORÍA DE LOS MERCADOS EFICIENTES

[1] Es un producto financiero que brinda cobertura y administración de riesgos ante posibles variaciones en el precio de un "bien" o el valor de un "indicador económico" en los meses o años subsecuentes. Se negocian futuros sobre: Dólar de los EUA, Tasas de Interés (TIIE 28 días, Cetes 91 días y Bono de 3 años), Acciones (Cemex CPO, FEMSA UBD, Gcarso A1, GFBB O y Telmex L), e Índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (IPC).

Propuesta por Eugène Fama (n. 1939), sostiene que un mercado de valores es eficiente si toda la información relevante respecto a cada activo se refleja en su precio. El mercado es eficiente en el largo plazo e ineficiente al corto plazo. Fama propone lo siguiente:

- Los precios siguen una caminata aleatoria.
- Paradójicamente los participantes de un mercado eficiente no deben saber que lo es.
- Hay 3 tipos de eficiencia:
  Hipótesis débil: toda la información de las series históricas ya está reflejada en los precios (las temporadas forman un patrón).
  Hipótesis Semi-fuerte: los precios también incorporan toda la información pública.
  Hipótesis fuerte: los precios incorporan también la información privilegiada, es decir, información no publicada (secreta).

Figura 1. 2 Ejemplo de una caminata aleatoria simple. Los precios siguen una caminata aleatoria.

Es importante examinar la teoría y la práctica de la hipótesis relacionada con que los mercados financieros procesan toda la información sobre los valores de forma rápida y eficaz, es decir, que normalmente el precio del valor refleja toda la información disponible para los inversionistas y relativa del precio del valor. Según esta hipótesis, en cuanto existe información sobre un valor nuevo, el precio del mismo se ajusta rápidamente, de forma que en cualquier momento, se iguala a la estimación de mercado del precio mismo. Si esto fuera así, no existirían valores sub-estimados o sobre-estimados.

Una implicación interesante sobre esta *hipótesis de mercado eficiente* está relacionada con la elección entre estrategias de gestión/inversión activa y pasiva.

La **gestión pasiva** necesita carteras muy diversificadas, sin que hagan esfuerzos ni que existan otros recursos para intentar mejorar el rendimiento de la inversión a través de un análisis de valores (i.e., comprar y mantener una cartera diversificada sin intentar identificar los valores de precio bajo).

La **gestión activa** es el intento de mejorar el comportamiento mediante la diversificación de valores de bajo precio ó mediante el cálculo del rendimiento de un tipo amplio de activos (i.e., intento de identificar los valores de precio bajo o de prever las tendencias del mercado).

Si los mercados son eficientes y los precios reflejan toda la información importante, quizá sea mejor adoptar una estrategia pasiva en lugar de gastar recursos en el intento de adivinar la reacción de la competencia en los mercados financieros.

Si la hipótesis de los mercados eficientes se llevara al límite no tendría sentido que existiera el análisis de valores; sólo bajo un comportamiento no racional se asignarían recursos a valores analizados activamente.

No obstante, sin el análisis continuo de los valores, los precios al final dejarían de tener valores "correctos", lo que supondría nuevos incentivos para los expertos. Por lo tanto, incluso en entornos tan competitivos como los mercados financieros, podemos observar una *casi eficiencia* y pueden existir oportunidades de beneficio para los inversionistas especialmente.

En conclusión, es por esta razón que es importante el estudio de la gestión activa de una cartera, el análisis de valores y su elaboración, lo cual supone la probabilidad de mercados casi eficientes[2].

1.4 LOS PARTICIPANTES EN EL MERCADO *(TRADERS)*

De manera general, una clasificación por **tamaño** sugiere como principales participantes en los mercados financieros:

i. Empresas: Son prestatarios netos; aumentan el capital para pagar inversiones en las plantas y equipo. Los ingresos generados por esos activos reales proporcionan el rendimiento a los inversionistas que compran los valores emitidos por la empresa.
ii. Familias: Son ahorradores netos; compran los valores emitidos por las compañías que necesitan incrementar sus fondos.
iii. Gobiernos: Pueden ser prestatarios o prestamistas, dependiendo de la relación entre los ingresos y los gastos fiscales. La emisión de obligaciones, deuda, bonos y certificados de la tesorería (Cetes) es la principal forma en que el gobierno recoge fondos públicos.

Las empresas y los gobiernos no venden todos sus valores directamente al público. Aproximadamente la mitad de todas las acciones pertenecen a grandes instituciones financieras tales como los fondos de pensiones, los fondos de inversión, las compañías de seguros y los bancos. Estas instituciones financieras se sitúan entre el emisor de los valores (Compañía) y el titular del valor (el inversionista). Es por esto que reciben el nombre de ***intermediarios financieros***¸ y se encargan de conectar prestamistas con prestatarios, aceptando fondos de los prestamistas y prestando fondos a los prestatarios.

[2] Vea Kane, *Principios de Inversiones*, en particular los temas: *paseos aleatorios y la hipótesis del mercado eficiente*.

Otro ejemplo de intermediarios financieros, son las ***compañías gestoras de inversión (administradoras)***, que administran los fondos de los inversionistas (varios fondos de inversión).

Análogamente, las empresas no comercializan sus propios valores al público, sino que contratan agentes llamados ***bancos de inversión***, para que los representen frente a los inversionistas. Estas son compañías especializadas en la venta de valores nuevos al público, mediante la suscripción de una emisión.

1.4.1 TIPOS DE PARTICIPANTES Y TIPOS DE ÓRDENES

Los participantes (*traders*) se clasifican en:

- **Corredores** (*commision brokers*)***:*** Siguen las instrucciones de sus clientes y cobran una comisión.
- **Locales:** Realizan operaciones de comercialización (*trading*) por cuenta propia.

En un mercado de derivados, una clasificación generalmente aceptada es de acuerdo a la postura que el participante adopta frente al riesgo:

• **Cubridores *(Hedgers)*:**	Operadores: Venden derivados (no incurren en riesgos). Clientes: Para protegerse de riesgos financieros.
• **Especuladores (*Speculators*):**	Son poco adversos al riesgo, su propósito es invertir. Buscan hacer ganancias cuando tienen la creencia de un movimiento favorable en los precios (apuestan en la dirección del mercado). ***Scalpers:*** buscan ganancias en periodos cortos de tiempo. ***Day traders:*** toman la posición por menos de un día, adversos al riesgo de la noche. ***Position traders:*** se quedan en su posición por periodos más largos de tiempo esperando ganar más.
• **Oportunistas (*Arbitrageurs*):**	Esperan oportunidades de arbitraje, i.e., hacer transacciones para obtener ganancias seguras (sin riesgos), y sin inversión neta.

Tipos de órdenes que se ejecutan en el mercado:

- **Orden de mercado*:*** se compra y vende a como esté el precio en el mercado.
- **Orden activada por precio:** se convierte en una orden de mercado cuando el precio toca el límite determinado.
- **Orden limitada por precio:** se establecen límites a los cuales se compra o vende.
- **Orden global:** se juntan las diferentes posiciones de los clientes y se entra al mercado con una posición más fuerte.

- **Orden de paquete:** la realizan las casa de bolsa por su cuenta para posteriormente asignárselas a sus clientes discrecionales (no participan en el manejo de su cuenta).
- **Orden todo o nada:** se compra o vende la totalidad de las acciones o mejor nada.
- **Orden al precio de cierre:** se compra o vende al precio de cierre de las acciones.
- **Venta en corto:** se realiza cuando el mercado está a la baja y se incurre a un préstamo de valores a través de intermediarios financieros (vea sección 1.7.1).
- **Arbitraje internacional:** operación simultánea de compra y venta de un valor en dos mercados diferentes para obtener una ganancia segura a través del diferencial de precios (vea Cap. II, sección 2.1.1.2).
- ***Stop-Loss Order:*** especifica un precio y es ejecutada al mejor precio disponible cuando hay una oferta a ese precio o uno menos favorable.
- ***Stop-Limit Order:*** combinación de una *stop-loss order* con una *limit order*, es decir, se convierte en *limit* en cuanto hay una oferta en un precio igual o menos favorable al precio del *stop*.
- ***Market-if-touched Order (MIT):*** se ejecuta al mayor precio disponible después de que ocurre una transacción en un precio específico o uno más favorable.
- ***Discretionary Order or Market-not-held Order:*** funciona como una *MIT*, pero puede ser retrasada bajo la discreción del corredor para obtener un mejor precio.

Las órdenes normalmente son de un día al menos de que se especifique lo contrario:

- ***Time-of-day Order:*** especifica el periodo del día para ser ejecutado.
- ***Open order or Good-till-canceled:*** efectiva hasta que la ejecuten o hasta el final del contrato en específico.
- ***Fill-or-kill Order:*** debe ejecutarse inmediatamente ó no se ejecuta.

1.5 DIFERENCIAS ENTRE LOS MERCADOS ORGANIZADOS Y SOBRE MOSTRADOR (*OVER-THE-COUNTER MARKET*)

Al hablar sobre futuros, *forwards* (contratos adelantados), *warrants* (contratos garantizados), y opciones, es importante ubicar en qué tipo de mercado cotizan, y sus características.

Los futuros y *warrants* cotizan en un mercado organizado, mientras que sus símiles, los *forwards* y las opciones respectivamente, cotizan en OTC (*Over the counter market*, ó sobre mostrador). En el siguiente cuadro, se enumeran algunas de sus características (diferencias) principales.

Características	OTC	Organizados
Términos de contrato:	Ajustado a necesidades de ambas partes	Estandarizados
Lugar de mercado:	Cualquiera	Mercado específico
Fijación de precios:	Negociaciones	Cotización abierta
Fluctuación de precios:	Libre	En algunos mercados existen límites
Relación comprador/ vendedor:	Directa	A través de la cámara de compensación
Depósito de garantía:	No usual	Siempre para el vendedor
Riesgo de contrapartida:	La asume el comprador	Lo asume la cámara de compensación
Regulación:	Ninguna en general	Gubernamental y auto-regulada

Cuadro 1.2 Diferencias entre los mercados organizados y sobre mostrador (OTC).

1.6 CLASIFICACIÓN DE LOS ACTIVOS FINANCIEROS

Inicialmente los instrumentos financieros se clasifican en:

- **Instrumentos comercializables:** El tenedor del contrato puede venderlo en el mercado o comprar nuevos activos durante cualquier día de operaciones.
- **Instrumentos no comercializables/sobre mostrador (*OTC*):** No regulados, aunque debido al gran volumen, existe cierta estandarización.
- **Vulnerables y no vulnerables:** De acuerdo a la probabilidad de incumplimiento de la contraparte.

De manera general, existen 3 amplios tipos de activos financieros:

Los **valores de renta fija** tienen diferentes vencimientos y disposiciones de pago. En un extremo, el mercado de dinero hace referencia a valores de renta fija, a corto plazo, muy líquidos y que generalmente tienen poco riesgo, como los bonos del tesoro o los certificados bancarios de depósito (CD). Por otro lado, incluye valores a largo plazo tales como obligaciones del Tesoro y obligaciones emitidas por las agencias Federales, el Estado, Municipios y las corporaciones. Estas obligaciones oscilan entre las bajas de riesgo de incumplimiento de pago (valores del Tesoro) y las relativamente arriesgadas (valores de alto rendimiento u obligaciones especulativas).

Las **acciones ordinarias o de renta variable** en una empresa representan una parte de propiedad en la compañía. A los titulares de renta variable no se les promete ningún pago en particular. Reciben los dividendos que pueda pagar la compañía y tienen una titularidad prorrateada de los activos reales de la empresa. Si la empresa tiene éxito, el valor de sus acciones se incrementará y viceversa.

Por lo tanto, el comportamiento de las inversiones en renta variable está vinculado directamente al éxito de la empresa y a sus activos reales. A su vez, esto depende del riesgo de mercado, del tipo de mercado, del tipo de competencia, etc.

Es por esta razón que las inversiones en renta variable tienden a ser más arriesgadas que las inversiones en valores de renta fija.

Finalmente, los instrumentos **derivados** o productos financieros derivados, tales como las opciones y los contratos de futuros, proporcionan rentas que están determinadas por los precios de otros activos, como los bonos, precios de un subyacente o los precios de las acciones.

Se llaman así porque su valor depende del precio de otros activos. Un uso de los derivados, quizá el más importante, sea cubrir el riesgo o transferirlo a otras partes.

Los derivados desempeñan un papel importante en la elaboración de la cartera y en el sistema financiero.

Además de activos financieros, los particulares pueden invertir directamente en algunos activos reales, por ejemplo, inmobiliario, materias primas como los metales o productos agrícolas (opciones canasta) y formar parte de una cartera de inversión.

1.7 LOS DERIVADOS

En los últimos años el desarrollo más significativo en los mercados financieros ha sido el de los mercados de futuros y opciones. Éstos proporcionan ingresos que dependen del valor de otros activos, tales como los precios de las materias primas, los precios de las obligaciones, y de las acciones o los valores de los índices de mercado. Es por esta razón que a estos instrumentos se les conoce como ***productos (financieros) derivados*** ó ***activos contingentes.***

Su valor deriva de los valores de otros activos (se basa o deriva del comportamiento de algún criterio de referencia acordado). Los derivados pueden emitirse en monedas, materias primas, deuda estatal o societaria, créditos hipotecarios, tipos de interés o cualquier combinación de todos ellos.

Algunos críticos consideran al mercado de derivados compuesto por transacciones entrelazadas y muy apalancadas[3].

Temen que el incumplimiento de un solo **jugador**[4] pueda sacudir el sistema financiero mundial. Pero los defensores dicen que el riesgo de dicha sacudida es "insignificante"; enfatizan que los peligros del mercado están sobradamente compensados por la ventaja

[3] Apalancamiento financiero: es la capacidad de hacer frente a los pagos de las deudas contraídas que vayan venciendo, así como a la estructura de la empresa en cuanto a qué parte está a largo plazo y cuánto a corto plazo.

[4] En la teoría de juegos existen dos o más agentes con **conflictos de intereses**, a los que se les denominan jugadores. Cada jugador influye en el resultado pero no lo determina. Existen juegos de suma cero (la suma de los pagos que reciben los jugadores es cero) y juegos de suma distinta de cero (la mayoría de los juegos reales).

que suponen los derivados para los bancos, empresas y para que los inversionistas administren sus riesgos.

Dado que la ciencia y el estudio de los derivados resulta relativamente reciente, no existe una forma sencilla de estimar el comportamiento y el impacto final que pudieran producir estos instrumentos. En la actualidad hay más de 1,200 tipos de derivados en el mercado, la mayoría de los cuales requieren de un programa informático para calcularlos.

Cuando la obtención de ingresos financieros por parte de una corporación mediante la emisión de títulos en lugar de pedir un préstamo a un banco crece, también crece el mercado de derivados. Los adelantos tecnológicos en el campo de la informática y las telecomunicaciones han impulsado el crecimiento de estos sofisticados activos financieros. El mercado total de derivados se calcula actualmente en varias decenas de billones de dólares.

Existen además, activos derivados de derivados, como la opción para comprar la opción sobre una acción. Por ejemplo, existen opciones sobre futuros de un activo que generalmente se prefieren a opciones sobre el activo en sí, ya que el futuro suele ser más líquido que el subyacente, por la disponibilidad de los precios futuros vigentes, y porque los futuros son más fáciles de comerciar que el subyacente/*commodity* en sí, pues no hay entrega física.

El problema de fondo es que muchos de los que especulan en los mercados de derivados no son conscientes de la complejidad del mercado ni de sus riesgos implícitos. Éstos se hicieron patentes, por ejemplo, a principios de 1995, cuando el banco *Barings*, el banco comercial más antiguo de Londres (con un capital social de 541 millones de libras esterlinas), quebró a causa de una única operación realizada en su filial de Singapur, que consistió en la compra de derivados en los mercados japoneses y se saldó con unas pérdidas de más de 850 millones de libras esterlinas. Esta quiebra impulsó la demanda de una mayor regulación del mercado de divisas, y ha permitido un mayor control por parte de las empresas e instituciones que operan en estos mercados.

Los derivados se clasifican en dos categorías básicas: contratos de opciones y contratos a plazo. Éstos pueden cotizar en bolsa, tales como futuros y opciones sobre acciones, o pueden contratarse de forma privada.

Las opciones de compra/venta otorgan a los tenedores el derecho, más no la obligación, de comprar /vender un activo al precio actual si así le conviene o ejercer la opción y comprar/vender a un precio pactado (precio de ejercicio *K-strike*) durante un periodo de tiempo concreto ($T \rightarrow t$). El precio de la opción (PRIMA) normalmente es un porcentaje pequeño del valor del activo subyacente.

Los contratos a plazo, *futuros* y *swaps* obligan al comprador y al vendedor a contratar un activo determinado a un precio establecido en una fecha futura.

Estos acuerdos son de “precio fijo” que otorgan al comprador los mismos riesgos de precios que si fuera propietario de un activo. Pero normalmente, *el dinero no cambia de* *manos hasta la fecha de entrega, cuando el contrato se liquida en efectivo en lugar de entregarse el activo.*

¿Para qué los utilizan las empresas?

Como los derivados pueden ser poderosos instrumentos especulativos, las empresas a menudos los utilizan para protegerse contra las pérdidas. Por ejemplo, las empresas suelen utilizar futuros que cotizan en bolsa para protegerse de las fluctuaciones de la moneda o de los precios de las materias primas (y así obtener el beneficio que anteriormente mencionamos i.e., comprar al precio preestablecido), ayudando por lo tanto a gestionar los costos de las importaciones y de las materias primas.

Las opciones pueden tener una finalidad parecida: las opciones de tasa de interés tales como los *caps* y *floors* ayudan a las empresas a controlar los costos financieros de prácticamente la misma forma que los *caps* lo hacen en las hipotecas de tipo ajustable para los propietarios de viviendas.

Los bancos retienen capital para absorber el riesgo de crédito (prestamos que caen en incumplimiento de pago), el riesgo de mercado (cambios en las tasas de interés, inflación, etc.) y el riesgo de operación. Gracias al desarrollo del mercado de derivados y sus productos financieros, los bancos han podido cubrir sus riesgos.

¿Por qué son potencialmente peligrosos?

Porque estos contratos exponen a las dos partes a los movimientos del mercado sin que el dinero o muy poco cambie de manos (excepto en los futuros), e implican apalancamiento[5].

Ese apalancamiento puede aumentar en gran medida en los contratos particulares. Por ejemplo, en los derivados que perjudicaron a P&G, un movimiento determinado de las tasas de interés de EU ó Alemania su multiplicó por 10 o más[6].

También podemos mencionar el reciente problema que se presentó en nuestro país con relación a la Comercial Mexicana y sus operaciones especulativas en el MexDer, y cómo ocasionó la devaluación de la moneda frente al dólar, al llegar prácticamente a los 14.50 MXP/USD.

Este fue un claro ejemplo de cómo los derivados también puede ocasionar graves problemas debido a que se pueden realizar operaciones especulativas[7].

---

[5] Ver *"A random walk down street"* (crisis asociadas a los derivados: crisis de los Tulipanes).
[6] Lee Berton, <<Entender el complejo mundo de los derivados>>, *The Wall Street Journal,* junio 14, 1994.
[7] Con relación a este tema, se recomiendan los siguientes artículos disponibles en la red: http://www.eluniversal.com.mx/finanzas/71532, 71511, 71492, 71378, 71291, 71247, 68995, 67053, 67993, 67127, 67085, 67066, 67046.

Cuando las cosas van bien, el apalancamiento supone una alta rentabilidad, comparada con la cantidad de capital en riesgo, pero también causa grandes pérdidas cuando los mercados se mueven en la dirección equivocada (no esperada). Incluso las empresas que utilizan derivados para compensar en vez de especular, pueden estar en peligro puesto que sus operaciones muy raramente producirán beneficios equivalentes.

¿Entonces por qué los utilizan tantas empresas?

Porque son una de las formas más baratas y más rápidamente disponibles para las empresas, de amortiguar los cambios inesperados de los valores de mercado, de los precios de la materia prima, de los tipos de interés, entre otras variables micro y macroeconómicas[8].

"Los derivados son una herramienta que todos tenemos para gestionar mejor la rentabilidad y los riesgos de las empresas"[9].

Los derivados son entonces un "seguro" contra riesgos financieros. El objetivo de los derivados, es generar un efecto de apalancamiento; las ganancias o las pérdidas aumentan con los derivados. De ahí la importancia de su estudio y conocimiento.

1.7.1 *WARRANTS* Y OPCIONES

Los *warrants* son contratos (garantizados), mientras que su versión sobre mostrador, las opciones, son un acuerdo que da al tenedor el derecho, más no la obligación, de comprar o vender alguna acción o valor en una fecha predeterminada T (ó antes de su vencimiento) y a un precio preestablecido K.

Pueden ser emitidas sobre un buen número de valores, siendo los más comunes las acciones, los índices de mercados accionarios, las divisas extranjeras, los futuros, los certificados de la tesorería (CETES) y *swaps*. Su valor depende (se deriva) de un bien subyacente.

[8] Aquellas variables que afectan la economía del país y del mundo, tales como: Producto Interno Bruto (PIB), PIB Nominal, PIB Real, Producto Neto Bruto (PNB), Deflactor del PIB (P_t=PIB nominal/PIB real), Inflación (π), Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), Tasa de Desempleo (#desempleados/PEA), Déficit presupuestario y comercial, Déficit o Superávit de la Balanza Comercial (Importaciones y exportaciones), Riesgo país, Tipo de Cambio (T.C.), Tasas de interés (activas: las que cobran; pasivas: las que pagan), Remesas, Precio del petróleo, Cuentas externas (Fondo Monetario Internacional 'FMI'), Inversión externa total, Reservas Internacionales, Políticas fiscales y monetarias (corto y circulante).

[9] Donald Nicoliasen, experto en derivados de Price Waterhouse [1].

Existen dos tipos de opciones:

- **Opciones de compra *(CALL)***
  Expectativa: que el subyacente SUBA.
- **Opciones de venta *(PUT)***
  Expectativa: que el subyacente BAJE.

Se dice que se tiene posición larga cuando se compra.
Se dice que se tiene posición corta[10] cuando se vende.

Las opciones se clasifican en:

- **Opciones Europeas:** sólo se pueden ejercer hasta el vencimiento.
- **Opciones Americanas:** se pueden ejercer durante la vida de la opción, esto es, en cualquier momento *t*, $0 \leq t \leq T$ (antes o al vencimiento).

Recordemos que la opción otorga el derecho de compra/venta, más no la obligación. Por ello, la opción se ejerce siempre y cuando su poseedor así lo desee/así le convenga, siempre y cuando esté dentro de la fecha de ejercicio.

Esta es una característica que distingue a las opciones de los contratos de futuros.

Sin embargo, el costo del futuro es prácticamente nulo, mientras que el de las opciones tiene un precio al que denominamos como PRIMA.

Variables/Notación:

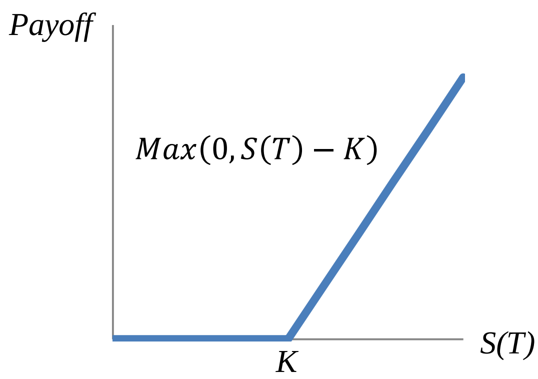
T **=** Tiempo en que expira el contrato (fecha de ejercicio, vencimiento o maduración).
S_T **=** ***S(T)*** **=** Precio del subyacente al tiempo *T* (desconocido).
S(t) **=** Precio del subyacente al tiempo *t* (hoy).
Strike = ***K*** **=** Precio pactado o precio de ejercicio.
Prima= ***p*** **=** Costo de la opción (para el siguiente ejemplo será cero).

En la siguiente figura 1.3 note que:

- El eje X representa *S(T)*, el valor del subyacente al tiempo *T*.
- El eje Y representa el valor de la opción al tiempo *T* (*payoff*).
- Observe en cada caso la función ***f(S(T))*** que determina el valor de la opción (*payoff*).

---

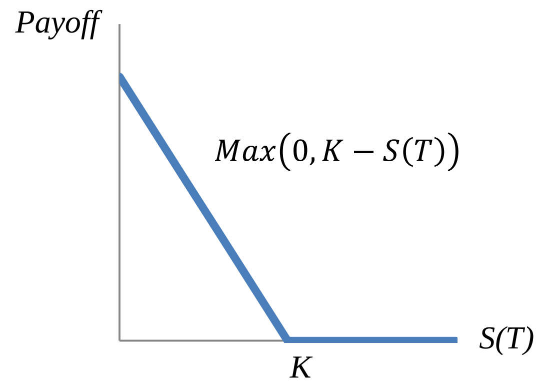
[10] Una venta en corto significa vender un activo que no poseemos pidiendo prestado el activo a alguien que lo posea. Entonces vendemos el activo prestado recibiendo una cantidad X_0 y en una fecha posterior, liquidamos el préstamo adquiriendo nuevamente el activo por una cantidad X_1, y regresamos el activo a nuestro prestatario. Si $X_1 < X_0$, habremos obtenido una ganancia de $X_0 - X_1$, es decir, que la venta en corto es útil siempre y cuando el precio del activo baje. No obstante, es considerada de alto riesgo, ya que el potencial de pérdida también es ilimitado (cuando el valor del activo aumenta).



CALL LARGO: Es el derecho de comprar un activo a un precio fijo (*K*) durante un plazo determinado (*T*).
¿Cuándo utilizarlo? Tendencia a la alza.
Ganancia: Incrementa tanto como el activo suba.
Pérdida: Se limita al monto pagado por la opción (PRIMA).

Esta gráfica representa el valor del *CALL* al tiempo *T*, cuya función: $Max(0, S(T) - K)$, es equivalente a recibir un pago por $[S(T) - K]$ si $S(T) > K$, o nulo si $S(T) \leq K$ (caso en el que ejerzo la opción).

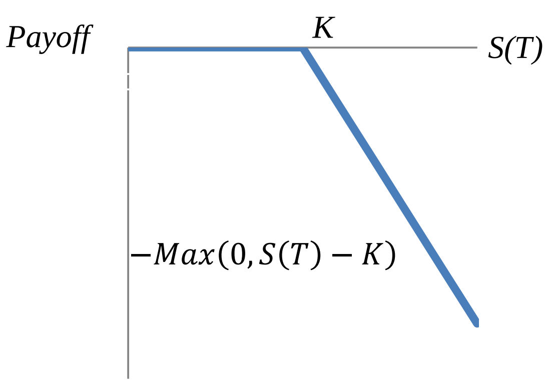
Otra interpretación es que se ejerce el derecho a comprar una acción al precio K cuando su precio real (de mercado) es $S(T)$, obteniendo un beneficio de $S(T) - K\ > 0$



PUT LARGO: Es el derecho de vender un activo a un precio fijo (*K*) durante un plazo determinado (*T*).
¿Cuándo utilizarlo? Tendencia a la baja.
Ganancia: Incrementa tanto como el activo baje.
Pérdida: Se limita al monto pagado por la opción (PRIMA).

Esta gráfica representa el valor del *PUT* al tiempo *T*, cuya función: $Max(0, K - S(T))$ es equivalente a recibir un pago por $[K - S(T)]$ si $S(T) < K$, o nulo si $S(T) \geq K$ (caso en el que no se ejerzo la opción).

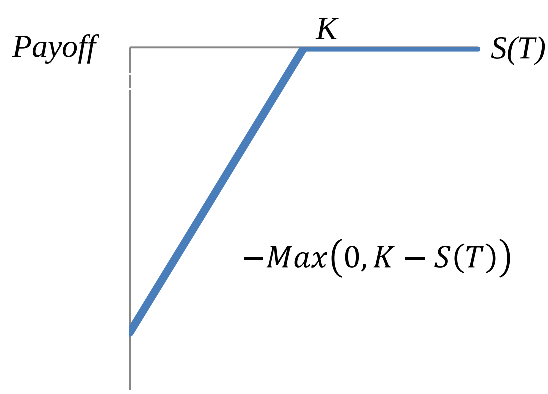
Otra interpretación es que se ejerce el derecho a vender una acción al precio K cuando su precio real (de mercado) es $S(T)$, obteniendo un beneficio de $K - S(T)\ > 0$



CALL CORTO: Obligación de vender un activo a un precio fijo (*K*) durante un plazo determinado (*T*).
¿Cuándo utilizarlo? Tendencia a la baja.
Ganancia: Se limita al monto pagado por la opción (PRIMA).
Pérdida: Incrementa tanto como el activo suba.

Esta gráfica representa el valor del *CALL* C al tiempo *T*, cuya función: $-Max(0, S(T) - K)$, es equivalente a tener que pagar $-[S(T) - K]$ si $S(T) > K$, o cero si $S(T) \leq K$ (caso en que la contraparte no ejerce la opción).

Otra interpretación es que se está obligado a vender una acción al precio K cuando su precio real (de mercado) es $S(T)$, obteniendo una pérdida de $-[S(T) - K] < 0$



PUT CORTO: Obligación de comprar un activo a un precio fijo (*K*) durante un plazo determinado (*T*).
¿Cuándo utilizarlo? Tendencia a la alza.
Ganancia: Se limita al monto pagado por la opción (PRIMA).
Pérdida: Incrementa tanto como el activo baje.

Esta gráfica representa el valor del *PUT* C al tiempo *T*, cuya función: $-Max(0, K - S(T))$, es equivalente a tener que pagar $-[K - S(T)]$ si $S(T) < K$, o cero si $S(T) \geq K$ (caso en que la contraparte no ejerce la opción).

Otra interpretación es que se está obligado a comprar una acción al precio K cuando su precio real (de mercado) es $S(T)$, obteniendo una pérdida de $-[S(T) - K] < 0$

Figura 1. 3 Diagramas de pago y descripción de *Call*, *Put*, *Call Corto* y *Put Corto*.

OBJETIVOS DEL USO DE OPCIONES

A nivel microeconómico:

- Es un producto con el cual un inversionista puede protegerse del riesgo.
- Un inversionista lo puede usar simplemente para invertir o especular[11].

A nivel macroeconómico:

- Formación más eficiente de precios de los valores subyacentes.
- Mejorar los niveles de liquidez en el mercado.
- Ampliar las oportunidades de arbitraje.
- Permitir perfiles de riesgo y rendimientos controlables.

1.7.1.1 VENTAJAS Y DESVENTAJAS

Los microfactores afectan principalmente a los usuarios específicos de los mercados de opciones y futuros. Los macrofactores afectan a todos los participantes en el mercado, así como a la economía.

Como ya se mencionó, las opciones son un tipo alternativo de cobertura y contrato especulativo para un usuario. Además, las opciones tienen un límite de pérdida potencial equivalente al precio de la misma (prima).

Existe un comprador y un vendedor, por lo que, si las posiciones son descubiertas uno tiene un potencial **limitado** de pérdida/ganancia y el otro un potencial **ilimitado** de ganancia/pérdida, según sea su posición.

Por esto, las opciones difieren de los contratos de futuros. Esto implica que los participantes deben escoger el mercado específico que sea consistente con sus objetivos.

VENTAJA: Si el activo sube se obtienen ganancias.

DESVENTAJA: Pérdida por el pago de la Prima.

Las opciones son utilizadas de la siguiente manera:

- Para ajustar el riesgo y rendimiento de una posición determinada a un costo muy bajo.
- Para cubrirse de los riesgos de movimientos en los precios y en las cantidades; es decir, las opciones son mejores que los futuros cuando la cantidad que uno desea proteger es incierta.

[11] Especular no siempre tiene un significado negativo, pues provee de liquidez a los mercados.

1.7.1.2 ¿CÓMO SE PONE EN FUNCIONAMIENTO UN CONTRATO DE OPCIONES?

A continuación, describimos brevemente los pasos para un ejemplo concreto. Suponga que un inversionista da instrucciones a su agente de bolsa para que compre una opción de compra sobre una acción de GCARSO a $K=\$150$ y $T \rightarrow 3$meses.

i. El agente le pasará estas instrucciones al agente de piso del MexDer. Este último tratará de encontrar a otro agente o inversionista que esté dispuesto a vender un contrato de opción de compra de GCARSO a $K=\$150$.

ii. Una vez que ambos se han identificado, el precio del contrato (PRIMA) será negociado; suponga que p=$6/acción. El contrato tendrá 100 opciones cada una de las cuales será respaldada por una acción.

iii. El comprador de la opción de compra entrega al vendedor de la misma *$600* (*$6*100*), cantidad que es transferida a nombre del vendedor a la Cámara de compensación como parte del margen que él debe constituir[12].

iv. El vendedor deposita en la Cámara de compensación un margen (garantía) por una cantidad igual a la prima, más otro monto definido por la cámara.

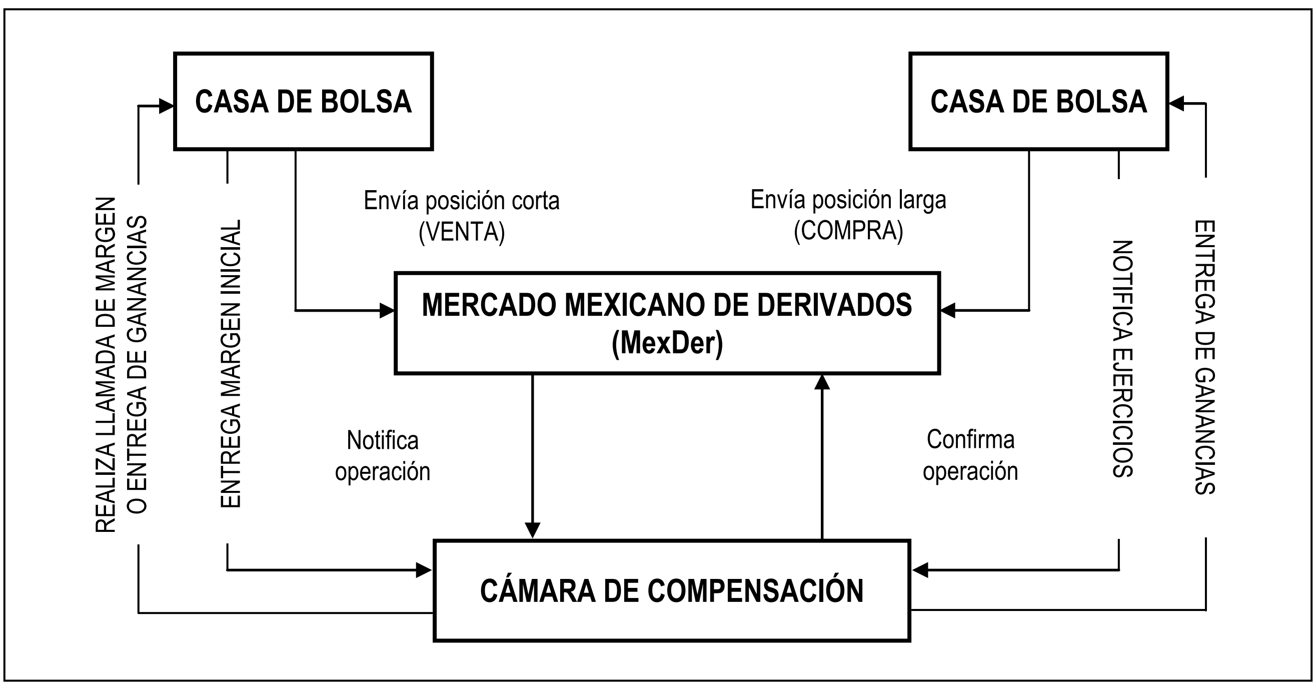


Figura 1. 4 Esquema de operación del mercado de opciones

---

[12] Observe que el precio de la acción no necesariamente es igual al precio de ejercicio *K*. El precio de la acción al momento en que se efectuó el trato pudo haber sido de $152 por ejemplo.
El inversionista ha obtenido a un costo de $600 el **derecho** a comprar 100 acciones de GCARSO por $150 c/u antes de la fecha de vencimiento. El otro inversionista (vendedor) ha recibido $600 y se ha **comprometido** a vender 100 acciones a $150 c/u si el otro inversionista así lo desea (ejerce).

1.7.2 FUTUROS Y *FORWARDS (FWD)*

Un futuro es un contrato en un mercado formal, mientras que su versión sobre mostrador *forward* es un contrato privado de entrega futura entre dos partes (no estandarizado) para comprar o vender un valor a una fecha *T* y precio *K* preestablecidos. El poseedor del contrato está obligado a comprar el subyacente (posición larga) y el emisor del contrato acuerda vender el subyacente (posición corta).

En los futuros existe un rango de fechas de entrega (un mes) y se saldan diariamente. Generalmente, el contrato se cierra antes del vencimiento, y son 'virtualmente' libres de riesgo de crédito, al ser un compromiso legal regulado en un mercado organizado. Para ello existe la cámara de compensación.

En el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer), la cámara de compensación es **"asigna"**.

Los *forwards* se saldan al final del contrato, la entrega o pago final ocurren usualmente.

Al igual que las opciones, se realizan entre dos instituciones financieras ó entre una institución y uno de sus clientes (no en un mercado de valores). Cotizan OTC (*Over-the-counter market)*, es decir, no son comercializados, no están regulados, los términos no son fijos, el contrato no es transferible y existe el riesgo de incumplimiento por alguna de las partes (riesgo de crédito). Sin embargo, las partes pueden negociar con instrumentos hechos a la "medida" de sus necesidades.

- **Futuro de compra / *Forward* largo**
  Expectativa: que el subyacente SUBA.

  VENTAJA: No hay prima o desembolso inicial.

- **Futuro de venta / *Forward* corto**
  Expectativa: que el subyacente BAJE.

  DESVENTAJA: Es un contrato obligatorio.

Los Futuros son utilizados de la siguiente manera:

- Para cubrirse del riesgo de la variación de un valor subyacente a un costo mínimo, a diferencia de las opciones que pagan una prima.
- Para invertir efectivo temporalmente hasta que se puedan comprar los valores que uno desee. Es decir, los futuros nos dan la oportunidad de sustituir temporalmente inversiones de una manera rápida y barata.
- Son un método para especializarse en la selección de acciones ya que remueven el riesgo de movimientos generales en el mercado.
- Son un medio de modificar asignaciones en acciones v.s. bonos rápidamente y a bajo costo, sin afectar el mercado en los valores individuales.

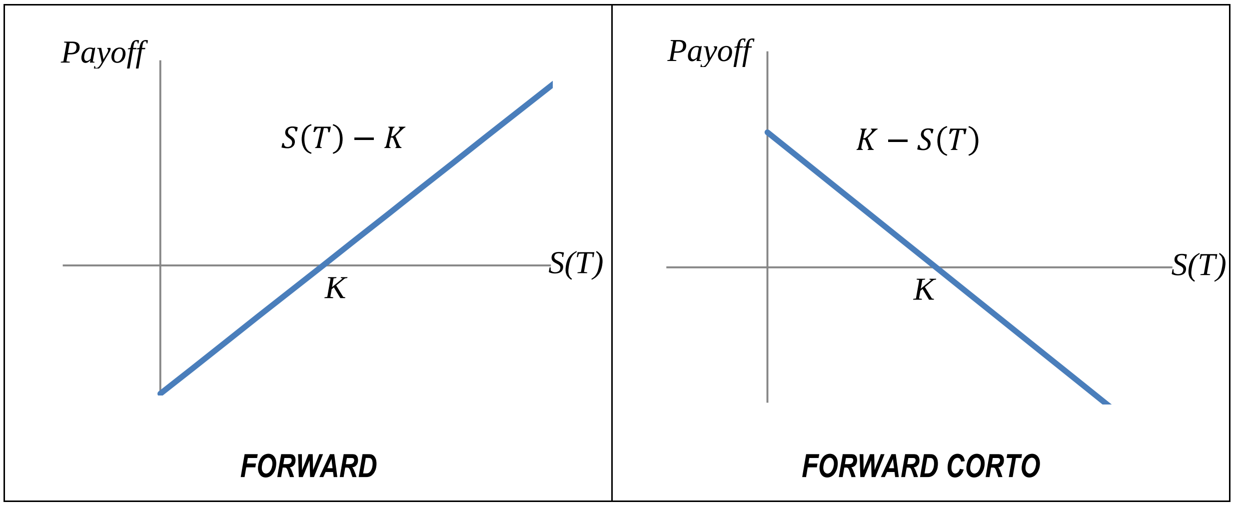


Figura 1. 5 Diagramas de pago de 1 FWD y 1 FWD C.

1.8 CARTERAS DE INVERSIÓN

Hasta principios de los 70's una cartera de inversión satisfactoria habría sido una cuenta de ahorro en un banco (un activo sin riesgo) más una cartera con riesgo de acciones de EU.

En la actualidad, los inversionistas tienen acceso a una gama de activos mucho mayor y pueden contemplar estrategias de carteras complejas, entre las cuales se incluyen las acciones y las obligaciones extranjeras, los bienes inmuebles, los metales preciosos y los derechos de cobro. Incluso las estrategias más complejas pueden incluir futuros y opciones para asegurar las carteras contra pérdidas inaceptables. ¿Cómo se pueden elaborar esas carteras?

Está claro que cada valor individual debe juzgarse por su contribución a la rentabilidad esperada como al riesgo de toda la cartera. Esa contribución tiene que evaluarse en el contexto del comportamiento esperado de la misma.

La exposición al riesgo es muy diversa. Como ya mencionamos, existen variables micro y macroeconómicas que afectan el comportamiento del mercado y por lo tanto los precios y su volatilidad (medida del riesgo, σ).

Estas variables están concentradas en el riesgo de mercado (no diversificable o sistemático), es decir, en factores no controlables. Por otro lado se encuentra el riesgo propio (diversificable o no sistemático), que depende de las características propias de la empresa emisora y del mercado en que se desenvuelve, así como el tipo de competencia, entre otros.

La teoría de carteras es el estudio de la asignación/inversión de los recursos disponibles en diferentes activos. El problema central al que se enfrenta el inversionista nuevamente es el riesgo financiero a la que están sujetos los activos en los que deberá (desea) invertir.

Inicialmente el riesgo se logra disminuir mediante la diversificación, es decir que muchos activos están en la cartera para que se limite la exposición a un riesgo en particular.

Un antecedente de la teoría de carteras es la *diversificación ingenua,* que sólo tiene en cuenta que se debe invertir en muchos títulos, los cuales son seleccionados sin un estudio previo de la **correlación**[13] que existe entre ellos.

Sin embargo, ahora se sabe que el riesgo tiene que ver por una parte con la volatilidad de la rentabilidad de los activos, y de la interacción que resulta de la mezcla activos en carteras diversificadas, y el efecto de la diversificación del riesgo de toda la cartera.

Por lo tanto, el modelo matemático que plantea la teoría de carteras busca minimizar el riesgo y maximizar el rendimiento esperado, a través de la diversificación y considerando la correlación que existe entre los activos.

Estos temas están sujetos a lo que se conoce como *teoría moderna de la cartera*. Esta teoría fue desarrollada fundamentalmente por dos pioneros, Harry Markowitz y William Sharpe, ambos premios Nobel de Economía.

1.8.1 ACCIONES ORDINARIAS O PARTICIPANTES DE PROPIEDAD

Las **acciones ordinarias**[14], también conocidas como títulos de propiedad, o renta variable, son títulos de participación en una empresa pública. Cada participación de acción ordinaria acredita un voto al titular en cualquiera de los asuntos que la dirección de la empresa someta a votación en la junta general anual de la compañía y a una participación en los beneficios financieros (el derecho a recibir dividendos que la empresa decida repartir).

Una empresa está gestionada por un consejo de administración elegido por los accionistas[15]. El consejo, que se reúne sólo algunas veces al año, selecciona a los directivos que dirigirán día a día la empresa. Los directivos tienen la autoridad para adoptar la mayor parte de las decisiones relacionadas con el negocio sin contar con la aprobación de la junta. El cometido de la junta es vigilar al equipo directivo para asegurarse de que actúe a favor de los intereses de los accionistas. Los miembros de la junta se eligen en reunión anual; los accionistas que no asisten pueden votar por poderes,

---

[13] Correlación, es la interdependencia que existe entre un par de variables aleatorias u observaciones (muestras aleatorias). Una medida de esto es el coeficiente de correlación de Spearman ρ, $-1 \leq \rho \leq 1$. $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$
Si ρ=-1 existe una relación lineal inversa perfecta (si una ↑20%, la otra ↓20%). Si ρ=0 son independientes (i.e., el comportamiento de una es completamente indiferente al comportamiento de la otra). Si ρ=1 existe una relación lineal perfecta (si una ↑20%, la otra ↑20%).

[14] A veces una empresa emite dos clases de acciones ordinarias, una que tiene derecho a voto y otra que no. Debido a sus derechos restringidos, las acciones sin derecho a voto se venden a un precio inferior, reflejando el valor del control (vea Herrero, 2004).

[15] El sistema de voto especificado en los estatutos de la empresa determina las posibilidades de que las elecciones afecten a los puestos de dirección. El sistema de votación acumulativo permite que los accionistas concentren sus votos en un puesto, haciendo que los accionistas minoritarios tengan mayor representación (vea Herrero, 2004).

facultando a otro accionista para que vote en su nombre. La dirección solicita normalmente los poderes de los accionistas y casi siempre consigue una amplia mayoría de estos votos. Por tanto, la dirección habitualmente gestiona la empresa de la forma en que considera más pertinente sin tener que someterla a la aprobación de los accionistas, que son los verdaderos propietarios de la empresa.

Existen varios mecanismos para mitigar los potenciales problemas que puedan surgir en este acuerdo. Entre ellos están los esquemas de compensación que vinculan el éxito de los directivos al de la empresa, el control de la junta directiva, así como de personal externo, tales como analistas de valores, acreedores o grandes inversionistas institucionales, la amenaza de una votación por poderes en la cual los accionistas que no están contentos intentan reemplazar al actual equipo directivo o la amenaza de una adquisición por parte de otra empresa.

Las acciones ordinarias de la mayor parte de las empresas se pueden comprar o vender libremente. Se dice que una empresa cuyas acciones no cotizan en bolsa *están en manos de un reducido número de accionistas*, donde los propietarios de la compañía también desempeñan un papel activo en su gestión.

1.8.2 ACCIONES ORDINARIAS

Las acciones ordinarias tienen dos características principales: sus derechos residuales y su responsabilidad limitada.

El *derecho residual* indica que los accionistas son los últimos en el orden de prioridad de todos aquellos que tienen derechos sobre los activos e ingresos de la empresa. En una liquidación de activos de la empresa, los accionistas tienen derecho a lo que queda tras haber pagado al resto de los solicitantes: autoridades fiscales, empleados, proveedores, los tenedores de bonos y demás acreedores. Los accionistas tienen derecho a la parte de los ingresos de explotación después del pago de intereses y de impuestos. La dirección puede considerar este residual como dividendo en efectivo para los accionistas o reinvertirlo en el negocio para aumentar el valor de las acciones.

La *responsabilidad limitada* señala que lo más que pueden perder los accionistas en caso de quiebra de la empresa es su inversión original. Los accionistas no son como propietarios de empresas no constituidas en sociedad de capital cuyos acreedores pueden tener derecho a los activos personales del propietario, como casas, coches y muebles. En caso de quiebra de una empresa, los accionistas se quedan como mucho con acciones sin valor alguno. No tienen responsabilidad personal por las obligaciones de la empresa.

1.8.3 ACCIONES PREFERENTES

Las **acciones preferentes** prometen al tenedor un pago de una cantidad fija de dividendos al año (un híbrido entre acreedor y accionista).

En ese sentido, las acciones preferentes se parecen a las obligaciones con vencimiento ilimitado, es decir, que son a perpetuidad. También se parecen a las obligaciones en que no otorgan al tenedor el derecho a voto relacionado con la gestión de la empresa.

La compañía tiene la facultad de hacer pagos de dividendos a los accionistas preferentes (puesto que su dividendo es fijo, si a la compañía le va excelentemente, no comparten el éxito). A cambio, los dividendos preferentes son normalmente *acumulativos*, es decir, que los dividendos no pagados se acumulan y se pueden pagar todos juntos antes de que se paguen a los tenedores de las acciones ordinarias. En cambio, la empresa sí tiene una obligación contractual para realizar el pago de intereses sobre la deuda. En caso de liquidación de la empresa, los accionistas preferentes tienen prioridad.

1.9 RELACIÓN RIESGO – RENDIMIENTO

Una inversión es el sacrificio de una satisfacción inmediata y cierta a cambio de un valor esperado futuro que difícilmente puede predecirse con precisión, y casi siempre existirá riesgo asociado a la inversión.

Los rendimiento reales o pretendidos casi siempre se desviarán de los rendimientos esperados al principio delo periodo de inversión. Por ejemplo, en 1931 (el peor año natural para el mercado desde 1926), los mercados de valores perdieron el 43% de su valor. En 1933 (el mejor año) el mercado de valores ganó el 54%. Seguramente los inversionistas no pudieron predecir ese comportamiento tan extremo al principio de ninguno de esos años.

Naturalmente, si todo lo demás se hubiera mantenido igual, los inversionistas preferirían realizar inversiones con los mayores rendimientos posibles[16].

No obstante, si se quiere grandes rendimientos, se tendrá que pagar un precio en términos de aceptación de un mayor riesgo en la inversión. Si se pudieran conseguir grandes rendimientos sin asumir un riesgo superior, todo el mundo se lanzaría a comprar los activos con mayores rendimientos, lo que resultaría una subida de su precio. Las personas que estén pensando invertir en los activos que ahora tengan el precio más alto encontrarán la inversión menos atractiva: si compra a un precio más alto, su rentabilidad será menor. El activo se considerará atractivo y su precio continuará subiendo hasta que los rendimientos esperados no sean comparables al riesgo. En este punto, los inversionistas pueden prever una rentabilidad 'justa' relacionada con el riesgo del activo, pero no más. De igual modo, si la rentabilidad fuera independiente del riesgo, también todo el mundo intentaría vender los activos altos de riesgo. Bajaría su precio (y subiría la futura rentabilidad esperada) hasta que al final fuera lo suficientemente atractiva para ser incluida de nuevo en las carteras de los inversionistas.

[16] Los rendimientos "esperados" no son lo que los inversionistas piensan que recibirán, ni siquiera el hecho de que lo recibirán. Son el resultado de la media de todos los resultados posibles (en probabilidad: esperanza o valor esperado), reconociendo que algunos resultados tienen más probabilidades que otros. Son el tipo medio de rentabilidad en los posibles escenarios económicos.

Debe haber una **relación-beneficio** en los mercados de valores, con activos de precios más altos y de mayor riesgo para ofrecer una mayor rentabilidad esperada que las de los activos de bajo riesgo.

Se tiende a pensar que el riesgo tiene que ver algo con la volatilidad de la rentabilidad de los activos, pero esto resulta cierto sólo en parte. Cuando mezclamos activos en carteras diversificadas, tenemos que considerar la interacción entre los activos y el efecto de la diversificación del riesgo de toda la cartera.

1.10 RIESGO FINANCIERO

Como ya mencionamos antes, la diversificación es la técnica mediante la cual se trata de reducir el riesgo al que está expuesto uno o varios títulos en poder de un inversionista.

Desde una perspectiva simple, esto consiste en "no poner todos los huevos dentro de una sola canasta, sino distribuirlos en varias".

Las inversiones en su caso, están expuestas al riesgo financiero, representado por la probabilidad de obtener resultados negativos en cuestión del rendimiento esperado con una pérdida de capital.

El riesgo financiero es el riesgo adicional que enfrentan los accionistas de una empresa que está financiada por deudas y fondos de capital contable.

Consideremos el siguiente ejemplo: Suponga que en su cartera arriesgada sólo tiene una acción de HP. ¿Cuáles son las fuentes de riesgo que afectan a esa cartera? Podemos identificar 2 fuentes amplias de incertidumbre:

La primera es el riesgo que tiene que ver con las condiciones de la economía en general, como los ciclos de las empresas, la inflación, los tipos de interés, los tipos de cambio, etc. Ninguno de estos factores macroeconómicos se puede predecir con certeza, afectando la rentabilidad que al final se obtiene de la acción. También hay que añadir a estos macrofactores las influencias **específicas** de las empresas, como por ejemplo el éxito de las computadoras de la compañía en cuestión, el éxito en desarrollo e investigación, su estilo, filosofía en gestión, etc. Los factores específicos de la empresa son aquellos que afectan a HP sin que afecten a otras compañías.

Consideremos ahora una estrategia de diversificación "inocente", añadiendo un nuevo valor, por ejemplo en ExxonMobil. ¿Qué pasa con la cartera arriesgada?

Dado que las influencias específicas de la compañía en las dos acciones difieren, esta estrategia debería reducir el riesgo de la cartera. Por ejemplo, cuando bajan los precios del petróleo perjudicando a ExxonMobil, puede que suban los precios de las computadoras, lo cual beneficiaría a HP. Los dos efectos se complementan y eso estabiliza la rentabilidad de la cartera.

Pero ¿por qué detenerse sólo con dos acciones? La diversificación en muchos más valores continúa reduciendo la exposición a los factores específicos de la compañía, de forma que la **volatilidad** de la cartera debería seguir bajando. Sin embargo, incluso con un gran número de valores de riesgo en una cartera, no hay forma de evitar de manera absoluta el riesgo. En la medida en la que prácticamente todos los valores se ven afectados por factores macroeconómicos comunes, no podemos eliminar nuestra exposición al riesgo de la economía (o riesgo de mercado), independientemente de cuantas acciones tengamos.

Cuando todos los riesgos dependen específicamente de las compañías, la diversificación puede reducir el riesgo a niveles bajos. Con todas las fuentes de riesgo independientes y con la distribución de la inversión en muchos valores, la exposición a una fuente de riesgo en particular resulta despreciable. “Esto es sólo una aplicación de la ley de medias. *La reducción del riesgo a niveles muy bajos a causa de fuentes de riesgo independientes se denomina a veces como el* ***principio del seguro”***[17].

Sin embargo, cuando las fuentes de riesgo comunes afectan a las empresas, ni siquiera una diversificación amplia puede eliminar el riesgo.

En la siguiente figura se ilustran dichos conceptos.

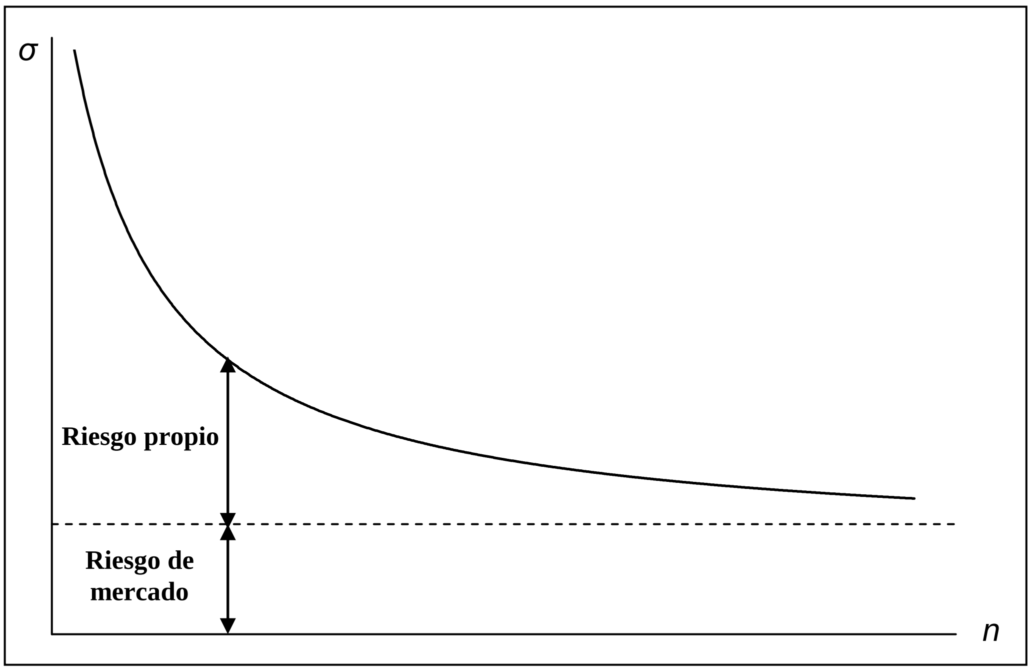


Figura 1. 6 Relación Riesgo – Número de títulos. Riesgo diversificable (no sistemático) y riesgo no diversificable (sistemático)

Notemos en primero instancia que el riesgo $\boldsymbol{\sigma}$, lo mediremos a través de la desviación estándar del portafolio (i.e. la volatilidad) y $\boldsymbol{n}$ es el número de títulos.

A medida que aumentamos el número de títulos el riesgo disminuye, sin embargo, se acerca asintóticamente a un valor a partir del cual ya no disminuye.

[17] (Kane, 2005).

El riesgo que permanece incluso después de la diversificación se llama **riesgo de mercado, riesgo sistemático o riesgo no diversificable**, y es el atribuible a fuentes de riesgo de todo el mercado/economía.

Particularmente, en estos momentos estamos viviendo una situación que hace evidente este tipo de riesgo: "La crisis financiera".

A pesar de que inicialmente afectó al sector hipotecario, se ha extendido a todos los sectores.

En consecuencia, ocurren fluctuaciones de los precios en los mercados financieros (volatilidad), recesiones, rescates financieros, inyección de capital, modificaciones en la política monetaria (corto y circulante), inflación, volatilidad del tipo de cambio, caídas en las bolsas de valores, colapsos en los sistemas bancarios, guerras, etc.

Se dice incluso que los mercados se mueven por la información (noticias), así que incluso el brote de influenza sea otro factor que afectará el comportamiento de los mercados.

Como vemos todos estos factores no son controlables y por lo tanto, este tipo de riesgo es independiente de las características individuales de las compañías y sus títulos.

El efecto esperado en situaciones críticas como por la actual crisis económica, es que la línea asintótica suba, incrementando así el riesgo total.

Es importante notar que es difícil (prácticamente imposible) encontrar contraparte que brinde protección financiera al asumir este tipo de riesgo.

Por otro lado, el riesgo que se puede eliminar mediante la diversificación se denomina **riesgo propio, riesgo específico de las compañías, riesgo no sistemático o riesgo diversificable,** el cual no depende del mercado, sino de las características específicas de la empresa emisora, tales como su giro, actividad productiva, solvencia financiera, competitividad, temporada de venta, y hasta su calificación crediticia.

1.11 LA DIVERSIFICACIÓN DEL RIESGO

Como ya mencionamos, la diversificación de la inversión entre varios títulos para componer una cartera reduce el riesgo. Hay dos formas de diversificación: la diversificación ingenua y la diversificación eficiente.

La *diversificación ingenua* sólo tiene en cuenta que se debe invertir en muchos títulos, los cuales son seleccionados sin un estudio previo de la **correlación** que existe entre ellos.

Sin embargo, de un estudio realizado de esta manera, es decir, formando al azar determinado número de carteras, para un creciente número de títulos, se pudo observar que el riesgo disminuye hasta un valor (**riesgo sistemático)**, pero no se puede eliminar su variabilidad.

Si el número de títulos es muy elevado, podemos llegar al nivel del riesgo de la cartera de mercado[18], pero debemos soportar el riesgo sistemático (factores macroeconómicos que no podemos eliminar).

Otro resultado importante es que se dedujo que aproximadamente con 20 - 30 títulos se consiguen carteras bien diversificadas. Aumentar aún más el número de títulos no produce gran efecto en la reducción del riesgo.

En la siguiente figura se muestra un ejemplo de 60 carteras formadas al azar para cada tamaño de 1 a 60 títulos, representando los valores de riesgo (desviación típica en términos anuales) de cada cartera en función del número de títulos en ella.

Como se puede observar, el riesgo de las carteras compuestas por pocos títulos (observe por ejemplo n=1) puede ser muy elevado y varía mucho de unas carteras a otras (simplemente observe los extremos, i.e., la de mayor y menor riesgo), y por lo tanto depende de los títulos concretos que las conforman.

Al aumentar el número de títulos en la cartera, el riesgo de éstas va disminuyendo y, en las carteras formadas por un gran número de títulos, el riesgo es prácticamente independiente de los títulos concretos que la formen; sean éstos cuales sean, el riesgo será similar.

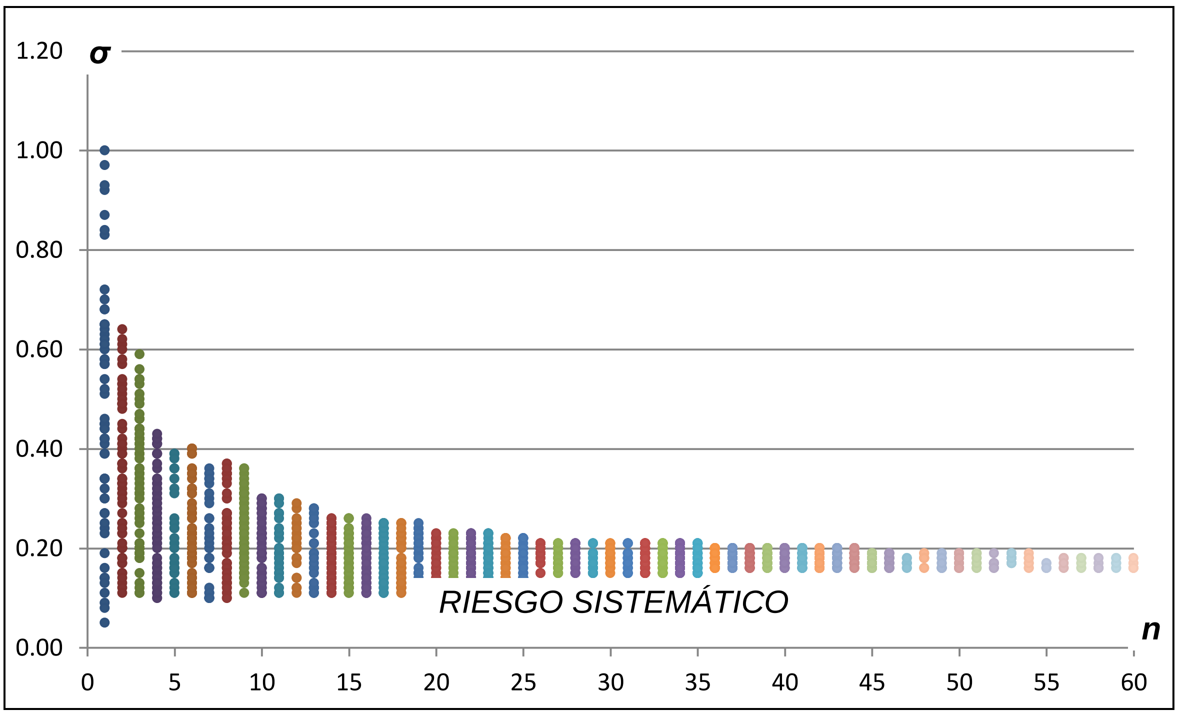


Figura 1. 7 El efecto en riesgo de la diversificación en 60 carteras formadas por *n* títulos c/u

[18] La cartera de mercado es aquella compuesta por todos los títulos que cotizan en el mercado bursátil, y compuesta en la proporción en que están presentes en éste. Se considera que una buena estimación de esta cartera, es el índice del mercado, el cual contempla precisamente todos los valores que lo conforman. En México, este índice es el IPC.

La *diversificación eficiente* de **Markowitz** parte del estudio de la **covarianza** entre los títulos. La composición de la carteras dependerá de dicho análisis. Se puede definir como "la forma de combinar títulos correlacionados en forma que no llega ser perfectamente positiva en un esfuerzo por reducir el riesgo de la cartera sin disminuir el beneficio esperado de la misma"[19].

1.12 EL PROCESO DE INVERSIÓN

Una cartera de inversión es una colección o conjunto de activos financieros en poder de un inversionista, ya sean acciones, divisas, tasas de interés, bonos, derivados, bienes inmuebles, materias primas, etc, y dependiendo de la asignación que se haga entre las diferentes opciones de inversión quedará determinado el riesgo y el rendimiento.

Una vez que se ha establecido la cartera, ésta se actualiza o equilibra vendiendo los valores existentes y utilizando los procedimientos para comprar nuevos valores mediante la inversión de fondos adicionales para incrementar el tamaño general de la cartera, o mediante la venta de valores para disminuirlo.

El inversionista toma dos tipos de decisiones cuando elabora su cartera: la decisión para la **asignación de activos** y **la selección de valores.**

La decisión para la asignación de activos es la elección entre la amplia gama de tipos de activos.

La decisión de la selección de valores es la elección sobre los valores en particular dentro de cada tipo de activo.

La construcción de la cartera "*top-down*" (arriba-abajo) comienza con la asignación de activos. Por ejemplo, el inversionista debe decidir si invertir en acciones que ofrecen mayor rendimiento y por ende implican mayor riesgo, o invertir en certificados del tesoro (CETES) que son libres de riesgo pero ofrecen un rendimiento menor.

El **análisis de valores** implica un estudio de ciertos valores que pueden incluirse en la cartera. Por ejemplo, el inversionista puede preguntar qué acción es más atractiva en cuanto a precio, sin embargo, la valoración resulta más difícil para acciones porque el comportamiento de las mismas es más sensible a la condición de la empresa emisora.

En contraste, está la estrategia "*bottom-up*" (de abajo hacia arriba). En este proceso la cartera se construye con los valores que resultan atractivos en cuanto al precio se refiere, sin que importe demasiado la asignación de activo resultante. Dicha técnica puede dar como resultado apuestas no pretendidas en uno u otro sector de la economía. Por ejemplo, puede suceder que la cartera acabe con una representación muy fuerte de empresas dentro de una industria de una parte del país o con una exposición a una fuente de incertidumbre. Sin embargo una estrategia *bottom-up* centra realmente la cartera en los activos que parecen ofrecer las oportunidades de inversión más atractivas.

[19] FRANCIS, J.C.; ARCHER, S.H. *Análisis y Gestión de Carteras de Valores.* Ed. ICE. Madrid. 1977 Pág. 175

1.13 AVERSIÓN AL RIESGO

Como ya mencionamos, la relación riesgo-rendimiento plantea en concreto que a mayor riesgo mayor rendimiento, y viceversa.

Por lo tanto, la aversión al riesgo es un indicador o característica del inversionista de qué tanto está dispuesto a arriesgar su capital invertido, dado que el rendimiento esperado estará en función de tal riesgo, además de su tolerancia a la variabilidad que pueda presentar el rendimiento.

Esto da origen a 'las etapas' y al 'perfil de inversionista', que tienen que ver con la edad, objetivos, experiencia, entre otros, y con la tolerancia al riesgo respectivamente.

Etapas/Fases y perfil del inversionista[20]:

1. **Fase de acumulación:** Rango: 18 a 30 años. En esta etapa, generalmente una persona tiene excedente de capital y necesidades de ahorro/gasto/inversión. Por lo tanto, puede adoptar un perfil arriesgado.
2. **Fase de consolidación:** Rango: 30 a 40 años. El inversionista consolida su patrimonio. Probablemente cuente con ingresos mayores pero la aversión al riesgo es mayor, debido a que el tiempo de ahorro para el futuro es menor. Adopta un perfil medio.
3. **Fase de gasto:** Rango: 40 a 60 años. El inversionista quizá pueda cubrir sus gastos con ahorro/rendimientos de las fases anteriores. Adopta un perfil moderado
4. **Fase de donativo:** Rango: 60 años en adelante. El inversionista cuenta con su retiro y piensa en la generación inmediata. Finalmente adopta un perfil conservador.

- **Conservador:** busca mantener su capital expuesto a muy bajo riesgo, en plazos cortos o medios, aunque implique ganancias pequeñas. Tiene interés en instrumentos de renta fija (Bonos, Cetes, T-Bills).
- **Arriesgado:** siguiendo la lógica riesgo-rendimiento, lo que espera es mayor rentabilidad. Le interesan instrumentos de renta variable o puede considerar de renta fija con alta rentabilidad.

El agente de la casa de bolsa, identifica el perfil a través de preguntas referentes a la edad, finanzas personales, objetivos, plazos, economía del hogar y la aversión al riesgo, para determinar el tipo de cartera conveniente y a la medida de cada inversionista, que cumpla con los objetivos y necesidades del mismo (*policy statement*) (vea ejemplo en el capítulo 4).

[20] Esto no necesariamente se cumple para cualquier individuo. Esto dependerá de su educación financiera en el ahorro, en el gasto, etc. También dependerá de su nivel de ingresos, de sus excedentes, etc.

CAPÍTULO II
PRODUCTOS DERIVADOS

En este capítulo abordaremos de manera más detallada el estudio de los productos financieros derivados y la valuación de opciones, desarrollando los métodos que existen para tal fin, como por ejemplo el modelo de árboles binomiales, la fórmula de *Black Scholes* (y *Merton*), simulación Monte Carlo, y un breve resumen de opciones exóticas. Se muestran también, comparaciones entre ejemplos valuados con cada método, además de la parte teórica y práctica del uso de futuros, opciones, portafolios de réplica, arbitraje y cobertura.

REFERENCIAS:

[1] Hull, J. C. (1993). *Options, Futures and other Derivatives Securities.* Englewood Cliffs, NJ.: Prentice Hall.

[2] Kolb, R. W. (1993). *Inversiones.* México: Limusa.

[3] Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science.* New York: Oxford University Press.

[4] Wilmott, P. (2005). *Exotic Option Pricing and advanced Lévy models.* Chichester: John Wiley & Sons, Ltd.

[5] Wilmott, P. (1995). *Option Pricing, mathematical models and computation.* New York: University of Cambridge.

[6] Wilmott, P. (2006). *Paul Wilmott on quantitative finance.* Chichester: John Wiley & Sons, Ltd.

[7] Wilmott, P. (1996). *The mathematics of financial derivatives.* New York: University of Cambridge.

[8] Notas del Curso: '*Productos financieros derivados*'. Profesor: Jesús Agustín Cano Garcés. Facultad de Ciencias, UNAM.

[9] Notas del Curso: '*Valuación de Opciones*'. Profesor: Jorge Humberto del Castillo Spíndola. Facultad de Ciencias, UNAM.

[10] Rincón, Luis (2008). *Introducción a los procesos estocásticos.* México, D.F. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias, UNAM.

2.1 *FORWARDS* (CONTRATO DE ENTREGA FUTURA)

Recordemos que un contrato *forward* es un acuerdo para comprar/vender un subyacente en una fecha futura T, a un precio pactado K. El poseedor del contrato está obligado a comprar el subyacente (posición larga) y el emisor a venderlo (posición corta).

Los *forwards* cotizan en mercados OTC (*Over-the-counter market*); algunas características son:

- Los corredores/agentes no se ven físicamente, negocian por teléfono ó computadora.

- Es entre dos instituciones financieras o una institución con uno de sus clientes.
- VENTAJA: los participantes pueden negociar y hacer el contrato a la medida.
- DESVENTAJA: dado que no existe una institución reguladora, por tanto, menos garantías, el riesgo de incumplimiento de alguna de las partes en general es más alto.

NOTACIÓN:

T: Tiempo en años en que expira el contrato (fecha de ejercicio, vencimiento ó maduración).
t: tiempo actual (hoy), $0 \leq t \leq T$.
$S_T = S(T)$: precio del subyacente en T (desconocido en t).
$S = S(t)$: precio del subyacente al tiempo t, $0 \leq t \leq T$ (conocido).
K: precio pactado o precio de ejercicio *(strike)*.
r: tasa libre de riesgo continua anual en *t* para una inversión que madura en T.[21]

2.1.1 SUBYACENTE QUE NO PAGA DIVIDENDOS
2.1.1.1 PORTAFOLIO DE RÉPLICA

Considere un contrato de compra *forward* (largo) sobre un subyacente que **no paga dividendos** durante la vida del contrato.
A continuación se construye un portafolio que **replica** el *payoff* (total) de un *forward* al vencimiento (*T*):

	t	T
SUBYACENTE	$-S(t)$	$S(T)$
PRÉSTAMO	$VP(K)$	$-K$
TOTAL	$-S(t) + VP(K)$	$S(T) - K$
FWD	$-f$	$S(T) - K$

La **replicación de un *forward*** muestra que son autofinanciables adquiriendo un portafolio constituido de la forma anterior, es decir: Hoy (*t*) se compra el subyacente, por lo que se desembolsa $-S(t)$, y se pide un préstamo por el valor presente de $K \rightarrow +VP(K)$. Al vencimiento (*T*), se vende la acción por $+S(T)$ (lo que vale en ese momento), y se paga el préstamo $\rightarrow -K$.

Por lo tanto, el valor del contrato *FWD* hoy (t) es *f* (con signo negativo ya que hoy se desembolsa $-f$ por su adquisición).

[21] Se usa la tasa de interés libre de riesgo (continua) $r = \delta$ para traer a valor presente *K*. Esta tasa no debe confundirse con r_F (vea capítulo III).

Entonces, el precio o **valor <u>actual</u> de un contrato *forward*** que cumple con el principio de no arbitraje (vea ejemplos 1 al 4, sección 2.1.1.2), es denotado por $\boldsymbol{f}$:

- **Valor del contrato *FWD*:**

$$f(t) = S(t) - VP(K) = S(t) - Ke^{-r(T-t)} \qquad \rightarrow f_C = -f$$

Otro valor asociado con un contrato *forward* es el **precio *forward*** denotado por ***F*.** Éste es el **precio (justo) que aplica a la entrega** futura de una unidad del activo subyacente, el cual se especifica en el contrato escrito hoy. El precio *forward* es calculado tal que $f = 0$ inicialmente, es decir, que las partes no necesitan intercambiar dinero al completar el acuerdo del contrato, y es indistinto tomar una posición larga o corta. Después del tiempo inicial, el valor f quizá varíe, dependiendo de las variaciones del precio del activo subyacente **(*spot*)**, de las tasas de interés vigentes, y de otros factores. Si el precio del activo aumenta, el valor de una posición larga en el contrato será positivo mientras que el valor de una posición corta se volverá negativo.

En resumen, el precio *forward* es el valor K tal que $f = 0$ (igualamos f a cero y despejamos *K*)

- **Precio *FWD*=Precio *FWD C*** (precio de compra=precio de venta):

$$F(t) = \boldsymbol{K(t)} = S(t)e^{r(T-t)}$$ [22]

Esta fórmula muestra la relación entre el precio *spot* (*S*) del subyacente y el precio *forward F*. El precio *spot* inicia con un valor $S(t = 0)$ y varía aleatoriamente, llegando a $S(T)$. Sin embargo, el precio *forward* al tiempo cero se basa en la extrapolación hacia adelante (valor futuro) del precio *spot* actual, a la tasa de interés vigente. Entonces, el precio *forward* al tiempo cero es igual al valor futuro de una cantidad en efectivo de $S(0)$.

2.1.1.2 PORTAFOLIO DE ARBITRAJE

Recordemos que definimos arbitraje como la posibilidad de obtener ganancias seguras y sin riesgo.

Consideremos un activo que cotiza en el *New York Stock Exchange (NYSE)* y en la BMV, cuyo precio es de 100 USD en el *NYSE* y de \$1,065 en la BMV cuando el tipo de cambio es de 10.70 \$/USD. Si al mismo tiempo compramos *C* acciones en la BMV y las vendemos en el *NYSE*, obtendríamos suponiendo que no hay costos de transacción:

$$C[(10.70 * 100) - 1{,}065] = 5C > 0$$

[22] Esta fórmula se puede generalizar para futuros sobre materias primas (*commodities*) con: $F_0 = (S_0 + u)e^{rT}$, donde *u* es el valor presente de los gastos.

Este tipo de oportunidades no pueden durar por mucho tiempo debido a las fuerzas de oferta y demanda. La demanda de la acción en México ocasionará la apreciación del peso. De la misma manera, al vender la acción en Nueva York, el precio del dólar bajará. En consecuencia, muy rápidamente tendremos que la actual tasa de cambio de los dos precios serán equivalentes.

En las economías es muy difícil encontrar este tipo de oportunidades, sin embargo, si existen, aunque son muy difíciles de encontrar y operar. Por ejemplo, podemos mencionar el caso del banco Inglés que en los 90's quebró por la búsqueda de oportunidades de arbitraje, a pesar de ser un banco con más de 100 años de antigüedad y de los más sólidos de ese país.

A continuación se muestran 4 ejemplos de arbitraje con sus respectivos portafolios.

- **Ejemplo 1: *El contrato se abre el día de HOY (t=0).***

Sean $S(t)$=60
T→3 meses
r=0.12 (continua, anual)

Supongamos que el contrato se abre pactando F=K=62.

Entonces, calculamos el precio *forward* (precio justo) para determinar qué posición nos conviene tomar[23]:

$$F = \boldsymbol{K} = S(t)e^{r(T-t)} = 60e^{(0.12/12)(3-0)} = 61.8273$$

Dado que el precio pactado es mayor al justo (62>61.8273) → me conviene ***VENDER (FWD C)*** (se compra o se vende por el precio pactado K). Esto es:

	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{T}$
FWD ***C***	0 [24]	$K - S(T) = 62 - S(T)$
SUBYACENTE	$-S(t) = -60$	$S(T)$
PRÉSTAMO	$VP(K) = 62e^{-(0.12(3/12))} = 60.1676$	$-K = -62$
TOTAL	0.1676	0

Sin inversión y sin riesgo, se obtiene una ganancia de 0.1676 por un contrato con estas características. **No obstante, se hace arbitraje sobre miles de unidades por contrato.**

La ganancia (**valor del *fwd c***) es la diferencia entre el valor presente de 'K pactada' y $S(t)$ (el valor presente de 'K justa'), $\boxed{0.1676 = 62e^{-0.12(3/12)} - 60 = f_C}$.

[23] Todos los cálculos se redondearán a 4 decimales.
[24] Como el contrato se abre hoy, el valor del contrato es cero.

- **Ejemplo 2:** Con los mismos datos del ejemplo anterior, suponga ahora que el contrato se abre con K=61.50. Dado que el precio pactado es menor al justo (61.50<61.8273) → me conviene ***COMPRAR (FWD)***. Esto es:

	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{T}$
FWD	0	$S(T) - K = S(T) - 61.50$
SUBY **C**	$S(t) = 60$	$-S(T)$
INVERSIÓN	$-VP(K) = -61.50e^{-(0.12(3/12))} = -59.6824$	$K = 61.50$
TOTAL	0.3176	0

Sin inversión y sin riesgo, obtengo una ganancia de $0.3176 = f$

- **Ejemplo 3:** ***El contrato ya está abierto.***

Sean $S(t)$=100
T→6 meses
r=0.08 (continua, anual)
K=102

Supongamos que el valor del contrato en el mercado es de 2.10

Entonces calculamos el **valor del *FWD*** para determinar qué posición nos conviene tomar:

$$f = S(t) - Ke^{-r(T-t)} = 100 - 102e^{-0.08(1/2)} = 1.9995$$

Dado que el valor del *FWD* es menor al valor del contrato en el mercado (1.9995<2.10) → ***VENDO***.

	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{T}$
FWD **C**	2.10 [25]	$K - S(T) = 102 - S(T)$
SUBYACENTE	$-S(t) = -100$	$S(T)$
PRÉSTAMO	$VP(K) = 102e^{-(0.08(1/2))} = 98.0005$	$-K = -102$
TOTAL	0.1005	0

Sin inversión y sin riesgo, obtengo una ganancia de 0.1005. La ganancia es la suma del valor del contrato en el mercado al que estoy vendiendo y el valor del *fwd c*.

[25] Al venderlo recibo +2.10

- **Ejemplo 4:** Con los mismos datos del ejemplo anterior, suponga ahora que el contrato se vende en 1.50. Dado que el valor del *FWD* es mayor al precio de venta del contrato (1.9995>1.50) → ***COMPRO***.

	t	T
FWD	-1.50 [26]	$S(T) - K = S(T) - 102$
SUBY **C**	$S(t) = 100$	$-S(T)$
INVERSIÓN	$-VP(K) = -102e^{-(0.08(1/2))} = -98.0005$	$K = 102$
TOTAL	0.4995	0

Sin inversión y sin riesgo, obtengo una ganancia de 0.4995. La ganancia es la suma del valor del contrato en el mercado al que estoy comprando y el valor del *fwd*.

Entonces el precio del contrato siempre debe ser *f* (valor del *FWD*), es decir, cumple con el principio de no arbitraje; si es mayor o menor se presenta la oportunidad de hacer arbitraje y haría ganancias sin inversión y riesgo alguno.

2.1.1.3 PORTAFOLIO DE COBERTURA

El portafolio de cobertura no otorga ganancias (sólo se ganan comisiones), pero se elimina todo riesgo. Usando los datos del ejemplo anterior (ejemplo 4), el portafolio de cobertura para quien vendió el contrato sería de la siguiente forma:

	t	T
FWD **C**	1.9995 [27]	$K - S(T) = 102 - S(T)$
SUBYACENTE	$-S(t) = -100$	$S(T)$
PRÉSTAMO	$VP(K) = 102e^{-(0.08(1/2))} = 98.0005$	$-K = -102$
TOTAL	0	0

Observe que los totales en *t* y en *T* son cero, es decir, las ganancias/pérdidas son nulas.

2.1.2 SUBYACENTE QUE PAGA DIVIDENDOS
2.1.2.1 PORTAFOLIO DE RÉPLICA

Al igual que en la sección 2.4.1.1, construiremos la réplica de un *forward* (largo), es decir, un portafolio que tiene el mismo *payoff* que un *FWD* en *T*, para un subyacente que paga dividendos que son pagados en t_1 ($d_1 \rightarrow t_1$):

[26] Al comprarlo desembolso -1.50
[27] Éste es el valor del *FWD* que se calculó en la hoja anterior.

	t	T
SUBYACENTE	$-S(t)$	$S(T)$
PRÉSTAMO (VP(K))	$VP(K) = Ke^{-r(T-t)}$	$-K$
PRÉSTAMO (VP(d_1))[28]	$VP(d_1) = d_1 e^{-r(t_1-t)}$	0
TOTAL	$Ke^{-\gamma(T-t)} + d_1 e^{-r(t_1-t)} - S(T)$	$S(T) - K$

FWD	$-f$	$S(T) - K$

Por lo tanto el valor del contrato en *t* con dividendos es:

$$f = S(t) - ke^{-r(T-t)} - d_1 e^{-r(t_1-t)}$$

Generalizando, el valor del Contrato FWD con *n* dividendos es:

$$f = S(t) - VP(K) - \sum_{i=1}^{n} VP(d_i) = S(t) - Ke^{-r(T-t)} - \sum_{i=1}^{n} d_i \, e^{-r(t_i-t)}$$

$$\rightarrow f_C = -f$$

Recordemos que para hallar el **precio del *FWD***, igualamos el valor del contrato a cero, y despejamos a *K* (precio justo).

Precio del *FWD/FWD C* (precio de compra=precio de venta):

$$F(t,T) = K = e^{r(T-t)} \left[S(t) - \sum_{i=1}^{n} d_i \, e^{-r(t_i-t)} \right]$$

- **Ejemplo 1:** Considere un contrato de venta (*FWD C*) sobre un subyacente que paga dividendos.

Sean $S(t)$=80
$T \rightarrow$9 meses
r=0.12 (continua, anual)
K=90
d_1=3.50 (paga dividendos d_1 al tiempo t_1)
$t_1 \rightarrow$3 meses

[28] Con el dividendo que obtengo del subyacente en t_1 pago este préstamo.

	t	T
SUBYACENTE **C**	$S(t) = 80$	$-S(T)$
INVERSIÓN (VP(K))	$-VP(K) = -90e^{-(0.12(9/12))} = -82.2538$	$K = 90$
INVERSIÓN (VP(d_1))[29]	$-VP(d_1) = -3.50e^{-(0.12(3/12))} = -3.3966$	0
TOTAL	-5.6504	$K - S(T) = 90 - S(T)$

FWD C	$f = -f_C = -5.6506$	$90 - S(T)$

Por lo tanto el valor del contrato con dividendos es: $-f = f_C = 5.6506$

Calculamos con los mismos datos del ejemplo anterior el valor del contrato sin dividendos:

$$-f = f_C = Ke^{-r(T-t)} - S(t) = 90e^{-0.12(9/12)} - 80 = 2.2538$$

Note que el valor del *FWD C* con dividendos es mayor (5.6504>2.2538).

2.1.2.2 PORTAFOLIO DE ARBITRAJE

- **Ejemplo 1:** Considere un contrato de compra *forward* (largo) sobre un subyacente que paga dividendos.

Sean $S(t)$=70
T→10 meses
r=0.08 (continua, anual)
K=72
d_1=2
t_1→2 meses
d_2=2.50
t_2→8 meses

Suponga que el valor del contrato en el mercado es -2 (el contrato ya está abierto).
Entonces calculamos el valor del contrato con dividendos:

$$f = 70 - 72e^{-0.08(10/12)} - 2e^{-0.08(2/12)} - 2.50e^{-0.08(8/12)} = -1.7002$$

Ya que hay diferencia entre estos valores, entonces podemos hacer ARBITRAJE.

[29] Con esta inversión, pago la obligación pendiente de 3.50 (d_1) a los 3 meses (t_1)

Dado que el valor del *FWD* es mayor que su valor en el mercado (-1.7002>-2) → me conviene ***COMPRAR*** por su valor en el mercado que es menor.

	t	*T*
FWD	$-(-2)$	$S(T)-K=S(T)-72$
SUBYACENTE **C**	$S(t)=70$	$-S(T)$
INVERSIÓN (VP(K))	$-VP(K)=-72e^{-(0.08(10/12))}$	$K=72$
INVERSIÓN (VP(d_1))	$-VP(d_1)=-2e^{-(0.08(2/12))}$	0
INVERSIÓN (VP(d_2))	$-VP(d_2)=-2.5e^{-(0.08(8/12))}$	0
TOTAL	0.2998	0

Sin inversión y sin riesgo obtengo una ganancia de 0.2998 por un contrato con estas características (se hace arbitraje sobre miles de unidades por contrato).

2.1.2.3 PORTAFOLIO DE COBERTURA

Análogamente a la sección 2.4.1.3, el portafolio de cobertura para el que vendió el contrato del ejemplo anterior es:

	t	*T*
FWD **C**	$+(-1.7002)$	$K-S(T)=72-S(T)$
SUBYACENTE	$-S(t)=-70$	$S(T)$
PRÉSTAMO (VP(K))	$VP(K)=72e^{-(0.08(10/12))}=67.3565$	$-K=-72$
PRÉSTAMO (VP(d_1))	$VP(d_1)=2e^{-(0.08(2/12))}=1.9735$	0
PRÉSTAMO (VP(d_2))	$VP(d_2)=2.5e^{-(0.08(8/12))}=2.3387$	0
TOTAL	0	0

No hay ganancias, y se elimina todo riesgo.

2.1.3 SUBYACENTE QUE PAGA DIVIDENDOS CONTINUOS

El valor del contrato *FWD* sobre un subyacente que paga dividendos en forma continua, queda determinado por:

$$f=S(t)e^{-q(T-t)}-Ke^{-r(T-t)}$$

Análogamente, para **el precio del *FWD*** igualamos a cero la fórmula anterior y despejamos *K*:

$$F(t,T)=K=S(t)e^{(r-q)(T-t)}$$

2.2 FUTUROS

Los futuros son un contrato para comprar (posición larga) ó vender (posición corta) un bien subyacente en el futuro *(T)* a un precio determinado *(K)*.

Ya habíamos mencionado que una diferencia es que los Futuros cotizan en un mercado de valores, mientras que los *forwards* cotizan en mercados OTC (*Over-the-counter market*), y se realizan entre instituciones financieras o institución-cliente.

Para regularlos existe la cámara de compensación, y para asegurar su cumplimiento requiere del ajuste de márgenes día a día (a diferencia con un *forward* en que el pago y la entrega se hacen únicamente en *T*).

En el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer), la cámara de compensación es "Asigna", conformada por 5 grupos financieros: Bancomer, Banamex, Santander, Scotiabank y JP Morgan.

Algunos detalles importantes son:

- Los futuros no tienen costo, sólo los requerimientos de margen.
- El precio del futuro converge al precio *spot (S)* cuando se acerca al vencimiento *(T)*.
- También se hacen gastos de almacenaje, por ejemplo, cuando el subyacente son materias primas (*commodities: jugo, azúcar, etc)*.
- Si el precio del subyacente empieza a aumentar, entonces debe aumentar el valor del contrato. El valor del contrato depende de la oferta y la demanda.

Especificaciones de un contrato futuro:

- Bien subyacente y cotizaciones *(Price quotes)*
- Tamaño del contrato (cantidad de subyacente)
- Arreglos de entrega: Decide quien tiene la posición corta (inversionista).
  First/last notice day: primer/último día en que se da un aviso de intención de hacer la entrega.
  Último día de comercio (*trading*): algunos días antes del último día de aviso.
  Cuando se paga en efectivo, simplemente se marca al mercado el último día y se cierran las posiciones.
- Límites diarios de movimiento en los precios *(daily price movements limits)*: cesan los intercambios en el día si el contrato es *limit up* o *limit down* para prevenir movimientos fuertes por exceso de especulación.
- Límites de posición *(position limits)*: número máximo de contratos que puede tener un especulador.

Márgenes de cuenta:

- ***MARK TO MARKET:*** al final de cada día de transacciones (*trading*) se ajusta la cuenta para reflejar la ganancia o pérdida del inversionista.
- **Margen inicial*:*** el inversionista debe depositar en un fondo un capital inicial cuando firma un futuro.
- **Margen de Mantenimiento***:* para asegurar que el balance de la cuenta no se haga negativo.
- **Llamada de margen** *(margin call)***:** si el balance cae por debajo del margen de mantenimiento, el inversionista debe depositar nuevos fondos (margen de variación) para dejarla en el margen inicial.
- Normalmente se deja que el inversionista gane los intereses de la cuenta.

Clearinghouse margin

- Garantiza el rendimiento para cada una de las partes en cada transacción.
- Registra todas las transacciones que ocurren durante el día para calcular la posición neta de cada uno de sus miembros.
- Existe un margen original pero no de mantenimiento.
- Se pueden determinar los márgenes de las siguientes maneras:
  - Base bruta (*Gross bassis*): suman todas las posiciones largas y cortas.
  - Base neta (*Net bassis*): restan las posiciones cortas de las posiciones largas.

2.2.1 A PRECIO DE MERCADO (*MARK TO MARKET)*

Día con día se van haciendo ajustes a los precios de los participantes al precio de cierre.

Para el comprador (posición larga), un aumento en el precio del subyacente entre días sucesivos es un movimiento favorable (ganancia), mientras que una disminución es una pérdida. Para el vendedor (posición corta), sucede lo contrario (vea figura 2.1).

Cuando el saldo en la cuenta cae por debajo del margen de mantenimiento, el corredor realiza una **llamada de margen** al inversionista para que deposite lo necesario para regresar el saldo al margen inicial.

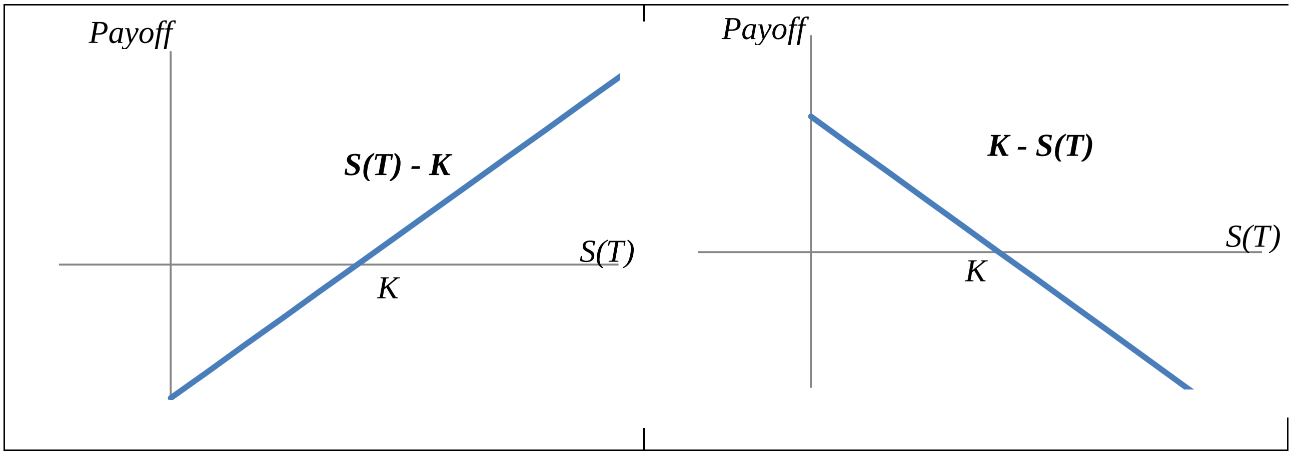


Figura 2. 1 Diagramas de pagos para posición larga (izquierda) y corta (derecha)

- **Ejemplo 1:** Considere **100** futuros de compra que amparan x unidades de subyacente por contrato y suponga los sig. precios del subyacente $S(t)$ por los próximos 6 días.
  Sean K=46
  M.I.=3,000 (margen inicial)
  M.M.=2,500 (margen de mantenimiento)

Día	S(t)	Ajuste (Gan/Pérd)	Saldo ó Balance	Reposición margen
0	46 =*K*		3000 = *M.I.*	
1	44	-200 = (44-46)*100	2800 = 3000+(-200)	
2	43	-100 = (43-44)*100	2700 = 2700+(-100)	
3	40	-300	2400	**LLAMADA DE MARGEN:** 2400< M.M.
4	44	400	3400 = (2400+400)+600	600 = 3000 - 2400
5	46	200	3600	
6	47	100	3700	
TOTAL		$\Sigma = 100$		

Note que un *forward* (donde no hay flujo de efectivo sino hasta el vencimiento) con estas características también tendría *payoff* de: $100 * (S(T) - K) = 100 * (47 - 46) = 100$

- **Ejemplo 2:** Considere **un** contrato de futuro sobre un subyacente que ampara x unidades del mismo. Suponga los siguientes precios del subyacente durante los próximos 5 días. Sea el margen inicial el 20% del valor del subyacente en el día cero (posición de apertura). Sea el margen de mantenimiento igual al 75% del margen inicial.

MI = 1000*0.20 = 200	MM = 200*0.75 = 150

		Posición del comprador			Posición del vendedor		
Día	**Precio**	**Ajuste**	**Saldo**	**Reposición de margen**	**Ajuste**	**Saldo**	**Reposición de margen**
0	K=1000		200			200	
1	1100	100	300		-100	100	
2	1200	100	400		-100	100	100
3	1050	-150	250		150	350	100
4	950	-100	150		100	450	
5	900	-50	150	50	50	500	
TOTAL		$\sum = -100$					

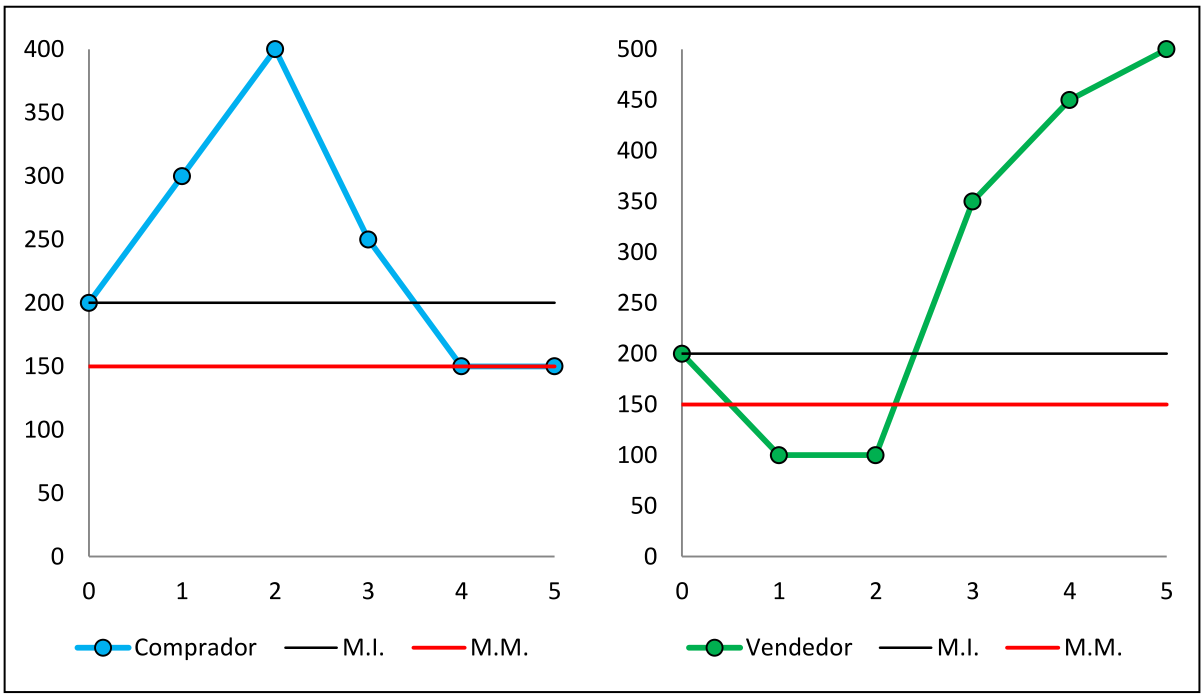


Figura 2. 2 Gráficas del saldo en cuenta del comprador (izquierda) y del vendedor (derecha).

2.3 OPCIONES

2.3.1 USO DE UNA OPCIÓN CON EL PROPÓSITO DE COBERTURA

Consideremos un inversionista que en agosto tiene mil acciones. El precio actual de cada una de ellas es de \$52. Él presiente que el precio de la acción puede bajar en los próximos dos meses, sin embargo no desea venderlas, únicamente protegerse ante la posible baja. Para protegerse podría comprar **opciones de venta** con vencimiento en octubre, y un precio *strike* K=\$50. *Debido a que el contrato de opción ampara 100* *acciones, necesitaría comprar 10 contratos de opciones.* El precio de la opción fue pactado en p=$200.

Entonces esta estrategia de cobertura le cuesta $2000, pero le garantiza que las acciones pueden ser vendidas en $50 c/u en caso de que se presente la baja y ejerza:

Por lo tanto, obtiene [1000($50)]-$2000=$48,000

Si el precio de la acción permanece arriba de $50, entonces las opciones no son ejercidas y expiran sin valor.

2.3.2 USO DE UNA OPCIÓN CON EL PROPÓSITO DE INVERTIR (ESPECULAR)

Se utilizan para tratar de hacer ganancias cuando se tiene la creencia de un movimiento favorable en los precios.

Supongamos que en septiembre, un inversionista toma una posición donde quiere obtener ganancias si el precio de cierta acción se incrementa. Actualmente cuenta con $3,900 para sus operaciones especulativas.

Supongamos que el precio actual de la acción es de $39 y hay una **opción de compra** con vencimiento dentro de 30 días, K=$40, que se está vendiendo por $1.50, y se tienen las siguientes estrategias alternativas: comprar 100 acciones o comprar 2600 opciones.

Supongamos que existen únicamente dos escenarios posibles dentro de 30 días: que el precio de la acción suba a $45 ó que baje a $35.

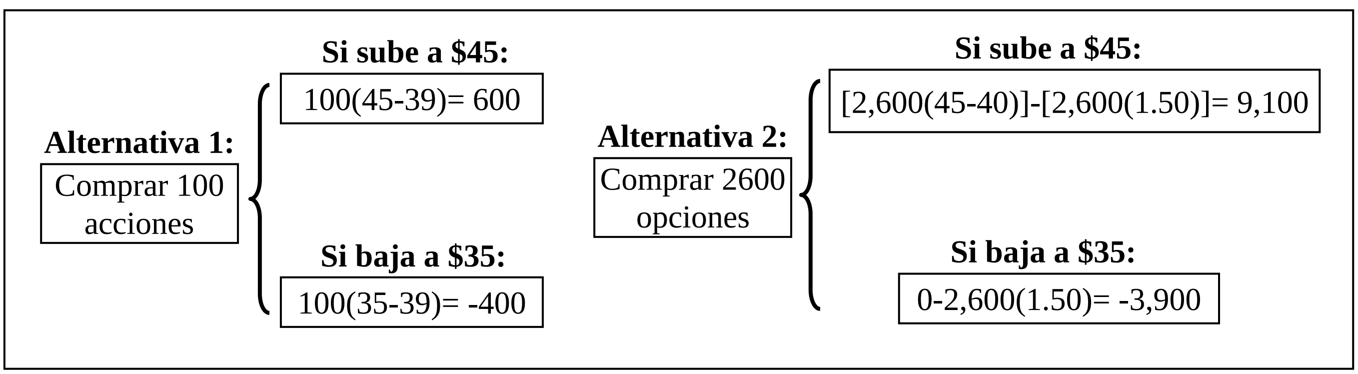


Figura 2. 3 Comparación entre dos alternativas de inversión

Como podemos observar la alternativa 2 (uso de las opciones) hace que tanto las ganancias como las pérdidas se incrementen notoriamente. Sin embargo, la pérdida se limita al valor de la prima o precio de la opción, como ya mencionamos en el capítulo anterior. Es por esto que muchos especuladores prefieren el uso de las opciones.

2.3.3 DENTRO DEL DINERO, EN EL DINERO Y FUERA DEL DINERO

- Si K (precio de ejercicio) $< S(t)$ (precio del activo), se dice que una opción de compra está dentro del dinero *(in the Money)*.
- Si $K = S(t)$, se dice que la opción de compra está exactamente en el dinero *(at the Money)*.
- Si $K > S(t)$, se dice que la opción de compra está fuera del dinero *(out of the Money)*.

Si una opción se encuentra dentro del dinero, es porque tiene un valor positivo si es que se quiere vender.

Si se encuentra fuera del dinero, es poco probable que alguien desee comprarla.

Para una opción de venta sucede lo contrario.

	CALL	***PUT***
DENTRO DEL DINERO	$K < S(t)$	$K > S(t)$
EN EL DINERO	$K = S(t)$	$K = S(t)$
FUERA DEL DINERO	$K > S(t)$	$K < S(t)$

2.3.4 MÉTODOS PARA VALUAR OPCIONES

A continuación estudiaremos los principales modelos que se utilizan para calcular el precio de opciones.

El modelo de *Black Scholes* es el caso continuo/límite, del modelo discreto de árboles binomiales de n subperiodos (cuando n tiende a infinito).

El método de simulación Monte Carlo usa el supuesto de que los precios siguen un Movimiento Browniano Geométrico.

Para calcular el precio de las opciones, estos métodos se basan en el **teorema fundamental de la valuación**, es decir, que el precio es el valor presente de su valor esperado. Esto es:

$$\boxed{V = V_0 = e^{-r(T-t)}E[V]}$$

<u>**De aquí en adelante, se usan los mismos datos en los ejemplos numéricos para comparar los resultados entre cada método.**</u>

2.3.4.1 EL MODELO BINOMIAL

Es un modelo matemático simplificado que describe el comportamiento de un subyacente a través del tiempo. Consideremos el siguiente esquema:

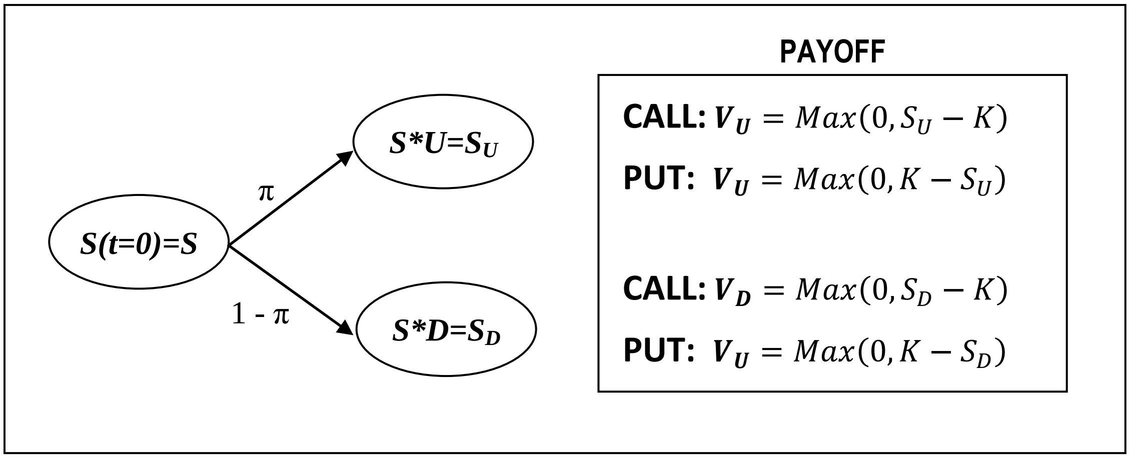


Figura 2. 4 Ejemplo de un árbol binomial de un subperiodo para una opción de compra *CALL* y una opción de venta *PUT*

Se muestra la evolución de un subyacente con valor (el día de hoy) $S(0)=S$, durante **un subperiodo**. El valor del subyacente puede subir a $S*U$ con probabilidad de neutral[30] al riesgo π, o bajar a $S*D$ con probabilidad de riesgo neutral $1\text{-}\pi$. A la derecha se muestran los *payoffs* al tiempo *T* para ambos escenarios.

Los valores U y D son proporciones (ó posible valor futuro de S) con los que crece y decrece $S(t)$ respectivamente, y se calculan mediante las siguientes fórmulas:

$$U = e^{\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}}$$
$$D = e^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}}$$

Donde $\mu=r$, y *δt=fracción de tiempo entre cada periodo.*
σ=volatilidad del activo (desviación estándar de su serie histórica de log-rendimientos).

ó, mediante las fórmulas de *Cox-Ross-Rubinstein*:

$$U = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$$
$$D = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} = {}^{1}/_{U}$$

[30] Se llama probabilidad 'neutral' al riesgo porque si calculamos el rendimiento esperado con tales probabilidades π y $1\text{-}\pi$, sería igual al rendimiento con la tasa libre de riesgo.

Note que al vencimiento que *S(T)* toma los valores *S*U* y *S*D* al momento de calcular los *payoff's*, pues esos son los valores que el subyacente ha tomado en cada caso.

Ahora construiremos un portafolio que replique las posibilidades mostradas en el árbol:

	t	$S_T = S * U$	$S_T = S * D$
*Δ*SUBYACENTE[31]	$-\Delta S$	$\Delta S * U$	$\Delta S * D$
PRÉSTAMO VP(B)[32]	$Be^{-r(T-t)}$	$-B$	$-B$
TOTAL	$-\Delta S + VP(B)$	V_U	V_D

Por lo tanto: $V = \Delta S - VP(B)$

Delta (*Δ*), es la fracción de subyacente que necesito comprar para replicar el valor de la opción en determinado nodo (estado).

El préstamo por el valor presente de *B*, es de un bono, ambos para hacer que la opción sea autofinanciable, como ya habíamos mencionado en el tema de 'portafolio de réplica'.

Ahora consideremos el sistema:

$$\Delta SU - B = V_U \quad (1)$$
$$\Delta SD - B = V_D \quad (2)$$

Multiplicando (2) por -1, y sumando ambas ecuaciones tenemos que:

$$\boxed{\Delta = \frac{V_U - V_D}{SU - SD}}$$

SU-SD≠0

Por el método de Cramer:

$$B = \frac{\mathrm{Det}(B)}{\mathrm{Det(sistema)}} = \frac{\begin{vmatrix} SU & V_U \\ SD & V_D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} SU & -1 \\ SD & -1 \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{B = \frac{V_U SD - V_D SU}{SU - SD}}$$

SU-SD≠0

Sustituyendo en $V = \Delta S - VP(B)$:

---

[31] Esta vez se trata de una fracción de subyacente "delta (Δ)".

[32] El préstamo *B* es un bono.

$$V = \left(\frac{V_U - V_D}{SU - SD}\right) S - e^{-r(T-t)} \left(\frac{V_U SD - V_D SU}{SU - SD}\right)$$

$$V = \left(\frac{V_U - V_D}{S(U - D)}\right) S - e^{-r(T-t)} \left(\frac{S(V_U D - V_D U)}{S(U - D)}\right)$$

Cancelamos las *S*, factorizamos la exponencial y algebraicamente se tiene:

$$\boxed{V = e^{-r(T-t)} \left[\underbrace{\left(\frac{e^{r(T-t)} - D}{U - D}\right)}_{\pi} V_U + \underbrace{\left(\frac{U - e^{r(T-t)}}{U - D}\right)}_{1-\pi} V_D \right]} \qquad U \geq e^{r(T-t)} \geq D$$

De donde podemos observar que los factores que multiplican a V_U y V_D son las probabilidades de riesgo neutral π y $1-\pi$:

$$\boxed{\pi = \frac{e^{r(T-t)} - D}{U - D}}$$

Note que el producto dentro de los corchetes es un valor esperado (esperanza), ya que se están multiplicando los posibles resultados (V_U y V_D) por sus respectivas probabilidades de ocurrencia. El factor de la exponencial hace que en conjunto tengamos el valor esperado traído a valor presente, es decir, el valor esperado de la opción hoy V (teorema fundamental de la valuación).

Visto como un proceso estocástico, el árbol es una martingala[33] bajo la medida π.

Para entender esto, consideremos el ejemplo donde X_n denota el capital que tiene un jugador si en cada juego apuesta un peso y su probabilidad de ganarlo o perderlo es ½.

El modelo del "juego de volados" (equivalente a la caminata aleatoria simple con p= ½) puede modelarse de la siguiente forma: el capital de uno de los jugadores es:

$$X_n = c + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$$

[33] Martingala discreta: Se dice que una sucesión de variables aleatorias $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en un conjunto finito o numerable E, es una **martingala** si $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $E(|X_n|) \leq \infty$ y para cualesquiera $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x \in E$ se cumple la condición: $E[Z_{n+1} | Z_n = x, Z_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, Z_0 = x_0] = x$, es decir, que la esperanza es constante.

donde c es su capital inicial, y $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y puede tomar los valores ±1, tales que $\mathrm{P}[Y_n = 1] = \mathrm{P}[Y_n = -1] = 1/2$ (es decir, con probabilidad ½ gana un peso si sale águila ó pierde un peso si sale sol).

Sabemos que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una cadena de Markov[34] (pues el siguiente resultado depende únicamente del anterior). Veamos que también es una martingala:

$$\mathrm{E}[X_n | X_{n-1} = x] = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x-1) = x \quad \forall\, x \in \boldsymbol{E}^{35}\ y\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Es decir que la esperanza es constante durante todo el proceso.

Es claro que se trata de un juego "justo". Si la probabilidad de ganar un peso no fuera igual a la de perderlo y también que el valor de los pagos no fueran iguales (juego de suma cero), entonces el proceso no sería martingala[36].

Es por esta razón que *P* recibe el nombre de probabilidad de riesgo neutral.

Volviendo al modelo binomial, el valor de la probabilidad de riesgo neutral $\boldsymbol{\pi}$, busca eliminar la tendencia del precio. Esto quiere decir que los posibles resultados están equilibrados.

Por lo tanto, también elimina las posibilidades de arbitraje.

Extenderemos los resultados anteriores a un árbol de *n* subperiodos. Realizamos una partición del intervalo *T-t* en *n* divisiones de tamaño $\Delta = \frac{T-t}{n}$

Se busca escoger Δ pequeña de tal forma que las variaciones de *S(t)* durante el intervalo de tiempo Δ, puedan ser aproximadas por sólo un movimiento hacia arriba o hacia abajo, como en el ejemplo anterior. Esto es:

$$S(t+\Delta) = S(t) \pm \sigma\sqrt{\Delta}$$

El parámetro σ determina la variación por lo que se le conoce como *volatilidad del activo*, misma que utilizamos para calcular *U y D*, las proporciones con que sube o baja de precio *S(0)*.

---

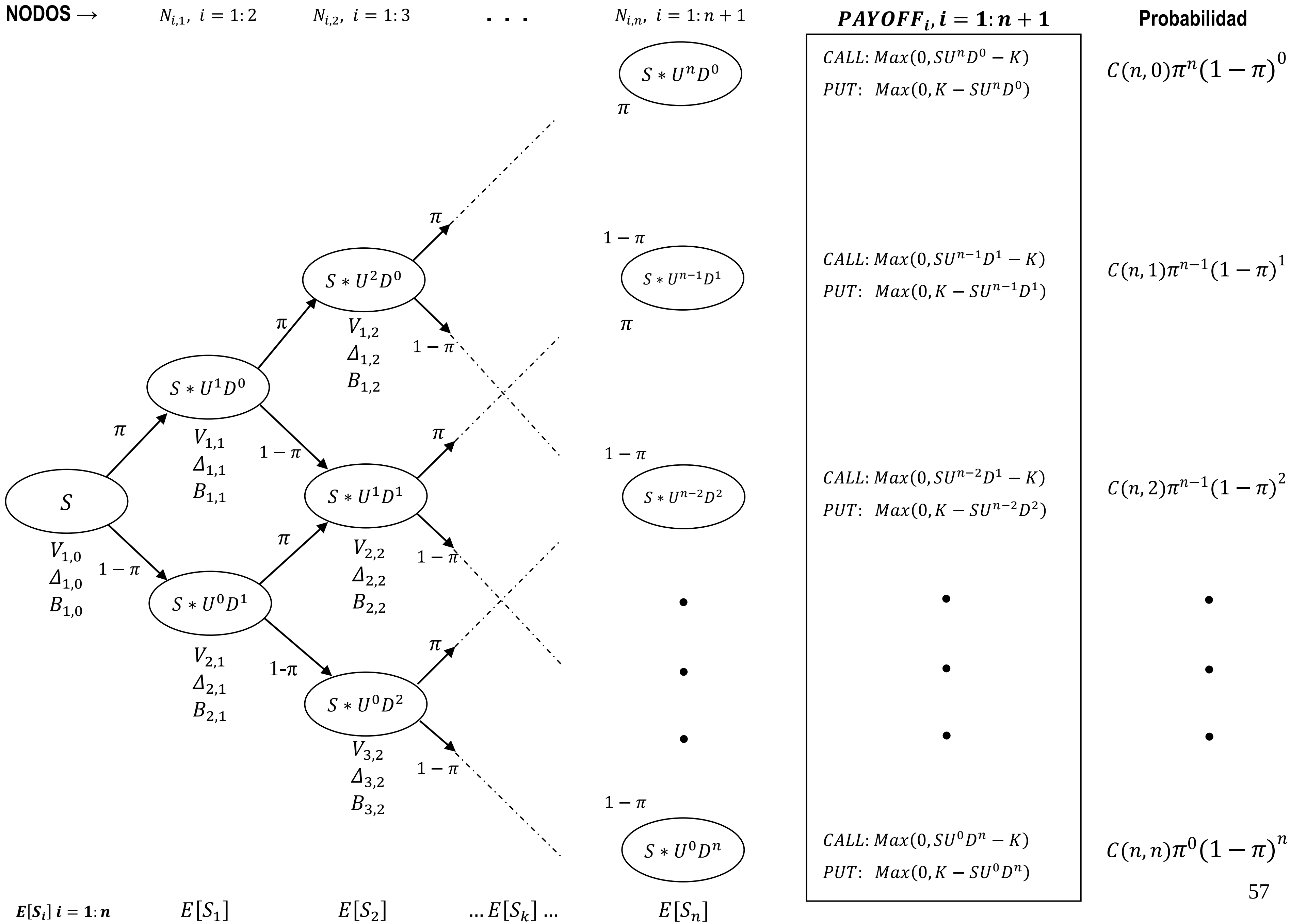
[34] Una *cadena de Markov* es un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n\}_{n\epsilon E}$ que satisface la propiedad de Markov, esto es, para cualquier entero $n \geq 0$ y para cualesquiera estados $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}, x \in E$, se cumple: $p(x_{n+1}|x_0, \dots, x_n) = p(x_{n+1}|x_n)$, es decir que la probabilidad de que $X_{n+1} = x_{n+1}$ sólo depende del resultado inmediatamente anterior.

[35] $\boldsymbol{E}$ = espacio de estados que puede tomar la variable aleatoria.

[36] Si la probabilidad p>1/2 entonces tendríamos una submartingala. Si p<1/2 entonces tendríamos una supermartingala.

Figura 2. 5 Esquema de un árbol binomial de n subperiodos.

NOTA: En la columna 'probabilidad', $C(n,k)$ son las combinaciones de n en $k = 0,1,\dots,n$.



Recodemos que los valores dentro de cada nodo, son las posibles evoluciones del precio del subyacente.

La columna de probabilidades tiene la forma de los términos del binomio de Newton elevado a la n potencia, pues es el producto de las probabilidades de llegar a cada uno de los estados (nodos) finales desde el estado (nodo) inicial.

Debajo de cada nodo hay una terna de valores, los cuales son: el valor de la opción ($V_{i,j}$), la fracción de subyacente ($\Delta_{i,j}$) y el valor de un bono ($B_{i,j}$) necesarios para replicar el valor de la opción en el estado i, j (nodo i, j).

Estos valores y el valor de la opción son calculados mediante un proceso de programación dinámica (Luenberger, 1998). Es decir: primero se calculan los valores cuando falta 1 etapa (subperiodo) para terminar, luego cuando faltan 2 etapas, y así sucesivamente hasta cuando faltan n etapas para terminar (ir del final al inicio), pues se necesitan los últimos valores para calcular los anteriores. Esta terna de valores se calcula de la siguiente manera:

- Para una opción de tipo europea (sólo se puede ejercer al vencimiento), el valor de la opción en cada estado (debajo de cada nodo) es el valor presente de su valor esperado, usando los valores calculados en la etapa anterior:

$$V_{i,j} = \exp^{-r\left(\frac{T-t}{n}\right)}[\pi V_U + (1-\pi)V_D]$$

donde V_U y V_D, son los valores superior e inferior de la opción, calculados en la etapa anterior. Para el primer conjunto de valores $V_{i,j}$ (toda la penúltima columna), V_U y V_D son los *payoff's*, i.e. los valores de la opción al vencimiento.

El valor de la opción **hoy,** es el valor presente del valor esperado cuando falta T (los n subperiodos), es decir:

$$V = \exp^{-r(T-t)}\left(\sum_{i=0}^{n} Payoff_{i+1} \cdot C(n,i) \cdot \pi^{n-i}(1-\pi)^i\right)$$

donde $C(n, i)$ son las combinaciones de n en i (coeficientes del binomio de Newton o del triángulo de Pascal).

de tal forma que $V = V_{1,0}$ (valor de la opción en el primer nodo).

- Para una opción de tipo americana (se puede ejercer durante ó hasta el vencimiento), es necesario hacerlo por etapas (del final al inicio):

$$V_{i,j} = \max\{exp^{-r\left(\frac{T-t}{n}\right)}[\pi(V_U) + (1-\pi)(V_D)], \max\{0, S(t)-k\}\} \quad \text{para } \textit{Call}$$

$$V_{i,j} = \max\{exp^{-r\left(\frac{T-t}{n}\right)}[\pi(V_U) + (1-\pi)(V_D)], \max\{0, k - S(t)\}\} \quad \text{para } Put$$

donde V_U y V_D, son los valores superior e inferior de la opción, calculados en la etapa anterior, y $S(t)$ es el precio del subyacente en ese estado (nodo).
Para el primer conjunto de valores $V_{i,j}$ (toda la penúltima columna), V_U y V_D son los *payoff's,* i.e. los valores de la opción al vencimiento.

es decir, que en cada nodo se elige el máximo entre el valor esperado de la opción, o el valor de la opción si se ejerce en ese momento.

Finalmente:

$$\boxed{\Delta_{i,j} = \frac{V_U - V_D}{SU - SD}, \qquad B_{i,j} = \frac{V_U SD - V_D SU}{SU - SD}}$$

donde SU y SD, son los valores superior e inferior del precio del subyacente en la etapa anterior y V_U y V_D, son los valores superior e inferior de la opción, calculados en la etapa anterior.
Para el primer conjunto de valores $\Delta_{i,j}$ y $B_{i,j}$ (toda la penúltima columna), V_U y V_D son los *payoff's,* i.e. los valores de la opción al vencimiento.

Sean $p = \pi$ y $q = 1 - \pi$, las probabilidades de riesgo neutral para los movimientos a la alza y a la baja respectivamente.
El **valor esperado del precio del subyacente** es la ponderación:

$\mathrm{E}[S_1] = pS_U + qS_D = p(SU^1D^0) + q(SU^0D^1) = S(pU + qD)$
→$\mathrm{E}[S_k] = S(pU + qD)^k$
→$\mathrm{E}[S_{k+1}] = S(pU + qD)^{k+1} = S(pU + qD)^k(pU + qD) = E[S_k](pU + qD)$

- Si [pU+qD]>1 → se dice que el precio tiende a la alza
- Si [pU+qD]=1 → se dice que el precio carece de tendencia
- Si [pU+qD]<1 → el precio tiende a la baja

A continuación se presenta un ejemplo realizado con la macro del archivo 'Árboles binomiales.xlsx'. Desarrollamos el cálculo de los valores para el primer nodo del sub-periodo 2:

$$SU^2D^0 = 100 \cdot 1.1891^2 = 141.3982$$

$$V_{1,2} = e^{-0.3(1/3)}\left[(0.5542 \cdot 68.1381) + \left((1 - 0.5542) \cdot 18.911\right)\right] = 44.6766$$

$$\Delta_{1,2} = \frac{V_U - V_D}{SU - SD} = \frac{68.1381 - 18.9110}{168.1381 - 118.9110} = 1$$

$$B = \frac{V_U SD - V_D SU}{SU - SD} = \frac{(68.1381 * 118.9110) - (18.9110 * 168.1381)}{168.1381 - 118.9110} = 100$$

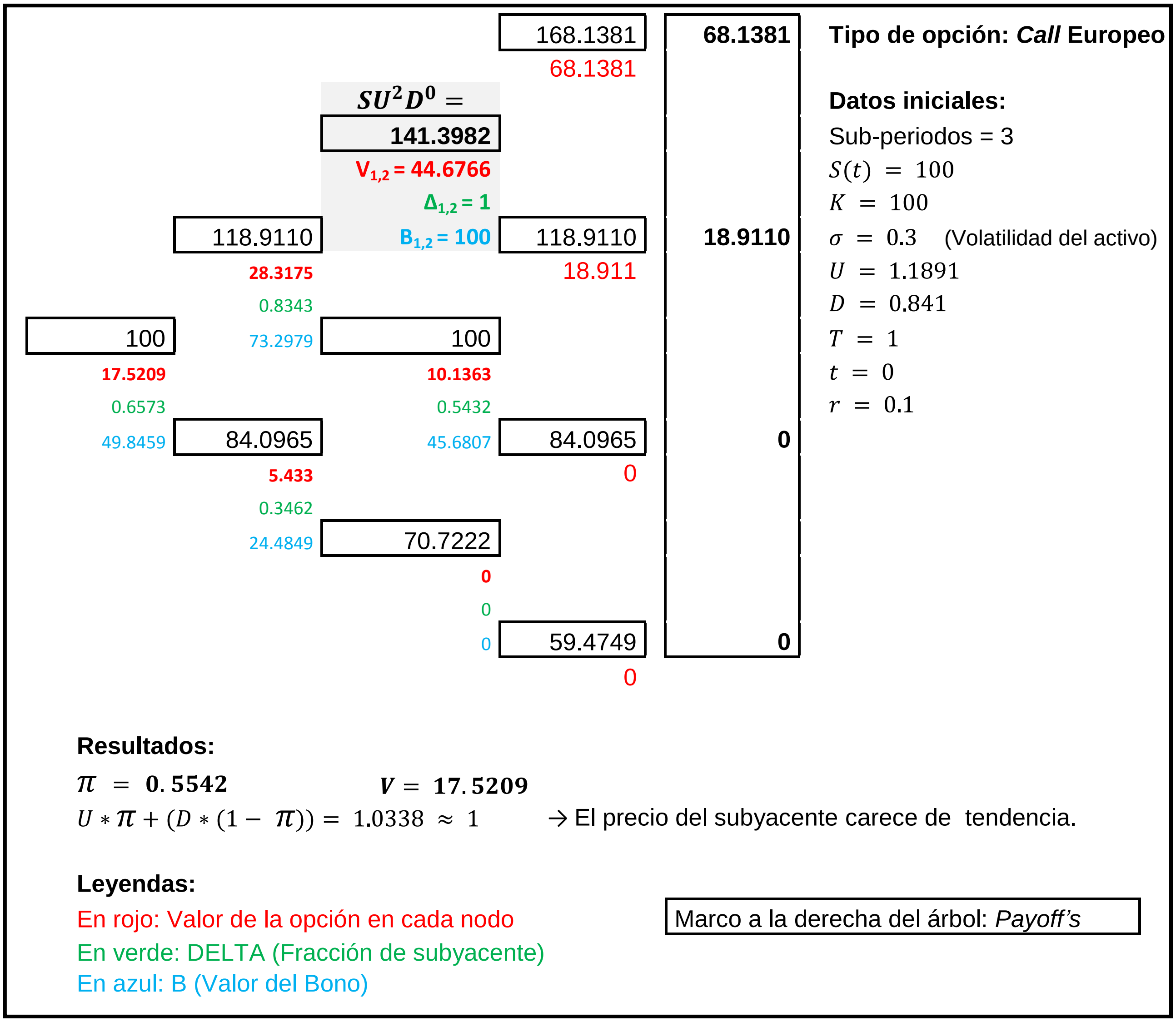


Figura 2. 6 Ejemplo de un árbol binomial de 3 subperiodos para un *Call* tipo Europeo.

2.3.4.2 MODELO DE *BLACK SCHOLES*

Sirve para estimar el valor teórico de una opción sólo de tipo europea, a partir de:

- El tiempo hasta la fecha de expiración: $T - t$
- El precio actual del subyacente: $S(t)$
- El precio de ejercicio de la opción: K
- La volatilidad anual del subyacente: σ
- La tasa libre de riesgo continua anual: r

La famosa ecuación valuadora de opciones de *Black Scholes* inició la teoría financiera moderna basada en el principio de no arbitraje. La ecuación fue desarrollada asumiendo que las fluctuaciones del precio del activo subyacente puede ser descrita por un proceso de Îto (vea Luenberger, 1998, Cap. 11). La lógica detrás de la ecuación es conceptualmente idéntica a la del modelo binomial: a cada momento dos valores disponibles son combinados para construir un portafolio que reproduce el comportamiento local del derivado.

Sea *S=S(t)* el precio de un activo subyacente (nos referiremos a una acción) que está gobernado por un proceso de movimiento Browniano geométrico sobre un intervalo [0,T] descrito por:

$$\mathrm{d}S = \mu S\mathrm{d}t + \sigma s\mathrm{d}z$$

donde z es un movimiento Browniano estándar (o un proceso de Wiener). Suponga también que hay un activo (un bono) a tasa libre de riesgo *r* sobre [0,*T*]. El valor ***B*** de este bono satisface:

$$\mathrm{d}B = rB\mathrm{d}t$$

Finalmente considere un valor que es derivado de *S*, lo cual significa que su precio está en función de *S* y de *t*. Denotaremos como $f(S,t)$ al precio de este valor al tiempo *t* cuando el precio de la acción es *S*. Queremos una ecuación (no aleatoria) para la función $f(S,t)$, la cual nos dé explícitamente el precio del derivado. Esta función puede ser encontrada resolviendo la ecuación de *Black Scholes* como se muestra:

→***Ecuación Black Scholes*:** Suponga que el precio de un subyacente está gobernado por la ecuación $\mathrm{d}S = \mu S\mathrm{d}t + \sigma s\mathrm{d}z$, y la tasa de interés es *r*. Un derivado de este subyacente tiene un precio $f(S,t)$, el cual satisface la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rf$$[75]

Como ejemplo, considere la misma acción, un derivado de *S*. Entonces $f(S,t) = S$ debería satisfacer la ecuación *Black Scholes*. En efecto, con esta elección de f tenemos $\partial f/\partial t = 0$, $\partial f/\partial S = 1$, $\partial^2 f/\partial S^2 = 0$. Por lo tanto, la ecuación *Black Scholes* queda $rS = rS$, lo cual muestra que $f(S,t) = S$ es una solución.

Como otro ejemplo, considere el bono, el cual es también derivado de *S*, entonces $f(S,t) = e^{rt}$ debería satisfacer la ecuación *Black Scholes*. Con esta elección de f tenemos $\partial f/\partial t = re^{rt}$, $\partial f/\partial S = 0$, $\partial^2 f/\partial S^2 = 0$. Por lo tanto tenemos $re^{rt} = re^{rt}$, lo

[75] (Para la demostración vea Luenberger, 1998, p.353-354)

cual muestra, que en efecto, $f(S,t) = re^{rt}$ es una solución. Hay incontables soluciones más.

Si $f(S,t)$ no satisface la ecuación de *Black Scholes*, entonces hay una oportunidad de arbitraje.

Aunque usualmente es imposible encontrar una solución analítica a la ecuación de *Black Scholes*, es posible encontrar tal solución para una opción europea (*call/put*). Esta solución es de gran uso teórico y práctico:

- Para *Call*:

$$\boxed{C = S(t)N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)}$$

- Para *Put*[76]:

$$\boxed{P = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S(t)N(-d_1)}$$

donde $N(d_1) = \Phi(d_1) = \mathrm{P}(X \leq d_1)$ y $N(d_2) = \Phi(d_2) = \mathrm{P}(X \leq d_2)$ son la probabilidad acumulada hasta d_1 y d_2 de una variable aleatoria con distribución normal estándar $N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$. Ya que la distribución normal es simétrica, $N(-d_1) = 1 - N(d_1)$ y $N(-d_2) = 1 - N(d_2)$ para el caso *Put*.

Los valores d_1 y d_2 son los cuantiles que determinan si la opción se encuentra dentro o fuera del dinero y se calculan de la siguiente manera:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

La fórmula usa la función *N(x)*, la distribución de probabilidad acumulada normal estándar, es decir, la distribución de una variable aleatoria con media 0 y varianza 1. El valor *N(x)* es el área bajo la curva de la campana de Gauss (su función de densidad). Algunos valores particulares son $N(-\infty) = 0, N(0) = \frac{1}{2}, N(\infty) = 1$.

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, \mathrm{d}y$$

A continuación se muestra la gráfica de los valores de una opción calculados con *Black Scholes* a diferentes tiempos para su vencimiento. Observe que cuando $t \rightarrow T$ más se acerca

[76] O se utiliza la paridad *Put-Call*, como se menciona en la sección 2.4

al diagrama de *payoff's* que ya conocíamos. Es decir, al vencimiento (*T-t=0*), el valor de la opción se aproxima a las funciones $C = \{0, S - K\}^+$ ó $P = \{0, K - S\}^+$

DATOS INICIALES:	
Tipo de opción: *Call* Europeo	$\delta t = 0.1$ (en años o fracción de año)
$K = 100$	$r = 0.1$ (tasa libre de riesgo continua (anual))
$T = 1$ (en años o fracción de año)	$\sigma = 0.3$ (volatilidad del activo (anual))

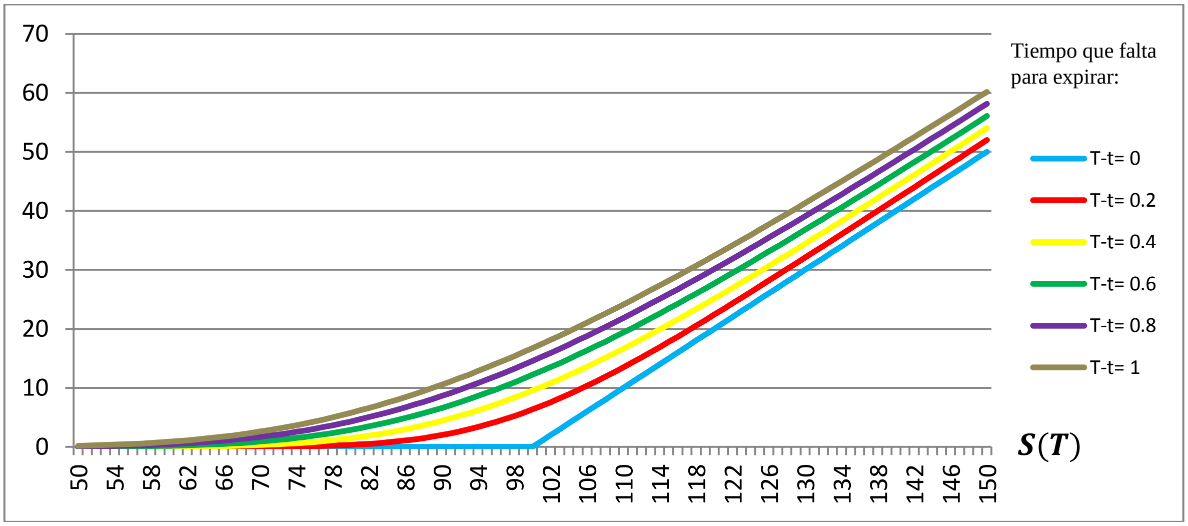


Figura 2. 7 Valor de un *Call* calculado por *Black Scholes* a diferentes tiempos para su vencimiento.

El modelo de *Black Scholes* es el caso continuo/límite, del modelo discreto de árboles binomiales de n subperiodos (cuando $n \to \infty$). A continuación se muestra un ejemplo concreto donde se observa dicha convergencia en forma de 'zigzag':

<table>
<tr><th>Tipo de opción: Call (EUROPEO)</th><th>Valor de la opción con Black Scholes:</th><th>Número de subperiodos</th><th>Valor de la opción con Modelo Binomial:</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Datos iniciales:
$n = 100$ (se realiza hasta 100 subperiodos)
$S(0) = 100$
$K = 100$
$T = 1$ (en años ó fracción de año)
$r = 0.1$ (tasa libre de riesgo continua (anual))
$\sigma = 0.3$ (volatilidad del activo (anual))</td><td rowspan="8">16.7341</td><td>1</td><td>18.9382</td></tr>
<tr><td>2</td><td>15.3787</td></tr>
<tr><td>3</td><td>17.5209</td></tr>
<tr><td>.</td><td>.</td></tr>
<tr><td>.</td><td>.</td></tr>
<tr><td>.</td><td>.</td></tr>
<tr><td>99</td><td>16.7578</td></tr>
<tr><td>100</td><td>16.7043</td></tr>
</table>

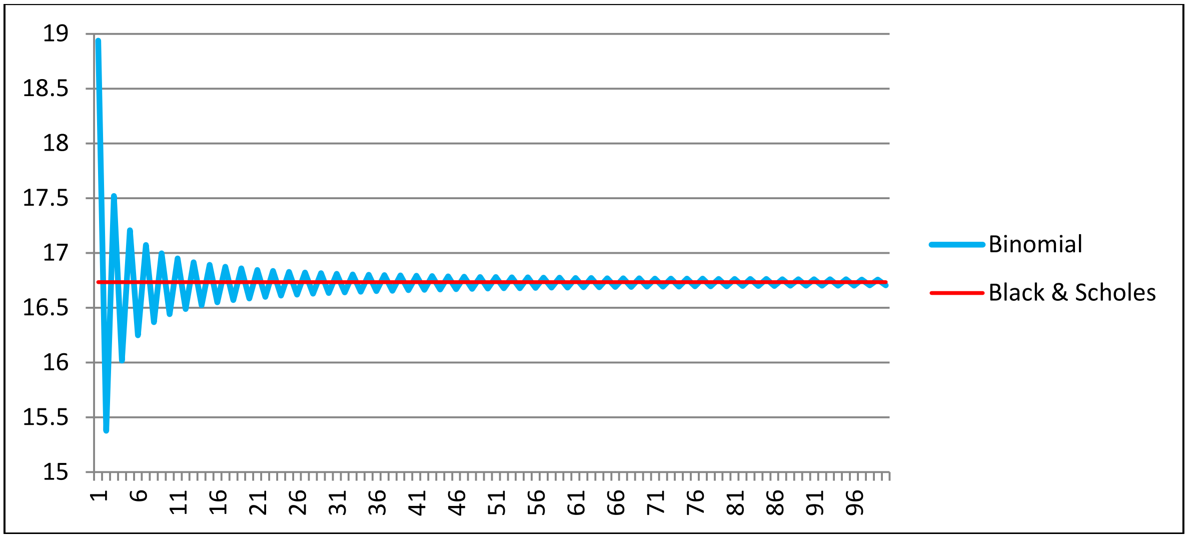


Figura 2. 8 Convergencia del modelo binomial a *Black Scholes*

Algunos errores en el modelo es que sobre-simplifica algunos aspectos, por ejemplo, al suponer que la distribución de los log-rendimientos de los precios son normales, cuando en realidad no lo son, además de que la volatilidad del activo 'σ' es heterocedástica y no constante. Se han propuesto diversas modificaciones y mejoras al modelo de *Black* y *Scholes*. Sin embargo, en muchos sentidos, sigue siendo tanto desde el punto de vista teórico como en la práctica misma, un punto de referencia muy importante.

2.3.4.3 SIMULACIÓN MONTE CARLO

La simulación Monte Carlo es uno de los métodos más poderosos y de más fácil implementación para el cálculo del valor de opciones. Sin embargo, el procedimiento esencialmente sólo es útil para las opciones de tipo europeas, donde no se toman decisiones hasta la expiración. Usa el supuesto de que los precios siguen un Movimiento Browniano Geométrico.

El modelo de Movimiento Browniano Geométrico es de amplio uso en finanzas y sirve para representar el precio de algunos bienes que fluctúan siguiendo los vaivenes de los mercados financieros.

Sean μ y $\sigma > 0$ dos constantes, y $S_0 > 0$. Suponga que hay un derivado que tiene *payoff* a tiempo T de $f(S(t))$ y suponga que el precio de la acción $S(t)$ está gobernado por un movimiento Browniano geométrico. El *movimiento Browniano geométrico* es el proceso solución de la ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \qquad \text{donde } B_t \sim \mathrm{N}(0, t)\ [77]$$
$$S_0 = s_0$$

[77] B_t es un proceso de Wiener estándar = movimiento Browniano estándar (no geométrico). El movimiento Browniano estándar es el caso continuo de la caminata aleatoria (discreto).

Esta ecuación puede interpretarse de la siguiente forma. En ausencia del término estocástico, la ecuación se reduce a $dS_t = \mu S_t dt$, cuya solución es $S_t = s_0 e^{\mu t}$. Esta función representa el comportamiento en el tiempo de un capital inicial positivo s_0 que crece de manera continua y determinista a una tasa efectiva de 100μ%, suponiendo $\mu > 0$. Por otro lado, la parte estocástica corresponde a la volatilidad de una inversión sujeta a las fluctuaciones de los mercados financieros. El modelo supone que dicha variabilidad es proporcional al valor de la inversión. Observe que los coeficientes de esta ecuación satisfacen las condiciones para la existencia y unicidad de la solución. Resolviendo la ecuación por el método de igualación de coeficientes, la solución es:

$$X_t = x_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right], \qquad \text{donde } B_t \sim N(0,t)$$

Con la notación que hemos usado, el precio del subyacente al vencimiento S_T es:

$$\boxed{S_T = S_0 \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}\cdot Z\right]}, \qquad \text{donde } Z \sim N(0,1)$$

Para simular las variables aleatorias normales estándar, se puede utilizar la transformada de Box-Müller:

$$Z = \sqrt{-2\ln(U_1)} \cdot Sen(2 \cdot \pi \cdot U_2)$$

donde U_1 y U_2 ~ Uniforme(0,1) que a su vez se pueden simular con la función *random*( )/*aleatorio*( )

La base para el método Monte Carlo es la fórmula valuadora de riesgo neutral, la cual muestra que el precio inicial del derivado debería ser:

$$P = e^{-rT}\hat{E}[f(S(t))]$$

La simulación del precio S_T se realiza un gran número de veces (por ej. $n \geq 100000$).
Con cada precio simulado, se calcula el correspondiente valor *f(S(t))*, es decir, el *payoff* de la opción: $C = \{0, S_T - K\}^+$ ó $P = \{0, K - S_T\}^+$

Un estimado $\hat{P}$ del precio teórico verdadero de la opción es:

$$\boxed{\hat{P} = e^{-rT}\text{Promedio}[f(S(t))]}$$

donde el promedio (aritmético, geométrico, armónico ó ponderado) es de los *payoffs* calculados, y se trae a valor presente. A continuación un ejemplo en una hoja de cálculo:

Datos iniciales:	Uniforme (0,1)	Uniforme (0,1)	Normal (0,1)	Precio simulado del subyacente en T	*Payoff*
Número de simulaciones: 100000	0.9016	0.8066	-0.4266	126.8821	26.8821
Tipo de opción: *Call* Europeo	0.6475	0.984	-0.0936	134.4545	34.4545
$S(0) = 100$	0.5543	0.0817	0.5336	111.0725	11.0725
$K = 100$	0.5935	0.7638	-1.0177	72.0221	0
$T = 1$	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$r = 0.1$ (libre de riesgo continua (anual))	0.133	0.887	-1.3102	95.6365	0
$\sigma = 0.3$ (Volatilidad (anual))	0.5962	0.956	-0.2772	100.277	0.2770

El promedio de la columna de los *payoff's* es 18.5079; su valor presente es el valor de la opción = $18.5079e^{-0.1*1} = 16.7466$

Con *Black Scholes* obtuvimos 16.7341. La diferencia entre los métodos fue de $|16.7341 - 16.7466| = .0125$

Para simular de manera recursiva toda una trayectoria (desde hoy hasta *T*) los precios de un subyacente con incrementos de tiempo δt se ajusta la ecuación anterior a:

$$\boxed{S_{t+\delta t} = S_t \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t + \sigma\sqrt{\delta t} \cdot Z\right]}$$

donde $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$

Ejemplo:

DATOS:
No. de Trayectorias: 6
$\delta t = 0.1$ (incrementos de tiempo)
$T = 1$
$S(0) = 100$
$r = 0.1$ (tasa libre de riesgo continua (anual))
$\sigma = 0.3$ (volatilidad del activo (anual))

	t=0	*t=0.1*	*t=0.2*	*t=0.3*	*t=0.4*	*t=0.5*	*t=0.6*	*t=0.7*	*t=0.8*	*t=0.9*	*t=1*
Trayectoria 1	100	98.90	114.55	90.58	53.26	48.00	66.79	60.82	58.14	64.33	73.10
Trayectoria 2	100	90.34	76.43	94.25	83.10	120.06	109.33	111.09	130.19	132.70	126.05
Trayectoria 3	100	100.48	102.78	115.67	80.41	90.90	120.03	110.25	118.89	183.59	123.05
Trayectoria 4	100	107.41	119.78	141.70	121.71	141.65	162.32	190.26	161.98	139.90	185.20
Trayectoria 5	100	91.36	87.95	79.16	83.70	85.78	94.32	120.17	145.71	143.80	238.60
Trayectoria 6	100	101.41	106.86	89.31	108.72	105.00	128.92	79.80	59.68	48.78	117.00

Finalmente, hemos mencionado que los errores de *Black Scholes* y del método de simulación Monte Carlo, es que suponen que los precios tienen una distribución lognormal, y los log-rendimientos tienen una distribución normal, además de que la volatilidad del activo 'σ' no es constante sino heterocedástica[78]. En la realidad, esto no es así. Verificaremos esto contra una seria histórica de precios al cierre de una acción (*volatility smiles*).

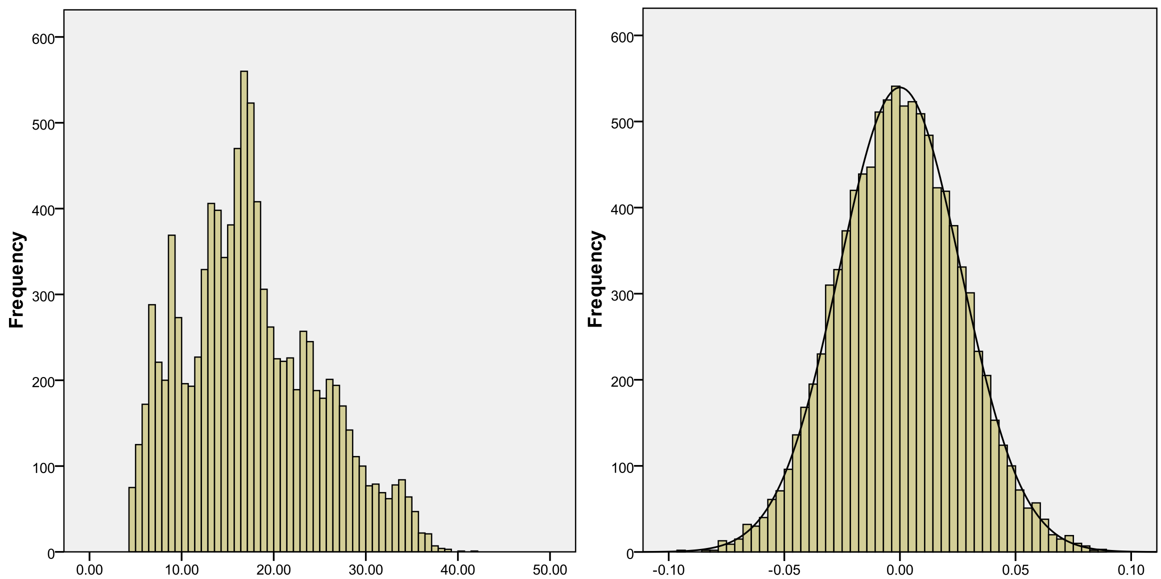


Figura 2. 9 Distribución de los precios obtenidos mediante simulación (log-normal) y distribución de los log-rendimientos de los precios obtenidos mediante simulación (normal)

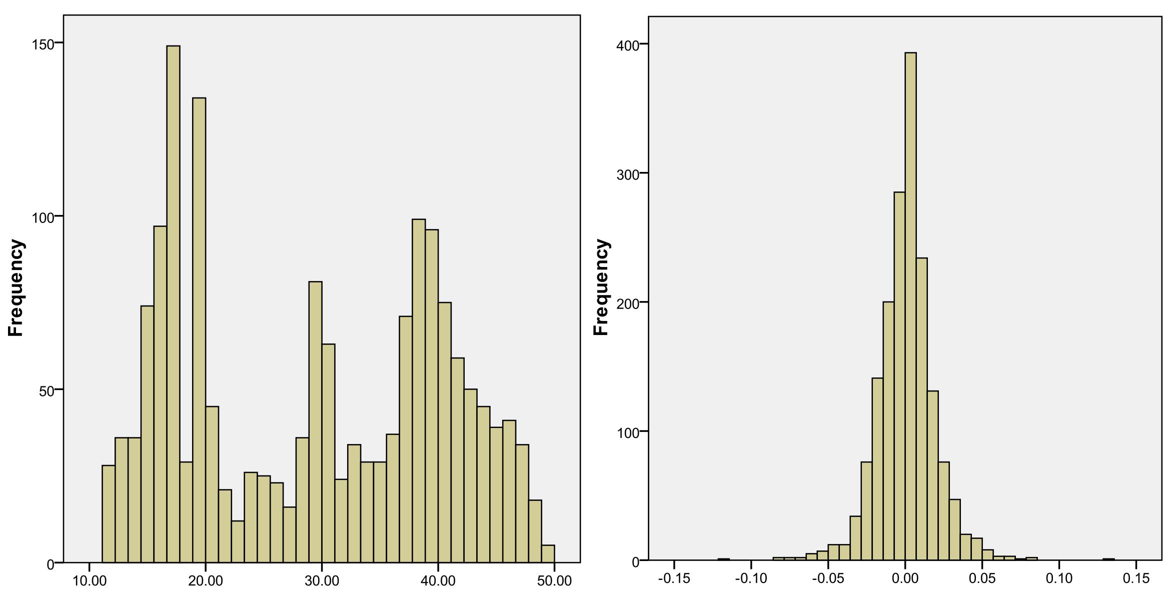


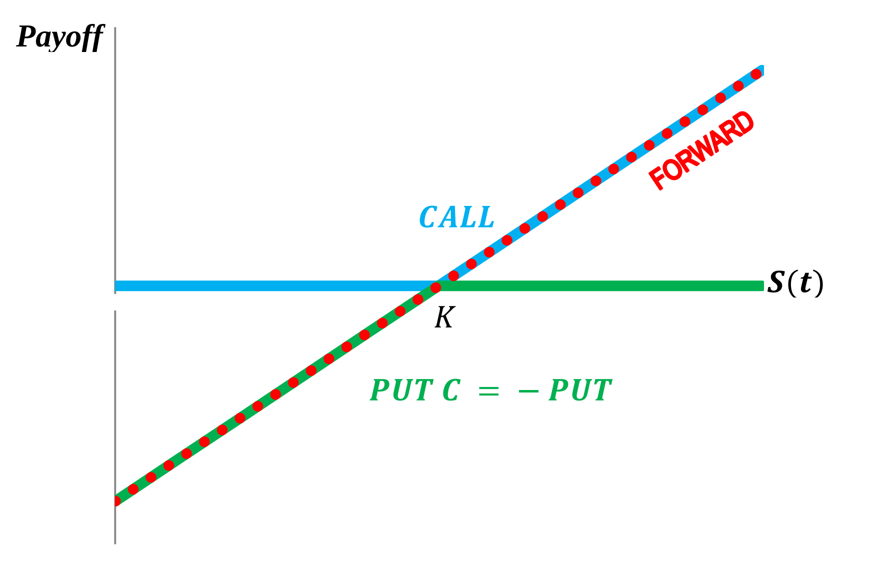
Figura 2. 10 Distribución de la serie histórica de la acción de Walmexv.mx (Wal-Mart México) y distribución de los log-rendimientos de la serie histórica de Walmexv.mx desde 1/01/03 al 18/08/09

[78] Heterocedasticidad: la varianza de las perturbaciones no es constante a lo largo de las observaciones.

2.4 PARIDAD *PUT-CALL*

La relación que existe entre un *put*, *call* y *forward* nos permite calcular el valor de una opción si conocemos el valor de la otra, sólo para europeas. La paridad *put-call* sobre acciones sin dividendos es la siguiente:

$$C + P_C = C - P = f$$
$$C - P = S(t) - Ke^{-r(T-t)}$$



$CALL + PUT\ C =$
$\boldsymbol{CALL - PUT =}$
$\boldsymbol{FORWARD}$

Figura 2. 11 Paridad *Put-Call*

Por ejemplo, con *Black Scholes* calculamos el valor de un *Call* con los siguientes datos:

DATOS INICIALES:
Tipo de opción: *Call* (Europeo)
$S(0) = 100$
$K = 100$
$T = 1$ (en años o fracción de año)
$r = 0.1$ (tasa libre de riesgo continua (anual))
$\sigma = 0.3$ (volatilidad del activo (anual))
Valor de la opción *Call* = 16.7341

Sin realizar nuevamente los cálculos necesarios en *Black Scholes* (o en cualquier otro caso), podemos usar la paridad para calcular el valor de la opción de venta *put* de manera inmediata:

$$P = C - S(t) + Ke^{-r(T-t)} = 16.7341 - 100 + 100e^{-0.1(1)} = 7.21788$$

2.5 OPCIONES EXÓTICAS

Para finalizar, a continuación se presenta una breve descripción de algunas de las opciones exóticas más comunes[79].

- **Opciones Barrera:** Como una opción simple pero con uno ó dos precios de activación.
  - *Knock-in:* Si se toca el precio de activación antes de vencimiento, se activa.
  - *Knock-out:* Si se toca deja de existir.

  La barrera ($\boldsymbol{S_b}$) puede estar por debajo (*down*) o por encima (*up*) del precio del bien subyacente al momento de comprar la acción.

$$\textit{Call up \& in}= \begin{cases} \{0, S-K\}^{+} & S > S_b \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases} \qquad \textit{Call down \& in}= \begin{cases} \{0, S-K\}^{+} & S < S_b{}' \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

$$\textit{Call up \& out}= \begin{cases} \{0, S-K\}^{+} & S < S_b \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases} \qquad \textit{Call down \& out}= \begin{cases} \{0, S-K\}^{+} & S > S_b{}' \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

- **Opciones Pasaporte:** Son opciones de compra sobre el balance o ganancias de una cuenta de *trading* ("*Magic Potion*": borra parte del historial del poseedor).

- **Opciones Asiáticas:** El valor final se obtiene por la media aritmética (o geométrica) de los precios del subyacente en un período previo al vencimiento (si necesitas algo mensualmente es más barato que varias por separado).
  - *Stock average: Call:* $\{0, \bar{S} - K\}^{+}$, etc.
  - *Strike average: Call:* $\{0, S - \bar{S}\}^{+}$, etc.

- **Opciones "*Spreads*" o sobre diferenciales:** Implica tomar una posición en dos o más opciones al mismo tiempo:

---

[79] Sin embargo, para extender la información aquí presentada, se recomienda al lector consultar las siguientes referencias:
(Wilmott, Option Pricing, mathematical models and computation, 1995)
(Wilmott, Exotic Option Pricing and advanced Lévy models, 2005)

- *Bull Spread:* compras un *call largo* y vendes un *call corto* o vendes un *put corto* y compras un *put largo* (para ganancias limitadas si el mercado va a la alza).
- *Bear Spread:* compras un *put* y vendes otro con menor strike (para ganar cuando hay una caída en el precio, limitan utilidad y pérdida).

- **Opciones Digitales o Binarias:** «opciones apuestas» ó «todo o nada». Como las tradicionales pero al vencimiento te dan una cantidad pactada en efectivo («*cash or nothing*») o el valor de un subyacente («*ordinary asset or nothing*»).

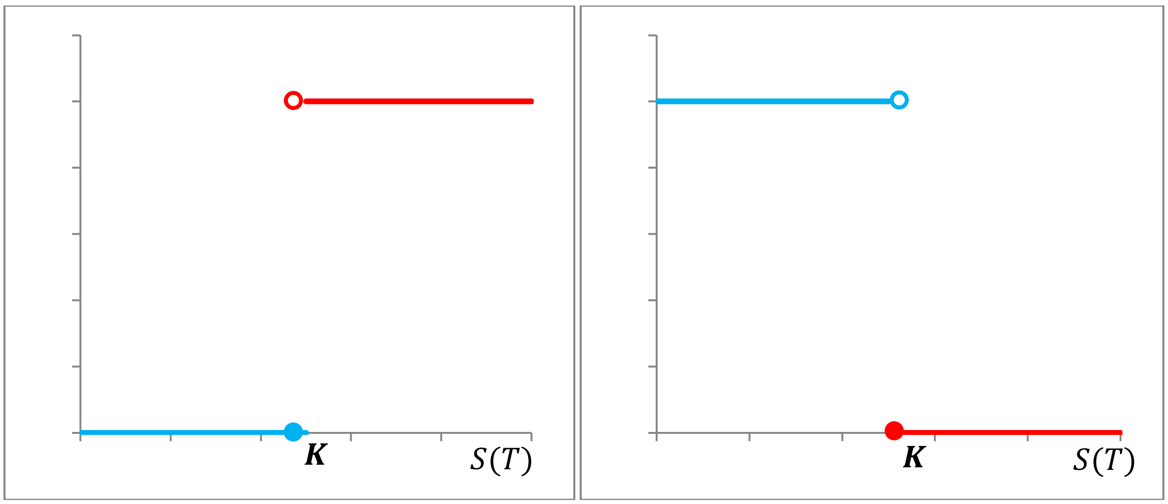


Figura 2. 12 *Call binario* (paga cuando $S(T)>K$) *Put binario* (paga cuando $S(T)<K$)

Relación entre un *Call binario* y un *Put binario*:

$$C_B + P_B = 1 \cdot e^{-r(T-t)}$$

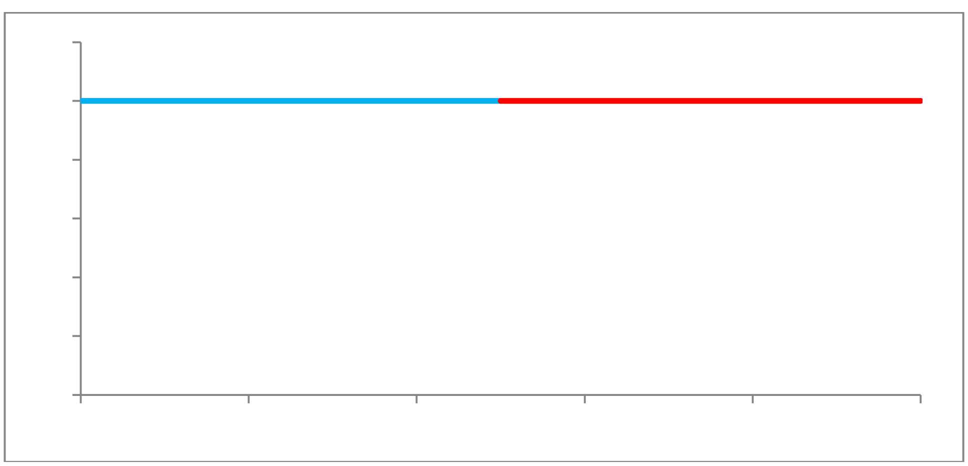


Figura 2. 13 Relación entre un *Call binario* y un *Put binario*.

- **Opciones "*Chooser*":** El comprador tiene la posibilidad de elegir en una fecha determinada entre una opción *call* o una opción *put* con las mismas características (simples) o diferentes (complejas) (por ejemplo, una cía. de exportación/importación que no sabe su posición en una divisa).

- **Opciones "*Lookback*":** Un *call lookback* da a su poseedor el derecho a comprar el bien subyacente al precio mínimo ó máximo negociado durante la vida de la opción:

  Call: $\{0, S_{max} - K\}^{+}$ $\{0, S - S_{max}\}^{+}$ $\{0, S_{min} - K\}^{+}$ $\{0, S - S_{min}\}^{+}$

- **Opciones Rusas:** La función de recompensa depende del máximo precio temporal de una acción alcanzado hasta el momento del ejercicio.

- **Opciones Reales u oportunidades de inversión:** Como una opción de compra, donde el precio de ejercicio es el costo de la inversión y el activo subyacente es el valor del proyecto después de la inversión. La empresa ejercerá la opción, es decir, hará la inversión solamente si el valor del activo subyacente es superior a ésta. La prima es el precio que se paga por tener la oportunidad de inversión (por ejemplo, el momento óptimo para destinar un pedazo de tierra de uso agrícola a fines urbanos).

- **Opciones sobre Índices:** Su activo subyacente es el valor de cierre de algún índice del mercado multiplicado por $100. En caso de ejercer, la diferencia entre el strike y el valor del índice se paga en efectivo al comprador de la opción (por ejemplo, para un productor de alimentos, el índice fluctúe según el mercado alimenticio).

- **Opciones sobre Tasas:** Utilizan una tasa como valor subyacente multiplicándola por 10. Paga la diferencia entre el strike y el valor subyacente en efectivo (i.e. pagar un bono acorde a las tasas, compras un *call* de esa tasa).

- **Opciones sobre Créditos:** Su subyacente son obligaciones de pago para proteger contra el riesgo de crédito (bancarrota, liquidación, falta de pago, etc) y transferirlo a la contrapartida a cambio de una prima periódica.

- **Opciones Canasta (*Basket Options*):** Se hacen sobre un conjunto o "canasta" de productos (acciones, cambios, etc). Son más baratas que comprar las opciones por cada activo por separado. El pago al comprador es en efectivo (i.e. productor de chocolate, canasta: materia prima).

CAPÍTULO III
TEORÍA DE CARTERAS

En este capítulo analizaremos las herramientas básicas de la teoría de carteras, las cuales se utilizan para la optimización y asignación eficiente de los activos que conforman un portafolio. Como se mencionó, todo esto se logra mediante la diversificación ingenua, o la eficiente bajo un estricto análisis a través de herramientas matemáticas y estadísticas, y del enfoque clásico media-varianza de Markowitz. Se explicarán tales herramientas, y se desarrollará la parte formal de la teoría mencionada en el capítulo I, tal como la medición del rendimiento esperado y riesgo de un portafolio, así como la solución para encontrar la cartera de mínimo riesgo, la frontera eficiente, la cartera de mercado, la línea de mercado de capitales, el CAPM, la beta del activo y del portafolio, etc.

REFERENCIAS:

[1] Achelis, S. B. (2004). *El Análisis técnico de la A a la Z.* Barcelona: Netbiblo y S.L.

[2] Garrido, N. P. (2004). *Análisis multicriterio aplicado a la selección de carteras.* Universidad de Huelva.

[3] Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science.* New York: Oxford University Press.

[4] Notas del Curso: '*Finanzas*'. Profesores: Alberto Cadena Martínez, Enrique Maturano Rodríguez. Facultad de Ciencias, UNAM.

3.1 PRELIMINARES

Como ya se mencionó, la diversificación es la forma de combinar los activos que componen una cartera, es decir, asignar el porcentaje de capital destinado a cada uno, con la finalidad de reducir el riesgo.

En un primer paso, conocer el capital del que dispone el inversionista le permite identificar los posibles activos que puede adquirir.

La selección de los activos se debe realizar mediante un previo estudio conocido como análisis de valores, a través de herramientas de análisis bursátil.

El análisis y la selección de carteras, consiste en seleccionar una de todas las carteras (combinaciones posibles de los activos disponibles), examinando la aportación de cada una de ellas al cumplimiento de los objetivos del inversionista.

La revisión de la cartera debe ser una acción permanente, donde se vigila su funcionamiento y si está reaccionando correctamente y de acuerdo a lo esperado. De lo contrario debe modificarse.

Las leyes de predominancia también se utilizan para escoger activos que dominan a otros en relación a su rendimiento y riesgo asociados. En el espacio riesgo-rendimiento, esto se puede observar de la siguiente manera:

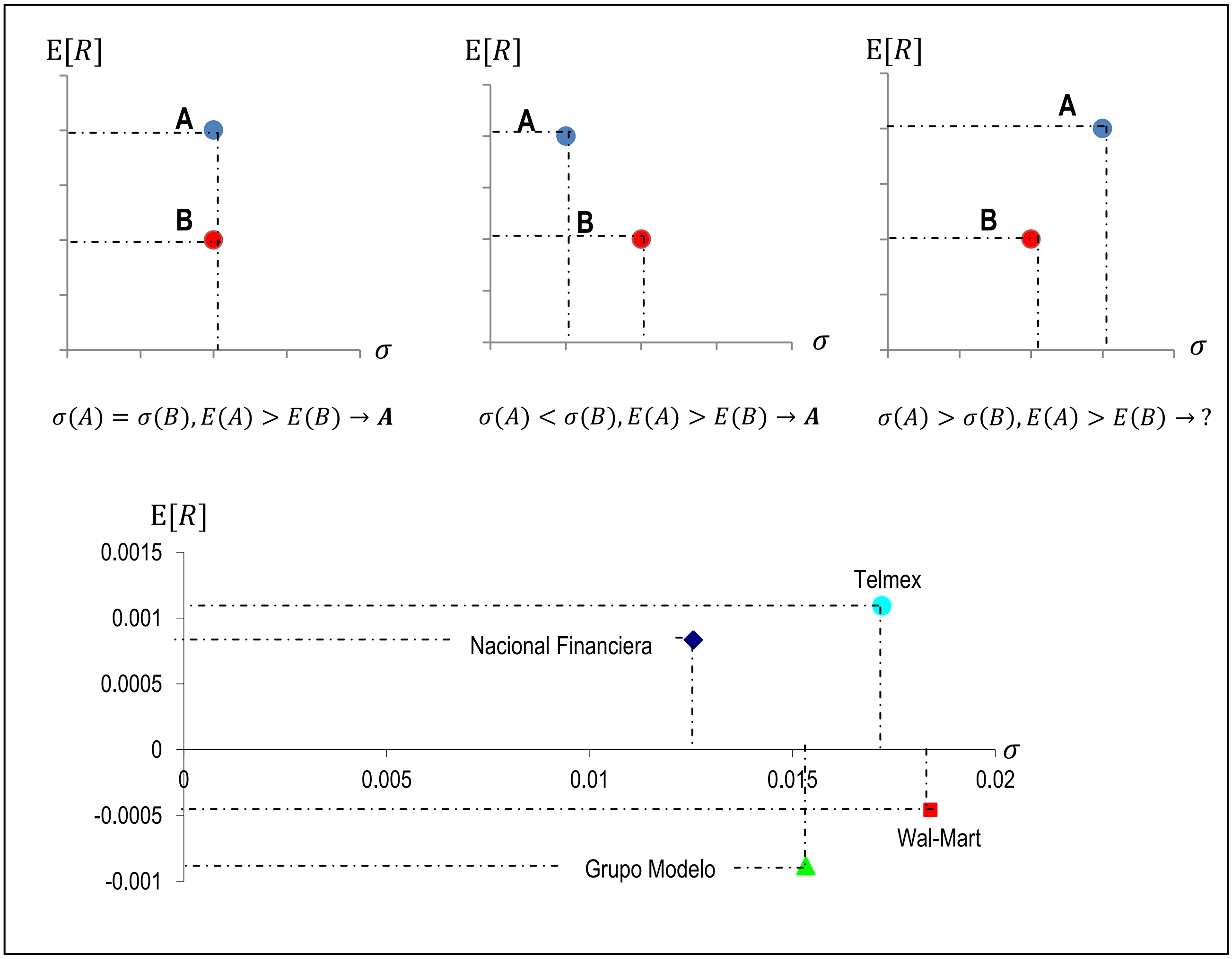


Figura 3. 1 Ejemplos de predominancia entre diferentes acciones

En la figura anterior podemos observar que una acción domina a otra si su rendimiento es mayor o igual y su riesgo es menor o igual.

Este par de valores (coordenadas) son el promedio y la desviación estándar de la serie histórica de log-rendimientos (o tasa de rendimiento continuo):

$$\text{tasa de rendimiento continuo: } r_t = ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \text{tasa de rendimiento}$$

$$\mathrm{E}(X) = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Varp}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n}, \qquad \sigma = \mathrm{Desvestp}(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2}{n}}$$

Donde $x_i = r_i$ i.e. los log rendimientos diarios y $\bar{X} = \bar{r}$ i.e. su promedio

Se utilizan los log-rendimientos por su aproximación a la tasa de rendimiento simple (ó porcentaje de incremento/decremento), y para manejarlos de manera continua y no discreta.

La selección de activos también dependerá del perfil del inversionista y de su aversión al riesgo, así como de sus objetivos como ya mencionamos en el capítulo I.

3.2 EL ANÁLISIS Y SELECCIÓN DE VALORES

El análisis bursátil es la herramienta que permite el análisis y selección de valores a través del estudio de factores legales, financieros, variables o indicadores micro y macroeconómicos, mercado, etc, para explicar y tratar de pronosticar el comportamiento futuro de una empresa.

Como ejemplo de indicadores importantes a considerar tenemos los siguientes:

- **Tasa de inflación/deflación (π):** cambios persistentes (alza/baja) de los precios de los bienes básicos.
- **Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC)**: es el indicador del costo (precio medio) de una determinada lista de bienes y servicios (canasta básica) en el tiempo.
- **Tipo de cambio**: el precio de una moneda en términos de otra.
- **Tasas de interés:** los tipos de interés cambian debido a: cambios en la oferta y demanda crediticia, política fiscal, política de la reserva federal (FED del Banco de México), tipos de cambio, condiciones económicas, percepciones acerca de la inflación (más importante para el mercado de bonos), entre otros.
- **Políticas fiscales y monetarias**: las políticas fiscales son medidas empleadas por el gobierno federal (impuestos) para tratar de controlar la inflación, el crecimiento del producto interno bruto (PIB), mientras que las políticas monetarias son medidas adoptadas por el Banco Central del país (Banco de México) para controlar las tasas de interés (como por ejemplo el dinero en circulación), su liquidez y el poder adquisitivo de su moneda.
- **Riesgo País**: evalúa la capacidad de cumplimiento de obligaciones, y es la diferencia en centésimas de punto porcentual (puntos base-sobretasa) entre los instrumentos libres de riesgo de Estados Unidos (Bonos del tesoro, *T-Bills*) y los de México (Certificados de la Tesorería, *Cetes*).

Es importante tener en cuenta todos estos factores, entre otros, al momento de realizar la inversión.

El análisis bursátil es realizado por casas de bolsa y agencia calificadoras, tales como *Moody's*, *Fitch*, *Standard & Poors*, entre otras.

El análisis fundamental es otro estudio previo a la selección de valores que sirve para conocer la situación financiera de una empresa y determinar de manera justificada el valor intrínseco de sus acciones, de tal forma que si se encuentran subvaluadas conviene comprarlas y retenerlas, o viceversa si se encuentren sobrevaluadas.

Este tipo de análisis es limitado ya que no cuenta con la teoría para la medición de riesgos y no permite hacer proyecciones, sin embargo, será pertinente mencionarlo de manera breve.

Como ya habíamos mencionado en el capítulo I, el inversionista toma dos tipos de decisiones cuando elabora su cartera: la decisión para la **asignación de activos** y **la selección de valores.** La decisión para la asignación de activos es la elección entre la amplia gama de tipos de activos. La decisión de la selección de valores es la elección sobre los valores en particular dentro de cada tipo de activo.

La construcción de la cartera bajo el análisis "*top-down*" (arriba-abajo: economía mundial → sector → información financiera de la compañía) comienza con la asignación de activos. Por ejemplo, el inversionista debe decidir si invertir en acciones que ofrecen mayor rendimiento y que implican mayor riesgo, o invertir en certificados del tesoro (CETES) que son libres de riesgo pero ofrecen un rendimiento menor.

El análisis de valores implica un estudio de ciertos valores que pueden incluirse en la cartera. Por ejemplo, el inversionista puede preguntar qué acción es más atractiva en cuanto a precio, sin embargo, la valoración resulta más difícil para acciones porque el comportamiento de las mismas es más sensible a la condición de la empresa emisora.

En contraste, está la estrategia "*bottom-up*" (de abajo hacia arriba: el valor bursátil de la empresa). En este proceso la cartera se construye con los valores que resultan atractivos en cuanto al precio se refiere, sin que importe demasiado la asignación de activo resultante, ni la situación sectorial, ni la economía nacional o mundial. Dicha técnica puede dar como resultado apuestas no pretendidas en uno u otro sector de la economía.

En ambos casos se requiere del análisis de la información financiera de la empresa. Estos documentos contables contienen información del pasado y del presente de la compañía, con el fin de brindar estimaciones y una visión global de la empresa (rentabilidad, liquidez, solvencia, etc) para la toma de decisiones.

- Balance General: estado de la situación financiera en una fecha específica que registra el valor de los activos, pasivos y capital contable de la empresa, bajo la relación Activos = Pasivos + Capital Contable.
- Estado de Resultados: documento financiero que muestra paso a paso cómo se obtuvo una utilidad o pérdida en un periodo determinado.

Estos documentos los podemos encontrar disponibles en la página web de la compañía, generalmente en la sección corporativo/relación con los inversionistas/información financiera. De la misma manera, es posible encontrar la información financiera más importante de la empresa, así como de sus acciones, la serie histórica, así como gráficas y osciladores de análisis técnico que serán descritos posteriormente.

Figura 3. 2 Ejemplo de información proporcionada en la página (sección financiera) de Wal-Mart México

El análisis de los estados financieros suele realizarse vía:

- **Análisis Vertical:** informe que consiste en expresar en porcentaje la proporción que representa cada cuenta respecto al total (A=P+C=100%) en el balance general, y respecto a las ventas netas en el estado de resultados, e identificar resultados notorios.

- **Análisis Horizontal:** informe que consiste en expresar en porcentaje la variación de cada cuenta respecto a la misma en años consecutivos. Para esto se requiere de los estados financieros de dos años. Esto sería el rendimiento o porcentaje de incremento/disminución.

- **Análisis de razones financieras:** indicadores que sirven para la interpretación de diferentes rubros de la empresa y que se dividen en:
  Razones de solvencia (capital de trabajo, razón circulante, prueba del ácido, razón de efectivo, razón de capital de trabajo), **razones de actividad** (rotación de inventarios, días de inventario, rotación de cobros, días de recuperación, rotación de capital de trabajo, rotación de activos fijos, rotación de activos totales), **razones de apalancamiento** (deuda capital, deuda total, deuda a largo plazo, factor multiplicador de capital, estructura de capital, cobertura de intereses, cobertura de flujo de efectivo), **razones de rentabilidad** (margen bruto de utilidades, margen neto, ROA-*Return Over Assets*, tasa de rendimiento de las utilidades netas producidas, ROE-*Return Over Equities*, razón de pago de dividendos) y **razones de valor de mercado** (utilidad por acción, razón precio-utilidad, rendimiento de dividendos).

- **Análisis vía comparación de razones:**
  - Análisis transversal o de referencia: consiste en la comparación entre las razones financieras correspondientes a dos o más compañías de un mismo giro competitivo, para identificar las mejores opciones.
  - Series de tiempo: usando también las razones financieras a través del tiempo, permite identificar tendencias (de crecimiento o retroceso) para la toma de decisiones y prever operaciones futuras.

3.2.1 EL ANÁLISIS TÉCNICO

El análisis técnico es un estudio del mercado que incorpora herramientas matemáticas y estadísticas, mediante el uso de indicadores y la observación de gráficas y figuras, con la finalidad de tratar de inferir y pronosticar el comportamiento de cualquier instrumento financiero, el cual como sabemos, depende del comportamiento de la oferta y la demanda (comprador/vendedor), es decir, por un comportamiento humano que no es posible medir con exactitud absoluta bajo ningún modelo.

Se requiere nuevamente de datos proporcionados por la empresa a través de su serie histórica, que incorpora datos tales como precio de apertura, precio de cierre, volumen, etc.

El análisis técnico asume que los precios se mueven a través de tendencias. La Teoría de *Dow* es la teoría de tendencia más utilizada, desarrollada por Charles Dow (creador también del índice de mercado *Dow Jones Industrial Average* ó *Industrial Average*). Esta teoría menciona lo siguiente:

- El mercado siempre lo sabe todo, es decir, que el precio de la acción refleja todo lo que se sabe del valor, y se ajusta conforme se incorpore información al mercado.

- Los precios se mueven por tendencias primarias, secundarias y menores.
- El volumen confirma la tendencia.
- El mercado tiene memoria y la historia se repite, es decir, que los precios se mueven por tendencias y siguen un proceso cíclico.

3.2.2 EL ANÁLISIS CHARTISTA

Dentro del análisis técnico, se encuentra también el análisis chartista, el cual hace referencia únicamente al estudio visual ó apreciación de gráficas y de figuras (patrones) específicas dentro de ellas, que denotan una clara o posible tendencia ó cambios en ella.

El resultado del análisis chartista es por tanto subjetivo, ya que depende de la capacidad del observador, y de su interpretación.

En la sección 'Anexo' puede encontrar las gráficas e indicadores más utilizados de Análisis técnico y Análisis Chartista, para la empresa Wal-Mart México con datos de 2007-2008.

3.3 RENDIMIENTO DE UN ACTIVO

Entre las principales medidas de rentabilidad real obtenida por un título, podemos mencionar las siguientes:

a) **Rendimiento efectivo simple:** suponga que adquirimos un activo *i* a tiempo *t-1*, y lo vendemos a tiempo *t*. El **rendimiento total** y la **tasa de rendimiento** nuestra inversión, en el caso de que los precios ya incorporen los dividendos, derechos de suscripción y otras remuneraciones, como suele ser habitual en las series históricas que proporciona la bolsa, quedan definidos por:

$$Rendimiento\ total = R = \frac{Cantidad\ recibida\ \text{ó}\ Precio(t)}{Cantidad\ invertida\ \text{ó}\ Precio(t-1)} = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

$$r = \frac{Cantidad\ recibida - Cantidad\ invertida}{Cantidad\ invertida} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

de donde podemos notar que:

$$R = 1 + r \qquad\qquad P_t = (1 + r)P_{t-1}$$

Esto muestra que la tasa de rendimiento actúa como una tasa de interés.

b) **Rendimiento (compuesto) efectivo anual:** supongamos una inversión multiperiódica con reinversión al final de cada periodo. Según la definición anterior de rendimiento efectivo simple:

$$r_1 = \frac{P_1}{P_0} - 1 \quad \rightarrow \quad P_1 = P_0(1 + r_1)$$

$$r_2 = \frac{P_2}{P_1} - 1 \quad \rightarrow \quad P_2 = P_1(1 + r_2)$$

$$\vdots$$

$$r_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad \rightarrow \quad P_t = P_{t-1}(1 + r_t)$$

Sustituyendo todas las igualdades anteriores en la última:

$$P_t = P_0 \prod_{i=1}^{t} (1 + r_i) \quad \rightarrow \quad \frac{P_t}{P_0} = \prod_{i=1}^{t} (1 + r_i)$$

Además, si consideramos que en todos los periodos se repite la misma rentabilidad, entonces:

$$\frac{P_t}{P_0} = (1 + r(0,t))^t$$

de donde la rentabilidad efectiva anual media ($r(0,t)$) del activo *i* asociada al intervalo (0,*t*) se define:

$$r(0,t) = \left[\prod_{i=1}^{t} (1 + r_i)\right]^{1/t} - 1$$

expresión que concibe a este tipo de rentabilidad como una media geométrica, basada en la hipótesis de la reinversión del precio de la acción a la tasa de rendimiento disponible en ese momento en el mercado.

c) **Rendimiento instantáneo ó continuo:** con el propósito de medir la variación de capital **C** en función del tiempo, se define el interés medio $\delta(t, t + h)$, como la variación de capital por unidad de capital y de tiempo en el intervalo [*t*,*t*+*h*):

$$\delta(t, t+h) = \frac{C_{t+h} - C_t}{h \cdot C_t}$$

Aplicando el límite cuando $h \to 0$, se obtiene la fuerza de interés instantánea:

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \frac{C_{t+h} - C_t}{h \cdot C_t} = \frac{1}{C_t} \cdot \frac{dC_t}{dt} = \frac{d(lnC_t)}{dt}$$

Integrando ambos miembros de cero a *t*:

$$\int_0^t \delta(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{d(lnC_\tau)}{d\tau} \cdot d\tau = [ln(C_\tau)]_0^{\mathrm{t}} = ln\left(\frac{\mathrm{C_t}}{\mathrm{C_0}}\right) \quad \to \quad C_t = C_0 \cdot e^{\int_0^t \delta(\tau) d\tau}$$

En el caso particular en que $\delta(t)$ sea una constante, $\delta(t) = t$, entonces tenemos la fórmula de interés nominal continuo:

$$C_t = C_0 \cdot e^{\delta t}$$

Mencionamos en la sección 3.1 que a través de la serie histórica de precios de una acción determinada, es posible obtener la variación que sufre su precio entre *t-1* y *t*. Si además consideramos un único intervalo de tiempo (t=1), despejando de la ecuación anterior y sustituyendo *C* (capital), por *P* (precio), tenemos:

$$\delta = r_t = ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

3.4 VENTAS EN CORTO

Se mencionó en el capítulo II que a veces es posible vender un activo que no se posee a través del proceso de venta en corto. Para ello, se pide prestado el activo a alguien que lo posea. Entonces vendemos el activo prestado recibiendo una cantidad X_0. En una fecha posterior, liquidamos el préstamo mediante la adquisición del activo por una cantidad X_1, y regresamos el activo a nuestro prestatario. Si $X_1 < X_0$, habremos obtenido una ganancia de $X_0 - X_1$, es decir, que la venta en corto es útil siempre y cuando el precio del activo baje.

No obstante, es considerada de alto riesgo, ya que el potencial de pérdida también es ilimitado (cuando el valor del activo aumenta).

Determinemos el rendimiento asociado con la venta en corto. Inicialmente recibimos X_0 y más tarde pagamos X_1, entonces el desembolso es $-X_0$ y el monto recibido al final es $-X_1$, por lo tanto obtenemos la misma expresión que por la adquisición del activo:

$$R = \frac{-X_1}{-X_0} = \frac{X_1}{X_0}$$

Por lo tanto el valor del rendimiento *R* aplica algebraicamente para ambos (la venta en corto y la adquisición del activo). Podemos escribir esto de la siguiente forma para mostrar que el monto recibido al final está relacionado con el desembolso inicial:

$$-X_1 = -X_0 R = -(1 + r)X_0$$

Más adelante al momento de la construcción de la cartera, un porcentaje negativo del capital total invertido en cada activo que la conforma, significa que la venta en corto está permitida.

3.5 RENDIMIENTO DEL PORTAFOLIO

Suponga ahora que *n* activos diferentes están disponibles. Podemos formar entonces un portafolio, distribuyendo un capital X_0 entre esos *n* activos. Podemos seleccionar montos X_{0i}, $i = 1\!:n$ tal que $\sum_{i=1}^{n} X_{0i} = X_0$. Recordando, si hemos permitido la venta en corto de un activo, entonces algunos de los X_{0i}'s pueden ser negativos; en otro caso, restringimos los X_{0i}'s a ser no negativos.

Los montos invertidos pueden ser expresados como fracciones o porcentajes de la inversión total. Entonces:

$$X_{0i} = w_i X_0, \qquad i = 1\!:n$$

donde w_i es el peso o fracción del activo *i* en el portafolio. Claramente: $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

Sea R_i el rendimiento total del activo *i*. Entonces el monto generado al final del periodo por el *i*-ésimo activo es: $R_i X_{0i} = R_i w_i X_0$. El monto total recibido por este portafolio al final del periodo es: $\sum_{i=1}^{n} R_i w_i X_0$. Por lo tanto, encontramos que en conjunto el rendimiento total del portafolio es:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i w_i X_0}{X_0} = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$$

Equivalentemente, ya que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ tenemos:

$$r = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$$

3.6 VARIABLES ALEATORIAS

3.6.1 VALOR ESPERADO

El valor esperado (media ó promedio) de una variable aleatoria x para el caso de un número finito de posibilidades está definido como: $E(x) = \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, donde p_i es la probabilidad con que ocurre x_i.

Propiedades:

- Valor cierto: si x es un valor conocido (no aleatorio) → $E(x) = x$
- Linealidad: Si x e y son aleatorios, → $E(\alpha x + \beta y) = \alpha E(x) + bE(y),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- No negatividad: Si x es aleatorio pero nunca menor que cero, → $E(x) \geq 0$

3.6.2 VARIANZA

Es la medida del grado de posible desviación de la media. En general para cualquier variable aleatoria x su varianza está definida como:

$$\sigma^2 = Var(x) = E[(x - \bar{x})^2]$$
$$E[(x - \bar{x})^2] = E(x^2) - 2E(x)\bar{x} + \bar{x}^2 = E(x^2) - \bar{x}^2 = E(x^2) - E^2(x)$$

La desviación estándar, es la raíz cuadrada de la varianza y es otra medida de dispersión de los datos con respecto a la media. Es también una medida de riesgo ó volatilidad.

3.6.3 VARIANZA DE UNA SUMA

Sean x e y dos variables aleatorias. Por linealidad tenemos que $E(x + y) = \bar{x} + \bar{y}$, entonces:

$$\begin{aligned} Var(x + y) &= E[[(x + y) - E(x + y)]^2] = E[(x - \bar{x} + y - \bar{y})^2] \\ &= E[(x - \bar{x})^2] + 2E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})] + E[(y - \bar{y})^2] \\ &= \sigma_x^2 + 2\sigma_{x,y} + \sigma_y^2 \end{aligned}$$

3.6.4 COVARIANZA

Dos variables aleatorias x e y son **independientes** si el resultado de una variable no depende del resultado de la otra.

Cuando consideramos dos o más variables aleatorias, la dependencia entre ellas puede ser expresada ó resumida convenientemente por su **covarianza**.

Sean x e y dos v.a.'s con valores esperados $\bar{x}$ e $\bar{y}$. La covarianza de esas dos variables está definido por:

$$\sigma_{x,y} = cov(x, y) = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})] = E(xy) - \bar{x}\bar{y}$$

ó

$$\sigma_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

Si dos variables aleatorias x e y tienen la propiedad de que $\sigma_{x,y} = 0$, entonces se dice que no están correlacionadas linealmente (el valor de una no da información acerca de la otra), es decir, son **independientes.**

Si $\sigma_{x,y} > 0$ están correlacionadas positivamente y $\sigma_{xy} = \sigma_x \sigma_y$

Si $\sigma_{x,y} < 0$ están correlacionadas negativamente y $\sigma_{xy} = -\sigma_x \sigma_y$

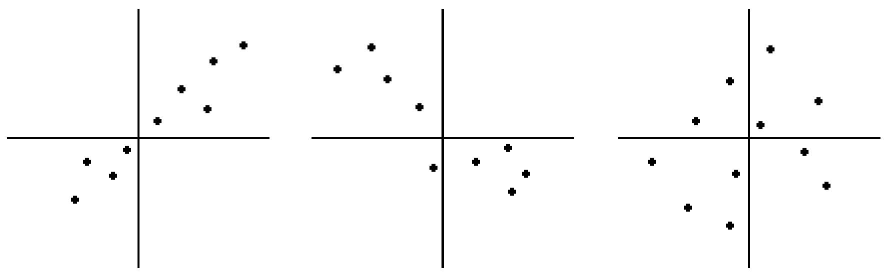


Figura 3. 3 a) Correlación positiva b) Correlación negativa c) No correlacionadas

La covarianza entre dos variables aleatorias satisface: $|\sigma_{x,y}| \leq \sigma_x \sigma_y$

Otra construcción muy útil es el **coeficiente de correlación**, definido como:

$$\rho_{x,y} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}, \qquad -1 \leq \rho_{x,y} \leq 1$$

Note que la varianza de una variable aleatoria x es la covarianza de esa variable consigo misma: $\sigma_x^2 = \sigma_{x,x}$

3.7 RENDIMIENTOS ALEATORIOS

Cuando un activo es adquirido, su tasa de rendimiento es usualmente desconocida. De acuerdo con esto, consideraremos la tasa de rendimiento r como una variable aleatoria. Con propósitos analíticos, resumiremos el valor incierto de la tasa de rendimiento por su valor esperado o media $E(r) \equiv \bar{r}$, por su varianza $E[(r - \bar{r})^2] \equiv \sigma^2$, y por su covarianza con otros activos de nuestro interés.

3.7.1 RENDIMIENTO MEDIO DEL PORTAFOLIO

Suponga que hay *n* activos con tasas de rendimiento aleatorias $r_1, r_2, \dots, r_n$ y valores esperados $E(r_1) = \bar{r}_1, E(r_2) = \bar{r}_2, \dots, E(r_n) = \bar{r}_n$.

Suponga que formamos un portafolio de esos *n* activos usando los pesos (ó porcentajes) $w_i,\ i = 1{:}\,n$.

La tasa de rendimiento del portafolio en términos de los rendimientos individuales es:

$$r = w_1 r_1 + w_2 r_2 + \cdots + w_n r_n$$

Aplicando el valor esperado (esperanza) en ambos lados de la ecuación y usando la propiedad de linealidad:

$$E(r) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) + \cdots + w_n E(r_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i\, E(r_i)$$

3.7.2 VARIANZA DEL RENDIMIENTO DEL PORTAFOLIO

Denotaremos la varianza del activo *i* como σ_i^2, la varianza del rendimiento del portafolio como σ^2, y la covarianza del rendimiento del activo *i* con el activo *j* como $\sigma_{i,j}$.

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E[(r - \bar{r})^2] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i (r_i - \bar{r}_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j (r_j - \bar{r}_j)\right)\right] \\
&= E\left[\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{\forall i<j}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j},
\end{aligned}$$

3.8 DIVERSIFICACIÓN

Los portafolios constituidos por un número pequeño de activos pueden estar sujetos a un alto grado de riesgo, representado por una varianza relativamente alta.

Mencionamos ya en el capítulo I, que como regla general, la varianza del rendimiento de un portafolio puede ser reducida incluyendo activos adicionales, a través de un proceso conocido como **diversificación (no poner todos los huevos en la misma canasta)**.

El modelo de Markowitz introduce esta idea.

La diversificación puede definirse como la combinación de títulos con características de riesgo diferentes con la finalidad de que el riesgo del conjunto disminuya.

En la actualidad, la diversificación puede llevarse a cabo incluyendo títulos correlacionados negativamente, aunque se puede obtener el mismo efecto cuando la cartera la integran un número suficiente de valores, incluso aunque entre ellos exista una correlación positiva. Así, partiendo de la definición de la varianza de una cartera:

$$\sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{\forall i<j}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j}$$

Supongamos que la cartera está formada por n títulos en iguales proporciones, es decir, $w_i = w_j = 1/n$, entonces:

$$\sigma^2(R_p) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + \frac{2}{n^2}\sum_{\forall i<j}^{n} \sigma_{i,j} = \frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{\forall i<j}^{n} \sigma_{i,j}$$

Si multiplicamos y dividimos el segundo sumando por $(n^2 - n)/2$:

$$\sigma^2(R_p) = \frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{n} + \frac{\frac{n^2-n}{2}}{\frac{n^2-n}{2}}\left[\frac{2}{n^2}\sum_{\forall i<j}^{n} \sigma_{i,j}\right] = \frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{n} + 2(n^2-n)\frac{\sum_{\forall i<j}^{n}\sigma_{i,j}}{n^2(n^2-n)}$$

$$= \frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{n} + \frac{2(n^2-n)}{2n^2}\cdot\frac{\sum_{\forall i<j}^{n}\sigma_{i,j}}{\frac{n^2(n^2-n)}{2}} = \frac{1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\sum_{\forall i<j}^{n}\sigma_{i,j}}{\frac{(n^2-n)}{2}}$$

Conociendo que el número de varianzas es n y el número de covarianzas es ${}_nC_2 = \frac{n^2-n}{2}$, podemos definir la varianza media y la covarianza media como:

$$\overline{\sigma^2(R_p)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}{n}, \qquad \overline{\sigma_{\iota,J}} = \frac{\sum_{\forall i<j}^{n} \sigma_{i,j}}{\left[\frac{(n^2-n)}{2}\right]}$$

Así pues, tenemos:

$$\sigma^2(R_p) = \frac{1}{n}\overline{\sigma^2(R_p)} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\overline{\sigma_{\iota,J}}$$

Finalmente, haciendo que aumente el número de títulos (aplicamos el límite cuando $n \to \infty$):

$$\lim_{n\to\infty} \sigma^2(R_p) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\overline{\sigma^2(R_p)} + \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\overline{\sigma_{\iota,J}} = \overline{\sigma_{\iota,J}}$$

Podemos llegar a la conclusión de que existen dos clases de diversificación o dos fuentes para disminuir el riesgo de la cartera:

- La diversificación ingenua, que consiste en aumentar el número de títulos con objeto de que el riesgo disminuya y tienda hacia la covarianza media (resultado anterior). Ya habíamos mencionado en el capítulo I, que en la práctica se considera suficiente incluir veinte títulos para este propósito[80].
- La diversificación del modelo de Markowitz, que consiste en reforzar la deducción del riesgo incluyendo títulos correlacionados negativamente con el propósito de que la covarianza media sea lo más pequeña posible.

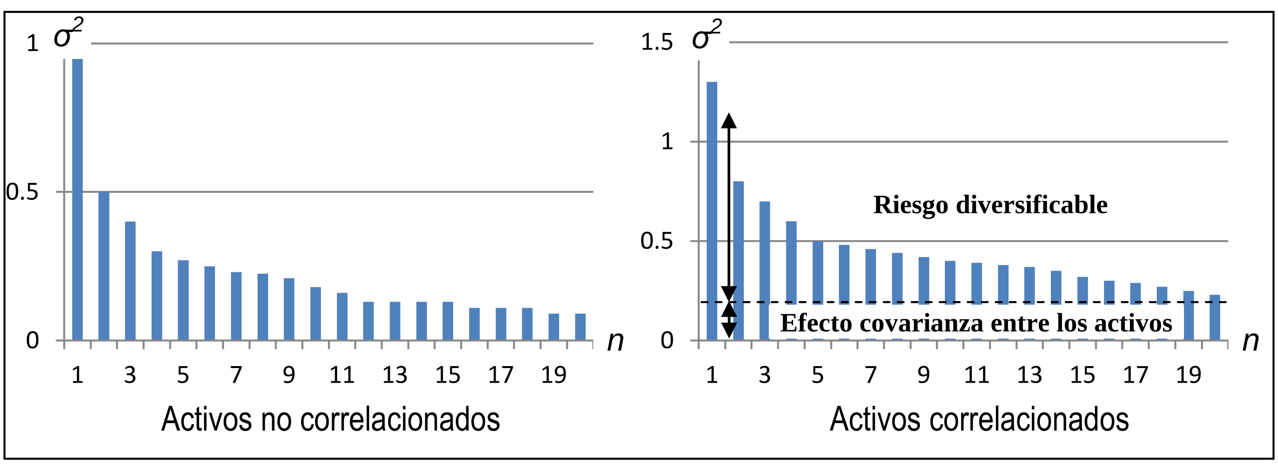


Figura 3. 4 Efectos de la diversificación.

[80] Fama, E.F., *Foundations of Finance*, (Nueva York, Basic Books, 1976), págs.. 253-254, señala que estudios empíricos muestran que una cartera de veinte títulos escogidos aleatoriamente da lugar a una buena diversificación.

Si los activos no están correlacionados, la varianza puede hacerse muy pequeña. Si los activos tienen correlación positiva, hay un límite inferior para la varianza conocido como riesgo sistemático, de mercado ó no diversificable. Por encima de ese límite se encuentra el riesgo no sistemático, propio del activo ó diversificable. Esto ya lo mencionamos en el capítulo I.

Otra forma de entender esto es la siguiente: suponga como ejemplo que hay varios activos los cuales están mutuamente no correlacionados. Esto es, el rendimiento de cada activo está no correlacionado con cualquier otro activo del grupo. Suponga también que la tasa de rendimiento de cada uno de esos activos tiene media μ y varianza σ^2. Nuevamente, el portafolio está construido equitativamente, es decir, $w_i = 1/n$ para cada i. La tasa de rendimiento conjunta del portafolio es:

$$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$$

cuya media es $r = \mu$, la cual es independiente de *n*. La varianza correspondiente es:

$$Var(r) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

donde hemos usado el hecho de que los rendimientos individuales están no correlacionados. La varianza decrece rápidamente tanto como *n* incrementa, tal como lo muestra la figura 3.6 a) ($\sigma^2 = 1$).

En el caso en que los rendimientos de los activos disponibles están correlacionados como la figura 3.6 b) la situación es diferente (nuevamente $\sigma^2 = 1$). Como ejemplo, suponga nuevamente que los activos tienen tasa de rendimiento con media μ y varianza σ^2, pero ahora cada par de rendimientos tiene $cov(r_i, r_j) = 0.3\sigma^2,\ i \neq j$. De nuevo formamos el portafolio tomando porciones iguales:

$$var(r) = E\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(r_i - \bar{r})\right]^2 = \frac{1}{n^2}E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})\right]\left[\sum_{j=1}^{n}(r_j - \bar{r})\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j}\sigma_{i,j} = \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=j}\sigma_{i,j} + \sum_{i\neq j}\sigma_{i,j}\right\} = \frac{1}{n^2}\{n\sigma^2 + .3(n^2 - n)\sigma^2\}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + .3\sigma^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{.7\sigma^2}{n} + .3\sigma^2$$

Este resultado muestra que es imposible reducir la varianza por debajo de $.3\sigma^2$, sin importar que tan grande sea *n*.

3.9 EL MODELO DE MARKOWITZ DE ENFOQUE MEDIA-VARIANZA

Comencemos por mencionar los supuestos del modelo de Markowitz:

- La selección de inversiones se refiere estrictamente para un periodo finito.
- Los inversionistas son aversos al riesgo, es decir, es mayor el temor al riesgo que su deseo de rentabilidad (utilidad marginal decreciente). Las preferencias entre riesgo y rendimiento del inversionista pueden expresarse matemáticamente.
- Los rendimientos de los precios de los activos financieros, y por lo tanto, el rendimiento de un título o del portafolio, son una variable aleatoria que se distribuye Normal(μ, σ^2). Se utiliza el promedio (esperanza) de los rendimientos como medida de rentabilidad, y la desviación estándar como medida del riesgo asociado.
- El mercado es de competencia perfecta, es decir, sin barreras de entrada o salida, el producto es homogéneo, hay un gran número de compradores y de vendedores.
- Los activos son negociables y divisibles (se puede vender 0.2 acciones, sólo que se compran por lotes, mínimo 100,000 acciones).
- Se ignoran costos de transacción, impuestos y comisiones (se suponen despreciables)[81].

Notación:

r_P = rendimiento del portafolio.
r_i = variable aleatoria que representa el rendimiento del activo *i*.
$E[r_i]$ = rendimiento esperado del activo *i*.
$\sigma[r_i]$ = desviación estándar del activo *i* (volatilidad/riesgo).
n = número de activos
w_i = el porcentaje del capital total invertido en el activo *i*. $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 = 100\%$
$\sigma_{i,j}$ = covarianza entre el activo *i* y el activo *j*.
$\rho_{i,j}$ = coeficiente de correlación (de *Spearman*) entre el activo *i* y el activo *j*. $|\rho_{i,j}| \leq 1$

$$\rho_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j}$$

[81] En la realidad esto es falso pues existe el ISR, comisión de la casa de bolsa por transacción, etc.

Recordemos que:

Si $\rho = 1 \rightarrow$ hay relación lineal perfecta.
Si $\rho = 0 \rightarrow$ son independientes.
Si $\rho = -1 \rightarrow$ hay relación lineal inversa perfecta.

Ahora, supongamos que *n*=2, entonces:

$$r_P = w_1 r_1 + w_2 r_2$$

$$E[r_P] = w_1 E[r_1] + w_2 E[r_2]$$

$$\sigma^2(r_p) = w_1^2 \sigma^2(r_1) + w_2^2 \sigma^2(r_2) + 2 w_1 w_2 \sigma_{1,2}$$

Si *n*=3:

$$r_P = w_1 r_1 + w_2 r_2 + w_3 r_3$$

$$E[r_P] = w_1 E[r_1] + w_2 E[r_2] + w_3 E[r_3]$$

$$\sigma^2(r_p) = w_1^2 \sigma^2(r_1) + w_2^2 \sigma^2(r_2) + w_3^2 \sigma^2(r_3) + 2 w_1 w_2 \sigma_{1,2} + 2 w_1 w_3 \sigma_{1,3} + 2 w_2 w_3 \sigma_{2,3}$$

En general:

$$E[r_P] = \sum_{i=1}^{n} w_i E[r_i]$$

$$\sigma^2(r_P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{\forall i<j}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j}$$

Recuerde que $\sigma_{i,i} = \sigma_i^2$, y $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$

ó en su forma matricial:

$$E[r_P] = [w_1, w_2, \ldots, w_n]_{1xn} \begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ \vdots \\ E(r_n) \end{bmatrix}_{nx1}$$

$$\sigma^2(r_P) = [w_1, w_2, \ldots, w_n]_{1xn} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \ldots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \ldots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}_{nxn} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_{nx1}$$

La matriz del centro es conocida como matriz de Varianzas y Covarianzas, y tiene las propiedades de ser simétrica, cuadrada e invertible.

Cuando dos activos son combinados mediante diferentes asignaciones de porcentajes, esto es: $w_1 = \alpha,\ \ w_2 = 1 - w_1 = 1 - \alpha,$ donde $\alpha \in [0,1]$ (a manera de una parametrización), y graficamos en el espacio riesgo-rendimiento ó **diagrama media-desviación estándar,** todos esos valores esperados y desviaciones estándar, obtenemos el siguiente conjunto de puntos que de manera continua forman una frontera. Los puntos extremos son cuando $w_1 = 1\ y\ w_2 = 0$, y viceversa, es decir, cuando todo el capital se invierte en un solo activo. Por lo tanto, sus coordenadas están dadas por el promedio de los rendimientos de su serie histórica de precios y su desviación estándar.

3.9.1 LA REGIÓN FACTIBLE

Suponga ahora que hay *n* activos básicos. Podemos graficarlos en un diagrama media-desviación estándar. Ahora imagine que formamos portafolios de esos *n* activos, usando cada posible combinación de porcentajes. Nuevamente habrá portafolios que consisten sólo de cada uno de los *n* activos (cuando se asigna $w_i = 1$ al activo *i*), combinaciones de dos activos, combinaciones de tres, y en adelante, de todas las formas arbitrarias de combinaciones de los *n*, tal que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

El conjunto de puntos que corresponde a los portafolios es conocido como **región ó conjunto factible**, la cual satisface dos propiedades importantes:

1. Si hay al menos tres activos (no correlacionado perfectamente $\rho < 1$, y con diferentes medias), la región factible será una región sólida bidimensional. La siguiente figura, muestra por qué la región será sólida. Hay tres activos básicos: 1,2 y 3. Sabemos ya que cualquier combinación de dos de esos activos forman una línea curva entre ellos. Ahora, si una combinación de esas, digamos, la de los activos 2 y 3 está formada para producir activo 4, este puede ser combinado con el activo 1 para formar una línea que conecte 1 y 4. Como 4 es desplazado entre 2 y 3, la línea entre 1 y 4 traza una región sólida.

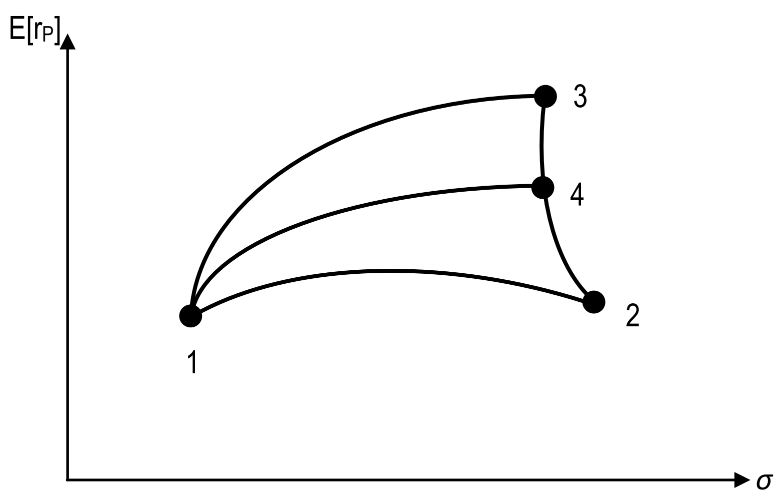


Figura 3. 5 Región factible. La curva entre cada par de puntos es la combinación formada por ese par de activos.

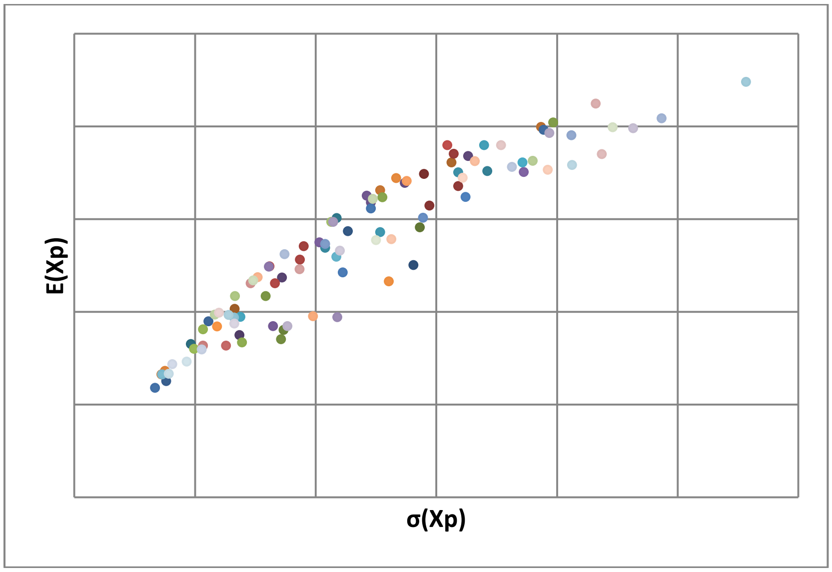


Figura 3. 6 Ejemplo de portafolios formados por la combinación entre 3 acciones.

2. La región factible es convexa hacia la izquierda. Esto significa que, dado cualquier par de puntos en la región, la línea recta que los conecta no cruza la frontera del conjunto factible. Esto se sigue del hecho de que todos los portafolios (con pesos positivos) hechos de dos activos están situados en, ó a la izquierda de la línea que los conecta.

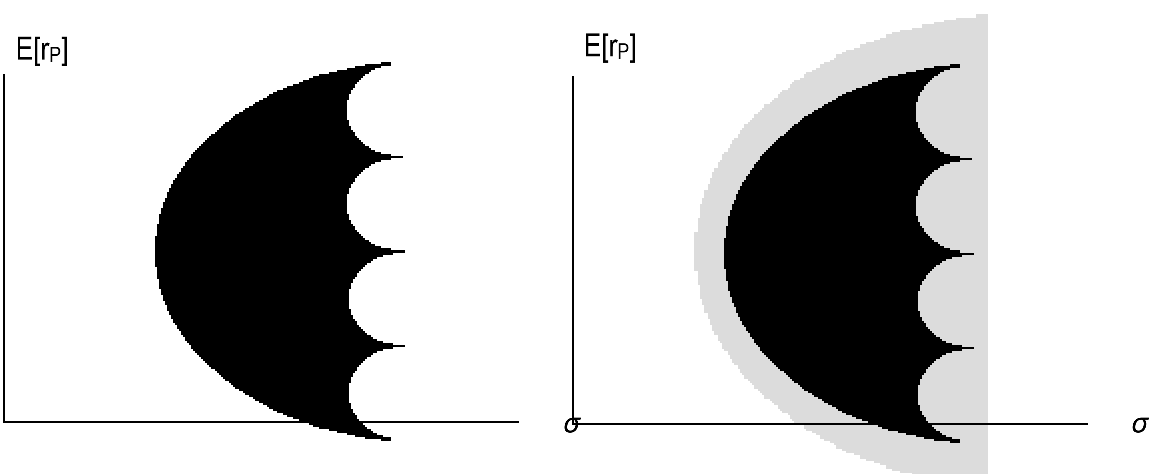


Figura 3. 7 La región factible es el conjunto de todos los puntos que representan los portafolios hechos de *n* activos originales. a) Sin venta en corto. b) Con ventas en corto permitidas.

3.9.2 CONJUNTO DE MÍNIMA VARIANZA Y LA FRONTERA EFICIENTE

La frontera izquierda del conjunto factible es llamada el **conjunto de mínima varianza**, ya que para cualquier valor de rendimiento esperado, el punto con varianza (ó desviación estándar) más pequeña es el correspondiente punto situado en la frontera izquierda.

Note que hay un punto particular en este conjunto que tiene la mínima varianza de todos. Este punto de pendiente infinita es conocido como **cartera de mínimo de riesgo (CMR).** Todos los puntos situados en la frontera eficiente y por encima de la cartera de mínimo riesgo forman lo que se conoce como **frontera eficiente**, ya que ofrecen para un mismo valor de riesgo, un rendimiento esperado mayor, o bien, el mínimo riesgo para cada valor de rendimiento esperado (dominan a todas las demás carteras del conjunto factible).

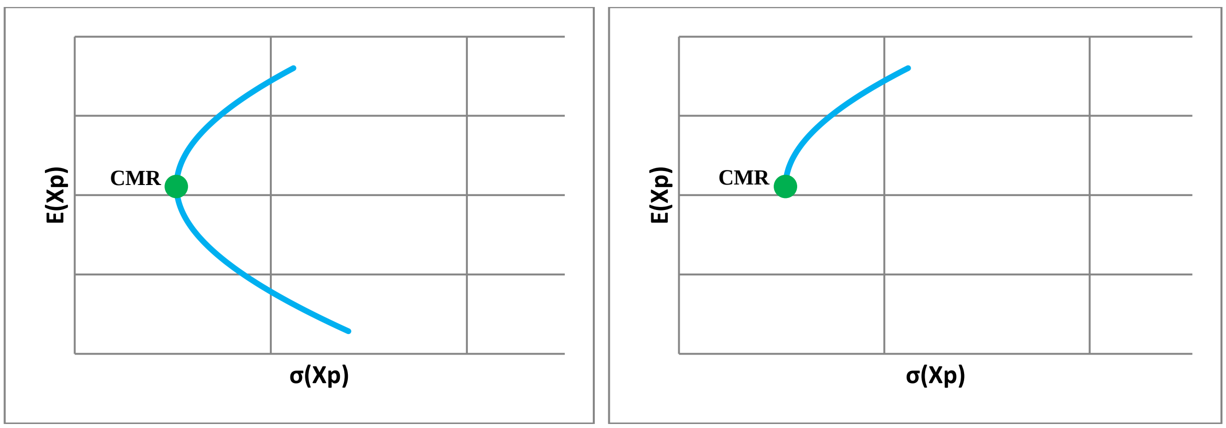


Figura 3. 8 a) Conjunto de mínima varianza. b) Frontera eficiente. CMR: Cartera de mínimo riesgo.

Suponga que la elección del portafolio de un inversionista está restringida a los puntos factibles ubicados sobre una línea horizontal. Todos los portafolios en esta línea tienen el mismo rendimiento, pero diferentes niveles de riesgo. Muchos inversionistas preferirán el portafolio correspondiente al punto más a la izquierda sobre la línea (de menor riesgo); esto es, el punto con la desviación estándar más péquela para un rendimiento esperado dado.

A un inversionista que está de acuerdo con esta perspectiva se dice ser **averso al riesgo,** ya que busca minimizar el riesgo.

Un inversionista que seleccionara otro punto distinto del de mínima desviación estándar se dice ser **preferente al riesgo.**

Podemos girar el argumento 90 grados y considerar los portafolios correspondientes a varios puntos sobre una línea vertical, esto es, los portafolios con desviación estándar fija y diferentes valores de rendimiento esperado. Muchos inversionistas preferirán el punto más alto sobre la línea. En otras palabras, seleccionarán el portafolio con el mayor rendimiento esperado para un nivel de riesgo dado. Esta propiedad de los inversionistas es denominada como **no saciedad**, la cual refleja la idea de que los inversionistas siempre quieren más dinero; por lo tanto, ellos quieren el más alto rendimiento esperado para una desviación estándar dada.

Nosotros enfocaremos nuestro estudio a los inversionistas aversos al riesgo, es decir, aquellos que prefieren minimizar el riesgo (varianza).

3.9.3 COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

Recordemos que:

$$\rho_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j} \rightarrow \sigma_{i,j} = \rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j$$

Si n=2, sustituyendo en la siguiente ecuación la covarianza y $w_2 = 1 - w_1$

$$\sigma^2(r_p) = w_1^2\sigma^2(r_1) + w_2^2\sigma^2(r_2) + 2w_1w_2\sigma_{1,2}$$
$$\sigma^2(r_p) = w_1^2\sigma^2(r_1) + (1-w_1)^2\sigma^2(r_2) + 2w_1(1-w_1)\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2$$

- Si hay relación lineal perfecta entre los activos, i.e., $\rho_{1,2} = 1$, factorizando tenemos:

$$\sigma^2(r_p) = [w_1\sigma_1 + (1-w_1)\sigma_2]^2$$
$$\sigma(r_p) = w_1\sigma_1 + (1-w_1)\sigma_2$$

- Si hay relación lineal inversa perfecta, i.e., $\rho_{1,2} = -1$, entonces:

$$\sigma(r_p) = w_1\sigma_1 - (1-w_1)\sigma_2$$

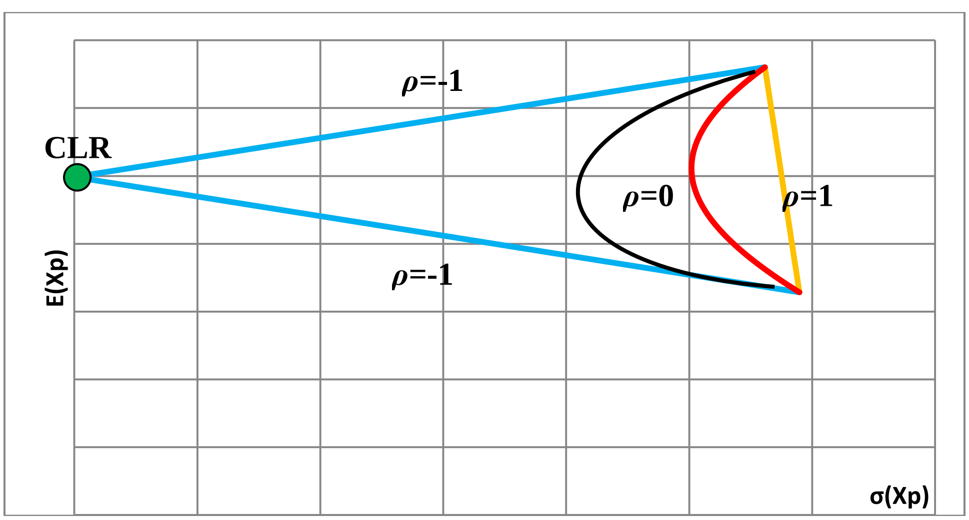


Figura 3. 9 Casos ρ=1, ρ=0 y ρ= -1. CLR=Cartera libre de riesgo.

En la figura anterior podemos observar la forma que adquiere el conjunto factible para los casos mencionados. Cuando $\rho \to -1$, la curva se va deformando ó adquiriendo mayor convexidad hacia la izquierda, hasta el grado en que toca el eje vertical y toma la forma de triángulo.

Podemos ubicar un punto particular en el caso $\rho = -1$. Ese punto se ubica sobre el eje vertical y por lo tanto tiene la característica de ser libre de riesgo, i.e., su desviación estándar es cero.

A este punto se le conoce como **cartera libre de riesgo**. Este punto es teórico, ya que suponemos que los activos presentan relación lineal inversa perfecta. Esto en la realidad no existe. Sin embargo, el rendimiento de esta cartera es denotado por r_f y analíticamente podemos encontrar los porcentajes que la constituyen, igualando a cero la ecuación anterior:

$$0 = w_1\sigma_1 - (1 - w_1)\sigma_2 \quad \to \quad w_1 = \sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_2)\,, \qquad w_2 = 1 - w_1, \qquad \mathrm{E}[r_P] = r_f$$

3.9.4 SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE MARKOWITZ

Como ya habíamos mencionado, nuestro estudio está orientado al inversionista con el problema de aversión al riesgo; esto es, buscamos minimizar la función objetivo (riesgo).

Esto se logra mediante el uso de una herramienta de cálculo conocida como **multiplicadores de Lagrange**[82]. Nuestra función objetivo es:

$$\min \sigma^2(r_P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{\forall i<j}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j}\,,$$

$$s.a. \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \quad \to \quad \sum_{i=1}^{n} w_i - 1 = 0$$

Note que al no agregar la restricción de que $w_i > 0,\ i = 1{:}n$, entonces estamos permitiendo que pueda haber porcentajes negativos, correspondientes a ventas en corto.

---

[82] **Multiplicadores de Lagrange:** considere el problema de maximizar (o minimizar) la función $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (funciones de clase 1 C^1) de varias variables cuando hay la restricción de que el punto x debe satisfacer la condición auxiliar $g(x_1, \dots, x_n) = 0$. Esto es: $\mathrm{MAX}_X\ f(x_1, \dots, x_n)$ sujeto a $g(x_1, \dots, x_n) = 0$. La condición para un máximo puede ser encontrada introduciendo un multiplicador de Lagrange λ. Formamos la función Lagrangeana: $L = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda g(x_1, \dots, x_n)$. Podemos tratar entonces esta función Lagrangiana como si no estuviera restringida para encontrar las condiciones necesarias para un máximo. Específicamente, obtenemos las derivadas parciales de L respecto a a cada una de las variables y las igualamos a cero. Esto da un sistema de n ecuaciones con n+1 incógnitas $(x_1, \dots, x_n)$ y λ. Podemos obtener una ecuación adicional de la restricción original $g(x_1, \dots, x_n) = 0$. Por lo tanto tenemos un sistema de n+1 ecuaciones y n+1 incógnitas. Si se tienen restricciones adicionales, podemos definir multiplicadores de Lagrange adicionales (μ), uno para cada restricción.

Planteamos la función Lagrangeana L como la función objetivo agregando un multiplicador λ por la función restrictiva igualada a cero. Podemos encontrar la cartera de mínimo riesgo resolviendo:

$$\min L = \min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right)\right\}$$

Derivamos la función Lagrangeana respecto a cada porcentaje $w_i,\ i = 1{:}\,n$ y respecto a λ, e igualamos a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 2w_1\sigma_1^2 + 2w_2\sigma_{1,2} + 2w_3\sigma_{1,3} + \cdots + 2w_n\sigma_{1,n} - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = 2w_2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_{1,2} + 2w_3\sigma_{2,3} + \cdots + 2w_n\sigma_{2,n} - \lambda = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_n} = 2w_n\sigma_n^2 + 2w_1\sigma_{1,n} + 2w_2\sigma_{2,n} + \cdots + 2w_{n-1}\sigma_{n-1,n} - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{n} w_i + 1 = 0$$

Eliminamos los coeficientes de las primeras *n* ecuaciones dividiendo entre 2, y para la última ecuación sabemos que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, por lo que nos queda el siguiente sistema de *n*+1 ecuaciones y *n*+1 incógnitas:

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_{1,2} + w_3\sigma_{1,3} + \cdots + w_n\sigma_{1,n} - \frac{\lambda}{2} = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_n} = w_n\sigma_n^2 + w_1\sigma_{1,n} + w_2\sigma_{2,n} + \cdots + w_{n-1}\sigma_{n-1,n} - \frac{\lambda}{2} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$$

Expresamos el sistema anterior en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \dots & \sigma_{1,n} & 1 \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \dots & \sigma_{2,n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \dots & \sigma_n^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ -\lambda/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{(n+1)\mathrm{x}(n+1)} \qquad W_{(n+1)\mathrm{x}1} = B_{(n+1)\mathrm{x}1}$$

donde la matriz C y el vector columna B son conocidos, y el vector columna W, es la asignación ideal de los porcentajes que minimiza el riesgo que deseamos conocer. Podemos despejar el vector W multiplicando de ambos lados por la matriz inversa de C:

$$\left[C^{-1}_{(n+1)\mathrm{x}(n+1)} \cdot C_{(n+1)\mathrm{x}(n+1)}\right] \mathrm{x}\, W_{(n+1)\mathrm{x}1} = C^{-1}_{(n+1)\mathrm{x}(n+1)} \,\mathrm{x}\, B_{(n+1)\mathrm{x}1}$$

$$I_{(n+1)\mathrm{x}(n+1)} \,\mathrm{x}\, W_{(n+1)\mathrm{x}1} = C^{-1}_{(n+1)\mathrm{x}(n+1)} \,\mathrm{x}\, B_{(n+1)\mathrm{x}1}$$

$$W_{(n+1)\mathrm{x}1} = C^{-1}_{(n+1)\mathrm{x}(n+1)} \,\mathrm{x}\, B_{(n+1)\mathrm{x}1}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ -\lambda/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \dots & \sigma_{1,n} & 1 \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \dots & \sigma_{2,n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \dots & \sigma_n^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la asignación ideal de porcentajes que constituye la **cartera de mínimo riesgo**, se encuentra mediante el producto de la matriz inversa de Varianzas y Covarianzas, por el vector columna de ceros y uno correspondiente al multiplicador de Lagrange, el cual es meramente informativo y no nos interesa.

3.9.5 FRONTERA EFICIENTE

Una vez identificada la **CMR**, ahora nos interesa encontrar carteras con un rendimiento esperado dado $\mathrm{E}'[r_P]$, mayor al rendimiento de la CMR, pero a su vez de mínimo riesgo (es decir, que se encuentra ubicada sobre la frontera eficiente).

Entonces tenemos el siguiente problema:

$$\min \sigma^2(r_P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{\forall i<j}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j}$$

$$s.a. \ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$s.a. \ \sum_{i=1}^{N} w_i \,\mathrm{E}[r_i] = \mathrm{E}'[r_P]$$

Planteamos y minimizamos la función Lagrangeana de manera análoga al problema anterior:

$$\min L = \min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right) - \mu\left(\sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i) - E'(r_P)\right)\right\}$$

$\rightarrow$

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = w_1\sigma_1^2 + 2w_2\sigma_{1,2} + 2w_3\sigma_{1,3} + \cdots + 2w_n\sigma_{1,n} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}E(r_1) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = 2w_2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_{1,2} + 2w_3\sigma_{2,3} + \cdots + 2w_n\sigma_{2,n} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}E(r_2) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_n} = 2w_n\sigma_n^2 + 2w_1\sigma_{1,n} + 2w_2\sigma_{2,n} + \cdots + 2w_{n-1}\sigma_{n-1,n} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}E(r_n) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = w_1E(r_1) + w_2E(r_2) + \cdots + w_nE(r_n) = E'(r_P)$$

Expresando este nuevo sistema de $(n+2)x(n+2)$ en su forma matricial, y despejando, tenemos:

$$
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ -\lambda/2 \\ -\mu/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \dots & \sigma_{1,n} & 1 & E(r_1) \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \dots & \sigma_{2,n} & 1 & E(r_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \dots & \sigma_n^2 & 1 & E(r_n) \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ E(r_1) & E(r_2) & E(r_3) & \dots & E(r_n) & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ E'(r_P) \end{bmatrix}
$$

donde $E'(r_P)$ es el rendimiento esperado que nosotros proponemos de manera tal que sea mayor al rendimiento de la CMR.

3.9.6 TEOREMA DE DOS FONDOS

El teorema de dos fondos menciona que dos fondos (portafolios) eficientes pueden ser establecidos para que cualquier portafolio eficiente pueda ser duplicado, en términos de media y variancia, como una combinación de esos dos. Todos los inversionistas que buscan portafolios eficientes, solamente necesitan invertir en combinaciones de esos dos portafolios fondos.

En otras palabras, todo el conjunto de mínima varianza se puede generar haciendo portafolios, haciendo combinaciones lineales de portafolios del conjunto de mínima varianza.

- Cualquier combinación convexa de portafolios eficientes será una cartera eficiente.
- Para cualquier portafolio de mínima varianza (excepto la cartera de mínimo riesgo), existe otro punto de mínima varianza, tal que su covarianza con éste es cero.

Este resultado tiene implicaciones fuertes. De acuerdo con este teorema, dos fondos de inversión podrían proporcionar un servicio completo de inversión para todos. No habría necesidad para nadie de adquirir acciones individuales separadamente; podrían comprar solo acciones de los fondos de inversión. Sin embargo, esta conclusión está basada en el supuesto de que todos se preocuparían solamente por la media y varianza; que todos tienen la misma evaluación de las medias, varianzas y covarianzas; y un único periodo de tiempo es apropiado. Todos esos supuestos son bastante tenues. No obstante, un inversionista sin tiempo o inclinación por hacer evaluaciones cuidadosas, quizá buscaría dos fondos administrados por personas en cuyas evaluaciones confiaría, e invertiría en esos dos fondos.

Suponga que hay dos soluciones conocidas, $w^1 = (w_1^1, w_2^1, \dots, w_n^1), \lambda_1, \mu_1$ y $w^2 = (w_1^2, w_2^2, \dots, w_n^2), \lambda_2, \mu_2$, con rendimientos esperados $\bar{r}^1$ y $\bar{r}^2$, respectivamente. Formamos una combinación multiplicando el primer rendimiento por α y el segundo por $(1-\alpha)$. Por sustitución directa, vemos que el resultado es también una solución de las $n+2$ ecuaciones del problema anterior (frontera eficiente), correspondiente al valor esperado $\alpha\bar{r}^1 + (1-\alpha)\bar{r}^2$. Revisando esto en detalle, note que $\alpha w^1 + (1-\alpha)w^2$ es un legítimo portafolio con pesos que cumplen con la restricción $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Note también que el rendimiento esperado es en efecto $\alpha\bar{r}^1 + (1-\alpha)\bar{r}^2$, por lo tanto satisface $\sum_{i=1}^{n} w_i\bar{r}_i = \bar{r} = \mathrm{E}[r_p]$, para ese valor. Finalmente note que, ya que ambas son soluciones que satisfacen la ecuación

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j} - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right) - \mu\left(\sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i) - E'(r_P)\right) = 0,$$

entonces su combinación también lo hace. Esto implica que el portafolio combinación $\alpha w^1 + (1-\alpha)w^2$ es también una solución, es decir, que también representa un punto en el conjunto de mínima varianza.

Para usar este resultado, suponga que w^1 y w^2 son dos portafolios diferentes en el conjunto de mínima varianza. Entonces, como α varia sobre $-\infty < \alpha < \infty$, los portafolios definidos por $\alpha w^1 + (1-\alpha)w^2$ barren todo el conjunto de mínima varianza. Podemos por supuesto, elegir eficientes las dos soluciones originales (sobre la frontera eficiente), y éstas generarán todos los otros puntos eficientes de la frontera (así como todos los otros puntos del conjunto de mínima varianza).

El teorema de los dos fondos también tiene implicaciones para el cálculo. Con el fin de resolver las ecuación original y sus restricciones, para todos los valores de $\bar{r}$, solamente es necesario encontrar dos soluciones y entonces formar combinaciones de esas dos. Una forma particularmente simple para especificar esas dos soluciones es especificar valores de λ y μ. Opciones convenientes son:

$$\lambda = 0,\ \ \mu = 1 \quad \text{y} \quad \lambda = 1,\ \ \mu = 0$$

En alguna de esas soluciones, la restricción $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ quizá sea violada, pero esto puede ser solucionado posteriormente normalizando todos los $w_i{}'$s por un factor común de escala. La solución obtenida con la primer opción ($\lambda = 0,\ \mu = 1$) ignora la segunda restricción ($\sum_{i=1}^{N} w_i\ \mathrm{E}[r_i] = \mathrm{E}'[r_P]$), por lo que se obtiene la CMR.

3.9.7 RESTRICCIÓN DE NO NEGATIVIDAD

En la resolución anterior, los signos de las variables $w_i{}'s$ no fueron restringidos, lo cual significó que la venta en corto estaba permitida. Podemos prohibir la venta en corto restringiendo cada w_i a ser no negativa. Esto agrega la siguiente restricción al problema que planteamos anteriormente:

$$s.a.\;\; w_i \geq 0, \qquad para\; i = 1{:}n$$

Este problema no puede ser reducido a la solución de un sistema de ecuaciones lineales, sino mediante **programación cuadrática**, ya que la función objetivo es cuadrática y las restricciones son ecuaciones e inecuaciones lineales. Programas computacionales especiales están disponibles para resolver tales problemas, pero aquéllos de este tipo de tamaño pequeño a medio pueden ser resueltos rápidamente con programas de hojas de cálculo. En la industria financiera, hay gran cantidad de programas de propósito especial designados a resolver este problema para cientos ó incluso miles de activos.

Una diferencia significativa entre las dos formulaciones (con ventas en corto permitidas y no permitidas), es que cuando la venta en corto es permitida, muchos, sino es que todos los $w_i's$ óptimos serán valores diferentes de cero, de tal forma que esencialmente todos los activos son usados. En contraste, cuando la venta en corto no está permitida, comúnmente varios pesos son iguales a cero.

3.9.8 INCLUSIÓN DEL ACTIVO LIBRE DE RIESGO

En las secciones anteriores asumimos implícitamente que los *n* activos disponibles eran todos riesgosos; esto es, cada uno de ellos tiene desviación estándar $\sigma > 0$. Un **activo libre de riesgo** tiene un rendimiento determinista (conocido con certeza) y por lo tanto, tiene $\sigma = 0$. En otras palabras, un activo libre de riesgo es un instrumento de interés puro. Su inclusión en un portafolio corresponde a prestar (activo libre de riesgo con peso positivo) ó pedir prestado (peso negativo) efectivo a una tasa libre de riesgo.

La inclusión de un activo libre de riesgo en la lista de posibles activos es necesaria para obtener realismo. Afortunadamente, la inclusión del activo libre de riesgo introduce una transformación matemática que simplifica de gran manera la forma de la frontera eficiente.

Para explicar esta condición, suponga que hay un activo libre de riesgo con una tasa de rendimiento conocida (determinista) r_f. Considere cualquier otro activo libre de riesgo con tasa de rendimiento *r*, media $\bar{r}$ y varianza σ^2. Note que la covarianza entre esos dos rendimientos debe ser cero, pues la covarianza se define como $E\left[(r - \bar{r})\left(r_f - r_f\right)\right] = 0$.

Ahora suponga que esos dos activos son combinados para formar un portafolio usando un peso α para el activo libre de riesgo y $1 - \alpha$ para el activo riesgoso, con $\alpha \leq 1$. La tasa de rendimiento esperado de este portafolio será $\alpha r_f + (1 - \alpha)\bar{r}$. La desviación estándar del rendimiento será $\sqrt{(1 - \alpha)^2 \sigma^2} = (1 - \alpha)\sigma$. Esto es porque el activo libre de riesgo no tiene varianza ni covarianza con el activo riesgoso. El único término a la izquierda en la fórmula es debido al activo riesgoso.

Si por el momento definimos $\sigma_f = 0$, vemos que la tasa de rendimiento del portafolio tiene:

$$\text{Media} = \alpha r_f + (1-\alpha)\bar{r}$$
$$\text{Desviación estándar} = (1-\alpha)\bar{\sigma}$$

Estas ecuaciones muestran que ambas varían linealmente con α. Esto significa que tanto como α varíe, el punto que representa al portafolio traza un línea recta en el plano riesgo-rendimiento.

Suponga ahora que hay n activos riesgosos con tasas de rendimiento esperado conocidas $\bar{r}_i$ y covarianzas $\sigma_{i,j}$ conocidas. En adición, hay un activo libre de riesgo con tasa de rendimiento r_f.

La inclusión del activo libre de riesgo en la lista de los activos disponibles tiene un profundo efecto en la forma de la región factible. La razón de esto es mostrada en la siguiente figura. Primero construimos la región factible ordinaria, definida por n activos riesgosos. Esta región es la sombreada oscura. Después, para cada activo (en el portafolio) en esta región formamos combinaciones con el activo libre de riesgo. Al formar esas combinaciones, permitimos pedir o prestar el activo libre de riesgo, pero sólo la adquisición del activo riesgoso. Estas nuevas combinaciones, trazan una línea recta infinita con origen en el punto correspondiente al activo libre de riesgo, pasando a través del activo riesgoso, y continúan indefinidamente. Hay una línea de este tipo para cada activo en la región factible original. En conjunto, todas esas líneas forman una región factible triangular, indicada por la región sombreada clara en la figura.

La región factible es un triángulo infinito siempre que un activo libre de riesgo sea incluido en el universo de activos disponibles.

Si pedir el activo libre de riesgo no está permitido (venta en corto), podemos tomar solamente los segmentos de línea finita entre el activo libre de riesgo y los puntos en la región factible original. No podemos extender esas líneas más allá, porque esto ocasionaría poder pedir el préstamo del activo libre de riesgo. Esto se muestra en la figura a la derecha.

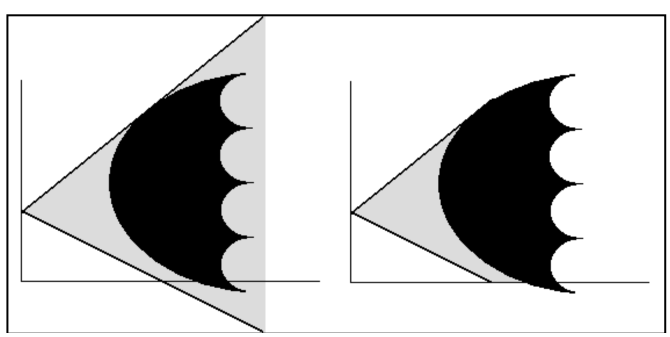


Figura 3. 10 Efecto del activo libre de riesgo

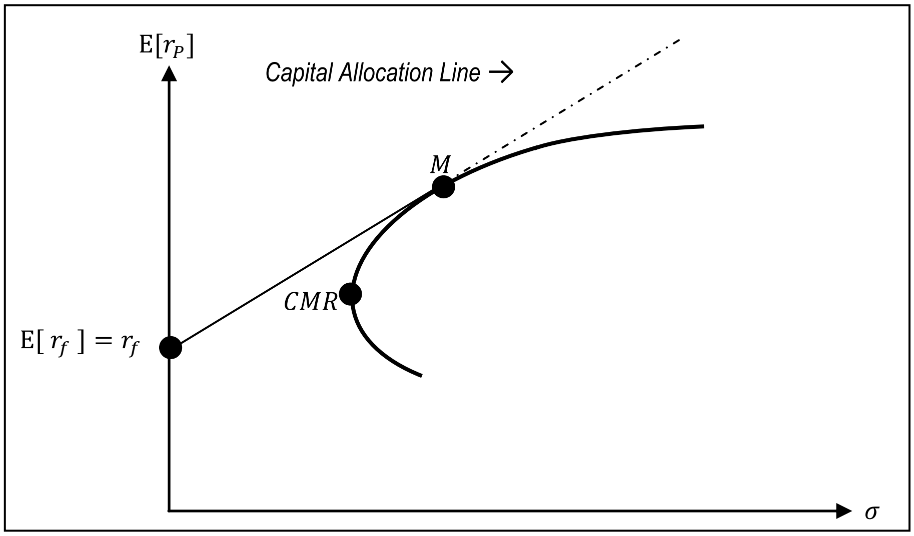


Figura 3. 11 Cartera de Mercado y Línea de Mercado de Capitales (Carteras acreedoras y Carteras deudoras)

Notemos las siguientes propiedades:

- $E(r_f) = r_f$ → es insesgado ∴ $\sigma^2(r_f) = 0 \;\rightarrow\; \sigma(r_f) = 0$
- $Cov(r_f, r_a) = \sigma_{r_f, r_a} = 0$. La covarianza entre el activo libre de riesgo y riesgoso es cero.
- $E(r_f) < E(CMR)$

De entre todas las combinaciones (líneas rectas) que se pueden formar entre el activo libre de riesgo y cualquier cartera del conjunto factible, la recta de mayor pendiente y tangente a la frontera eficiente domina a todas las demás rectas secantes. A esta recta se le conoce como **Línea de Mercado de Capitales (LMC)**. Al punto de tangencia entre la frontera eficiente y la LMC, generalmente se le llama **Cartera de Mercado (*M*).**

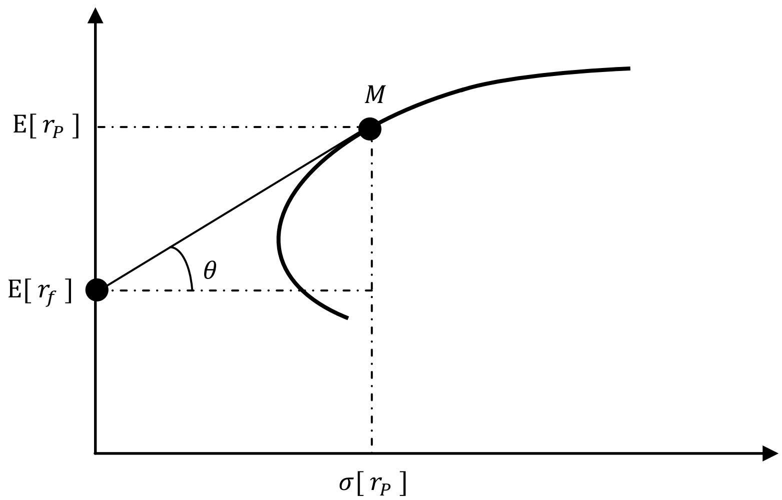
Sean w_1 y w_2, los porcentajes invertidos en r_f y M respectivamente:

- Si $w_1 = 1$, y $w_2 = 0$ → estamos sobre el punto r_f, i.e., todo se ha invertido en el activo libre de riesgo.
- Si $w_1 = 0$, y $w_2 = 1$ → estamos sobre el punto ***M***, i.e., todo se ha invertido en la Cartera de Mercado.
- Si $w_1 > 0$, y $w_2 < 1$ → nos ubicamos en el segmento $\overline{r_f M}$, el conjunto de **carteras acreedoras.**
- Si $w_1 < 0$, y $w_2 > 1$ → nos ubicamos en el segmento infinito con origen en M (línea punteada), el conjunto de **carteras deudoras.**

La nueva frontera eficiente será por tanto, la que se forma por el segmento $\overline{r_f M}$ y el resto de la frontera eficiente original[83].

La pendiente de la línea de mercado de capitales es frecuentemente llamada como el **precio del riesgo**, y nos dice que tanto crece el rendimiento esperado de un portafolio, si la desviación estándar del rendimiento incrementa en una unidad.

El nuevo problema por tanto, es encontrar los pesos de la cartera (de mercado *M*) que maximiza la pendiente de la recta tangente (línea de mercado de capitales).



Bajo el esquema de la figura superior, esto es:

$$\text{MAX}\, m = \text{MAX}\, \tan\theta = \frac{E[r_P] - E[r_f]}{\sigma(r_P)}$$

Para desarrollar la solución, suponga como es usual, que hay *n* activos riesgosos. Asignamos los pesos $w_1, w_2, \dots, w_n$ a los activos riesgosos, tal que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. El peso para el activo libre de riesgo es cero en el punto de tangencia (*M*). Note que estamos permitiendo la venta en corto entre los activos riesgosos. Para $r_P = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$, tenemos que $E[r_P] = \bar{r}_P = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i$ y $r_f = \sum_{i=1}^{n} w_i r_f$. Así:

$$\tan\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i(\bar{r}_i - r_f)}{\left(\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j}\right)^{1/2}}$$

Debería ser claro que la multiplicación de todos los w_i's por una constante no cambiará la expresión, ya que la constante será cancelada. Por lo tanto, aquí no es necesario imponer la restricción $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

---

[83] Si el inversionista consiguiera un préstamo a tasa libre de riesgo, la nueva frontera eficiente sería la Línea de Mercados de Capitales. En México, sólo grandes inversionistas o inversionistas Institucionales tienen acceso a tasas libres de riesgo, tales como PEMEX, CFE, etc.

Calculamos la derivada de $\tan\theta$ con respecto a cada w_i y las igualamos a cero. Esto deja las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{k,i}\lambda w_i = \bar{r}_k - r_f\,, \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

donde λ es una constante desconocida. Sustituyendo $u_i = \lambda w_i$, para cada *i* nos queda:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{k,i}u_i = \bar{r}_k - r_f = E[r_k] - r_f, \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

Esto nos deja el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered}
u_1\sigma_1^2 + u_2\sigma_{1,2} + \cdots + u_n\sigma_{1,n} = E[r_1] - r_f \\
u_1\sigma_{2,1} + u_2\sigma_2^2 + \cdots + u_n\sigma_{2,n} = E[r_2] - r_f \\
\vdots \\
u_1\sigma_{n,1} + u_2\sigma_{n,2} + \cdots + u_n\sigma_n^2 = E[r_n] - r_f
\end{gathered}$$

Expresándolo en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \ldots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \ldots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}_{n\mathrm{x}n} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}_{n\mathrm{x}1} = \begin{bmatrix} E[r_1] - r_f \\ E[r_2] - r_f \\ \vdots \\ E[r_n] - r_f \end{bmatrix}_{n\mathrm{x}1}$$

De manera análoga a los procedimientos anteriores, multiplicamos ambos lados (por la izquierda) por la matriz inversa de Varianzas-Covarianzas para despejar el vector columna *u*:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}_{n\mathrm{x}1} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \ldots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \ldots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}_{n\mathrm{x}n}^{-1} \begin{bmatrix} E[r_1] - r_f \\ E[r_2] - r_f \\ \vdots \\ E[r_n] - r_f \end{bmatrix}_{n\mathrm{x}1}$$

Finalmente normalizamos para determinar los pesos w_i's que conforman la **cartera de mercado**. Esto es:

$$\boxed{w_i = \frac{u_i}{\sum_{k=1}^{n} u_k}}$$

La línea de mercado de capitales muestra la relación entre el rendimiento esperado y el riesgo del rendimiento (medido por su desviación estándar), para activos eficientes o portafolios de activos. También se le hace referencia como una línea de precio (línea de valuación), ya que los precios deberían ajustarse a los activos eficientes que caen sobre esta línea.

La línea tiene una gran característica intuitiva. Expone que tanto como el riesgo incremente, el correspondiente rendimiento esperado también incrementa. Además, esta relación puede ser descrita por una línea recta si el riesgo está medido por la desviación estándar. En términos, matemáticos, la ecuación de la línea de mercado de capitales es:

$$E[r_p] = E[r_f] + \frac{E[r_M] - E[r_f]}{\sigma(r_M)}\sigma$$

donde $E[r_M]$ y $\sigma(r_M)$ los calculamos de la misma manera que lo hemos hecho para la CMR o la frontera eficiente, es decir, mediante los productos matriciales correspondientes, una vez que hemos encontrado los porcentajes que constituyen la cartera de mercado.

3.10 RENDIMIENTO ESPERADO Y RIESGO ANUALES

La Bolsa Mexicana de Valores (BMV) considera t=250 días hábiles al año.

Para anualizar los rendimientos esperados, varianzas, desviaciones estándar de un activo i y covarianzas entre un par de activos i, j que obtenemos de los log-rendimientos (a su vez obtenidos de las series históricas de precios de cierre diarios), tenemos:

- $E[r_i]_{anual} = t * E[r]$
- $\sigma^2[r_i]_{anual} = t * \sigma^2[r]$
- $\sigma[r_i]_{anual} = \sqrt{t} * \sigma[r]$
- $\sigma[r_i, r_j]_{anual} = t * \sigma[r_i, r_j]$

A continuación se muestra un ejemplo de todos los temas estudiados hasta aquí. Se utilizaron la series históricas del 01/01/2003 al 02/10/2009 de los precios de cierre de n=4 acciones. Se obtuvieron los log-rendimientos, sus promedios (rendimiento esperado), varianzas poblacionales, desviaciones estándar poblacionales, y las 6 covarianzas correspondientes[84].

Posteriormente se anualizaron todos estos resultados y se construyeron las matrices de varianzas y covarianzas, de varianzas y covarianzas aumentada (para calcular la frontera

[84] Recordemos que el número de covarianzas es ${}_nC_2 = \frac{n^2-n}{2}$

eficiente), sus matrices inversas y los vectores columna de ceros y uno, y el vector columna de excesos, necesarios para calcular la Cartera de mínimo riesgo (CMR), 100 carteras de la frontera eficiente, la cartera de mercado (*M*), y la línea de mercado de capitales. Como activo libre de riesgo se usó CETES a 28 días con una tasa de rendimiento anual de 7%. No hay restricciones para la venta en corto, lo que se traducirá en la presencia de porcentajes negativos. Recuerde que $\sigma_{i,i} = \sigma_i^2$.

		RESULTADOS ANUALIZADOS		MATRIZ DE VARIANZAS Y COVARIANZAS			
i	**NOMBRE**	**Desv. est.**	**Rend. esp.**	**Cov(1,i)**	**Cov(2,i)**	**Cov(3,i)**	**Cov(4,i)**
1	**Cemex**	0.4527	0.0610	0.2049	0.0767	0.0934	0.0454
2	**America Móvil**	0.3377	0.3485	0.0767	0.114	0.0714	0.043
3	**Gmexico**	0.7177	0.1141	0.0934	0.0714	0.515	0.0494
4	**Grupo Modelo**	0.2766	0.1133	0.0454	0.043	0.049	0.0765

	W1	W2	W3	W4	$\sum W_i's$	Varianza	Desv. est.	Rend. esp.
CMR	0.0646	0.2729	0.0143	0.6482	1	0.065	0.2549	0.1741
Cartera de Mercado	-0.7309	2.2216	-0.083	-0.4077	1	0.3769	0.6139	0.6739
E(CMR)+1*.01	0.0486	0.31188	0.0124	0.627	1	0.0651	0.2551	0.1841
E(CMR)+2*.01	0.0327	0.3509	0.0104	0.6059	1	0.0655	0.2559	0.1941
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
E(CMR)+100*.01	-1.527	4.1719	-0.1805	-1.4644	1	1.3135	1.1461	1.1741

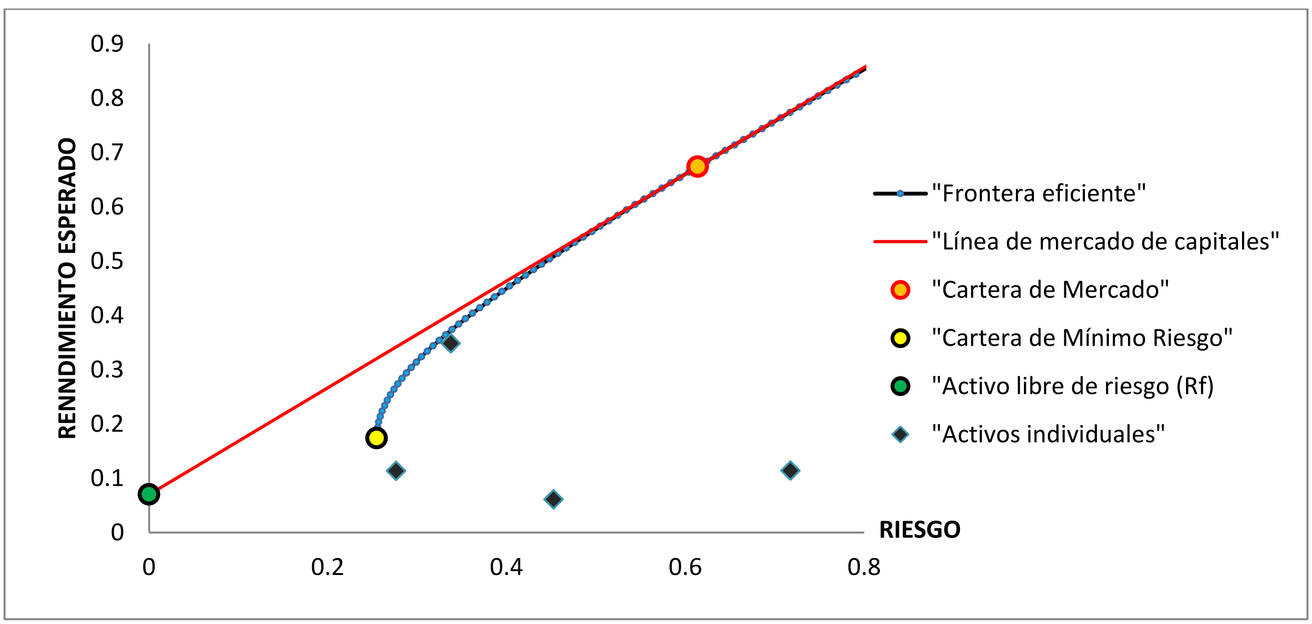


Figura 3. 12 Ejemplo gráfico de la CMR, frontera eficiente, cartera de mercado y LMC

3.11 *CAPITAL ASSET PRICING MODEL* (*CAPM*)

La línea de mercado de capitales relaciona el rendimiento esperado de un portafolio eficiente con su desviación estándar, pero no muestra cómo el rendimiento esperado de un activo individual se relaciona con su riesgo individual, es decir, la contribución de cada activo al riesgo de la cartera.

→ **Teorema** (*CAPM*): Si la cartera o portafolio de mercado ***M*** es eficiente, el rendimiento esperado $E[r_i] = \bar{r}_i$ de cualquier activo *i* satisface:

$$\bar{r}_i - r_f = \beta_i(\bar{r}_M - r_f)$$

donde

$$\beta_i = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}$$

Prueba: para cualquier α considere el portafolio formado por la porción α invertida en el activo i y la porción $1 - \alpha$ invertida en la cartera de mercado (permitiremos $\alpha < 0$, el cual corresponde a un préstamo a tasa libre de riesgo). El rendimiento esperado y desviación estándar del portafolio son:

$$\bar{r}_\alpha = \alpha\bar{r}_i + (1-\alpha)\bar{r}_M$$
$$\sigma_\alpha = [\alpha^2\sigma_i^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{i,M} + (1-\alpha)^2\sigma_M^2]^{1/2}$$

Según varíe α, esos valores trazarán una curva como se muestra en la siguiente figura. En particular, $\alpha = 0$ corresponde a la cartera de mercado *M*.

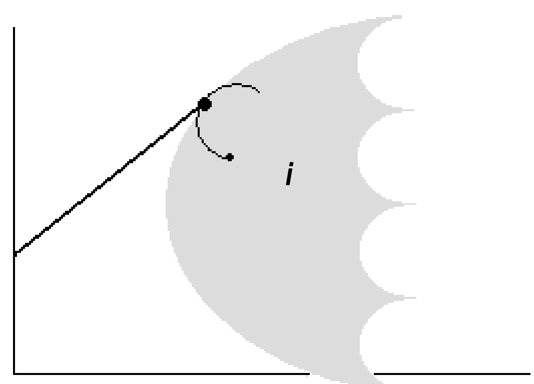


Figura 3. 13 Curva del portafolio

Esta curva no puede cruzar la línea de mercado de capitales. Si lo hiciera, el portafolio correspondiente a un punto arriba de la línea de mercado de capitales violaría la definición de la línea de mercado de capitales, de ser la frontera eficiente del conjunto factible.

Por lo tanto, como α pasa a través de cero, la curva debe ser tangente a la línea de mercado de capitales en M. La condición de tangencia puede ser traducida en la condición de que la pendiente de la curva es igual a la pendiente de la LMC en el punto M. Para esto necesitamos calcular varias derivadas.

Primero tenemos:

$$\frac{d\bar{r}_\alpha}{d\alpha} = \bar{r}_i - \bar{r}_M$$

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = \frac{\alpha\sigma_i^2 + (1-2\alpha)\sigma_{i,M} + (\alpha-1)\sigma_M^2}{\sigma_\alpha}$$

entonces:

$$\left.\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2}{\sigma_M}$$

Usamos la relación

$$\frac{d\bar{r}_\alpha}{d\sigma_\alpha} = \frac{d\bar{r}_\alpha/d\alpha}{d\sigma_\alpha/d\alpha}$$

para obtener

$$\left.\frac{d\bar{r}_\alpha}{d\sigma_\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{(\bar{r}_i - \bar{r}_M)\sigma_M}{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2}$$

Esta pendiente debe ser igual a la pendiente de la LMC. Por lo tanto:

$$\frac{(\bar{r}_i - \bar{r}_M)\sigma_M}{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2} = \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}$$

Ahora despejamos $\bar{r}_i$ obteniendo el resultado final:

$$\boxed{\bar{r}_i = r_f + \left(\frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M^2}\right)\sigma_{i,M} = r_f + \beta_i(\bar{r}_M - r_f)}$$

Esto es claramente equivalente a la fórmula enunciada en el teorema.

3.11.1BETA DEL ACTIVO

En la ecuación anterior, el valor β_i (usaremos en general β) es conocido como **la beta del activo.** Al valor $\bar{r}_i - r_f$ se le denomina **exceso de la tasa de rendimiento esperado** del activo i; es la cantidad por la cual se espera que la tasa de rendimiento exceda la tasa libre de riesgo.

Así mismo, $\bar{r}_M - r_f$ es el exceso esperado de la tasa de rendimiento del portafolio de mercado.

En términos de esos excesos esperados de las tasas de rendimiento, el CAPM dice que el exceso esperado de la tasa de rendimiento de un activo es proporcional al exceso esperado de la tasa de rendimiento del portafolio de mercado, y el factor de proporcionalidad es β. Entonces con r_f tomada como punto base, los rendimientos esperados de un activo particular y del mercado por encima de esa base son proporcionales.

Una interpretación alternativa de la fórmula del CAPM está basada en el hecho de que β es una versión normalizada de la covarianza de un activo con el portafolio de mercado. Por lo tanto, la fórmula del CAPM expone que el exceso esperado de la tasa de rendimiento de un activo es directamente proporcional a su covarianza con el mercado. Es esta covarianza la que determina el exceso esperado de la tasa de rendimiento.

Para entender más este resultado, consideremos varios casos extremos. Suponga primero que el activo está completamente no correlacionado con el mercado; esto es $\beta = 0$. Entonces, de acuerdo con el CAPM, tenemos $\bar{r} = r_f$. Esto quizá sea al principio un resultado sorpresivo. Esto muestra que incluso si el activo es muy riesgoso (con σ grande), la tasa de rendimiento esperado será la del activo libre de riesgo (esto no es prima para el riesgo). La razón para esto es que el riesgo asociado a un activo que está no correlacionado con el mercado puede ser diversificado. Si tuvimos varios de esos activos, cada uno no correlacionado con los otros y con el mercado, pudimos adquirir pequeñas cantidades de cada uno de ellos, resultando una varianza total pequeña. Ya que el rendimiento compuesto final tenía varianza pequeña, la correspondiente tasa de rendimiento esperado debería ser cercana a r_f.

Incluso es más extremo un activo con valor negativo de β. En ese caso, $\bar{r} < r_f$; eso es, incluso pensando en que el activo tenga un alto riesgo (medido por σ), su tasa de rendimiento esperado debería ser incluso menor que la tasa libre de riesgo. La razón es que cada uno de los activos reduce el riesgo conjunto del portafolio cuando es combinado con el mercado. Por lo tanto, los inversionistas dispuestos a aceptar un valor esperado más bajo por la reducción potencial del riesgo. Tales activos proveen una forma de seguro.

El CAPM cambia nuestro concepto de riesgo de un activo, de ser σ a β. Es cierto que aún, en conjunto, mediremos el riesgo de un portafolio en términos de σ, pero para los activos individuales, la medida apropiada son sus β's.

Para esto se ajustan modelos de regresión lineal entre los rendimientos de un activo i como variable dependiente y los rendimientos de un índice bursátil (por ejemplo el IPC) ó la cartera de mercado, como variable independiente. El coeficiente $\hat{\beta}_1$ de ese modelo será, por lo tanto, la beta del activo ó la medida de su riesgo (frente al mercado). Nuevamente, el ajuste de un modelo de regresión lineal nos dice que:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sigma_{M,i}}{\sigma_M^2}$$

Esto será estudiado con mayor detalle en la sección 3.10.4

A su vez, la beta de un activo es la contribución de cada uno de los activos al riesgo de un portafolio, (todo lo que necesitamos saber acerca de las características de riesgo del activo para usar la fórmula del CAPM). Esta sensibilidad ó tasa de cambio se obtiene, como ya sabemos, derivando parcialmente la varianza del portafolio respecto a cada w_i, obteniendo que $\beta_i = \frac{\sigma_{P,i}}{\sigma_P^2}$, para i=1:n.

Entonces, si queremos calcular las betas de los activos que conforman un determinado portafolio (puede ser el de mínimo riesgo, o alguno de la frontera eficiente, todos constituidos por los mismos activos pero con diferentes proporciones), y del cual ya conocemos los porcentajes asignados a cada uno de los activos, podemos calcular el vector de β_i's como:

$$[\beta_i] = \frac{\sigma_{P,i}}{\sigma_P^2} = \frac{[\sigma_{i,1} \quad \sigma_{i,2} \quad \cdots \quad \sigma_{i,n}]\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}}{\sigma^2(r_P)}, \qquad i = 1{:}\,n$$

donde ya sabíamos que

$$\sigma^2(r_P) = [w_1, w_2, \dots, w_n]_{1xn} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}_{nxn} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_{nx1}$$

Es decir, de la matriz de varianzas y covarianzas se toma el renglón i-ésimo correspondiente al activo i y se multiplica por el vector columna de w's (esto es la covarianza entre el activo i y el portafolio), y en el denominador se realiza todo el producto $W*C*W^{T}$.

3.11.2 BETA DEL PORTAFOLIO

Es fácil calcular la beta conjunta de un portafolio en términos de las betas de los activos individuales que lo conforman. Suponga, por ejemplo, que un portafolio contiene n activos con pesos $w_1, w_2, \dots, w_n$. La tasa de rendimiento esperado del portafolio es $r = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$. Por lo tanto, $\text{cov}(r, r_M) = \sum_{i=1}^{n} w_i \text{cov}(r_i, r_M)$. Se sigue inmediatamente que

$$\boxed{\beta_P = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i}$$

En otras palabras, el portafolio beta es el promedio ponderado de las betas de los activos individuales, con los pesos idénticos a los que definen el portafolio.

3.11.3 *THE SECURITY MARKET LINE*

La fórmula del CAPM puede ser expresada de forma gráfica en cuanto a la fórmula como una relación lineal. Esta relación se llama **línea de seguridad del mercado**.

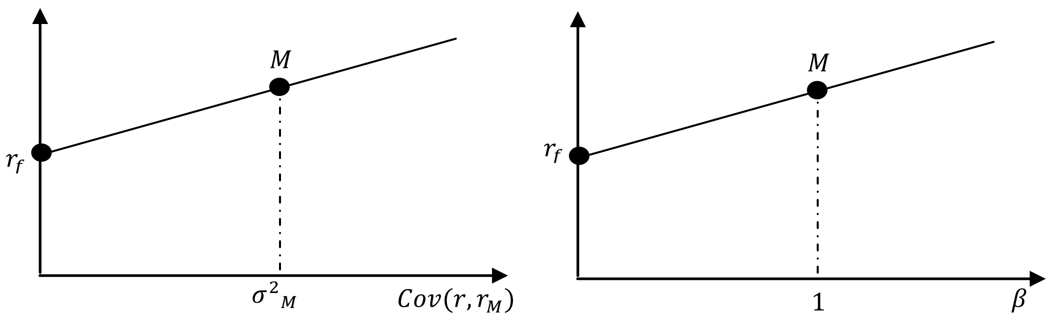


Figura 3. 14 Línea de seguridad del mercado. El rendimiento esperado aumenta linealmente tanto como la covarianza con el mercado, o equivalentemente *β*, aumentan.

Ambas gráficas muestran la variación lineal de $\bar{r}$. La primera la expresa en forma de covarianza, con $\mathrm{Cov}(r, r_M)$ en el eje horizontal. La segunda gráfica muestra la relación en forma de beta, siendo beta el eje horizontal. En este caso el mercado corresponde al punto $\beta = 1$. Ambas líneas resaltan la esencia de la fórmula del CAPM. Bajo las condiciones de equilibrio asumidas por el CAPM, cualquier activo debería caer en la línea de seguridad del mercado (LSM).

La LSM expresa la estructura de la recompensa del riesgo de los activos de acuerdo al CAPM, y enfatiza que el riesgo de un activo es una función de su covarianza con el mercado, o equivalentemente, una función de su beta.

3.11.4 RIESGO SISTEMÁTICO

El CAPM implica una propiedad estructural especial para el rendimiento de un activo, y esta propiedad provee mayor entendimiento del por qué la beta es la medida más importante del riesgo. Para desarrollar este resultado escribiremos la (aleatoria) tasa de rendimiento del activo *i* como:

$$r_i = r_f + \beta_i(r_M - r_f) + \varepsilon_i$$

Esto es sólo una ecuación arbitraria a este punto. La variable aleatoria ε_i es seleccionada para hacerlo cierto. Sin embargo, la fórmula del CAPM nos dice algunas cosas sobre ε_i.

Primero, tomando su valor esperado, el CAPM dice que $E(\varepsilon_i) = 0$.

Segundo, tomando su la correlación con r_M (y usando la definición de β_i), encontramos que $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \sigma_M) = 0$. Podemos escribir entonces:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \operatorname{var}(\varepsilon_i)$$

Observemos que σ_i^2 es suma de dos partes. La primera parte, $\beta_i^2 \sigma_M^2$, es conocida como **riesgo sistemático** (del cual ya hemos hablado en el capítulo I y en la sección 3.8). Este es el riesgo asociado al mercado como un todo. Este riesgo no puede ser reducido por la diversificación porque todo activo con beta diferente de cero contiene este riesgo.

La segunda parte, $\operatorname{Var}(\varepsilon_i)$, es conocido como **riesgo no sistemático** o **riesgo específico**. Este riesgo no está correlacionado con el mercado y puede ser reducido por la diversificación. Este es el riesgo sistemático, medido por beta, que es el más importante, ya que lo combina directamente con el riesgo sistemático de otros activos.

Considere un activo en la línea de mercado de capitales[85] (LMC) con un valor de β. La desviación estándar de este activo es $\beta\sigma_M$. Este activo tiene solamente riesgo sistemático y tiene una tasa de rendimiento esperado igual a $\bar{r} = r_f + \beta(\bar{r}_M - r_f)$. Ahora considere todo un grupo de otros activos, todos con el mismo valor de β. De acuerdo con el CAPM, todos esos tienen la misma tasa de rendimiento esperado, igual a $\bar{r}$. Sin embargo, si esos activos cargan con riesgo no sistemático, entonces no pueden caer en la LMC. En efecto, tanto como el riesgo no sistemático incrementa, los puntos en el plano riesgo-rendimiento esperado representan esos activos con dirección hacia la derecha, como se muestra en la siguiente figura. La distancia horizontal de un punto de la LMC es entonces una medida del riesgo no sistemático.

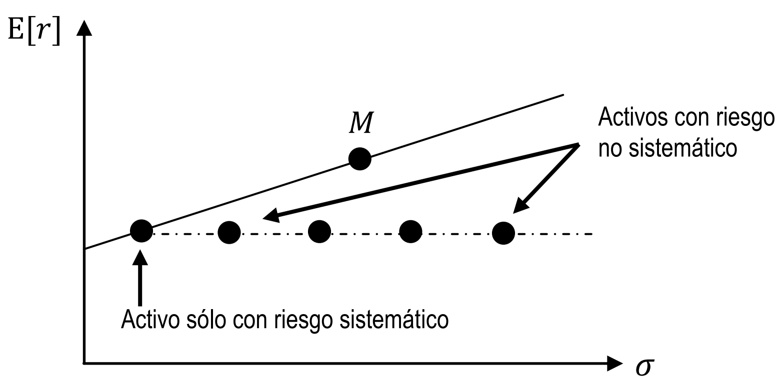


Figura 3. 15 Un activo en la LMC sólo tiene riesgo sistemático. Los activos con riesgo no sistemático caen a la derecha de la LMC.

Considerando la existencia inherente del riesgo sistemático, el modelo de mercado de Sharpe considera precisamente que la correlación que existe entre los rendimientos de los

[85] Por supuesto, para estar exactamente en la línea, el activo debe ser equivalente a una combinación del portafolio de mercado *M* y el activo libre de riesgo, como ya habíamos visto.

activos se deriva de factores económicos (entre otros) del mercado. Por lo tanto, buscamos encontrar la dependencia entre el rendimiento de un activo i y la del mercado (por ejemplo el IPC en México o la cartera de mercado *M*) tratando de expresar el modelo real a través del ajuste del siguiente modelo de regresión lineal:

$$\hat{r}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 r_M + \varepsilon_i$$

de donde sabemos por el método de mínimos cuadrados que:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\mathrm{Cov}(r_M, r_i)}{\mathrm{Var}(r_M\,)}, \qquad \hat{\beta}_0 = \bar{r}_i - \bar{r}_M \beta_1$$

y se tienen *n* observaciones de (r_M, r_i) para realizar el ajuste.

Note que tal modelo es la ecuación de una recta estimada donde $\hat{\beta}_0$ es el término independiente u ordenada al origen, el cual indica la parte del rendimiento independiente del mercado, y $\boldsymbol{\hat{\beta}_1}$ **es la pendiente de la recta o la tasa/sensibilidad del activo ante una variación en el mercado**, es decir, **la beta del activo**. Por cada unidad de cambio en r_M, r_i incrementa $\hat{\beta}_1$ veces, midiendo así su riesgo sistemático.

Un modelo de regresión lineal considera a r_M y r_i como variables deterministas (no estocásticas). Sin embargo, el error ε_i es una variable aleatoria que tiene propiedades que ya habíamos mencionado anteriormente. En resumidas cuentas:

$$\sum \varepsilon_i = 0 \rightarrow E[\varepsilon_i] = 0$$
$$\varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$$

Además tiene otro par de propiedades de independencia muy importantes:

Homocedasticidad: $\mathrm{Cov}(r_M, \varepsilon_i) = 0$

Autocorrelación nula: $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_i{}') = 0$. Visto como serie de tiempo, no hay autocorrelación.

Por el teorema de Gauss-Markov, tenemos que los estimadores por mínimos cuadrados $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son los mejores, en el sentido de ser insesgados y de varianza mínima:

$$E[\hat{\beta}_0] = \hat{\beta}_0$$

$$E[\hat{\beta}_1] = \hat{\beta}_1$$

$$\mathrm{Var}[\hat{\beta}_0] = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{r}_M}{\sum_{i=1}^{n} (r_{Mi} - \bar{r}_M)^2} \right)$$

$$\mathrm{Var}[\hat{\beta}_1] = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(r_{Mi} - \bar{r}_M)^2}$$

$$\mathrm{Cov}[\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1] = -\sigma^2 \frac{\bar{r}_M}{\sum_{i=1}^{n}(r_{Mi} - \bar{r}_M)^2} \neq 0, \qquad \text{(no son independientes)}$$

Finalmente, una vez obtenidos los estimadores, se tiene la siguiente clasificación para la beta del activo $\hat{\beta}_1$, que como ya se mencionó, mide el riesgo sistemático de un activo al considerar su correlación frente la cartera de mercado *M*:

Si $\hat{\beta}_1 \in (-\infty, 0)$	El activo *i* se comporta de forma contraria al mercado (es muy defensivo)
Si $\hat{\beta}_1 \in [0,1)$	El activo *i* es de baja volatilidad, pues sus variaciones son menores a las del mercado (defensivo)
Si $\hat{\beta}_1 = 1$	El activo *i* es neutral.
Si $\hat{\beta}_1 \in (1, \infty)$	El activo *i* es de alta volatilidad (agresivo).

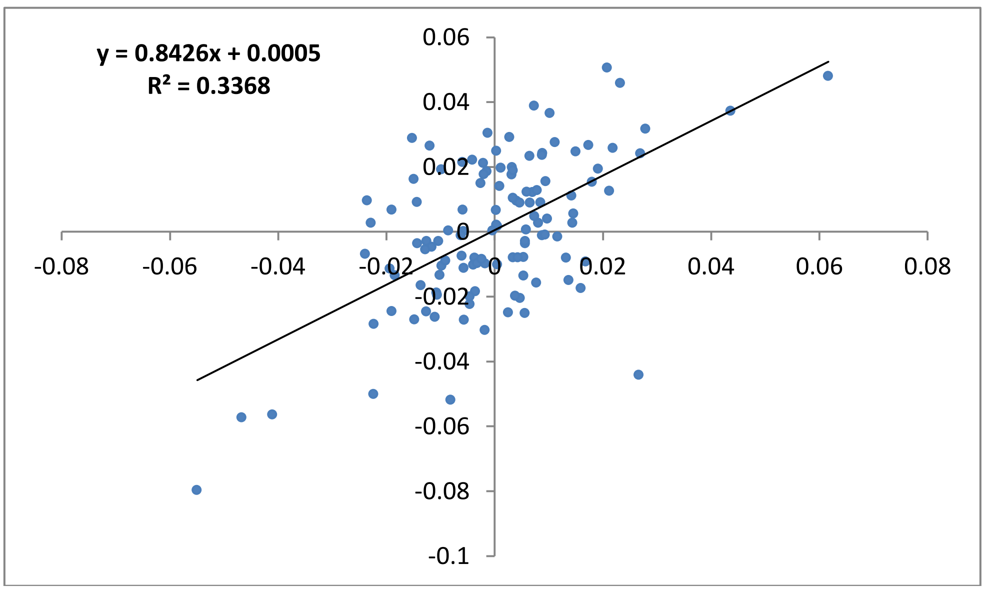


Figura 3. 16 Ejemplo de una regresión entre GFNORTE (Banorte) como variable dependiente y el IPC.

Como vemos en el ejemplo anterior, la beta del activo GFNORTE es de .8426, lo que indica que el activo es casi neutral ó de baja volatilidad. El valor R^2=.33=33%, es el porcentaje del modelo explicado por la regresión (relativamente bajo).

CAPÍTULO IV
DISEÑO DE UN PORTAFOLIO Y COMPARACIÓN CON UN PORTAFOLIO ESTÁNDAR

Para finalizar, en este capítulo realizaremos la comparación entre un portafolio de inversión estándar ofrecido por una institución financiera (banco, manejador de inversiones, etc) y un portafolio “teórico”, utilizando las herramientas que hemos desarrollado en los capítulos anteriores. Esto es, mediante el enfoque clásico media - varianza de Markowitz y la diversificación. Para ello haremos uso del archivo “Portafolios de inversión.xlsx (habilitado para **macros**)”, el cual contiene las series históricas (cierre ajustado) pre-cargadas del IPC, CETES a 28 días (para la cartera de mercado *M* y la LMC), y 17 de las acciones más activas en México, según *Yahoo Finance*[86], del 1/ENE/03 al 15/ OCT/2009.

CEMEX-CPO	TELMEXL	FOMENTO ECONOM UTS	GRUPO MODELO	AXTEL CPO
AMERICA MOVIL-L	EMPRESAS ICA	CONSORCIO ARA	ALSEA	
GMEXICO-B	GRUPO FIN BANORTE O	CITIGROUP	CONTROLADORA CPO	
GRUPO CONTINENT	WAL-MART-V	GRUPO TELEVISA-CPO	BIMBO-A	

Esta macro permite seleccionar las acciones con las que se desea construir el portafolio, el periodo durante el cual se realizará el estudio (fecha inicial y final), y un número m de carteras de la frontera eficiente. Como resultado, arroja los porcentajes, el rendimiento esperado y el riesgo de: la cartera de mínimo riesgo (CMR), de las *m* carteras de la frontera eficiente, del activo libre de riesgo (r_f), de la cartera de mercado (*M*), la línea de mercado de capitales (LMC) y los coeficientes *beta* (CAPM) de cada acción respecto a la cartera de mercado práctica (IPC), así como las matrices necesarias para calcularlos y la gráfica en el espacio riesgo-rendimiento[87] de este conjunto de carteras.

Cabe destacar que hay ciertas acciones que no cotizaron el mismo número de días que otras, por lo que hay datos faltantes (GAPs). Para solucionar esto, el programa hace un mapeo y organiza la información por las fechas de la acción que haya cotizado más días. Los datos que faltan, se obtienen mediante interpolación lineal. Así se tienen el mismo número de datos para todas las acciones, necesarios para los cálculos (covarianzas, etc).

4.1 EL PORTAFOLIO ‘TEÓRICO’
4.1.1 ANÁLISIS DE PRECIOS Y RENDIMIENTOS DE UNA ACCIÓN

Es importante tener en cuenta que elegiremos como periodo de estudio los años 2008 y 2009, periodo de crisis en el que el comportamiento del mercado fue altamente volátil.

[86] http://mx.finance.yahoo.com/actives?e=MX (no significa las más representativas del IPC)
[87] Como por ejemplo, la que se mostró en la figura 3.14

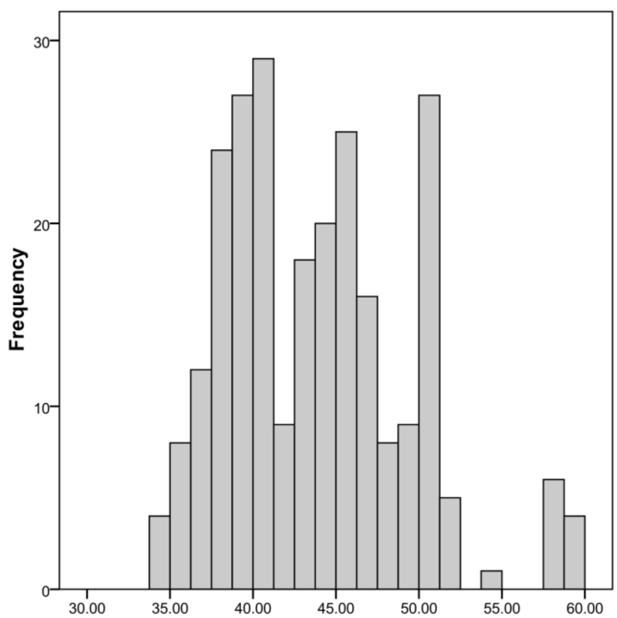
Esto se refleja en el alza o baja en los precios de muchos activos, haciendo que se tengan datos extremos (*outlayers*) que alteran el promedio y la desviación estándar (volatilidad) de sus rendimientos. Esto es un punto en contra, ya que el criterio media-varianza de Markowitz, utiliza como estimadores el promedio de los rendimientos como medida de rentabilidad, y la desviación estándar como medida de riesgo.

Recordemos que una de las hipótesis del modelo de Markowitz (al igual que *Black Scholes* y Monte Carlo, como ya se explicó en el capítulo II) es suponer que los rendimientos de los precios de los activos financieros y, por tanto, el rendimiento del portafolio en su conjunto, son una variable aleatoria normal $\mathrm{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$.

En realidad esto no es así, además de que la volatilidad del activo 'σ' no es constante sino heterocedástica[88].

Para probar esto, seleccionamos aleatoriamente una acción de las 17 pre-cargadas en la 'macro', por ejemplo, *Grupo Modelo* y analizaremos la distribución de los precios y los rendimientos del 15/10/2008 al 15/10/2009, que en el modelo se suponen log-normales y normales respectivamente[89]. Para comparar contra variables aleatorias que tienen tales distribuciones, mostramos gráficas de precios y rendimientos simulados por Monte Carlo.

Éstas gráficas se obtuvieron usando los paquetes SPSS17.0 y MATLAB7.0



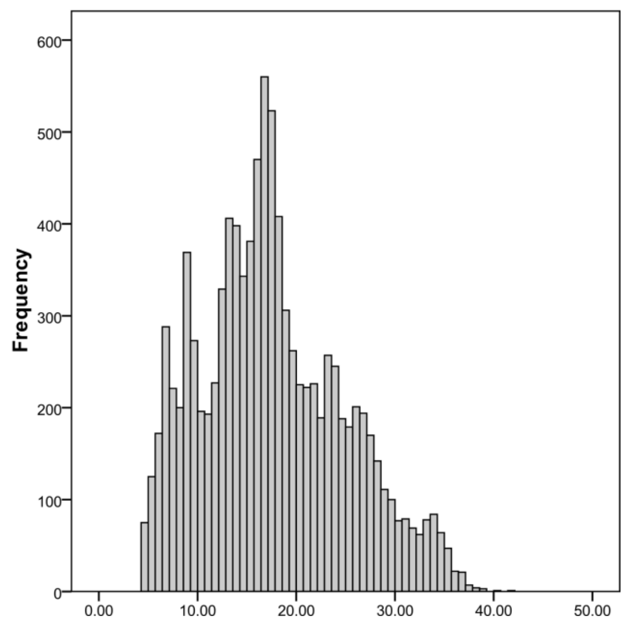


Figura 4. 1 Distribución de: **a)** precios históricos de Grupo Modelo **b)** precios simulados (log-normal).

[88] Heterocedasticidad: la varianza de las perturbaciones no es constante a lo largo de las observaciones. Esto implica el incumplimiento de una de las hipótesis básicas sobre las que se asienta el modelo de regresión lineal.
De ella se deriva que los datos con los que se trabaja son heterogéneos, ya que provienen de distribuciones de probabilidad con distinta varianza. Existen diferentes razones o situaciones en las que cabe encontrarse con perturbaciones heterocedásticas. La situación más frecuente es en el análisis de datos de corte transversal, ya que los individuos o empresas o unidades económicas no suelen tener un comportamiento homogéneo (homocedasticidad).

[89] No obstante, el análisis se hizo para todas las acciones para probar que en la realidad no se distribuyen así.

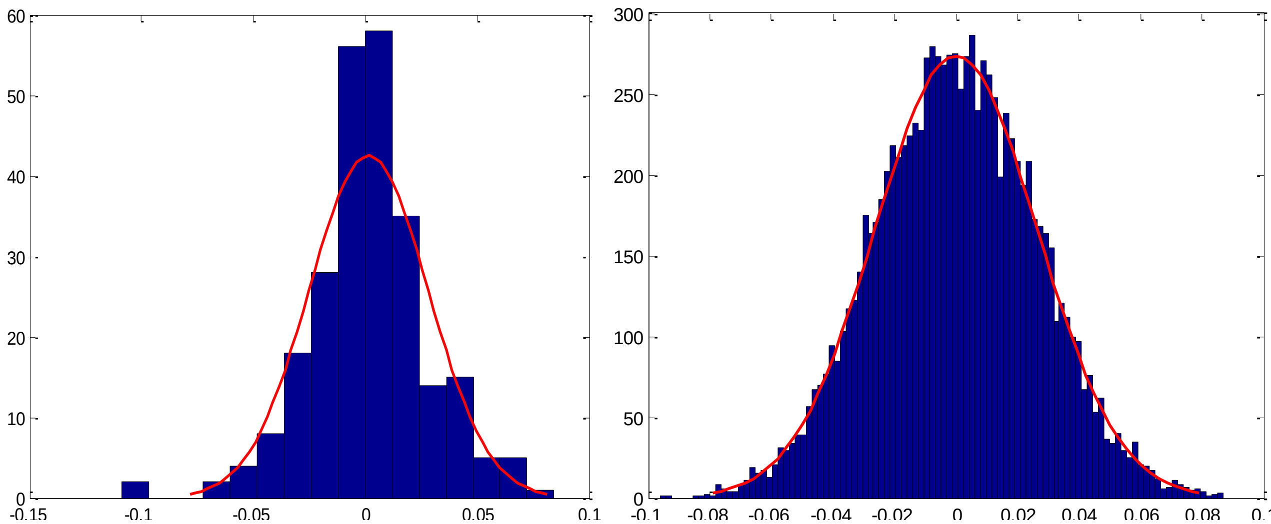


Figura 4. 2 Distribución de: **a)** rendimientos de grupo modelo **b)** rendimientos de los precios simulados (normal).

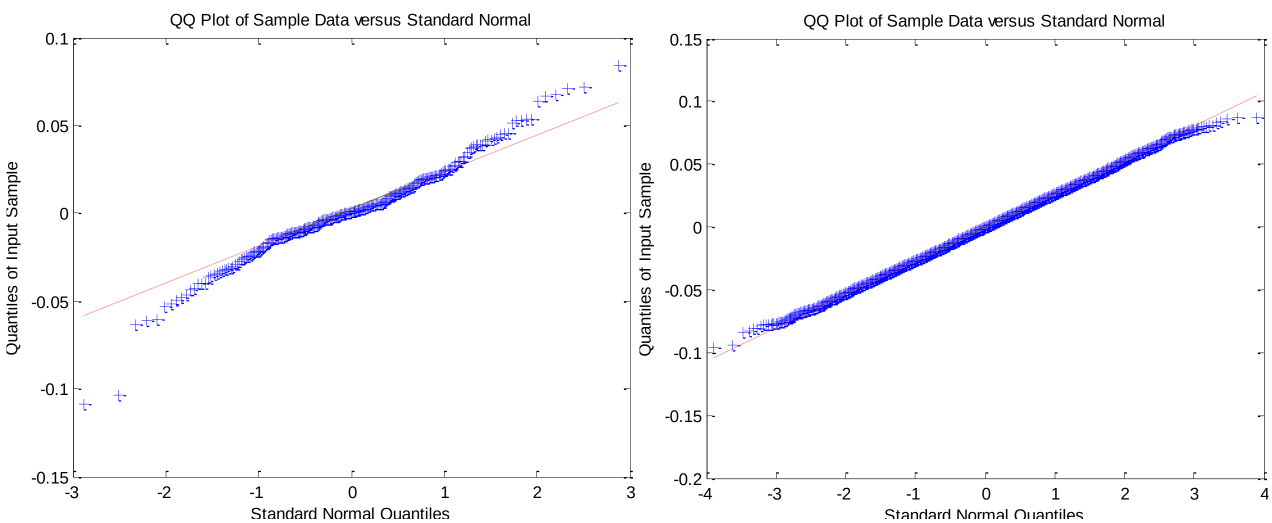


Figura 4. 3 QQ Plot (gráfica en papel Normal) de: **a)** rendimientos de gmodelo **b)** simulados (normal).

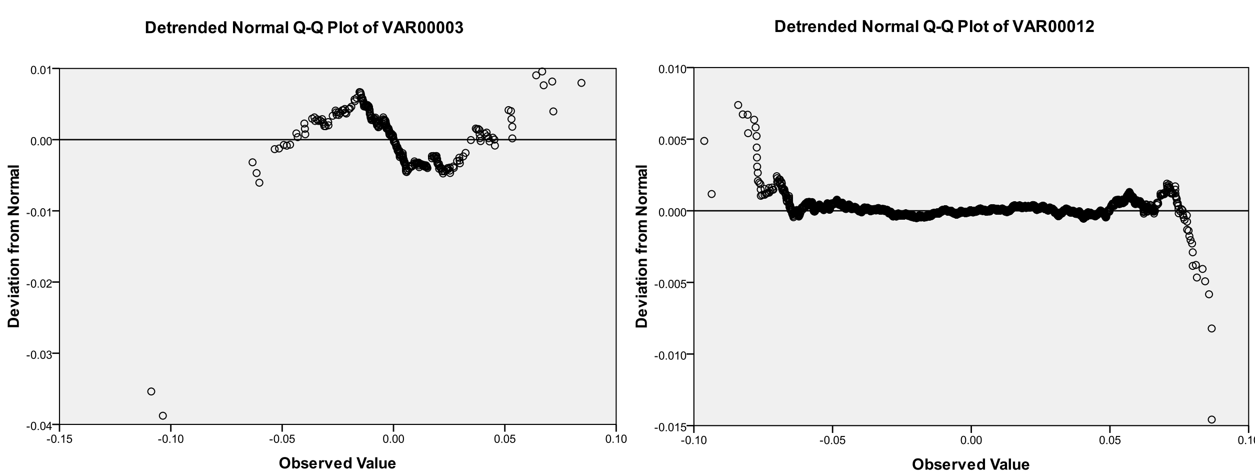


Figura 4. 4 Diferencias entre: **a)** rendimientos gmodelo y una Normal **b)** simulados y una Normal.

Finalmente, usaremos la prueba *Jarque-Bera*[90] para normalidad. Esta prueba consiste en contrastar las siguientes hipótesis:

$$H_0 = x_1, x_2, \dots, x_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \quad \text{v.s.} \quad H_1 = x_1, x_2, \dots, x_n \nsim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

La función `[H,p_value,stat]=jbtest(load('rendimientos.txt'))` de MATLAB permite realizar esta prueba, arrojando la hipótesis que se acepta, el *p-value* y el valor de la estadística, en ese orden. Estos son los resultados:

```
>> [H,p_value,stat]=jbtest(load('gmod_r.txt'))

H =

     1


p_value =

  1.3548e-009


stat =

   40.8392
```

```
>> [H,p_value,stat]=jbtest(load('sim_r.txt'))

H =

     0


p_value =

    0.1801


stat =

    3.4287
```

Figura 4. 5 *Jbtest* para: **a)** rendimientos de gmodelo **b)** simulados (normal)

Como podemos notar, la prueba para el caso de los rendimientos de Grupo Modelo acepta la hipótesis alternativa (H_1). Consistentemente el *p_value* es muy pequeño y la estadística es grande, es decir, que no se distribuyen normal.

Para el caso de la muestra simulada, sucede lo contrario. Se acepta la hipótesis nula (H_0) de normalidad.

Por lo tanto, los resultados que obtengamos solo son <u>estimadores</u> (valores **esperados)**, de los que evidentemente no podemos tener confianza al ciento por ciento, ya que además se verán afectados como ya mencionamos por un periodo de crisis que hizo que el mercado se comportara de manera anormal, haciendo que la realidad se separe aún más de las hipótesis del modelo.

[90] La prueba *Jarque-Bera* resulta ser la mejor para detectar normalidad, incluso más precisa que las pruebas de *Lilliefors* y *Kolmogorov-Smirnov*.

4.1.2 CONSTRUCCIÓN DEL PORTAFOLIO TEÓRICO

Hemos llegado a la parte final de este trabajo. En parte de forma empírica y, por otro lado, utilizando las herramientas que se estudiaron en los capítulos II y III, desarrollaremos la construcción de un portafolio.

Recordemos que para una mejor selección de activos se requiere de un extenso trabajo, tanto de análisis fundamental, como de análisis técnico y análisis chartista, ya que estos análisis permiten conocer el estado financiero de las empresas emisoras y las tendencias (entre otros) de sus valores, respectivamente.

Por otra parte, también se puede realizar un estudio de las acciones más activas o representativas de algún índice, como por ejemplo del IPC.

Esto mediante el ajuste de un modelo de regresión lineal múltiple, entre el índice como variable dependiente, y los valores que lo constituyen como variables explicativas.

De esta forma, pueden observarse aquellas acciones que tengan mayor peso en el modelo, es decir, aquellas cuyos coeficientes estandarizados β_i sean los más grandes. También se pueden obtener los intervalos de confianza para β_i (generalmente al 95% de confianza) y no considerar aquellas cuyo intervalo contenga al cero.

Alternativamente, se pueden ajustar modelos aplicando los métodos *backward* o *forward* para eliminar o ir agregando variables respectivamente, o la mezcla de ambos (*stepwise*) hasta encontrar el mejor modelo. Este será, entre muchos otros aspectos, aquel que tenga un coeficiente R^2 igual o muy próximo a 1, ya que esto significa que el porcentaje de la regresión explicada por el modelo ajustado es aproximadamente el 100%.

Estas propuestas se pueden realizar, por ejemplo, utilizando el paquete SPSS *Statistics*, mediante su función *analyze/regression/linear*:

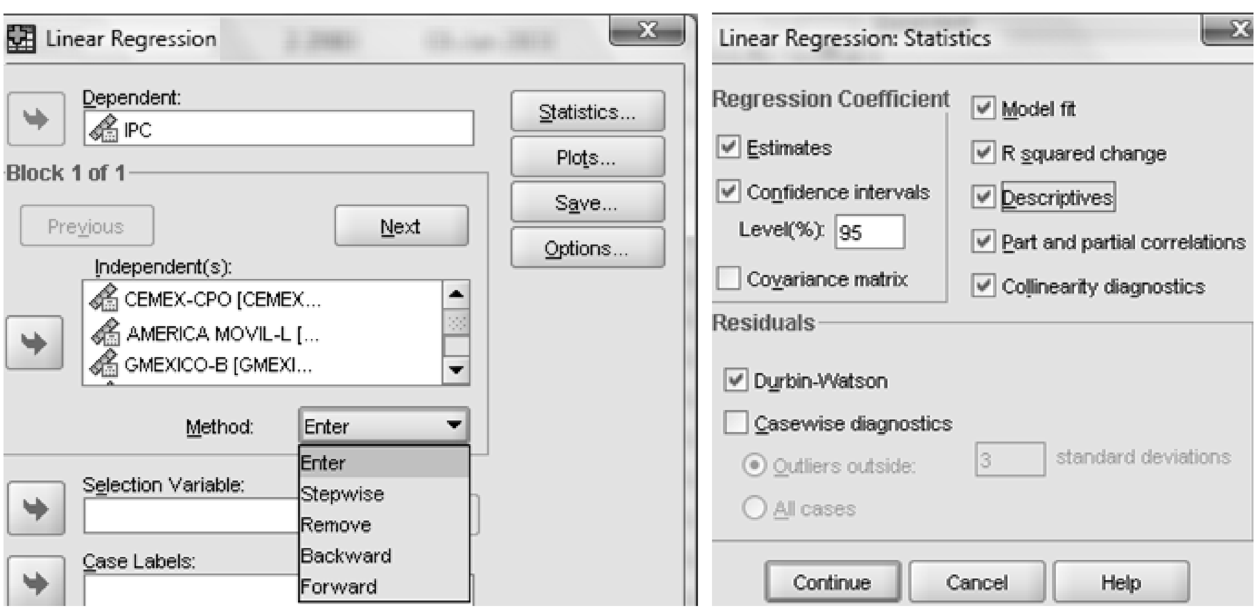


Figura 4. 6 Función de regresión lineal y estadísticas de SPSS *Statistics* 17.0

Así, determinar las componentes principales resulta relativamente fácil, ya que sólo debemos pasarle al programa (cuya interfaz es muy similar a Excel) las series históricas de las variables y ejecutar esta función.

Sin embargo, recordemos que la diversificación consiste en aumentar el número de títulos con objeto de que el riesgo disminuya y tienda hacia la covarianza media. Ya habíamos mencionado en los capítulos I y III, que en la práctica se considera suficiente incluir veinte títulos para este propósito (Fama 1976).

Aunado a esto, está la diversificación del modelo de Markowitz, que consiste en reforzar la reducción del riesgo incluyendo títulos correlacionados negativamente (seleccionando emisoras cuyos giros sean de sectores independientes) con el propósito de que la covarianza media sea lo más pequeña posible.

Sabemos sin embargo, que es imposible reducir el riesgo más allá del **riesgo sistemático** (riesgo de mercado o riesgo no diversificable).

Por lo anterior, construiremos el portafolio con 15 de las 17 acciones más activas en México, según *Yahoo Finance*, que están pre-cargadas en la macro. Esto ya que:

- Por un lado las emisoras son de sectores variados. Así, tratamos que haya acciones menos correlacionadas ($\mathrm{Cov}(x,y) \to 0,\ \rho \to 0$), diversificando parte del riesgo.
- Como ya mencionamos, estudios empíricos muestran que una cartera de veinte títulos escogidos aleatoriamente da lugar a una buena diversificación (Fama 1976).

  Con 17 acciones, el número de combinaciones posibles da lugar a $\sum_{n=2}^{17} \mathrm{Comb}(17,n)$=131,054 portafolios. Sin embargo, notamos que a partir de 15 acciones el riesgo (de la CMR por ejemplo) ya no disminuye significativamente, sin importar que Combinación (17,15) seleccionemos, posiblemente debido a que la dispersión de los puntos riesgo-rendimiento de los activos individuales está homogéneamente distribuida, haciendo que las diferencias sean mínimas (fig. 4.7).

Como activo libre de riesgo para la construcción de la cartera de mercado teórica (*M*) y la LMC, se considera CETES a 28 días, cuyo rendimiento también lo determina la macro para el periodo seleccionado, el cual resultó aproximadamente de 0.061=6.1% anual.

4.1.2.1 FUNCIONES DE UTILIDAD Y CURVAS DE INDIFERENCIA

Cabe destacar que una vez calculada la frontera eficiente, la selección de las carteras **óptimas** para diferentes perfiles de riesgo, se hace ‘propiamente’[91] a través del uso de funciones de utilidad y curvas de indiferencia.

[91] En lo personal, volvemos al punto de que resulta difícil modelar la utilidad o preferencia del inversionista mediante una función, aunado al hecho de que estas funciones (de utilidad) involucran solamente un par de parámetros, sin considerar otras variables que puedan influir en su decisión. Aun así, es necesario mencionarlas.

En el caso de las funciones de utilidad, la restricción general es que sea creciente y continua, es decir, que si $x > y \rightarrow U(x) > U(y)$. Fuera de esta restricción, la función de utilidad puede, al menos en teoría, tomar cualquier forma. En la práctica, sin embargo, son populares ciertos tipos de funciones estándar:

Exponencial:	$U(x) = -e^{-ax}$	$a > 0$. Sólo los valores relativos son importantes.
Logarítmica:	$U(x) = \ln(x)$	$x > 0$. Si $x > 0$ la utilidad es $-\infty$
Potencia:	$U(x) = bx^b$	$b \neq 0, b \leq 1$. Esta familia incluye la utilidad neutral al riesgo $U(x) = x,\ (b = 1)$
Cuadrática:	$U(x) = x - bx^2$	$b > 0$. Es creciente solamente para $x < 1/(2b)$

Para nuestro fin, conviene utilizar una función que esté definida por los parámetros involucrados que debe considerar el inversionista: rendimiento y riesgo, es decir:

$$U = f(\mathrm{E}(r_P), \sigma(r_P))$$

Si igualamos la función de utilidad U a una constante c, y despejamos el rendimiento esperado $\mathrm{E}(r_P)$, entonces éste último está ahora en función del riesgo del portafolio $\sigma(r_P)$. Si variamos el parámetro $\sigma(r_P)$, obtenemos una familia de curvas en el espacio riesgo-rendimiento que reciben el nombre de curvas de indiferencia, pues representan la misma utilidad para el inversionista:

$$c = f\big(\mathrm{E}(r_P), \sigma(r_P)\big) \qquad \rightarrow \mathrm{E}(r_P) = f^*(\sigma(r_P))$$

La cartera óptima sería el punto de tangencia entre la curva de indiferencia más alta de la familia propuesta para cada perfil riesgo, y la frontera eficiente ó la línea de mercado de capitales[92].

4.1.2.2 CUESTIONARIO DE AVERSIÓN AL RIESGO

En un ejercicio tal vez más práctico y real, se utiliza un cuestionario que sirve para determinar el cociente o grado de aversión al riesgo de un inversionista para asignarle una cartera adecuada (óptima) a su perfil.

La actitud de un inversionista hacia el riesgo y hacia el tipo de inversión se puede inferir de las respuestas a un cuestionario como el que se muestra a continuación:

[92] Para mayor información sobre funciones de utilidad y aversión al riesgo, se recomienda consultar el capítulo 9 de: Luenberger, D.G. (1998) *Investment Science*.

¿CUÁL ES SU COCIENTE DE RIESGO?

Este cuestionario pretende ser un punto de partida en las sesiones entre el cliente y un planeador financiero que le ayuda a evaluar su tolerancia al riesgo. No debe ser utilizado para tomar decisiones específicas de inversión. Si no ha experimentado una situación específica mencionada aquí, responda en base a la decisión que piensa que tomaría si se enfrentara a la situación hoy.

1. Es probable que mi salario y mis ingresos crezcan significativamente
   a) Totalmente en desacuerdo
   b) Desacuerdo
   c) Neutral
   d) De acuerdo
   e) Totalmente de acuerdo

2. Para invertir las contribuciones de mi plan de retiro, elegiría inversiones que ofrecen rendimientos fijos y estabilidad.
   a) Totalmente de acuerdo
   b) De acuerdo
   c) Neutral
   d) Desacuerdo
   e) Totalmente en desacuerdo

3. Considero que invertir en la volátil bolsa actual es como girar una ruleta en las Vegas: las probabilidades están en mi contra.
   a) Totalmente de acuerdo
   b) De acuerdo
   c) Neutral
   d) Desacuerdo
   e) Totalmente en desacuerdo

4. Si quisiera elegir una acción, buscaría compañías involucradas en el desarrollo de productos críticos para el futuro.
   a) Totalmente en desacuerdo
   b) Desacuerdo
   c) Neutral
   d) De acuerdo
   e) Totalmente de acuerdo

5. Una inversión para el fondo de educación universitaria de mis hijos, sería:
   a) Un certificado de depósito
   b) Valores respaldados por el gobierno o bonos.
   c) Bonos corporativos
   d) Fondos de inversión de renta variable
   e) Contratos de futuros

6. Número de personas cuyo bienestar financiero depende de mi:
   a) 4 ó más
   b) 3
   c) 2
   d) 1
   e) Sólo yo

7. Número aproximado de años restantes que espero para mi retiro:
   a) Actualmente retirado
   b) Menos de 5 años
   c) De 5 a 14 años
   d) De 15 a 24 años
   e) 25 o más años

8. Mi valor neto total (el valor de mis activos menos mis deudas) es:
   a) Menos de 15,000 USD
   b) 15,001-50000 USD
   c) 50001-150,000 USD
   d) 150,001-350,000 USD
   e) Más de 350,000 USD

9. El monto que he guardado para emergencias, tal como pérdida de mi trabajo o gastos médicos inesperados, es igual a:
   a) Un mes de salario o menos
   b) 2 a 6 meses de salario
   c) 7 meses a 1 año de salario
   d) 1 a 2 años de salario
   e) Más de 2 años de salario

10. Prefiero un fondo de inversión en acciones que comprar acciones individuales pues proporciona gestión profesional y diversificación.
    a) Totalmente de acuerdo
    b) De acuerdo
    c) Neutral
    d) Desacuerdo
    e) Totalmente en desacuerdo

11. Quiero y necesito reducir las deuda en mis finanzas personales.
    a) Totalmente de acuerdo
    b) De acuerdo
    c) Neutral
    d) Desacuerdo
    e) Totalmente en desacuerdo

12. En una inversión, estoy dispuesto a conformarme con rendimientos menores si están garantizados, que rendimientos altos sin certeza.
    a) Totalmente de acuerdo
    b) De acuerdo
    c) Neutral
    d) Desacuerdo
    e) Totalmente en desacuerdo

SISTEMA DE PUNTUACIÓN:

Sume 1 punto por cada 'a', 2 puntos por cada 'b', 3 puntos por cada 'c', 4 puntos por cada 'd' y 5 por cada 'e'.

46 ó +: Tiene el dinero y la inclinación para tomar riesgos. Incluya acciones en crecimiento, compañías que se ponen en marcha, productos básicos, bonos basura, asociaciones limitadas, así como opciones y bienes raíces.

41-45: Tolerancia al riesgo por encima del promedio. Tienes el tiempo y los ingresos para cubrir tus pérdidas. Mezcle opciones de alto y bajo riesgo.

36-40: Tolerancia promedio al riesgo pero no le gusta especular. Considere una mezcla de inversiones a largo plazo que tengan historial de rendimiento fuerte y constante. Acciones líderes, bonos corporativos de alto grado, fondos de inversión e inmuebles son buenas opciones.

31-35: Tolerancia por debajo del promedio, ya sea por la edad, ingresos o circunstancias familiares. Bonos de alta calidad, valores y cuentas de ahorro respaldadas por el gobierno.

30 y -: Sin tolerancia al riesgo. Busque inversiones respaldadas por el gobierno, tales como un banco y certificados de ahorro o depósito, Cetes, bonos, etc.

Fuente: *Fidelity Investments*, 1991. Desarrollado en asociación con Andrew Comrey, Ph.D.

4.1.3 RESULTADOS

Corriendo la macro para el periodo 15/10/2008 al 15/10/2009, estos son los resultados:

i	Nombre	Desv. est. anual	Rendimiento esperado anual	β_i (CAPM)	Clasificación
1	**CEMEX-CPO**	0.8788	0.6033	1.8239	Agresivo
2	**AMERICA MOVIL-L**	0.4670	0.3891	1.1140	Agresivo
3	**GMEXICO-B**	0.7110	1.2393	1.3494	Agresivo
4	**GRUPO CONTINENT**	0.5812	0.5368	0.2610	Defensivo
5	**TELMEXL**	0.3712	-0.1380	0.7270	Defensivo
6	**EMPRESAS ICA**	0.5603	0.5544	1.2032	Agresivo
7	**GRUPO FIN BANORTE O**	0.7045	0.6825	1.3088	Agresivo
8	**WAL-MART-V**	0.3831	0.3908	0.7441	Defensivo
9	**FOMENTO ECONOM UTS**	0.4552	0.4947	0.8673	Defensivo
10	**CONSORCIO ARA**	0.5738	0.5819	1.0088	Agresivo
11	**CITIGROUP**	1.4247	-1.2202	2.1253	Agresivo
12	**GRUPO TELEVISA-CPO**	0.4189	0.2045	0.8705	Defensivo
13	**GRUPO MODELO**	0.4209	0.3768	0.6884	Defensivo
14	**ALSEA**	0.6286	0.2751	1.0249	Agresivo
15	**CONTROLADORA CPO**	0.6882	1.2211	0.6997	Defensivo

Matriz de varianzas y covarianzas anualizada (se consideran 250 días hábiles por la BMV). Recuerde que $\mathrm{Cov}(i,i) = \mathrm{Var}(i)$

Cov(1,i)	Cov(2,i)	Cov(3,i)	Cov(4,i)	Cov(5,i)	Cov(6,i)	Cov(7,i)	Cov(8,i)	Cov(9,i)	Cov(10,i)	Cov(11,i)	Cov(12,i)	Cov(13,i)	Cov(14,i)	Cov(15,i)
0.7723	0.2244	0.2975	0.0480	0.1611	0.2826	0.3285	0.1194	0.1759	0.1905	0.5785	0.1884	0.1233	0.2102	0.1616
0.2244	0.2181	0.1611	0.0465	0.0987	0.1696	0.1633	0.0928	0.1299	0.1406	0.2505	0.1183	0.1047	0.1235	0.0781
0.2975	0.1611	0.5055	0.0596	0.1166	0.2194	0.2122	0.1214	0.1205	0.1864	0.4010	0.1212	0.1315	0.1384	0.1147
0.0480	0.0465	0.0596	0.3378	0.0227	0.0476	0.0485	0.0211	0.0287	0.0199	0.0708	0.0308	0.0139	0.0340	0.0454
0.1611	0.0987	0.1166	0.0227	0.1378	0.1154	0.1006	0.0446	0.0853	0.0873	0.2055	0.0776	0.0583	0.0849	0.0621
0.2826	0.1696	0.2194	0.0476	0.1154	0.3139	0.2171	0.0922	0.1353	0.1512	0.3257	0.1231	0.1057	0.1549	0.1237
0.3285	0.1633	0.2122	0.0485	0.1006	0.2171	0.4964	0.1110	0.1537	0.1560	0.4051	0.1387	0.1077	0.2163	0.1443
0.1194	0.0928	0.1214	0.0211	0.0446	0.0922	0.1110	0.1468	0.0642	0.0990	0.1536	0.0762	0.0787	0.0822	0.0514
0.1759	0.1299	0.1205	0.0287	0.0853	0.1353	0.1537	0.0642	0.2072	0.0973	0.2114	0.1090	0.0977	0.1055	0.0803
0.1905	0.1406	0.1864	0.0199	0.0873	0.1512	0.1560	0.0990	0.0973	0.3293	0.2235	0.0949	0.1038	0.1590	0.1032
0.5785	0.2505	0.4010	0.0708	0.2055	0.3257	0.4051	0.1536	0.2114	0.2235	2.0298	0.1693	0.1454	0.2963	0.2889
0.1884	0.1183	0.1212	0.0308	0.0776	0.1231	0.1387	0.0762	0.1090	0.0949	0.1693	0.1755	0.0633	0.1086	0.0785
0.1233	0.1047	0.1315	0.0139	0.0583	0.1057	0.1077	0.0787	0.0977	0.1038	0.1454	0.0633	0.1772	0.0959	0.0471
0.2102	0.1235	0.1384	0.0340	0.0849	0.1549	0.2163	0.0822	0.1055	0.1590	0.2963	0.1086	0.0959	0.3951	0.0769
0.1616	0.0781	0.1147	0.0454	0.0621	0.1237	0.1443	0.0514	0.0803	0.1032	0.2889	0.0785	0.0471	0.0769	0.4736

A continuación se muestran porcentajes óptimos, varianza, desviación estándar y rendimiento esperado anuales, para la Cartera de Mínimo Riesgo (CMR), la Cartera de Mercado (M), una muestra de 100 carteras de la frontera eficiente (con incrementos de 5% a partir del rendimiento de la CMR), y 2 puntos de la línea de mercado de capitales.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9	W_{10}	W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	ΣW_i	Var	Desv	Rend. esp.
CMR	-0.052	-0.084	-0.053	0.156	0.384	-0.041	-0.022	0.292	0.055	0.002	-0.030	0.124	0.177	0.024	0.068	1	0.065	0.254	0.224
M	0.246	0.223	1.204	0.348	-2.051	0.094	0.151	0.266	1.067	0.132	-0.647	-0.918	-0.238	0.083	1.040	1	1.900	1.379	4.866
LMC																		0.000 1.879	0.061 6.609
E(CMR)+1*.05	-0.049	-0.081	-0.039	0.158	0.358	-0.039	-0.020	0.292	0.066	0.003	-0.037	0.112	0.172	0.025	0.078	1	0.065	0.255	0.274
E(CMR)+2*.05	-0.045	-0.077	-0.026	0.160	0.332	-0.038	-0.018	0.292	0.077	0.005	-0.044	0.101	0.168	0.025	0.089	1	0.065	0.256	0.324
E(CMR)+3*.05	-0.042	-0.074	-0.012	0.162	0.306	-0.036	-0.017	0.292	0.087	0.006	-0.050	0.090	0.163	0.026	0.099	1	0.067	0.258	0.374
E(CMR)+4*.05	-0.039	-0.071	0.002	0.164	0.279	-0.035	-0.015	0.291	0.098	0.007	-0.057	0.079	0.159	0.027	0.110	1	0.068	0.261	0.424
E(CMR)+5*.05	-0.036	-0.067	0.015	0.166	0.253	-0.033	-0.013	0.291	0.109	0.009	-0.063	0.067	0.154	0.027	0.120	1	0.070	0.264	0.474
E(CMR)+6*.05	-0.033	-0.064	0.029	0.168	0.227	-0.032	-0.011	0.291	0.120	0.010	-0.070	0.056	0.150	0.028	0.131	1	0.072	0.269	0.524
E(CMR)+7*.05	-0.029	-0.061	0.042	0.170	0.201	-0.030	-0.009	0.290	0.131	0.012	-0.077	0.045	0.145	0.029	0.141	1	0.075	0.274	0.574
E(CMR)+8*.05	-0.026	-0.057	0.056	0.172	0.174	-0.029	-0.007	0.290	0.142	0.013	-0.083	0.034	0.141	0.029	0.151	1	0.078	0.280	0.624
E(CMR)+9*.05	-0.023	-0.054	0.069	0.174	0.148	-0.028	-0.005	0.290	0.153	0.014	-0.090	0.023	0.137	0.030	0.162	1	0.082	0.286	0.674
E(CMR)+10*.05	-0.020	-0.051	0.083	0.177	0.122	-0.026	-0.004	0.289	0.164	0.016	-0.097	0.011	0.132	0.031	0.172	1	0.086	0.293	0.724
E(CMR)+11*.05	-0.017	-0.047	0.096	0.179	0.096	-0.025	-0.002	0.289	0.175	0.017	-0.103	0.000	0.128	0.031	0.183	1	0.090	0.301	0.774
E(CMR)+12*.05	-0.013	-0.044	0.110	0.181	0.070	-0.023	0.000	0.289	0.186	0.019	-0.110	-0.011	0.123	0.032	0.193	1	0.095	0.309	0.824
E(CMR)+13*.05	-0.010	-0.041	0.123	0.183	0.043	-0.022	0.002	0.289	0.197	0.020	-0.117	-0.022	0.119	0.032	0.204	1	0.101	0.317	0.874
E(CMR)+14*.05	-0.007	-0.037	0.137	0.185	0.017	-0.020	0.004	0.288	0.207	0.021	-0.123	-0.033	0.114	0.033	0.214	1	0.106	0.326	0.924
E(CMR)+15*.05	-0.004	-0.034	0.150	0.187	-0.009	-0.019	0.006	0.288	0.218	0.023	-0.130	-0.045	0.110	0.034	0.225	1	0.113	0.335	0.974
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
E(CMR)+92*.05	0.244	0.221	1.192	0.346	-2.029	0.093	0.150	0.266	1.058	0.131	-0.642	-0.908	-0.234	0.082	1.031	1	1.868	1.367	4.824
E(CMR)+93*.05	0.247	0.224	1.206	0.348	-2.055	0.094	0.152	0.266	1.069	0.132	-0.648	-0.920	-0.239	0.083	1.042	1	1.907	1.381	4.874
E(CMR)+94*.05	0.250	0.227	1.220	0.350	-2.081	0.095	0.154	0.265	1.080	0.134	-0.655	-0.931	-0.243	0.084	1.052	1	1.947	1.395	4.924
E(CMR)+95*.05	0.253	0.231	1.233	0.352	-2.108	0.097	0.155	0.265	1.090	0.135	-0.662	-0.942	-0.248	0.084	1.063	1	1.987	1.410	4.974
E(CMR)+96*.05	0.256	0.234	1.247	0.354	-2.134	0.098	0.157	0.265	1.101	0.137	-0.668	-0.953	-0.252	0.085	1.073	1	2.028	1.424	5.024
E(CMR)+97*.05	0.260	0.237	1.260	0.356	-2.160	0.100	0.159	0.264	1.112	0.138	-0.675	-0.965	-0.256	0.086	1.084	1	2.069	1.438	5.074
E(CMR)+98*.05	0.263	0.241	1.274	0.358	-2.186	0.101	0.161	0.264	1.123	0.139	-0.682	-0.976	-0.261	0.086	1.094	1	2.110	1.453	5.124
E(CMR)+99*.05	0.266	0.244	1.287	0.361	-2.213	0.103	0.163	0.264	1.134	0.141	-0.688	-0.987	-0.265	0.087	1.105	1	2.152	1.467	5.174
E(CMR)+100*.05	0.269	0.247	1.301	0.363	-2.239	0.104	0.165	0.264	1.145	0.142	-0.695	-0.998	-0.270	0.088	1.115	1	2.195	1.481	5.224

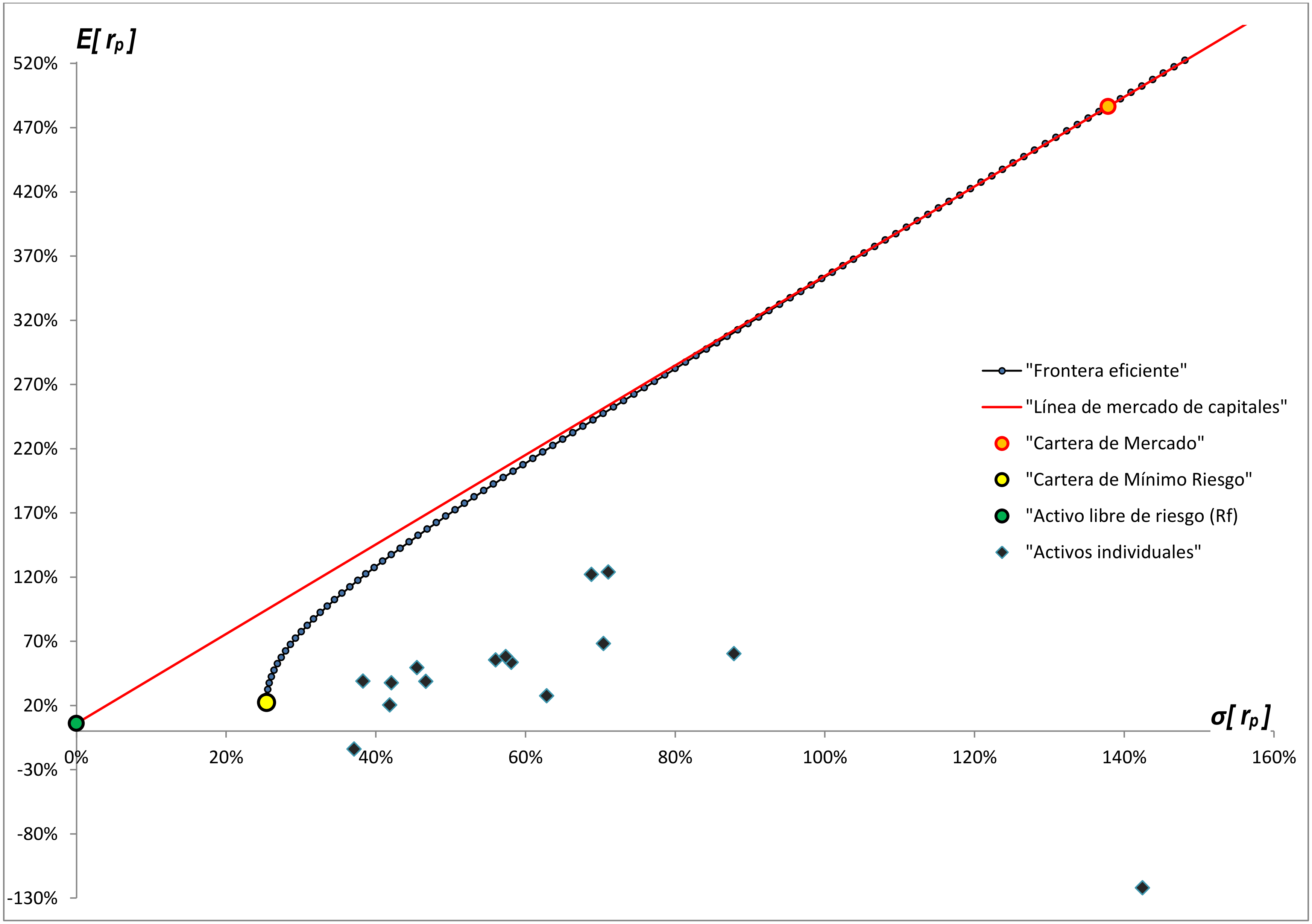


Figura 4. 7 Gráfica riesgo-rendimiento para la CMR, 100 carteras eficientes, *M*, LMC, activo libre de riesgo y activos individuales (acciones)

Una vez mencionados los argumentos de la sección 4.1.2.1, nosotros aplicaremos una metodología diferente. Consideraremos 3 perfiles: moderado, medio y conservador.

Para determinar un par carteras óptimas para cada uno de ellos, una sobre la frontera eficiente y otra sobre la línea de mercado de capitales (LMC), se propone lo siguiente:

- Al inversionista moderado se le asigna la cartera de mínimo riesgo (CMR), cuyo riesgo y rendimiento ya tenemos en la tabla de resultados. Éstos son (0.254,0.224) respectivamente.
  Y, para ese mismo nivel de riesgo, también se tiene otra cartera sobre la LMC con un rendimiento mayor.
- Para los inversionistas medio y agresivo, se propone que toleran incrementos en riesgo a partir de la CMR aproximadamente de 10 y 20% respectivamente, y tales carteras también están en la tabla de resultados.
  Nuevamente se tienen otro par de carteras sobre la LMC para esos niveles de riesgo.

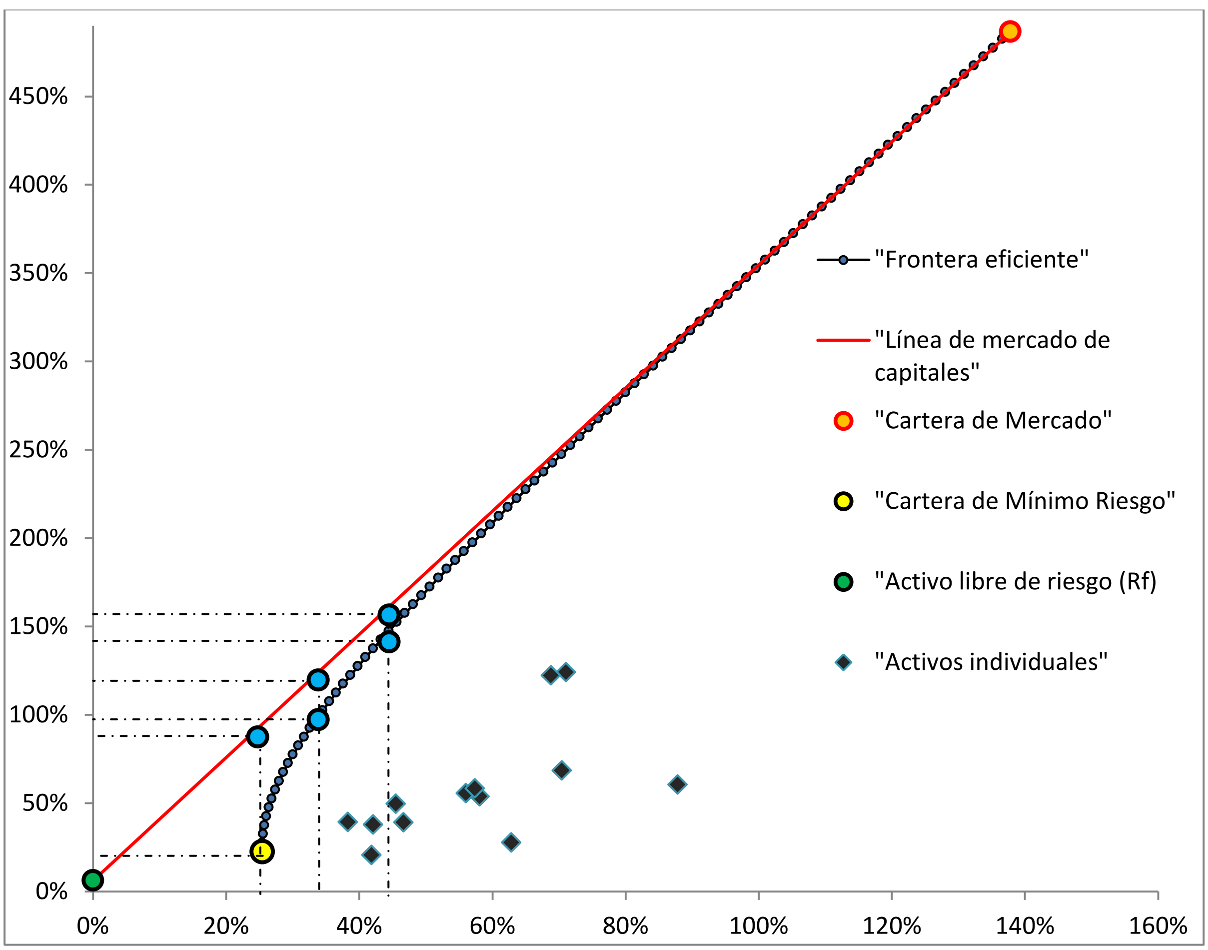


Figura 4. 8 Dos carteras propuestas para tres perfiles de riesgo (moderado, medio y agresivo).

Si suponemos que los inversionistas moderado, medio y agresivo asignan un presupuesto $C_0 = \$1{,}000{,}000.00$ a sus portafolios y $T = 1$ año, entonces:

i	Precio por acción 15/10/09	Moderado			Medio			Agresivo		
		w_i	# de acciones	Posición	w_i	# de acciones	Posición	w_i	# de acciones	Posición
1 CEMEX	$18.05	-0.052	-2872	-$51,840	0.003	153	$2,762	0.032	1754	$31,660
2 AME MOVIL	$31.82	-0.084	-2634	-$83,814	-0.028	-865	-$27,524	0.002	71	$2,259
3 GMEXICO-B	$29.15	-0.053	-1805	-$52,616	0.177	6087	$177,436	0.299	10266	$299,254
4 G CONTIN	$28.20	0.156	5526	$155,833	0.191	6773	$190,999	0.210	7433	$209,611
5 TELMEXL	$11.44	0.384	33593	$384,304	-0.062	-5388	-$61,639	-0.298	-26025	-$297,726
6 EMP. ICA	$35.40	-0.041	-1145	-$40,533	-0.016	-450	-$15,930	-0.003	-82	-$2,903
7 GF BANORTE	$45.50	-0.022	-488	-$22,204	0.010	211	$9,601	0.026	581	$26,436
8 WAL-MART	$48.44	0.292	6036	$292,384	0.287	5935	$287,491	0.285	5881	$284,876
9 FOM. ECONOM	$58.45	0.055	937	$54,768	0.240	4108	$240,113	0.338	5787	$338,250
10 CONS. ARA	$9.56	0.002	181	$1,730	0.026	2678	$25,602	0.038	4000	$38,240
11 CITIGROUP	$61.96	-0.030	-488	-$30,236	-0.143	-2312	-$143,252	-0.203	-3277	-$203,043
12 G TELEVISA	$50.70	0.124	2437	$123,556	-0.067	-1324	-$67,127	-0.168	-3316	-$168,121
13 G MODELO	$59.50	0.177	2970	$176,715	0.101	1694	$100,793	0.061	1018	$60,571
14 ALSEA	$9.24	0.024	2621	$24,218	0.035	3785	$34,973	0.041	4402	$40,674
15 CTRLADORA	$10.87	0.068	6229	$67,709	0.246	22608	$245,749	0.340	31279	$340,003
SUMA		1	51098	$999,974	1	43693	$1,000,047	1	39772	$1,000,041
DESV. ESTÁNDAR (anual)		**0.254**			**0.254+0.1**			**0.254+0.2**		
RENDIMIENT ESP. (anual)		**δ=0.224**			**δ=1.074**			**δ=1.524**		
MONTO ESPERADO		**$1,251,493.96**			**$2,928,053.91**			**$4,592,102.62**		

El monto esperado bajo una tasa de rendimiento esperado continua es: $\boxed{M = C_1 = C_0 e^{\delta T}}$

El número de acciones i se determina multiplicando el presupuesto por cada porcentaje, y dividiéndolo entre el precio por acción, redondeado a cero decimales, es decir, $(C_0 * w_i)/P_i$

La posición se determina multiplicando el número de acciones que adquirimos por su precio unitario (por tanto, la suma debe ser aproximadamente C_0).

El monto real C_1, sería la suma de la columna 'posición' actualizada a una nueva fecha, la cual se obtendría multiplicando el número de acciones adquiridas originalmente por su precio unitario actualizado. Por tanto, el rendimiento real sería como ya sabemos:

$$r = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{C_1 - C_0}{C_0}$$

Por ejemplo, haremos la revisión de las carteras anteriores al cabo de dos meses (bimestre), es decir, al 15 de diciembre de 2009.

i	Precio por acción 15/10/2009	Precio por acción 15/12/2009	Moderado			Medio			Agresivo		
			w_i	# de acciones	Posición	w_i	# de acciones	Posición	w_i	# de acciones	Posición
1 CEMEX	$18.05	$14.52	-0.052	-2872	-$41,701	0.003	153	$2,222	0.032	1754	$25,468
2 AME MOVIL	$31.82	$30.35	-0.084	-2634	-$79,942	-0.028	-865	-$26,253	0.002	71	$2,155
3 GMEXICO-B	$29.15	$30.00	-0.053	-1805	-$54,150	0.177	6087	$182,610	0.299	10266	$307,980
4 G CONTIN	$28.20	$32.00	0.156	5526	$176,832	0.191	6773	$216,736	0.210	7433	$237,856
5 TELMEXL	$11.44	$11.15	0.384	33593	$374,562	-0.062	-5388	-$60,076	-0.298	-26025	-$290,179
6 EMP. ICA	$35.40	$31.00	-0.041	-1145	-$35,495	-0.016	-450	-$13,950	-0.003	-82	-$2,542
7 GF BANORTE	$45.50	$45.75	-0.022	-488	-$22,326	0.010	211	$9,653	0.026	581	$26,581
8 WAL-MART	$48.44	$56.20	0.292	6036	$339,223	0.287	5935	$333,547	0.285	5881	$330,512
9 FOM. ECONOM	$58.45	$61.01	0.055	937	$57,166	0.240	4108	$250,629	0.338	5787	$353,065
10 CONS. ARA	$9.56	$9.22	0.002	181	$1,669	0.026	2678	$24,691	0.038	4000	$36,880
11 CITIGROUP	$61.96	$45.49	-0.030	-488	-$22,199	-0.143	-2312	-$105,173	-0.203	-3277	-$149,071
12 G TELEVISA	$50.70	$53.86	0.124	2437	$131,257	-0.067	-1324	-$71,311	-0.168	-3316	-$178,600
13 G MODELO	$59.50	$72.80	0.177	2970	$216,216	0.101	1694	$123,323	0.061	1018	$74,110
14 ALSEA	$9.24	$9.72	0.024	2621	$25,476	0.035	3785	$36,790	0.041	4402	$42,787
15 CTRLADORA	$10.87	$11.00	0.068	6229	$68,519	0.246	22608	$248,688	0.340	31279	$344,069
SUMA			1	51098	$1,135,107	1	43693	$1,152,126	1	39772	$1,161,071

Como vemos, para las tres carteras hemos ganado posición (rendimientos positivos):

	Moderado	Medio	Agresivo
C_0	$1,000,000	$1,000,000	$1,000,000
C_1	$1,135,107	$1,152,126	$1,161,071
Rendimiento real BIMESTRAL	13.51%	15.21%	16.1%

Notemos además que a excepción de las acciones 3,5,7 y 10, todas las demás se comportaron como esperábamos según el signo de su porcentaje de asignación, es decir, cuando $w_i > 0$ con rendimientos positivos ($P_1 > P_0$), y cuando $w_i < 0$ con rendimientos negativos ($P_1 < P_0$). En este caso, recordemos que un porcentaje negativo significa una venta en corto, por lo que si el precio del activo bajó, obtuvimos un movimiento a favor.

Finalmente, encontraremos los porcentajes de las 3 carteras sobre la LMC con el mismo nivel de riesgo que hemos propuesto para cada perfil, pero que tienen rendimiento esperado mayor.

Recordemos que si nos encontramos sobre la LMC, entonces se invierte un porcentaje w_1 en el activo libre de riesgo (r_f) y un porcentaje $w_2 = 1 - w_1$ en la cartera de mercado (M).

Por lo tanto, debemos parametrizar el segmento de carteras acreedoras $\overline{r_f M}$.

Las coordenadas de los puntos extremos de este segmento son $(0, r_f)$[73] y $(\sigma_M, E(r_M))$.

Entonces podemos decir que para carteras del segmento acreedor de la LMC:

$$E[r_P] = f(w_1) = w_1 r_f + (1 - w_1)E[r_M], \qquad w_1 \in (0,1)$$

Despejando w_1 tenemos:

$$w_1 = \frac{E[r_P] - E[r_M]}{r_f - E[r_M]}$$

donde:

$E[r_M]$ es el rendimiento esperado de la cartera de mercado que obtenemos de la tabla de resultados.

$E[r_P]$ es el correspondiente valor de rendimiento esperado sobre la LMC para cada nivel de riesgo σ que propusimos, y que podemos obtenener con la ecuación de la LMC:

$$E[r_p] = E[r_f] + \frac{E[r_M] - E[r_f]}{\sigma(r_M)}\sigma$$

Por ejemplo, la CMR del inversionista moderado tiene una desviación estándar
σ= 0.254

Aplicando la ecuación anterior, obtenemos que el rendimiento esperado para ese nivel de riesgo sobre la LMC es: 0.947=94.7%

Por lo tanto, el inversionista moderado invierte w_1=0.8156 en el activo libre de riesgo y w_2=0.1844 en la cartera de mercado teórica M. Análogamente para los otros dos inversionistas, tenemos los siguientes resultados:

[73] Recuerde que $E[r_f] = r_f$

	Moderado	Medio	Agresivo
W1: CETES a 28 días	0.82	0.74	0.67
W2: Cartera de Mercado (*M*)	0.18	0.26	0.33
Desviación Estándar (anual)	**0.254**	**0.354**	**0.454**
Rendimiento Esperado (anual)	0.95	1.30	1.65
MONTO ESPERADO	**2,577,851.67**	**3,665,920.07**	**5,222,491.01**

Podemos aplicar el uso de derivados con el propósito de cobertura ante movimientos no esperados de los precios. Estos temas ya los hemos mencionado en las secciones 2.1.1.3 y 2.3.1.

Por ejemplo, la compra de una opción de venta *put* para cubrirnos de una baja en el precio de cierta acción.

Así, si el precio de la acción baja, nosotros ejercemos el derecho de venderla al precio de ejercicio K.

En estos casos, al costo o precio de la acción se sumaría el pago de la prima o valor de la opción, reduciendo el número de acciones por adquirir y, por lo tanto, la posición. Pero si al momento de revisar la cartera en una fecha posterior se ejerce la opción, entonces la nueva posición se calcula con el precio inicial de la acción y no el actualizado.

Las características de dicha opción serían un precio $S(0) = K$ (precio de la acción hoy). Así podemos calcular su valor por alguno de los métodos que estudiamos en el capítulo II.

Otra posibilidad es utilizar la cobertura delta y el uso de opciones sintéticas.

4.2 EL PORTAFOLIO ‘ESTÁNDAR’

Seleccionamos como institución financiera a Bancomer. La siguiente información y pantallas, están tomadas de: http://www.bancomer.com.mx/

Accedemos a la sección: **Patrimonial**/**Fondos de Inversión**/**Fondos**

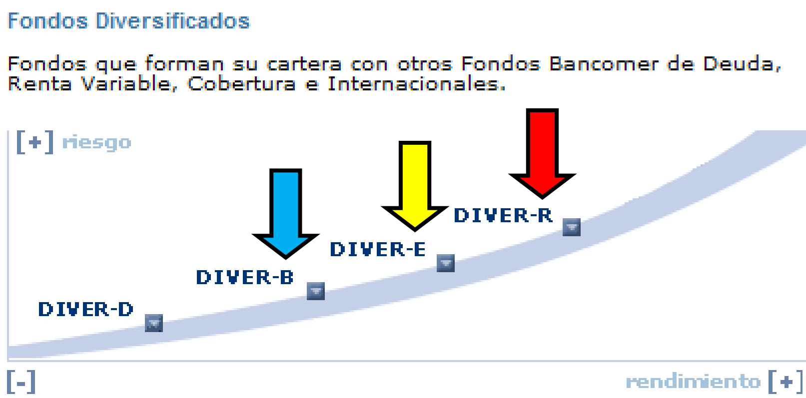
Fondos Bancomer pone a su alcance un mecanismo financiero práctico, eficiente y seguro para invertir sus recursos, a través del cual usted tiene acceso a múltiples beneficios que de manera individual nunca podría obtener. Beneficios:

- Muy alto poder de negociación por su dinero, ya que suma sus recursos a los de un gran número de inversionistas.
- Accede a estrategias de inversión diseñadas por profesionales en la materia, dedicados por completo a esta actividad y al cuidado de su dinero.
- Optimiza el desempeño de sus inversiones a través de una distribución en diferentes instrumentos.
- Mantiene la disponibilidad de sus recursos.
- Elimina cargas administrativas como vencimientos y renovaciones.
- Experiencia de Gestión Internacional, mundialmente probada por Grupo BBVA en más de 35 países.
- La más completa familia de fondos de inversión que le permite establecer una estrategia de diversificación acorde a sus objetivos.
- Amplia gama de servicios financieros que pone a su disposición el Grupo Financiero BBVA Bancomer, que mejor se adapten a sus necesidades.

Al dar clíc en **fondos**, accedemos a los fondos diversificados.

4.2.1 DESCRIPCIÓN Y COMPOSICIÓN DE LAS CARTERAS ESTÁNDAR

En este punto nos encontramos en cualquiera de estas ligas:
http://www.bancomer.com.mx/patrimonial/patrimonial.asp?mainf=patri_fonin.html
http://www.bancomer.com.mx/Asset/asset.asp?mainf=asset_patri_famfo.html
y la pantalla es la siguiente.



Dando clic a las claves de los portafolios 'DIVER-B', 'DIVER-E' Y 'DIVER-R' accedemos a la descripción y características (cartera y prospecto de información/rúbrica del cliente) de cada uno.

Clave	Nombre	Riesgo	Horizonte	Descripción
DIVER-B	**Fondo diversificado bienestar**	Moderado	Largo Plazo	Fondo que ofrece al inversionista una cartera compuesta por Fondos Bancomer que optimizan su rendimiento invirtiendo una pequeña parte de la cartera en fondos de renta variable.
DIVER-E	Fondo diversificado estabilidad	Medio	Largo Plazo	Para quien busca incrementar su patrimonio mediante un plan de inversión con riesgo medio.
DIVER-R	Fondo diversificado rentabilidad	Agresivo	Largo Plazo	Fondo que ofrece al inversionista una cartera compuesta por Fondos Bancomer para quien busca hacer crecer su patrimonio a través de una estrategia de inversión agresiva.

Finalmente, dentro de las características encontramos la composición de cada una de las carteras anteriores:

DIVER-B FONDO BBVA BANCOMER BIENESTAR, S.A. DE C.V.Sociedad de Inversion de Renta Variable

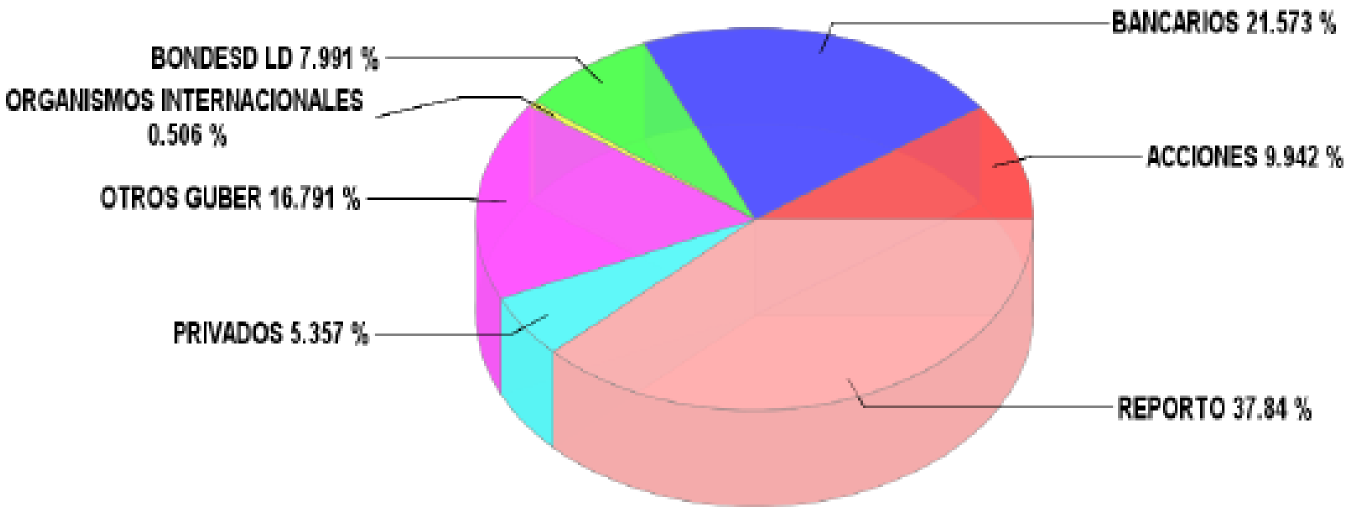
CARTERA DE VALORES AL 10 DICIEMBRE, 2009

Tipo Valor	Emisora	Serie	Calif. / Bursatilidad	Valor Razonable	%
VALORES EN DIRECTO					
EMPRESAS DE SERVICIOS					
51	BBVADOL	F	AA/5	78,750,729.41	7.51
51	BMERHOR	F	AA/3	5,032.78	.00
51	BMERLIQ	F	AAA/1	808,296,157.50	77.08
51	BMERLP	F	AA/6	1,372.64	.00
51	BMERPZO	F	AA/4	25,393,127.55	2.42
51	B+REAL	F	AA/6	31,112,511.94	2.97
52	BBVABRI	F	NA	773.57	.00
52	BMERIND	F	NA	70,325,575.26	6.71
52	BMERPAT	F	NA	34,750,033.66	3.31
TOTAL DE INVERSION EN VALORES				1,048,635,314.31	100.00

CLASIFICACIÓN	CALIFICACIÓN
ACCSEC	**NA**

VaR Promedio última semana	Límite de VaR
1.140000%	**19.500%**

Composición de las Carteras de los Fondos Origen



DIVER-E FONDO BBVA BANCOMER ESTABILIDAD, S.A. DE C.V.Sociedad de Inversion de Renta Variable

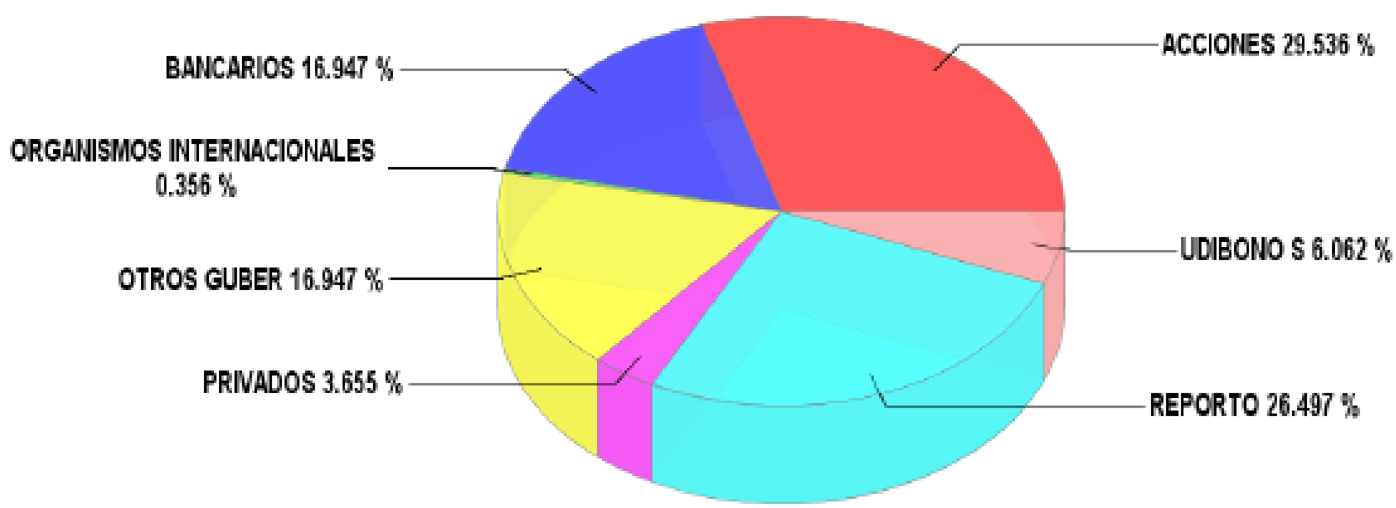
CARTERA DE VALORES AL 10 DICIEMBRE, 2009

Tipo Valor	Emisora	Serie	Calif. / Bursatilidad	Valor Razonable	%
VALORES EN DIRECTO					
EMPRESAS DE SERVICIOS					
51	BBVADOL	F	AA/5	60,951,464.77	7.41
51	BMERHOR	F	AA/3	5,032.78	.00
51	BMERLIQ	F	AAA/1	415,378,593.72	50.47
51	BMERLP	F	AA/6	7,641,787.57	.93
51	BMERPZO	F	AA/4	38,087,746.88	4.63
51	B+REAL	F	AA/6	55,566,619.21	6.75
52	BBVABRI	F	NA	773.57	.00
52	BMERIND	F	NA	106,870,224.92	12.98
52	BMERPAT	F	NA	138,535,233.45	16.83
TOTAL DE INVERSION EN VALORES				823,037,476.87	100.00

CLASIFICACIÓN	CALIFICACIÓN
ACCSEC	NA

VaR Promedio última semana	Límite de VaR
4.790000%	19.500%

Composición de las Carteras de los Fondos Origen



DIVER-R FONDO BBVA BANCOMER RENTABILIDAD, S.A. DE C.V. SOCIEDAD DE INVERSION DE RENTA VARIABLE

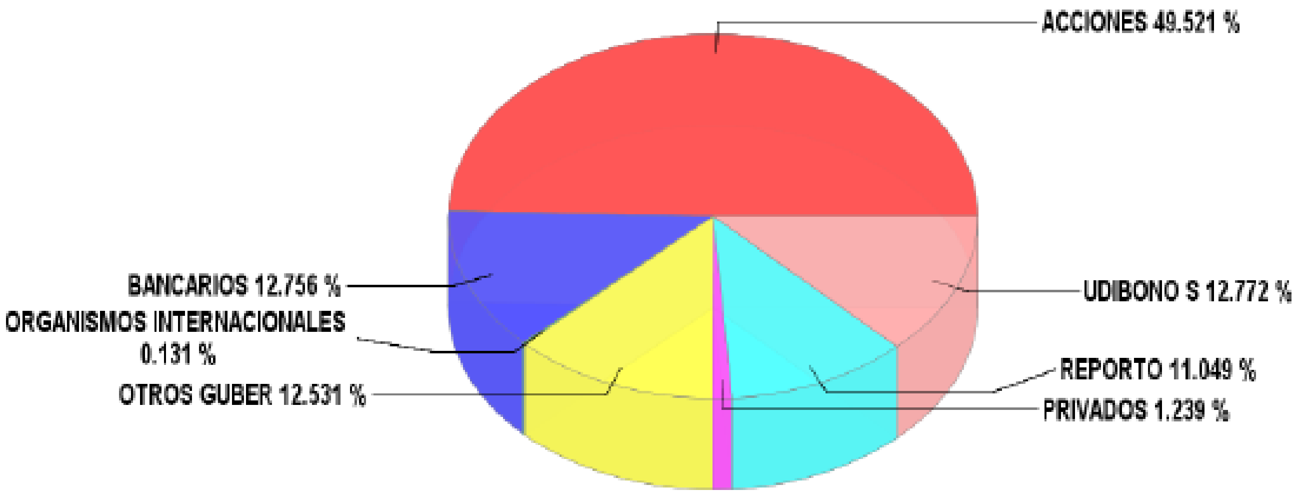
CARTERA DE VALORES AL 10 DICIEMBRE, 2009

Tipo Valor	Emisora	Serie	Calif. / Bursatilidad	Valor Razonable	%
VALORES EN DIRECTO					
EMPRESAS DE SERVICIOS					
51	BBVADOL	F	AA/5	106,782,999.19	9.97
51	BMERLIQ	F	AAA/1	136,491,900.23	12.75
51	BMERLP	F	AA/6	10,690,623.62	1.00
51	BMERPZO	F	AA/4	93,840,190.10	8.76
51	B+REAL	F	AA/6	189,624,440.98	17.71
52	BMERIND	F	NA	533,209,863.78	49.80
TOTAL DE INVERSION EN VALORES				1,070,640,017.90	100.00

CLASIFICACIÓN	CALIFICACIÓN
ACCSEC	NA

VaR Promedio última semana	Límite de VaR
8.250000%	19.500%

Composición de las Carteras de los Fondos Origen



Valor en Riesgo (VaR). El método de VaR utilizado es el histórico, para su cálculo se utilizan las matrices de escenarios proporcionadas por el Proveedor Oficial de Precios. La matriz incluye 500 escenarios de pérdida para cada uno de los instrumentos en el mercado. Se valúa el portafolio con cada uno de los escenarios y se ordenan los resultados de menor a mayor obteniendo el 13avo peor el cual corresponde al VaR al 95% de confianza. El VaR que se presenta es el promedio simple de la última semana

El límite de VaR (*Value at Risk* - Valor en riesgo) = 19.5%, lo que significa que la máxima pérdida esperada en un día para el fondo es de $1,950 por cada $10,000 invertidos.

4.2.2 OTROS DATOS IMPORTANTES[74]

Metodología de Optimización de Portafolios:

- Análisis macro económico, sectorial y cuantitativo para lograr la selección de activos por tipo de activo, región o país.
- Análisis fundamental con el cual se formulan las expectativas de rendimiento de cada uno de los activos.
- Con la información resultante de los análisis anteriormente descritos, y ajustándose a los lineamientos establecidos en el régimen de inversión, considerando además la visión de gestión acerca de la evolución futura de los mercados financieros (rentabilidad esperada y riesgo), se realizan las inversiones del portafolio. En algunos momentos de mercado la cartera óptima sería una que se aleje del nivel máximo de VaR hacia inversiones conservadoras.

La selección de activos objeto de inversión, tanto nacionales como internacionales se basa en los siguientes elementos:

1. Calificación crediticia del emisor.
2. Plazo de las inversiones.
3. Riesgo de tasas de interés en función de sus revisiones periódicas y al vencimiento del activo objeto de inversión.
4. Índice de operatividad, es decir, qué tan fácil es comprarlo o venderlo ante un cambio en el entorno.
5. Los activos objeto de inversión que operan en mercados internacionales podrán ser adquiridos por la Sociedad de Inversión siempre y cuando cumplan con las disposiciones legales aplicables.

Política de diversificación

La política de diversificación de los Fondos se basa en los siguientes criterios:

Diversificación del Riesgo Crediticio: Los Fondos logran reducir su riesgo crediticio a través de los parámetros de inversión, la diversificación permite evitar elevadas concentraciones en un solo emisor.
Los niveles de riesgo crediticio son determinados por agencias independientes y de reconocido prestigio, conocidas como Calificadoras de Valores.

[74] Para mayor información consulte el prospecto de información o el prospecto simplificado (rúbrica del cliente):
http://www.bancomer.com.mx/siabinternet/Repositorio/import/doctos/analisis/00006012.pdf
http://www.bancomer.com.mx/siabinternet/Repositorio/import/doctos/analisis/00004826.pdf

Diversificación del riesgo de Mercado: Los Fondos buscan diversificar su riesgo de mercado a través de una estructuración ordenada de vencimientos y adquiriendo activos objeto de inversión con tasas revisables de manera que su desempeño no se vea afectado por
cambios inesperados del entorno, destacando lo siguiente:

a) La cartera está conformada en su mayoría por activos objeto de inversión a plazos no mayores al horizonte de inversión de los Fondos, destacando que la inversión a plazos superiores deberá contar con un alto grado de operatividad y un rendimiento superior al de los primeros que justifique la inversión en dichos activos objeto de inversión.
b) Los Fondos pueden adquirir activos objeto de inversión públicos y privados de deuda, en función de las expectativas del mercado. Este proceso implica invertir en varios activos objeto de inversión con diferente plazo y riesgo.

La diversificación de la Cartera de los Fondos se lleva a cabo tomando en cuenta:

- Su objetivo.
- El Prospecto de las Sociedades.
- La Ley de Sociedades de Inversión y disposiciones de carácter general emitidas por la CNBV.

PUBLICACIÓN DE LA CARTERA

a) Cartera Semanal.- El informe de la cartera semanal de los valores que integran los activos de los Fondos se encuentra a la vista de los inversionistas en las oficinas y sucursales de la Operadora, Distribuidoras y Codistribuidoras, las que lo tendrán disponible por escrito el último día hábil de cada semana para los inversionistas que lo soliciten (este informe debe actualizarse el día hábil anterior al que corresponda). Asimismo estará disponible en la página de Internet www.bancomer.com, el último día hábil de cada semana.
b) Cartera Mensual.- Los Fondos publican su cartera de valores de cierre de mes dentro de los primeros cinco días hábiles del mes siguiente. Dicha publicación se realiza en alguno de los diarios de circulación nacional. En el estado de cuenta mensual emitido por las Distribuidoras y Codistribuidoras, a nombre del inversionista, se menciona el diario en el que se realiza dicha publicación.
c) Calificación y Clasificación.- Los Fondos deberán incluir dentro del informe semanal, así como en la publicación de la cartera mensual, la clasificación que les corresponda conforme a las categorías definidas por la CNBV a través de disposiciones de carácter general. Adicionalmente, incorporarán la calificación que les sea otorgada por una institución calificadora de valores, la cual deberá reflejar los riesgos de crédito y de mercado, así como la calidad de su administración.

RIESGO DE MERCADO

El número de activos objeto de inversión que conformen la Cartera de las Sociedades podrá variar debido al monto de los activos de la misma. Es recomendable que el inversionista diversifique sus inversiones en forma personal.
Cualquier evento que provoque un impacto, en forma positiva o negativa, en el desempeño del mercado de valores afectará en consecuencia el comportamiento de los Fondos, en el mismo sentido, de acuerdo con las características particulares de cada uno de ellos.
Particularmente algunos eventos pueden provocar minusvalías en la valuación de los Fondos y en consecuencia generar una pérdida; entre estos eventos se encuentran:

- Incrementos abruptos en las tasas de interés.
- Variación en la calidad crediticia del emisor.
- Riesgo por variación en la tasa de inflación con respecto a las tasas nominales de interés.
- Riesgo por variación en el tipo de cambio del peso con respecto a otra divisa.
- Riesgo de valores de deuda de los Estados Unidos Mexicanos (UMS) cotizados en mercados internacionales y valores inscritos en el Sistema Internacional de Cotizaciones (SIC).
- Riesgo por valuación.
- Riesgo de invertir en activos objeto de inversión extranjeros.
- Riesgo sobre el rendimiento de los activos objeto de inversión Estructurados.
- Riesgo de la liquidez de los activos objeto de inversión Estructurados.

CAPITAL SOCIAL AUTORIZADO

El capital social autorizado es la suma de $20,000,000,000.00 representado por 2,000,000,000 acciones con valor nominal de $10.00 cada una, de las cuales, 100,000 acciones corresponden a la serie “A” representativa de la parte mínima fija sin derecho a retiro y 1,999,900,000 acciones que corresponden a la parte variable del capital social.
El capital variable podrá dividirse en series:

- B, para personas físicas de la Banca Patrimonial o Privada.
- MP, para personas físicas Red minorista del segmento preferente.

4.2.3 RENDIMIENTOS

Los rendimientos de todos los portafolios que ofrece Bancomer los actualizan día a día (no se presentan de manera histórica) y los podemos descargar en formato PDF en la siguiente liga:

http://www.bancomer.com/siabinternet/Repositorio/import/doctos/analisis/00003776.pdf

Rendimiento Fondos
Diciembre 4, 2009

Tipo	Fondo	Calificación	RENDIMIENTOS DIARIO	SEMANAL	MENSUAL	ACUM MES	ACUM AÑO	1 AÑO	PRECIO 4 Dic 2009
BANCA COMERCIAL									
Fondos Banca Privada									
Diversificados	DIVER-B B		-0.15%	0.25%	0.76%	0.17%	5.14%	7.58%	12.172904
	DIVER-E B		-0.25%	1.27%	2.75%	0.97%	10.73%	14.33%	12.973049
	DIVER-R B		-0.35%	2.18%	4.70%	1.72%	19.84%	25.00%	14.296972

Como ejemplo, la tabla anterior muestra rendimientos al 4 de diciembre de 2009.

La siguiente pantalla[75] muestra gráficamente los rendimientos efectivos netos de los portafolios de interés del 27/10/2008 al 27/10/2009 (anuales).

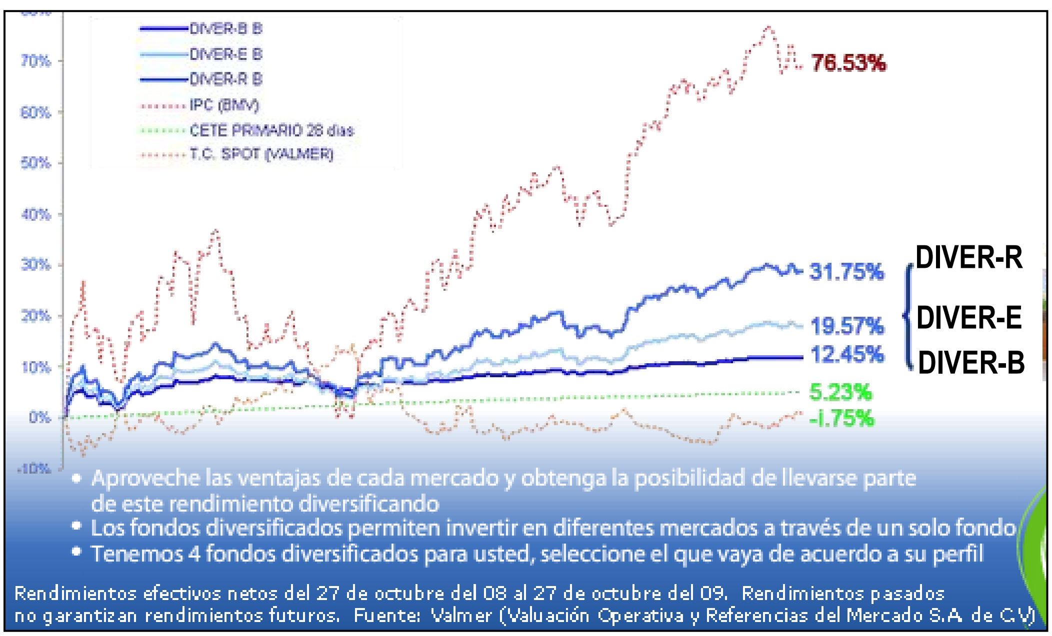


Figura 4. 9 Rendimientos efectivos netos de los portafolios Bancomer del 27/10/08 al 27/10/09.

[75] http://www.bancomer.com.mx/minisitios/patrimonial/diversificados/dic09/default.htm

4.3 CONCLUSIONES

Antes de comenzar una discusión detallada, es importante enfatizar de nuevo que las estimaciones se hicieron durante un escenario de crisis, lo que generalmente implica mucha variabilidad en los mercados financieros (volatilidad) y, por lo tanto, en los resultados obtenidos. En este sentido, consideraremos lógico el hecho de que se presenten discrepancias entre los resultados esperados de las carteras teóricas y los resultados reales correspondientes al ejercicio a 2 meses de su construcción.

No obstante, es importante mencionar que en un sentido estricto, los tres portafolios teóricos y los correspondientes portafolios de Bancomer, no son comparables.

Es decir, en el análisis que se desarrolló para la cartera teórica se tomaron datos históricos y se aplicó la metodología estándar de optimización de portafolios, obteniendo así resultados, tales como rendimientos esperados y las medidas de riesgo (desviación estándar), entre otros. Posteriormente se calculó el rendimiento real a 2 meses.

Estrictamente, no se pueden comparar portafolios únicamente en función de sus rendimientos, sino que es necesario considerar dicho rendimiento por cada unidad de riesgo asumido, para que así sean comparables.

El índice de *Sharpe* es una medida que justamente se basa en este concepto. Si se asume que la tasa libre de riesgo es constante (es decir que $\mathrm{E}\left(r_f\right) = r_f$), entonces el índice de *Sharpe* se define como:

$$S = \frac{\mathrm{E}(r_P) - r_f}{\sigma(r_P)}$$

Se puede considerar que es preferible aquel portafolio cuyo índice de Sharpe sea el mayor.

Recordemos que como activo libre de riesgo se consideró Cetes a 28 días, cuyo rendimiento para el periodo de estudio fue 6.1% anual. Los índices de los tres portafolios teóricos son:

Portafolio	Rendimiento Esperado (anual)	Desviación estándar (anual)	Índice de *Sharpe*
Moderado	0.224	0.254	0.64
Medio	1.074	0.354	2.86
Agresivo	1.524	0.454	3.22

En el caso de los portafolios de Bancomer, no fue posible tener acceso a los aspectos metodológicos que usaron para obtener los rendimientos presentados en la tabla y gráfica anteriores, los cuales además actualizan día a día y no los ofrecen de manera histórica.

Por tal motivo y aunado al hecho de que no se especifican los niveles de riesgo de forma cuantitativa, no es posible calcular o estimar sus correspondientes índices de *Sharpe* para compararlos directamente con los de las carteras teóricas.

Sin embargo, tomando en cuenta lo anterior y suponiendo que consideramos como razonablemente comparables los correspondientes escenarios de inversiones, una vez considerando los rendimientos correspondientes por mes se tienen las siguientes tablas (aquí podemos identificar y estudiar las causas de las discrepancias que esperábamos encontrar).

- Con la comparación entre los rendimientos reales de las carteras teóricas vs. las de bancomer, observamos diferencias sustanciales, siendo las primeras de rendimiento superior para los tres casos (perfiles):

		Moderada	Media	Agresiva
Carteras Teóricas	Rendimiento real MENSUAL	6.755%	7.605%	8.05%
Carteras Bancomer	Rendimiento real MENSUAL	1.03%	1.63%	2.64%

De lo anterior concluimos, que si bien no es posible hacer una comparación cuantitativa precisa, los resultados indican que si es posible construir carteras alternativas a las ofrecidas comercialmente con niveles similares de riesgo, pero con rendimientos más altos.

Para esto se puede contactar con un agente de bolsa y pedir la construcción de una cartera personalizada y no recurrir a la adquisición de carteras estándares, ya que los resultados dejan ver que las diferencias (las cuales no son para nada despreciables) son en parte las comisiones de la institución financiera.

- Por otro lado, con la comparación entre los rendimientos esperados y los rendimientos reales de las carteras teóricas tenemos lo siguiente:

		Moderada	Media	Agresiva
Carteras Teóricas	Rendimiento esperado MENSUAL	1.86%	8.95%	12.7%
	Rendimiento real MENSUAL	6.755%	7.605%	8.05%

Recordemos que el periodo de estudio fue del 15 de octubre de 2008 al 15 de octubre de 2009. La primera es una fecha aproximada a partir de la cual se hicieron notar los golpes más fuertes causados por la crisis económica, y durante varios meses sucesivos. La segunda fecha se aproxima a la parte final del periodo de aparente recuperación.

Entonces, en el caso del portafolio moderado, que por su naturaleza está compuesto en mayor proporción (porcentajes de asignación calculados) por acciones de empresas correspondientes a calificaciones de crédito altas y de actividades económicas diferentes, pero que de alguna manera son menos susceptibles a las variaciones de mercado, no es de sorprender que el rendimiento esperado sea menor al real, si es que la crisis ha sido superada, ya que en estas actividades se ve primeramente la recuperación económica para niveles de riesgo bajo.

En el caso del portafolio moderado, los rendimientos básicamente coinciden, que por otra parte valida su construcción, precisamente como una opción moderada de inversión.

Finalmente, en el caso del portafolio agresivo, en el que los pesos son mayores en los activos más susceptibles a las fluctuaciones del mercado y no tan sensibles a la recuperación del ambiente financiero, también es de esperarse que tenga rendimiento menor al que se predijo.

En el mundo financiero el objetivo central es maximizar los ingresos para un cierto nivel de riesgo. Los modelos comúnmente utilizados consideran que los eventos de variaciones extremas en los mercados financieros son muy poco probables y pueden, para fines prácticos, ser ignorados. Es decir, la premisa es que los movimientos de precios son resultado de procesos aleatorios bien portados. Cada variación de precios de un activo financiero es vista como si fuera independiente de la anterior. Los modelos convencionales (como el de *Black-Scholes*) utilizan distribuciones probabilísticas normales para tratar las variaciones de precios, es decir que el 95% de las observaciones está dentro de las primeras dos desviaciones estándar de la distribución.

Esto significa que los eventos extremos son improbables y pueden ser ignorados.

Actualmente sabemos que esto es una mala aproximación a los mercados financieros, ya que la curvas de distribución generalmente exhiben la propiedad de kurtosis o de las llamadas colas pesadas. Esto es mucho más cercano a la realidad de los mercados financieros: el movimiento del índice Dow en los últimos cien años revela una frecuencia inquietante de movimientos violentos. Y sin embargo, aún hoy se usan los modelos convencionales dicen que esos eventos extremos sólo pueden ocurrir una vez cada 10 mil años.

En 1963 el matemático Polaco Benoît Mandelbrot (1924 – 2010), analizó las variaciones de precios de algodón sobre una serie de tiempo. Dos hallazgos le sorprendieron. Primero, los movimientos de precios no tenían nada que ver con una distribución normal en la que la mayor parte de las variaciones está cerca del promedio. Los datos mostraban una mayor frecuencia de variaciones extremas. Segundo, el patrón de las variaciones era independiente de la escala: las curvas de cambios de precios en un día eran iguales a las de un mes. Y lo más asombroso era que estas características estaban presentes a lo largo de todo el tumultuoso período 1900-1960 que había presenciado dos guerras mundiales y una gran depresión.

Mandelbrot utilizó su teoría de fractales para explicar la presencia de eventos extremos en Wall Street. En 2004 publicó su libro sobre el mal comportamiento de los mercados financieros. La idea básica sobre la relación entre fractales y mercados financieros es que los eventos extremos son más probables y esto ofrece una visión más certera sobre los riesgos del mercado.

Una conclusión del trabajo de Mandelbrot es que una mayor regulación es indispensable en los mercados financieros. Sin embargo, nada de lo que se ha hecho hasta hoy, a tres años de reventar la crisis, se acerca a lo que es necesario para acortarles la rienda a los operadores financieros.

Los puntos antes mencionados, señalan la necesidad de que las instituciones financieras hagan disponibles al público las metodologías usadas para la construcción de sus portafolios y estudiar cuidadosamente el papel de carácter regulador que tiene el gobierno en los fondos de inversiones, así como su marco jurídico.

Otro punto importante, es considerar un **manejo de cuenta no discrecional**, es decir, cuando el cliente tiene el derecho de manejar totalmente su cartera de valores, y él gira las instrucciones para la compra-venta de sus valores (vea tipos de órdenes en el capítulo I, sección 1.4.1).

A lo largo de este trabajo, hemos visto que existen herramientas para hacer una auto-gestión de la cartera, haciendo posible la participación del inversionista en la toma de decisiones.

Lo anterior en contraposición con un **manejo de cuenta discrecional,** que es lo que comúnmente se hace cuando el cliente no tiene los conocimientos financieros. Es cuando el cliente autoriza a la casa de bolsa o institución financiera para que actúe conforme a sus criterios prudenciales y cuidando las inversiones como “propias”.

Finalmente, sabemos que la oferta y la demanda de las acciones mueven su precio.

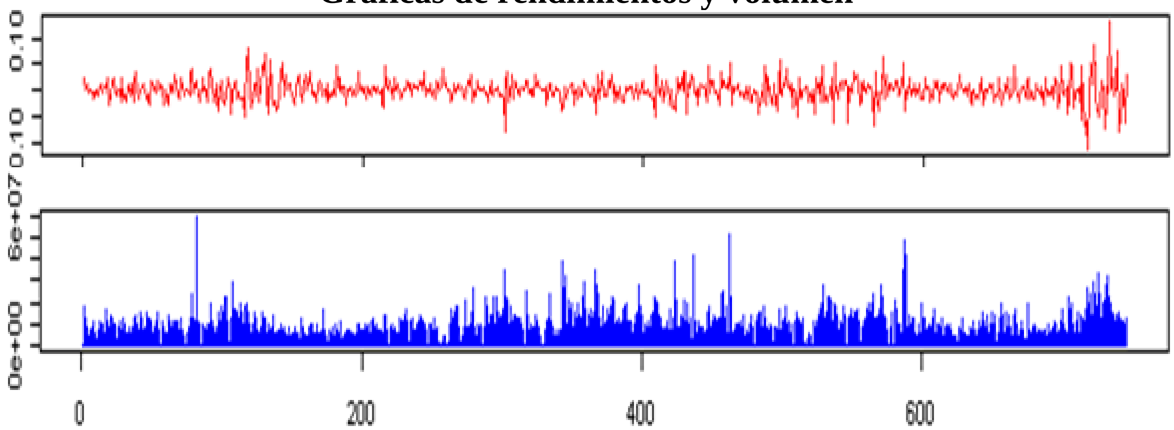
Se calcula que hay cerca de 60,000 participantes en el mercado accionario, una fracción muy pequeña respecto a la población total del país. Sin embargo, a este mercado no le interesa que haya más participantes si con los que hay ‘casi todos ganan’.

La información en el mercado accionario es **asimétrica**, es decir, que existe mucha **información privilegiada** que ocasiona que el mercado mexicano no crezca.

5.1 ANEXO

A continuación se muestran los ejemplos más comunes de gráficas y osciladores utilizados en el análisis técnico y chartista (las cuales se generaron con datos de 2007 a 2008 de la empresa Wal-Mart México).

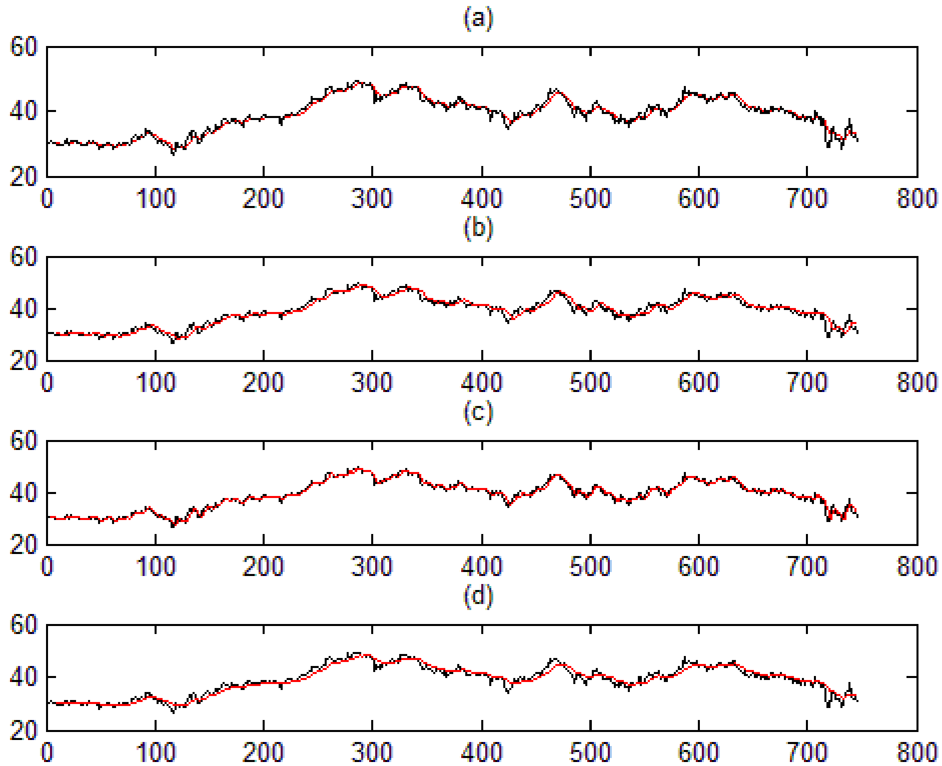
Gráficas de rendimientos y volumen



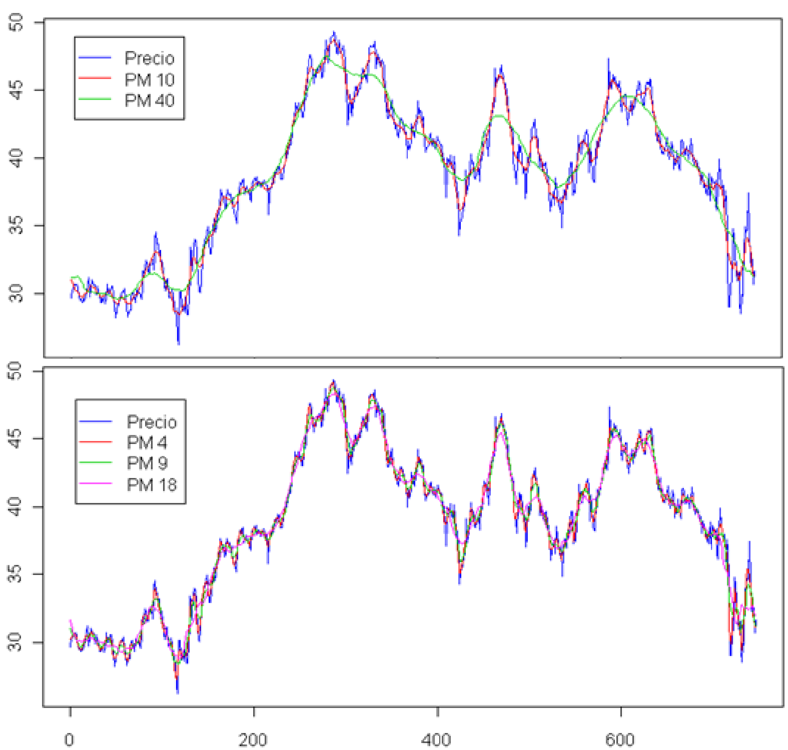
Promedios ó medias móviles de orden 10, 40 y 100.

Media móvil: es un promedio sobre un conjunto de valores cuyo cálculo se efectúa sobre un número concreto de datos (periodo). Son seguidores de tendencia. Suavizan las líneas de precios y representan las expectativas del mercado. Si el precio es mayor que la media móvil, entonces se trata de una señal de compra. Si la media móvil se encuentra por encima del precio entonces se trata de una señal de venta. Son aplicables a cualquier valor.
Desventajas: señales no siempre oportunas ó falsas, y pondera de igual forma todas las observaciones.
Tipos de medias móviles: simple (aritmética), exponencial, triangular, series de tiempo, ajustada por volumen, variable y ponderada.

Promedios Móviles: a) Exponencial b) Triangular c) Ponderado d) Modificado



Doble y triple promedio móvil.

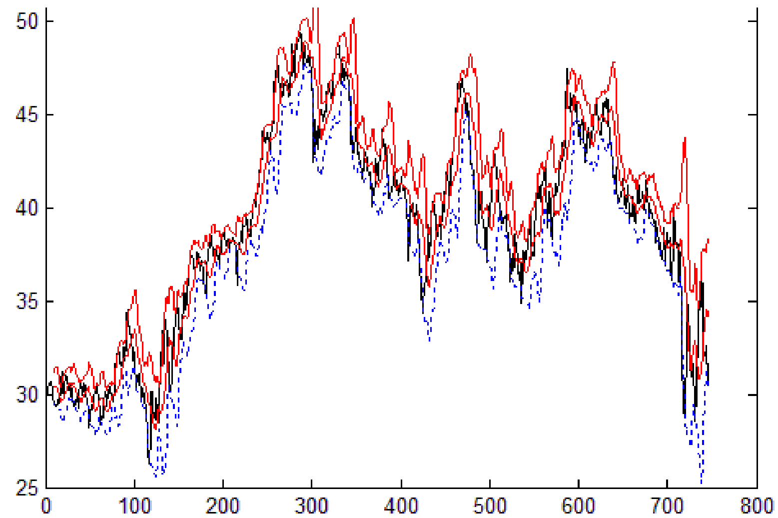


Comúnmente se utilizan las medias móviles 10-40 ó 4-28. La media móvil de largo plazo (MMLP) identifica la tendencia, mientras que la de corto plazo (MMCP) identifica el momento.

Si MMCP está por encima de MMLP → COMPRA.
Si MMLP está por encima de MMCP → VENTA.

Si el Precio está por encima de MMCP, y ésta a su vez está por encima de MMLP (zona neutral) → COMPRA EN LARGO.
Para el caso exactamente inverso → VENTA EN CORTO.

Para triple promedio móvil se utiliza la combinación 4-9-18.



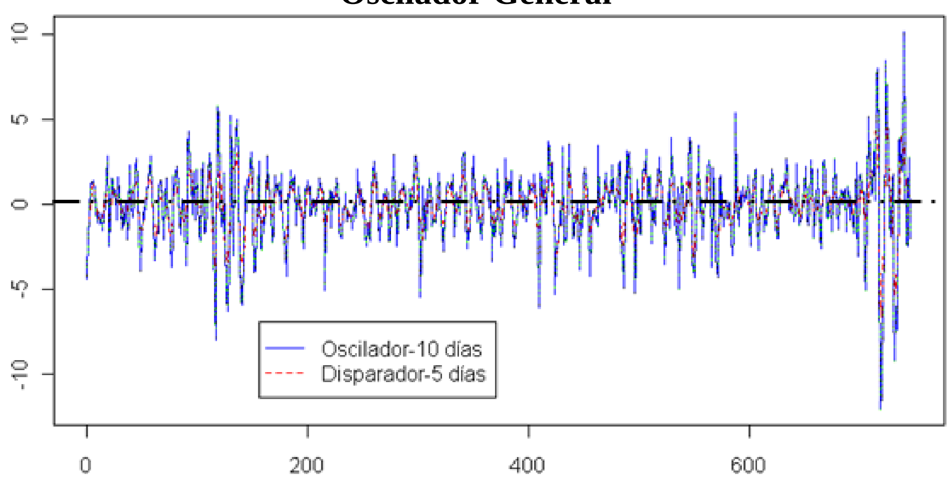
Bandas de *Bollinger* (promedio móvil de 10 días y 2 desviaciones estándar)

Su interpretación básica es que los precios tienden a estar dentro de ambas bandas. El espacio entre las bandas varía de acuerdo a la volatilidad. Si la banda es ancha es un periodo de alta volatilidad, mientras que por si las bandas se estrechan hay menos volatilidad. Cuando los precios tocan la banda superior se puede identificar una tendencia alcista y viceversa.

Osciladores: son indicadores (no seguidores) de tendencia y se usan para detectar señales oportunas de sobrecompra o sobreventa. Evalúan el momento ó velocidad de un movimiento. Su función principal es: “advertir la pérdida de momento antes que la situación sea evidente”. La mayoría de los osciladores se grafican con una media móvil de corto plazo la cual recibe el nombre de disparador.

- Acotados: no mantienen una línea central si no que se mueven en una banda limitada. Tienen razones externas de sobreventa ó compra claramente limitada. Ejemplos: oscilador RSI (*Relative Streght Index*), oscilador estocástico, % C William.
- No acotados: se mueven hacia una línea horizontal. Ejemplos: General, Momentum, MACD, P-ROC, V-ROC.

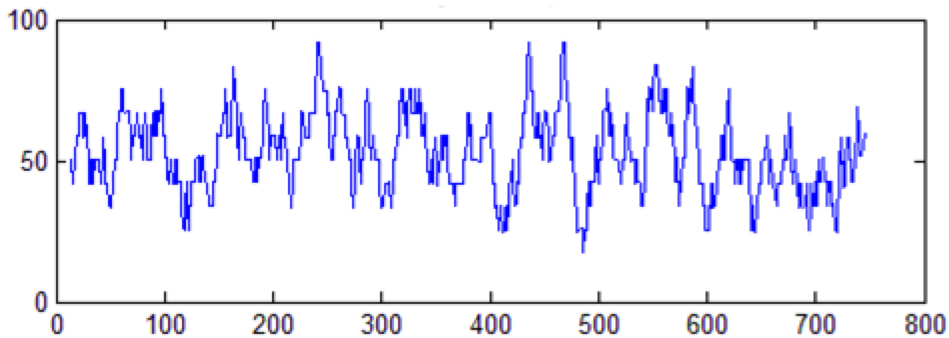
Oscilador General



Mide la variación simple del precio con respecto a su media móvil: $OSC_i = 100\left(\frac{P_i - PM_i}{PM_i}\right)$

Se usa para identificar el cruce de las líneas con el cero, o con su disparador:
Cuando el oscilador cruza hacia arriba el eje → Señal ideal de compra
Cuando el oscilador cruza hacia abajo el eje → Señal ideal de venta
Cuando el oscilador está a la altura de cero en el cruce → Señal de bajo riesgo en el mercado.
Cuando el oscilador cruza hacia arriba el disparador → Señal de compra.
Cuando el oscilador cruza hacia abajo el disparador → Señal de venta.

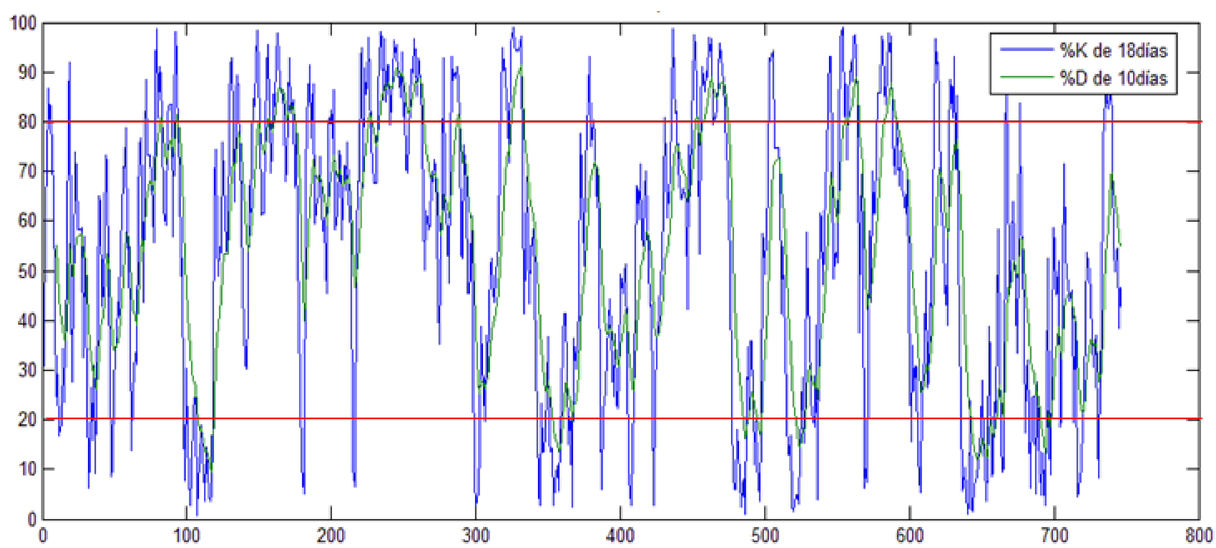
Relative Strength Index (RSI)



$$RSI = 100 - \left(\frac{100}{1 + U/D}\right), \qquad U = promedio\ bajista\ \ D = promedio\ alcista$$

Con el RSI se pueden identificar figuras chartistas (vea en la sección posterior) más claramente que con los precios.
Si RSI > 70 es una señal de que la acción está sobrecomprada → Señal de venta.
Si RSI < 30 es una señal de que la acción está sobrevendida → Señal de compra.
Es un buen detector de divergencias (por ej. cuando los precios están formando un nuevo pico), se espera que los precios se corrijan y se muevan en dirección del RSI.

Oscilador estocástico

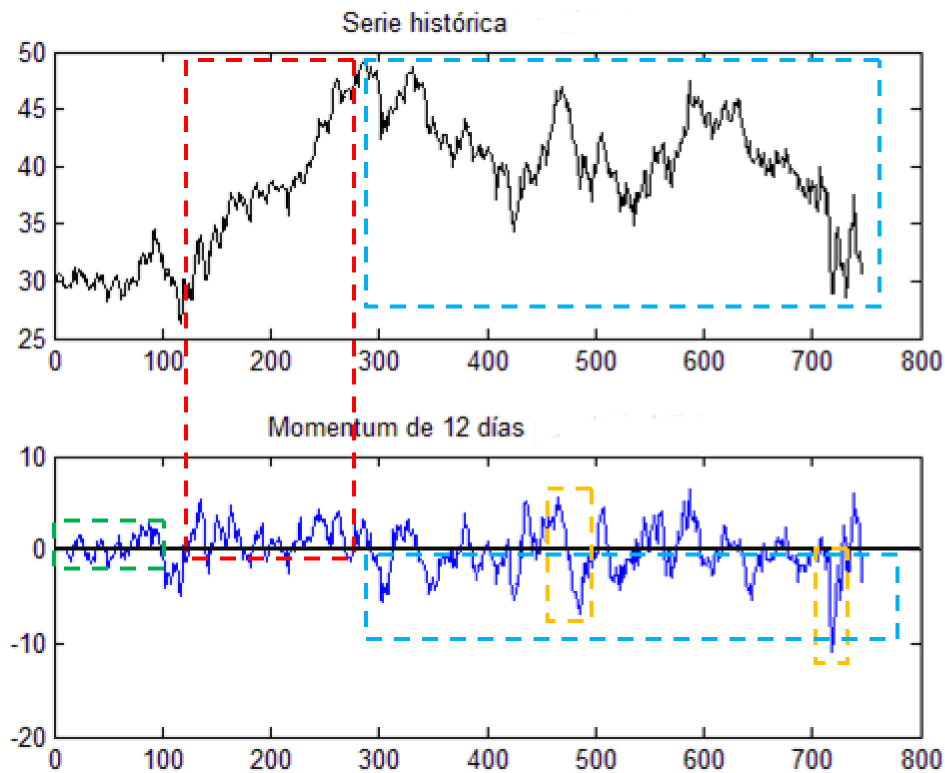


Compara el último precio de cierre con respecto l rango en cierto periodo. Se utilizan dos líneas (%K,%D). %D tiene comportamiento menos ruidoso y es el que nos da señales de operación.
Si el oscilador %K ó %D < 20 → Señal de compra. Si %K ó %D > 80 → Señal de venta.
En el primer caso se edifica una sobreventa de la acción, la cual es señal de una divergencia *Bullish*. En el segundo caso hay sobrecompra de la acción, lo que es igual a una divergencia *Bearish*.

$$\%K = 100\left[\frac{C - P_n}{H_n - P_n}\right]$$

donde C=último precio de cierre, P_n= precio mínimo del periodo, H_n=precio máximo del periodo

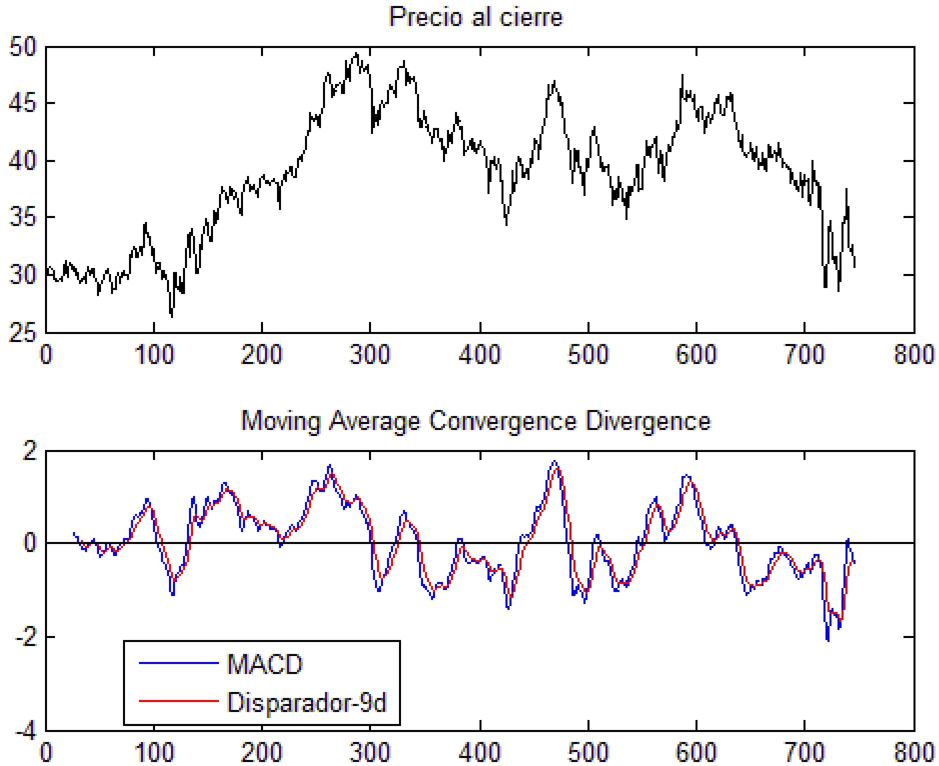
Indicador *Momentum*



Mide el grado de cambio de los precios comparado con el de *n* días. $M = V - V_n$ donde V_n= cierre de acción hace *n* días.

CASO1: Si precios (P) están ↑ y la línea de momento (M) está en terreno positivo y ↑, ent. tendencia alcista (COMPRA).
CASO2: Si M es horizontal, ent. P está ↑ a la misma velocidad que hace *n* días.
CASO3: Si M está descendiendo hacia 0, ent. la alza de P está desacelerando (posible divergencia *bearish*)
CASO4: Si M está en terreno negativo, ent. se espera tendencia bajista a corto plazo.
CASO5: Si M vuelve a curso horizontal y empieza a subir, ent. la baja de P se está desacelerando (divergencia *bullish*)

Moving Average Convergence Divergence (MACD)

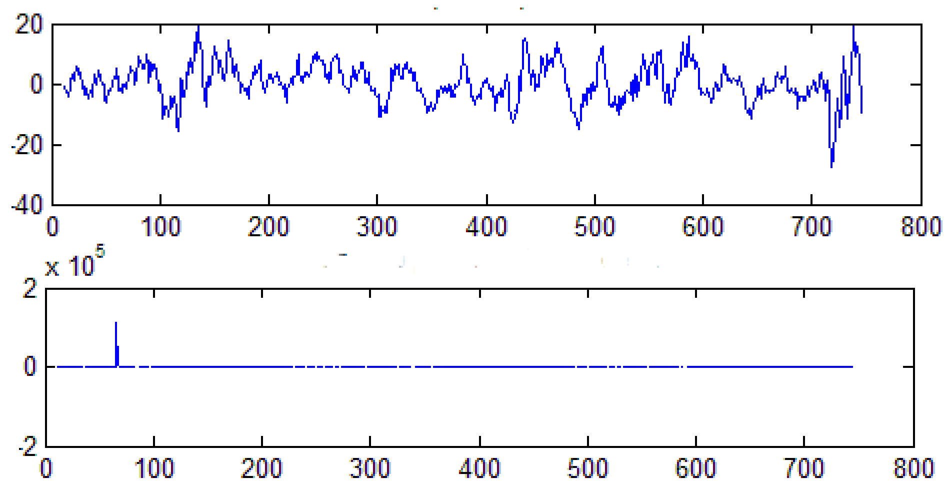


Es el resultado de dos medias móviles exponenciales calculados con base al precio de cierre (generalmente de 12 contra 26 días). Generalmente se le construye una media móvil exponencial conocida como *signal* ó disparador.

$MACD = PM^{exp}12días - PM^{exp}26días$

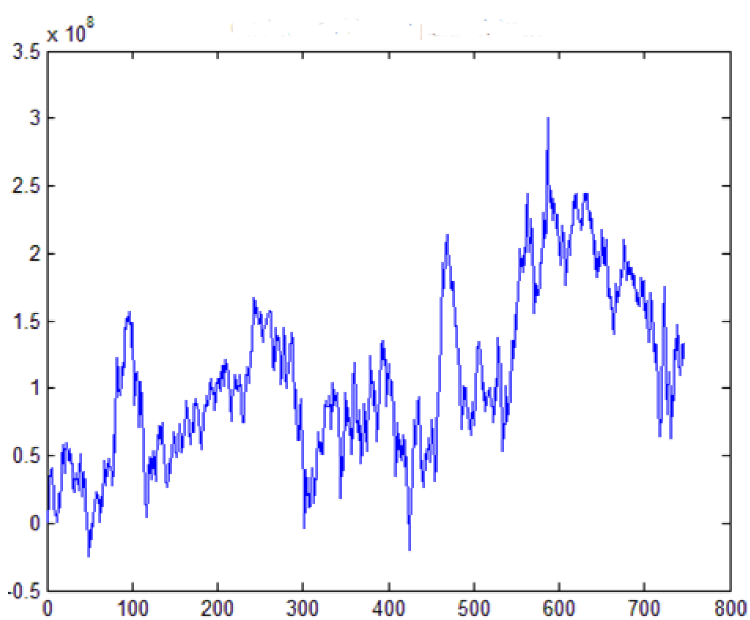
Si MACD perfora hacia abajo el disparador → VENTA.
Si MACD perfora hacia arriba el disparador → COMPRA.
Si MACD>0 → COMPRA
Si MACD<0 → VENTA
Si la media móvil de corto plazo cruza hacia arriba con fuerza a la m.m. de largo plazo → el MACD sube y probablemente el precio esté tensionado y retome pronto su valor o nivel real.

Tasa de cambio para el precio y tasa de cambio para el volumen (P-ROC y V-ROC)



Price & Volume rate of change (P-ROC & V-ROC): muestra la diferencia entre el precio en cuerso y el de hace *m* días en fomra de tasa. Ya que el precio de los valores aumenta y disminuye en un movimiento cíclico y ondulatorio (oferta y demanda), el P-ROC trata de mostar ese movimiento miediendo el cambio en los precios de un periodo dado.
Si ROC es alto significa que hay sobrecompra de acciones, por lo tanto se recomienda esperara la correción del mercado para actuar. El hecho de que el ROC es un indicador claramente cíclico lo hace predecible. Por otro lado, cada patrón en los precios (picos, valles, rupturas) va acompañado de un agudo incremento en el volumen
Volumen: número de transacciones por precio de transacción).

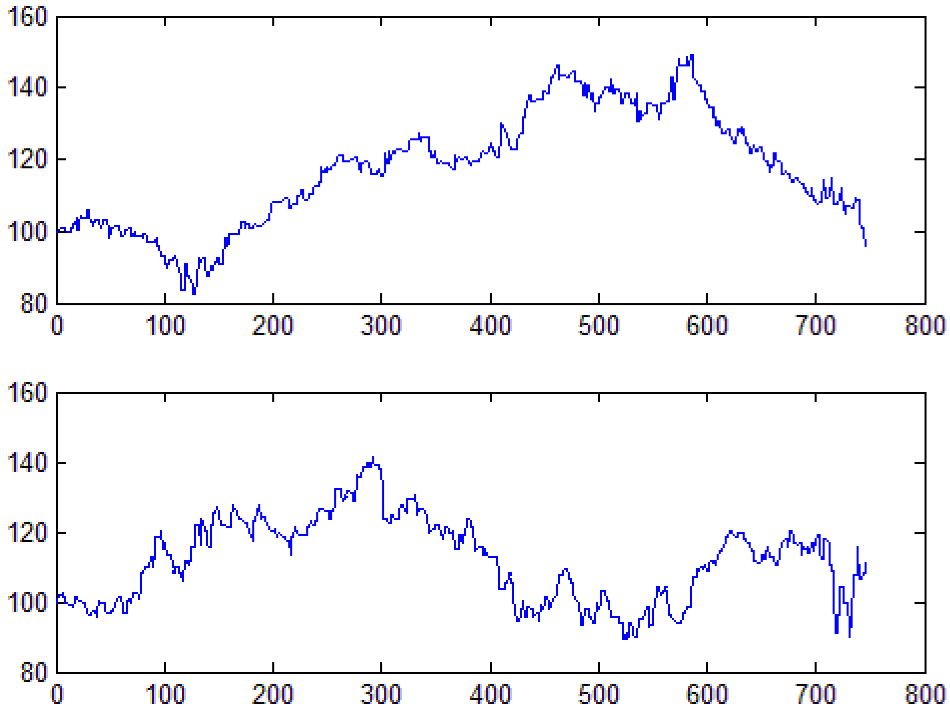
$$ROC = \frac{Precio\ actual - Cierre\ de\ hace\ m\ días}{Cierre\ de\ hace\ m\ días}$$



On Balance Volume (OBV)

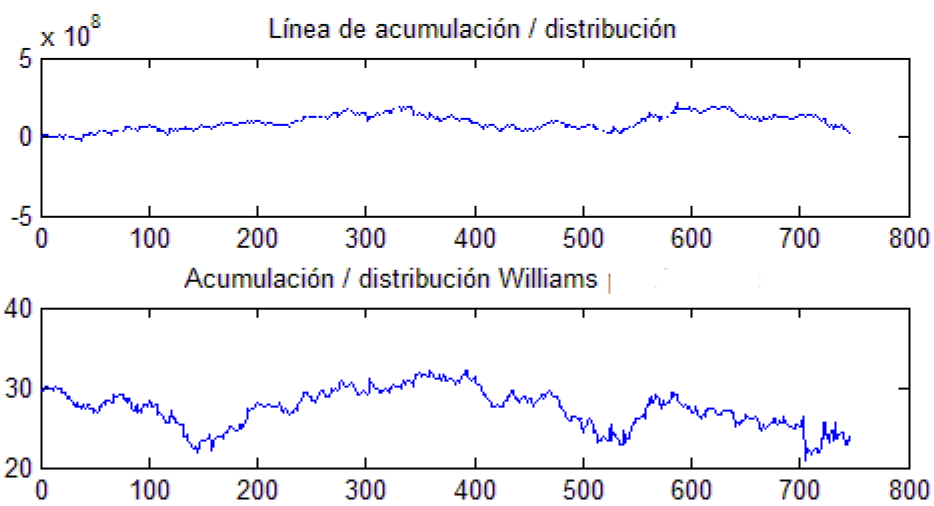
Es un indicador de momento que relaciona el volumen con los cambios en los precios, i.e. muestra si el volumen está fluyendo hacia algún valor o saliendo de los mismos.
La experiencia indica que los cambios en el OBV preceden los cambios en los precios. Es generalmente utilizado a corto plazo. Según su creador se debe actuar rápida y decisivamente para obtener ganancias con este indicador.

Índice de volumen positivo y negativo (IVN e IVP)

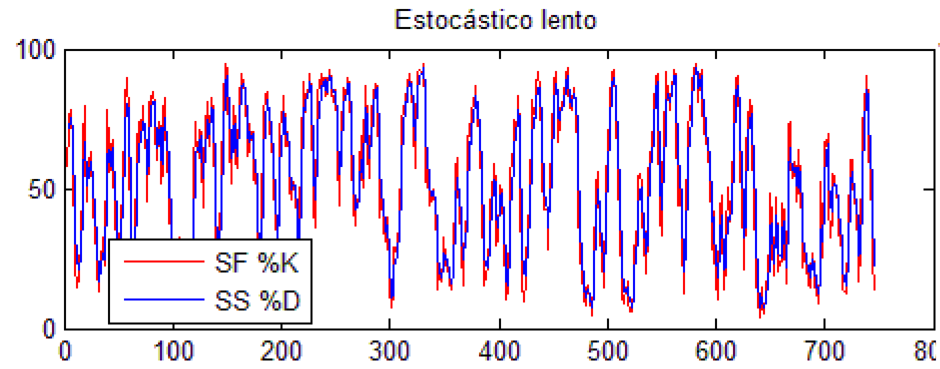


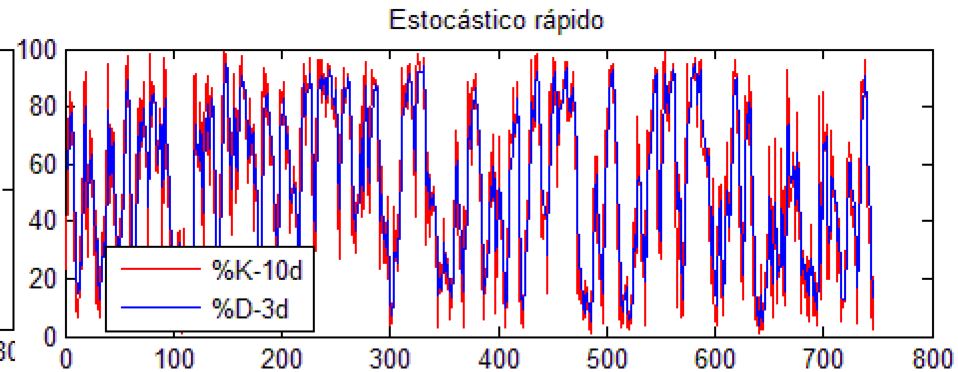
El IVN se centra en los días en los que el volumen decrece con respecto al día precedente siguiendo la premisa de que el dinero inteligente toma posiciones el día en que el volumen disminuye. La experiencia ha demostrado que este indicador es más útil en tendencia alcista. El IVP refleja lo que hace el dinero tonto.

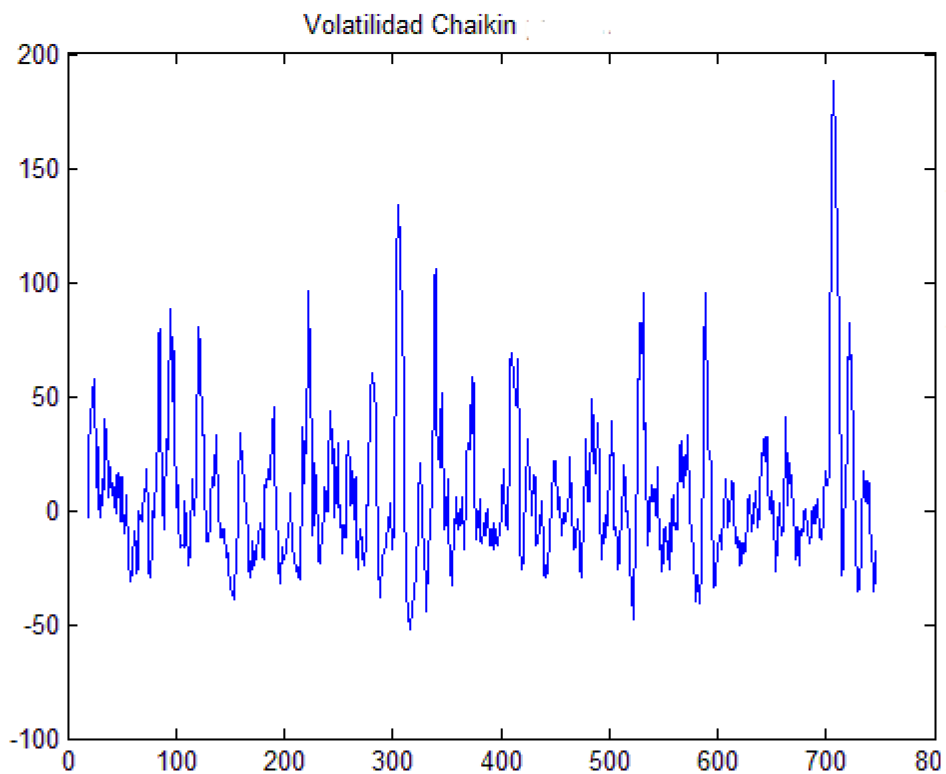
Línea de distribución / acumulación de *Williams*

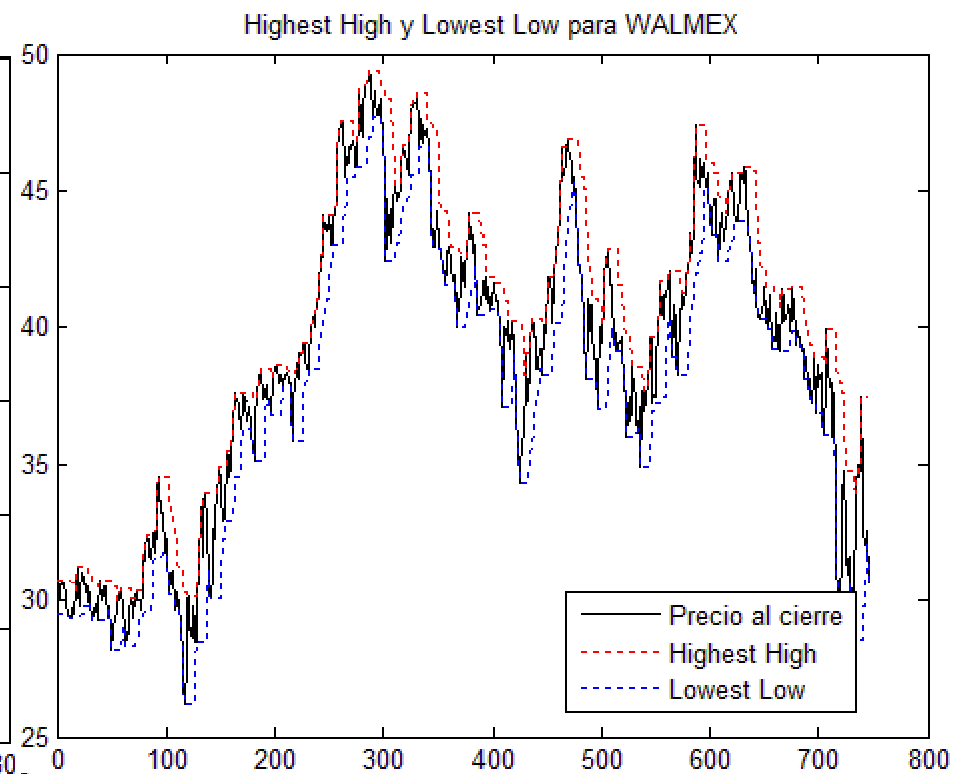


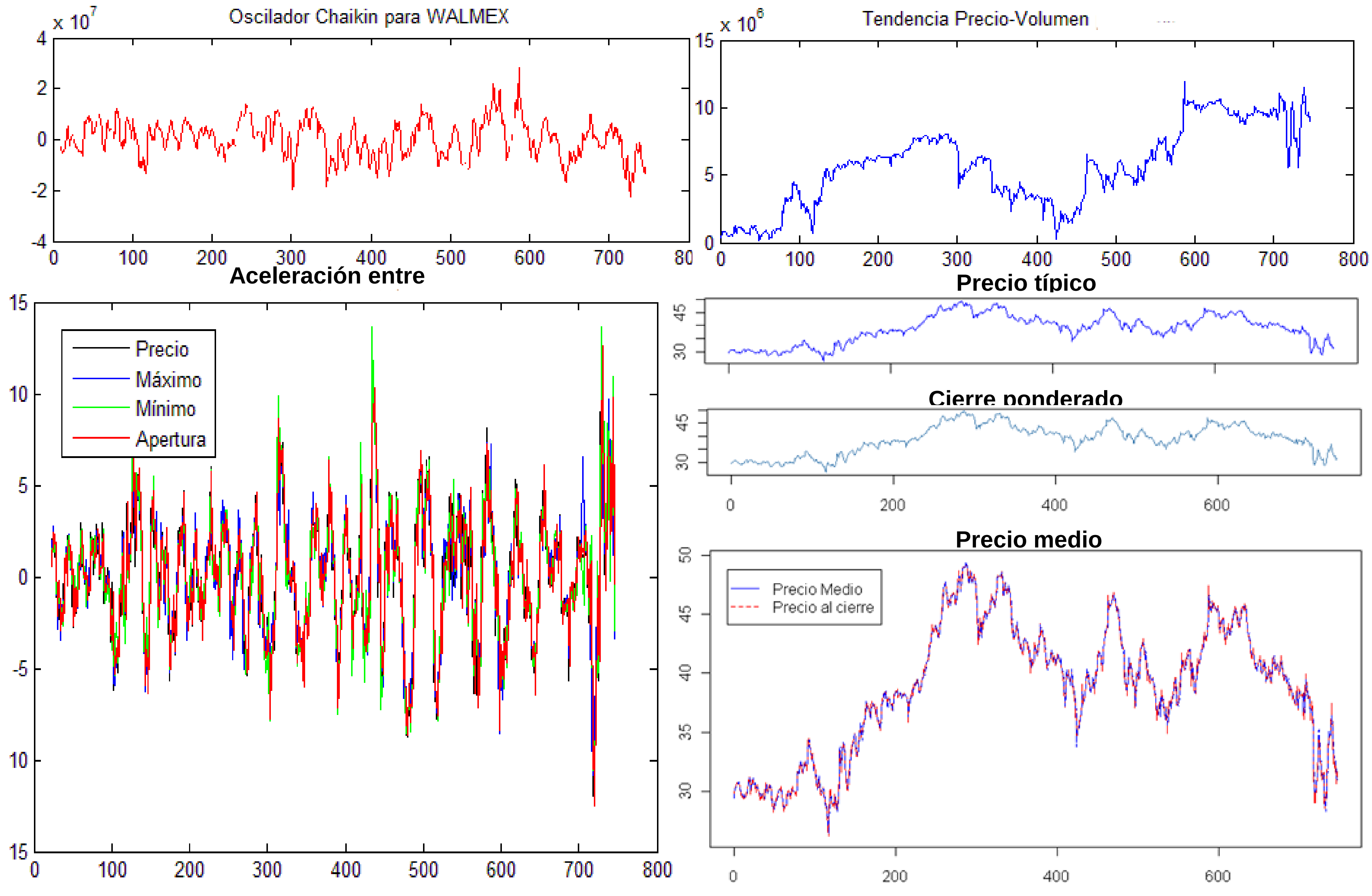
Este es un indicador de momento que asocia los cambios en los precios y en volumen puesto que un volumen alto significa un movimiento significativo de acuerdo a la teoría de *Dow*.
Cuando la línea de acumulación de Williams está subiendo significa que el activo está siendo acumulado o comprado, lo que indica una señal de COMPRA.
Una divergencia entre este indicador y la serie histórica de precios indica un cambio inminente.


Estocástico lento
SF %K
SS %D


Estocástico rápido
%K-10d
%D-3d

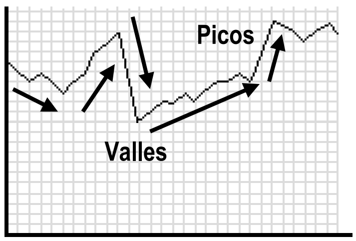

Volatilidad Chaikin


Highest High y Lowest Low para WALMEX
Precio al cierre
Highest High
Lowest Low



Oscilador Chaikin para WALMEX
x 10^7
Tendencia Precio-Volumen
x 10^6
Aceleración entre
Precio
Máximo
Mínimo
Apertura
Precio típico
Cierre ponderado
Precio medio
Precio Medio
Precio al cierre

Dentro del análisis técnico, se encuentra también el análisis chartista, el cual hace referencia únicamente al estudio visual ó apreciación de gráficas y de figuras (patrones) específicas dentro de ellas, que denotan una clara o posible tendencia ó cambios en ella. De manera breve, analicemos las más comunes:

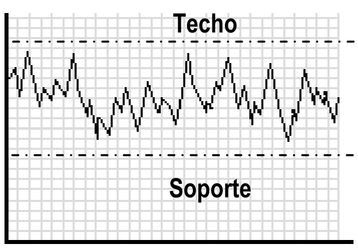


TENDENCIAS:

Tendencias primarias (mareas): ≥ 1 año.
Tendencias secundarias (olas): ≈ 4 meses (recuperaciones)
Tendencias menores (salpicadas): ≤ 1 semana (poco confiables)

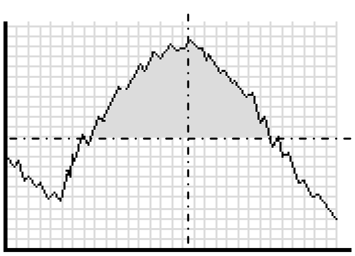
Tendencias alcistas: por picos cada vez más altos → COMPRAR.
Tendencias bajistas: por valles más hondos → VENDER.
Tendencia lateral: no sube ni baja → INDIFERENTE

TOROS (*BULLS*): Compradores. *BULLISH*: divergencia alcista.
OSOS (*BEARS*): Vendedores. *BEARISH*: divergencia bajista.

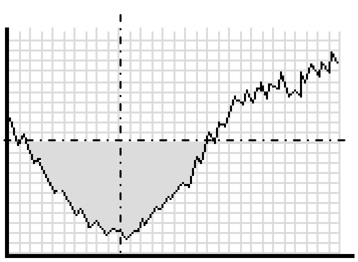


SOPORTES Y RESISTENCIAS:

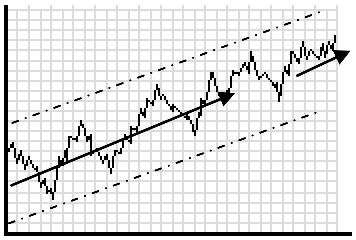
Picos o Soporte: precio en el cual los toros se empiezan a interesar por las acciones (mínimo precio al que compran).
Techo o Resistencia: es el máximo precio en que los toros están dispuestos a comprar.



Trampa para toros: deja a los compradores con acciones sobre valoradas.

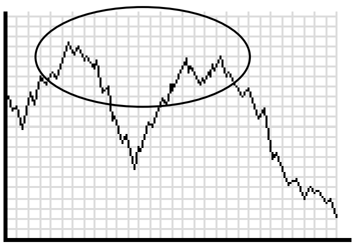


Trampa para osos: en este caso los osos pensarán que las acciones seguirían bajando de precio y venden, pero poco después comienza una fase alcista por lo que se quedarán fuera del mercado.



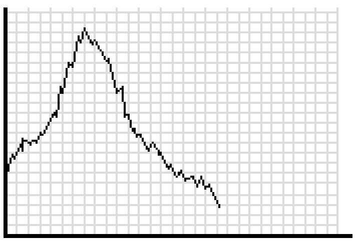
CANALES (ASCENDENTE O DESCENDENTE):

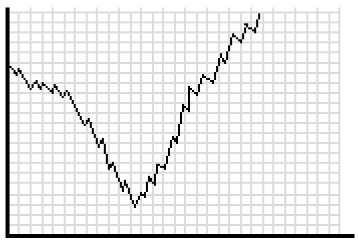
Son líneas paralelas a las de tendencia que unen picos y crestas sucesivas. Sirven para efectuar operaciones a corto plazo (si la amplitud del canal lo permite). También sirven para detectar debilidades en la tendencia actual.



FIGURAS DE CAMBIO DE TENDENCIA:

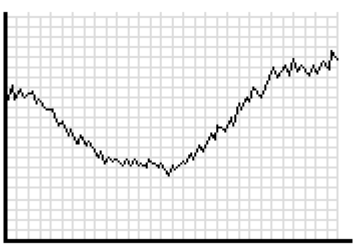
Doble cresta: es señal de un mercado inestable (poco frecuentes).

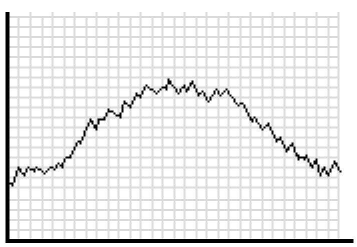




CABEZA Y HOMBROS:
1 Fantasma: anticipa un cambio a tendencia bajista.

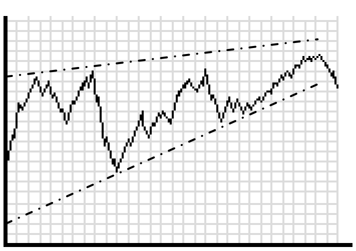
2 Fantasma invertido: anticipa un cambio a tendencia alcista.



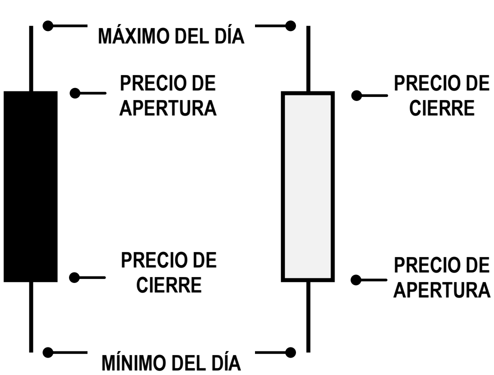


1 Fondo redondeado: tendencia alcista luego de una pérdida sostenida (debilitamiento lento y gradual de las fuerzas vendedoras)

2 Cresta circular: el inverso al fondo redondeado. Ambos poco frecuentes.



Cuñas (Ascendentes y Descendentes): Se inclinan en centro de la tendencia que les sigue. Hay un agotamiento del interés inversor (debilidad del mercado). Casi seguramente al final cae.



Velas (*Candlesticks*): a diferencia de la gráfica de precios (series histórica), las velas incorporan otros datos significativos.
La mecha superior indica el precio máximo alcanzado en la jornada. La mecha inferior indica el mínimo del día.

La parte superior del cuerpo en el caso de la vela negra es el precio de apertura, y la parte inferior el precio de cierre. En el caso de la vela blanca, es al revés.

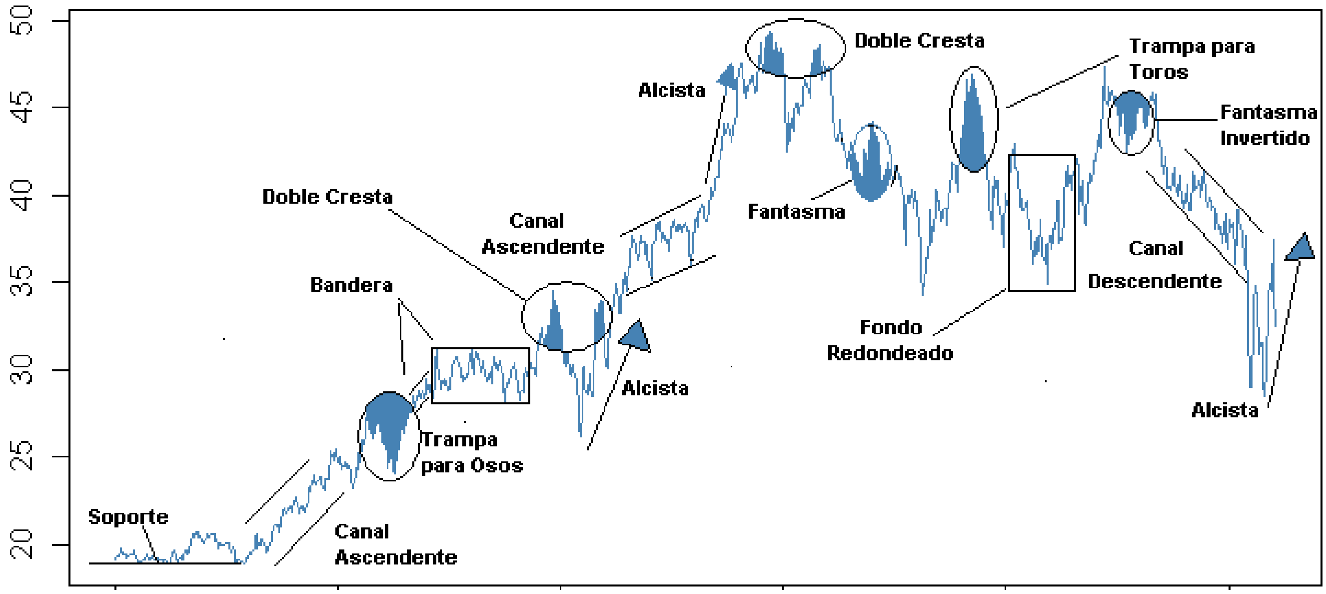


Figura 3. 17 Ejemplo de análisis chartista para 1,100 días del valor de la acción Walmexv.mx (Wal-Mart)

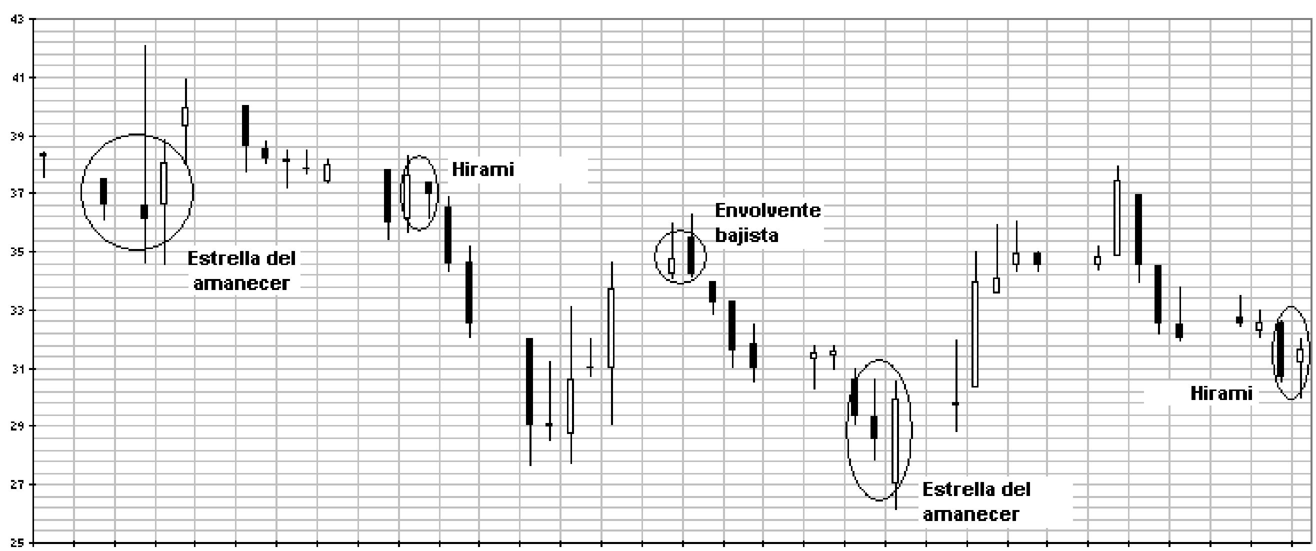


Figura 3. 18 Ejemplo de una gráfica de velas para la acción Walmexv.mx (Wal-Mart)

El resultado del análisis chartista es por tanto subjetivo, ya que depende de la capacidad del observador, y de su interpretación.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Achelis, S. B. (2004). *El Análisis técnico de la A a la Z.* Barcelona: Netbiblo y S.L.

[2] Garrido, N. P. (2004). *Análisis multicriterio aplicado a la selección de carteras.* Universidad de Huelva.

[3] Herrero, F. G. (2004). *Riesgo, Rentabilidad y Eficiencia de Carteras de Valores.* Bilbao: Desclée De Brouwer.

[4] Hull, J. C. (1993). *Options, Futures and other Derivatives Securities.* Englewood Cliffs, NJ.: Prentice Hall.

[5] Jäckel, P. (2002). *Monte Carlo methods in finance.* West Sussex: John Wiley & Sons, LTD.

[6] Kane, A. *Principios de Inversiones. 5° Ed.* Mc Graw Hill.

[7] Kolb, R. W. (1993). *Inversiones.* México: Limusa.

[8] Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science.* New York: Oxford University Press.

[9] Rincón, Luis (2008). *Introducción a los procesos estocásticos.* México, D.F. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias, UNAM.

[10] Wilmott, P. (2005). *Exotic Option Pricing and advanced Lévy models.* Chichester: John Wiley & Sons, Ltd.

[11] Wilmott, P. (1995). *Option Pricing, mathematical models and computation.* New York: University of Cambridge.

[12] Wilmott, P. (2006). *Paul Wilmott on quantitative finance.* Chichester: John Wiley & Sons, Ltd.

[13] Wilmott, P. (1996). *The mathematics of financial derivatives.* New York: University of Cambridge.