

ANÁLISIS ESPECTRAL DE SERIES DE TIEMPO

Francisco Sánchez Villarreal

Las series de tiempo frecuentemente presentan comportamientos de ascenso o descenso periódicos fácilmente perceptibles como movimientos estacionales, por ejemplo, el incremento de las ventas de artículos deportivos en los meses de verano y navidad; los epidemiólogos se preparan para el incremento de casos de enfermedades diarreicas en los meses de calor, etc. En ocasiones los comportamientos de ascenso o descenso se ven encubiertos por las fluctuaciones naturales de las series de tiempo. Así hay comportamientos que se repite cada doce meses, seis, tres o cuatro meses. El análisis espectral es una herramienta que facilita el descubrimiento de esos comportamientos.



ANÁLISIS ESPECTRAL

El análisis espectral consiste en expresar un proceso como una suma de sucesiones periódicas, específicamente trigonométricas, para identificar las frecuencias más importantes. La sucesión de valores que constituyen una serie de tiempo se puede expresar como una combinación lineal de senos y cosenos, ello se logra mediante el Análisis de Fourier (Joseph Baptiste Fourier 1768 - 1830). El análisis de Fourier, también conocido como Análisis Armónico tiene amplias aplicaciones en acústica, óptica, calorimetría, proceso de señales e imágenes.

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua de la siguiente forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right]$$

Donde

a_k Coeficiente constante

b_k coeficiente constante

T Período

f $1/T$ es la frecuencia

El Análisis Espectral permite **identificar las frecuencias más influyentes** en una serie.

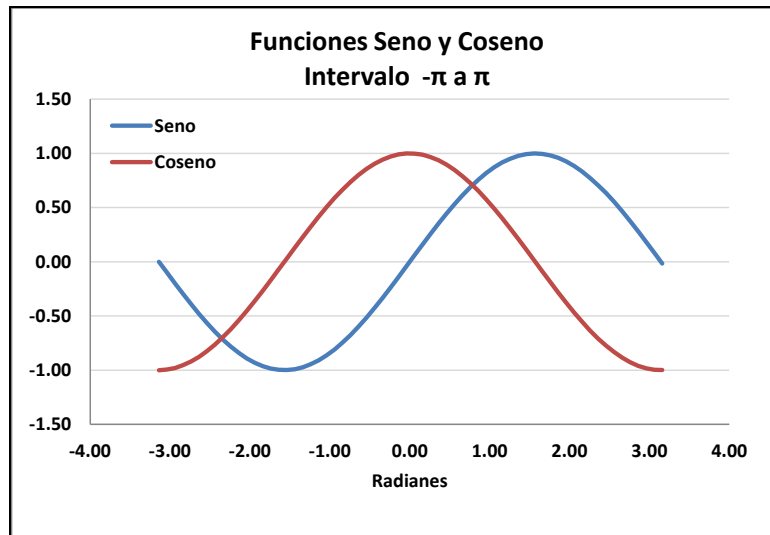
La frecuencia f de una función seno o coseno, **es el número de ciclos por unidad de tiempo**.

Una función periódica cumple la propiedad

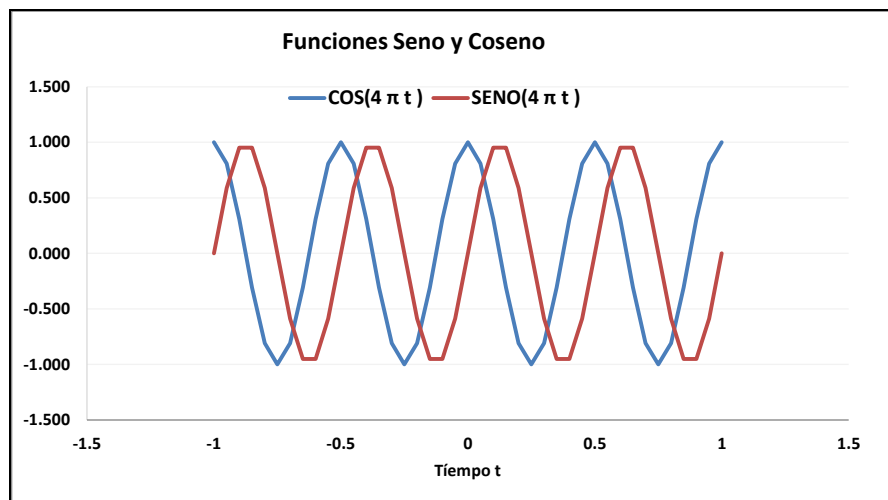
$$F(t) = F(t + T)$$

El período **T** de una función seno o coseno, es la magnitud de tiempo requerido para **completar un ciclo** y corresponde al recíproco de la frecuencia $T=1/f$

Las funciones seno y coseno son funciones periódicas, de un período completo se extiende 2π unidades. La siguiente gráfica ilustra el comportamiento de las funciones Seno y Coseno en el intervalo $(-\pi, \pi)$.



En la siguiente gráfica la frecuencia $f=2$ ciclos por unidad de tiempo y período $T=1/2$



Considere una función senoide de la siguiente forma:

$$A \text{ Seno}(\omega t + \phi)$$

Donde

A Amplitud. Constante que multiplica la señal e incrementa su valor vertical. La señal oscila entre $-A$ y A

t Unidad de Tiempo (segundos, días, meses, etc.)

ω Es la **Frecuencia Angular** medida en radianes. La frecuencia angular también se puede expresar en forma alternativa por múltiplos de 2π y el factor de multiplicidad es f:

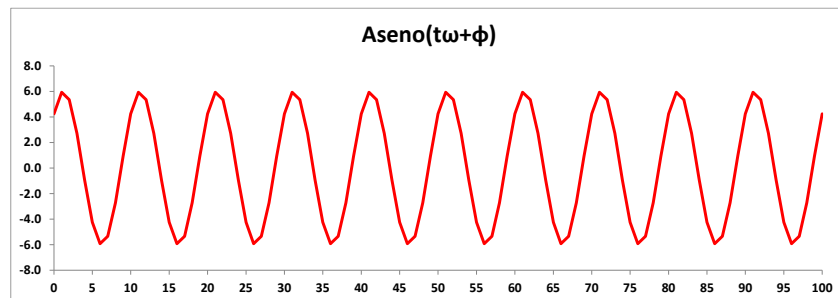
$$\omega = 2\pi f$$

f Es la **Frecuencia en Ciclos** por unidad de tiempo. Un ciclo es la fracción de la señal que se repite periódicamente. Un ciclo **se mide de cresta a cresta** o de valle a valle. La duración de un ciclo se llama **Período**, expresado en unidades de tiempo por ciclo. Equivale al inverso de la frecuencia.

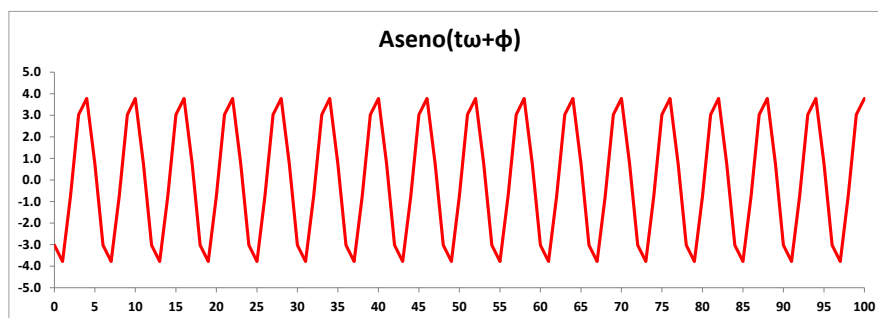
ϕ Ángulo de fase. Constante que genera desplazamiento de la señal en el tiempo.

A continuación se grafican comportamientos de la función para diferentes frecuencias angulares.

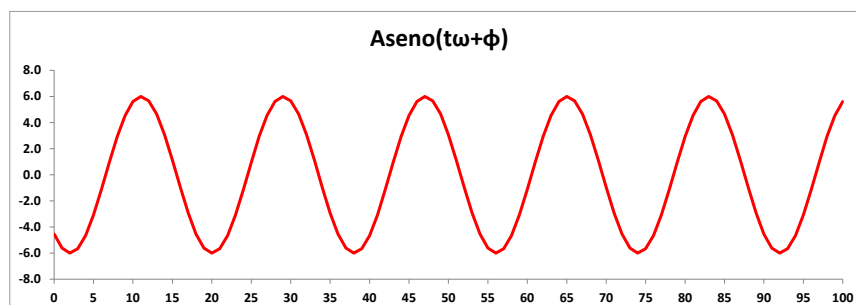
$$6\text{Send}(2\pi(1/10)t + \pi/4)$$



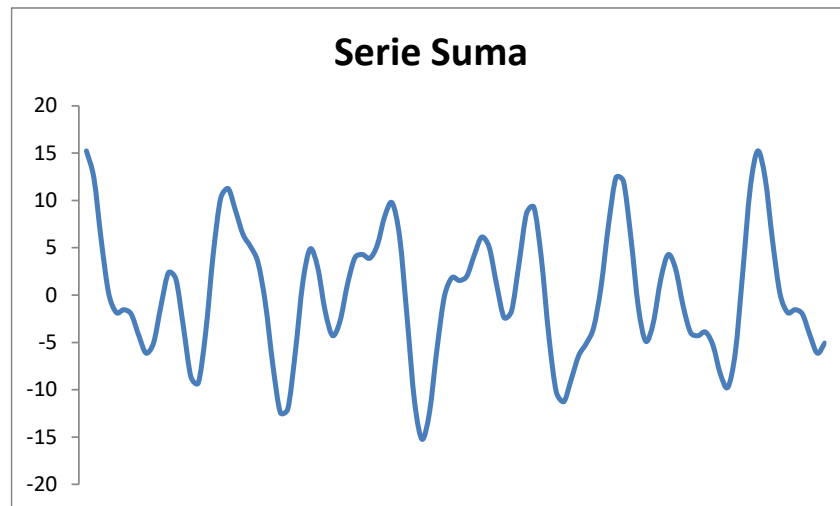
$$4\text{Send}(2\pi(1/6)t + \pi/4)$$



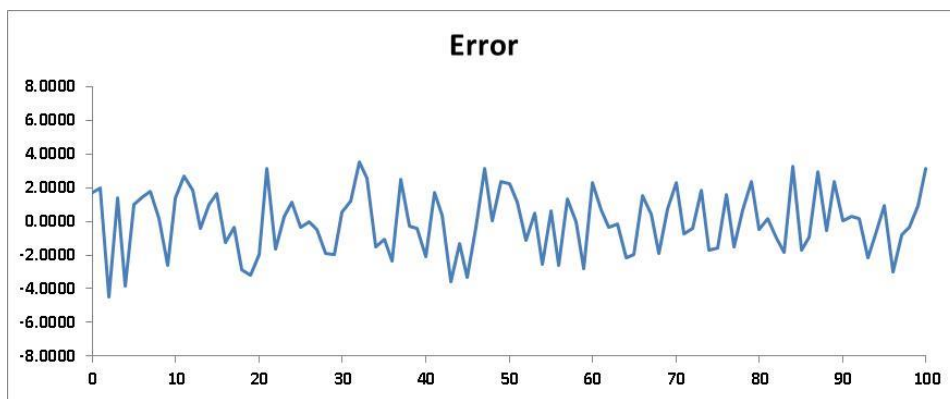
$$6\text{Send}(2\pi(1/18)t + \pi/4)$$



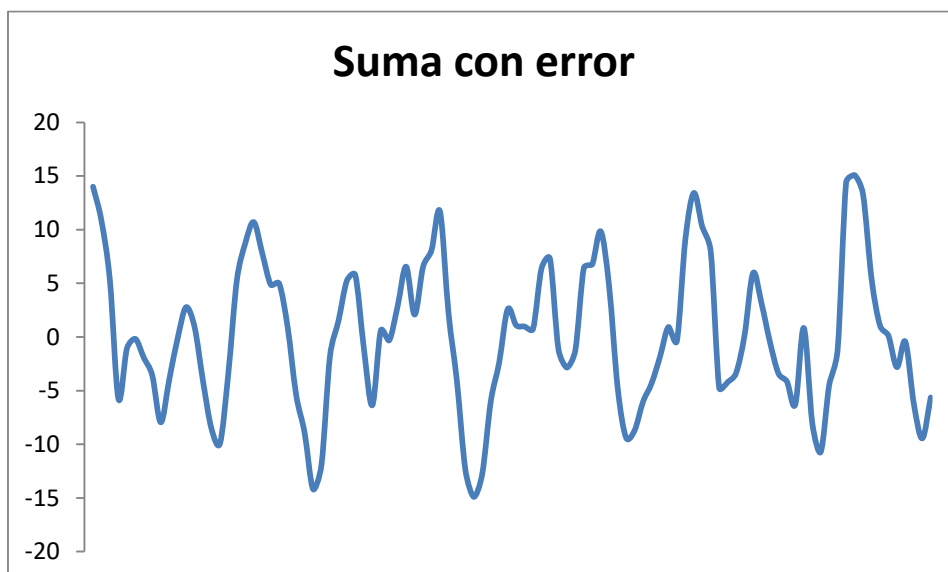
La suma de las series anteriores, sin agregar perturbaciones aleatorias, adopta el siguiente patrón



Ahora consideremos una serie de ruido blanco con media $\mu=0$ y varianza $\sigma^2 = 4$



A continuación se agrega la serie de errores a la suma de funciones seno y se obtiene una serie de apariencia más natural, que sin embargo encubre las diferentes funciones sinuenciales que la integran.



Suponga a continuación una serie de tiempo Z_t tiene un componente periódico (cíclico) que le otorga una forma sinuoidal expresada mediante el siguiente modelo.

$$Z_t = a_0 + A * \cos(ft + D) + e_t$$

Donde

a_0 Es la media de la serie

A Es la amplitud de variación. Como se sabe las funciones Seno y Coseno oscilan entre los valores -1 y 1. Si A se cambia por ejemplo a 4, entonces oscilarán entre -4 y 4.

f Es la frecuencia angular medida en radianes por unidad de tiempo. Si a f se la divide entre 2π , se obtendrá la **longitud de onda**. Un modelo con $f=2$, tendrá un ciclo de magnitud 1. Si $f=1$, se tendrá la mitad de un ciclo.

t Es la variable asociada al tiempo.

D Es el desplazamiento angular horizontal.

e_t Es el término de error, usualmente ruido blanco ($0, \sigma^2$)

El coseno de la suma de dos ángulos se puede expresar en forma alternativa:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

El modelo se puede expresar ahora, aprovechando la anterior igualdad:

$$Z_t = a_0 + a\cos(ft) + b\sin(ft) + e_t$$

Donde $a = A\cos(D)$ y $b = -A\sin(D)$

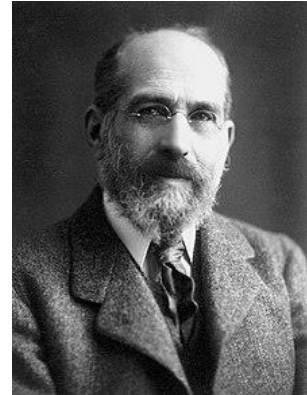
Este modelo se puede ajustar como un modelo lineal con $X_1 = \cos(ft)$ y $X_2 = \sin(ft)$ como variables independientes y los valores **a, b** corresponden a los coeficientes de regresión.

Una generalización del modelo en forma múltiple adopta la siguiente forma:

$$Z_t = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i \cos(f_i t) + \sum_{i=1}^k b_i \sin(f_i t) + e_t$$

EL PERIODOGRAMA

Si se supone que una serie de tiempo se expresa en un conjunto de ondas de senos y cosenos con diferentes frecuencias, es posible aplicar el concepto de **Periodograma**, introducido por el físico alemán-británico Arthur Shuster en 1898.



Para ilustrar los cálculos del periodograma, primero se supone que se tiene un número impar de observaciones $n=2q+1$. Se ajustará el modelo de Fourier de la siguiente forma:

$$Z_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i C_{it} + \sum_{i=1}^q \beta_i S_{it} + e_t$$

Donde

$$C_{it} = \cos(2\pi f_i t) \quad S_{it} = \sin(2\pi f_i t)$$

$f_i = i/n$ es el i -ésimo armónico de la frecuencia fundamental $1/n$

Los estimadores de mínimos cuadrados para los coeficientes α_i β_i son los siguientes:

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t$$

$$\hat{\alpha}_i = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n Z_t C_{it}$$

$$\hat{\beta}_i = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n Z_t S_{it}$$

$i=1,2,3,\dots,q$

El Periodograma consiste en los $q = (n-1)/2$ valores, para n impar o $q=n/2$ para n par :

$$I(f_i) = \frac{n}{2} (\hat{\alpha}_i^2 + \hat{\beta}_i^2) \quad i=1,2,3,\dots,q$$

$I(f_i)$ Se identifica como la intensidad correspondiente a la frecuencia f_i . Valores elevados del Periodograma se asocian a ciclos estacionales de la serie.

LA DENSIDAD ESPECTRAL

La **Densidad Espectral** se puede considerar como una **versión suavizada del Periodograma** que filtra el ruido de fondo.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[\lambda_0 C_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k C_k \cos(\omega k) \right]$$

En la práctica el número de sumandos **m** se selecciona de tal forma que el cociente entre el número de observaciones **n** cumpla:

$$0.34 < \frac{m}{n} < 0.5$$

Los ponderadores λ constituyen la denominada ventana espectral. Las ventanas más usuales son:

Ventana de Tukey

$$\lambda_k = 0.5 \left(1 + \cos(\pi k / m) \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, m$$

Ventana de Parzen

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 - 6k^2 / m^2 + 6k^3 / m^3 & k = 0, 1, \dots, m/2 \\ 2(1 - k/m)^3 & k = m/2, \dots, m \end{cases}$$

Ventana de Bartlett

$$\lambda_k = 1 - k/m \quad k = 0, \dots, m$$

Otra forma es mediante un Periodograma truncado y posteriormente alisado y que se conoce como ventana de Hamming.

$$\hat{I}(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[C_0 + 2 \sum_{K=1}^m C_k \cos(\omega k) \right]$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{4} \left[\hat{I}(\omega - \pi/m) + 2\hat{I}(\omega) + \hat{I}(\omega + \pi/m) \right]$$

La transformada de Fourier es una operación matemática **que transforma una señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia y viceversa**. En el análisis habitual de series, estamos acostumbrados al dominio de tiempo. En el dominio de tiempo, la señal se expresa, como su nombre lo indica, con respecto al tiempo. Por ende en el dominio de frecuencia, una señal es expresada con respecto a la frecuencia. La transformada discreta de Fourier (DFT), aplica a una serie discreta y no a una continua, lo cual se puede interpretar en el terreno de las comunicaciones, como **señales digitales y analógicas** respectivamente. La transformada rápida de Fourier (FFT) es un algoritmo que reduce notablemente el número de operaciones para calcular la transformada discreta de Fourier. En el ajuste de una transformada discreta de Fourier se involucran n^2 operaciones y para el mismo cálculo la transformada rápida emplea **$n\log(n)$** lo cual implica una reducción a menos del 5%.

La expresión de la transformada discreta de Fourier con sus partes real e imaginaria se presentan en las siguientes fórmulas.

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{n-1} Z(k) e^{i \frac{2\pi}{n} tk} \quad \text{En forma alternativa} \quad Z(t) = \sum_{k=1}^{n-1} Z(k) (\cos(2\pi / n) - i \sin(2\pi / n))^{kt}$$

La mayoría de los algoritmos de cálculo del Periodograma utilizan la transformada rápida de Fourier.

EJEMPLO 1 DEL CÁLCULO MANUAL DEL PERIODOGRAMA.

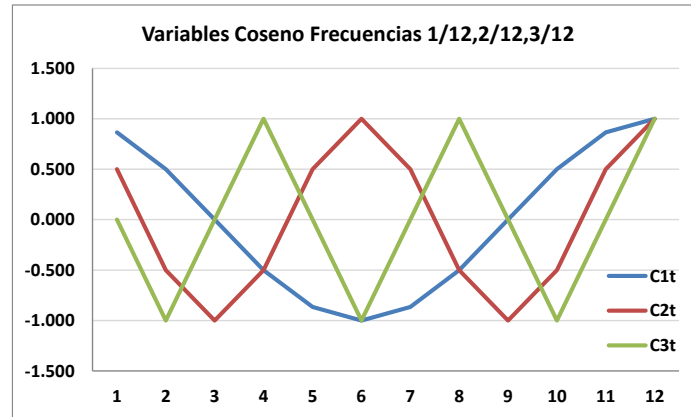
Este ejemplo fue proporcionado por Box y Jenkins. Los siguientes datos corresponden a temperaturas medias del centro de Inglaterra en el año de 1964. Se procederá al cálculo del Periodograma.

| Mes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-------------|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|
| Temperatura | 3.4 | 4.5 | 4.3 | 8.7 | 13.3 | 13.8 | 16.1 | 15.5 | 14.1 | 8.9 | 7.4 | 3.6 |

Primero se integran las variables independientes con senos y cosenos C_{it} y S_{it} :

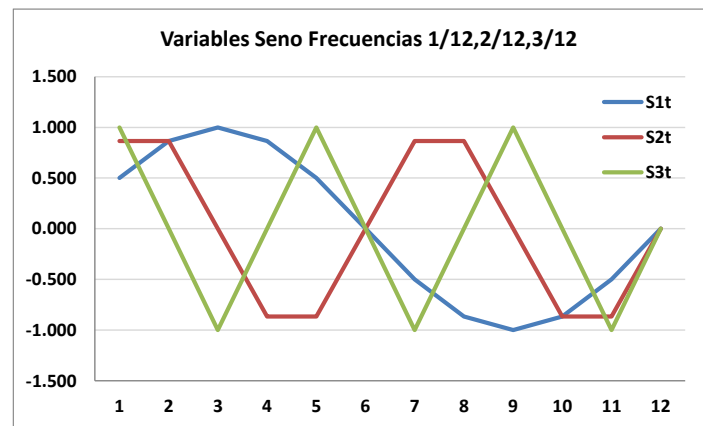
$$C_{it} = \cos(2\pi(i/12)t)$$

| t | Zt | C1t | C2t | C3t | C4t | C5t | C6t |
|----|------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 3.4 | 0.866025 | 0.500000 | 0.000000 | -0.500000 | -0.866025 | -1.000000 |
| 2 | 4.5 | 0.500000 | -0.500000 | -1.000000 | -0.500000 | 0.500000 | 1.000000 |
| 3 | 4.3 | 0.000000 | -1.000000 | 0.000000 | 1.000000 | 0.000000 | -1.000000 |
| 4 | 8.7 | -0.500000 | -0.500000 | 1.000000 | -0.500000 | -0.500000 | 1.000000 |
| 5 | 13.3 | -0.866025 | 0.500000 | 0.000000 | -0.500000 | 0.866025 | -1.000000 |
| 6 | 13.8 | -1.000000 | 1.000000 | -1.000000 | 1.000000 | -1.000000 | 1.000000 |
| 7 | 16.1 | -0.866025 | 0.500000 | 0.000000 | -0.500000 | 0.866025 | -1.000000 |
| 8 | 15.5 | -0.500000 | -0.500000 | 1.000000 | -0.500000 | -0.500000 | 1.000000 |
| 9 | 14.1 | 0.000000 | -1.000000 | 0.000000 | 1.000000 | 0.000000 | -1.000000 |
| 10 | 8.9 | 0.500000 | -0.500000 | -1.000000 | -0.500000 | 0.500000 | 1.000000 |
| 11 | 7.4 | 0.866025 | 0.500000 | 0.000000 | -0.500000 | -0.866025 | -1.000000 |
| 12 | 3.6 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |



$$S_{it} = \text{Sen}(2\pi(i/12)t)$$

| t | Zt | S1t | S2t | S3t | S4t | S5t | S6t |
|----|------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| 1 | 3.4 | 0.500000 | 0.866025 | 1.000000 | 0.866025 | 0.500000 | 0.000000 |
| 2 | 4.5 | 0.866025 | 0.866025 | 0.000000 | -0.866025 | -0.866025 | 0.000000 |
| 3 | 4.3 | 1.000000 | 0.000000 | -1.000000 | 0.000000 | 1.000000 | 0.000000 |
| 4 | 8.7 | 0.866025 | -0.866025 | 0.000000 | 0.866025 | -0.866025 | 0.000000 |
| 5 | 13.3 | 0.500000 | -0.866025 | 1.000000 | -0.866025 | 0.500000 | 0.000000 |
| 6 | 13.8 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 7 | 16.1 | -0.500000 | 0.866025 | -1.000000 | 0.866025 | -0.500000 | 0.000000 |
| 8 | 15.5 | -0.866025 | 0.866025 | 0.000000 | -0.866025 | 0.866025 | 0.000000 |
| 9 | 14.1 | -1.000000 | 0.000000 | 1.000000 | 0.000000 | -1.000000 | 0.000000 |
| 10 | 8.9 | -0.866025 | -0.866025 | 0.000000 | 0.866025 | 0.866025 | 0.000000 |
| 11 | 7.4 | -0.500000 | -0.866025 | -1.000000 | -0.866025 | -0.500000 | 0.000000 |
| 12 | 3.6 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |



A continuación se calcula la suma producto que permite la estimación de los primeros coeficientes.

$$\hat{\alpha}_i = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n Z_t C_{it}$$

| Zt*C1t | Zt*C2t | Zt*C3t | Zt*C4t | Zt*C5t | Zt*C6t |
|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|
| 2.94449 | 1.70000 | 0.00000 | -1.70000 | -2.94449 | -3.40000 |
| 2.25000 | -2.25000 | -4.50000 | -2.25000 | 2.25000 | 4.50000 |
| 0.00000 | -4.30000 | 0.00000 | 4.30000 | 0.00000 | -4.30000 |
| -4.35000 | -4.35000 | 8.70000 | -4.35000 | -4.35000 | 8.70000 |
| -11.51814 | 6.65000 | 0.00000 | -6.65000 | 11.51814 | -13.30000 |
| -13.80000 | 13.80000 | -13.80000 | 13.80000 | -13.80000 | 13.80000 |
| -13.94301 | 8.05000 | 0.00000 | -8.05000 | 13.94301 | -16.10000 |
| -7.75000 | -7.75000 | 15.50000 | -7.75000 | -7.75000 | 15.50000 |
| 0.00000 | -14.10000 | 0.00000 | 14.10000 | 0.00000 | -14.10000 |
| 4.45000 | -4.45000 | -8.90000 | -4.45000 | 4.45000 | 8.90000 |
| 6.40859 | 3.70000 | 0.00000 | -3.70000 | -6.40859 | -7.40000 |
| 3.60000 | 3.60000 | 3.60000 | 3.60000 | 3.60000 | 3.60000 |
| a1 | a2 | a3 | a4 | a5 | a6 |
| -5.28468 | 0.05000 | 0.10000 | -0.51667 | 0.08468 | -0.60000 |

De manera similar se calcula el segundo grupo de coeficientes

$$\hat{\beta}_t = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n Z_t S_{it}$$

| Zt*S1t | Zt*S2t | Zt*S3t | Zt*S4t | Zt*S5t | Zt*S6t |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|
| 1.70000 | 2.94449 | 3.40000 | 2.94449 | 1.70000 | 0.00000 |
| 3.89711 | 3.89711 | 0.00000 | -3.89711 | -3.89711 | 0.00000 |
| 4.30000 | 0.00000 | -4.30000 | 0.00000 | 4.30000 | 0.00000 |
| 7.53442 | -7.53442 | 0.00000 | 7.53442 | -7.53442 | 0.00000 |
| 6.65000 | -11.51814 | 13.30000 | -11.51814 | 6.65000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| -8.05000 | 13.94301 | -16.10000 | 13.94301 | -8.05000 | 0.00000 |
| -13.42339 | 13.42339 | 0.00000 | -13.42339 | 13.42339 | 0.00000 |
| -14.10000 | 0.00000 | 14.10000 | 0.00000 | -14.10000 | 0.00000 |
| -7.70763 | -7.70763 | 0.00000 | 7.70763 | 7.70763 | 0.00000 |
| -3.70000 | -6.40859 | -7.40000 | -6.40859 | -3.70000 | 0.00000 |
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| b1 | b2 | b3 | b4 | b5 | b6 |
| -3.81658 | 0.17321 | 0.50000 | -0.51962 | -0.58342 | 0.00000 |

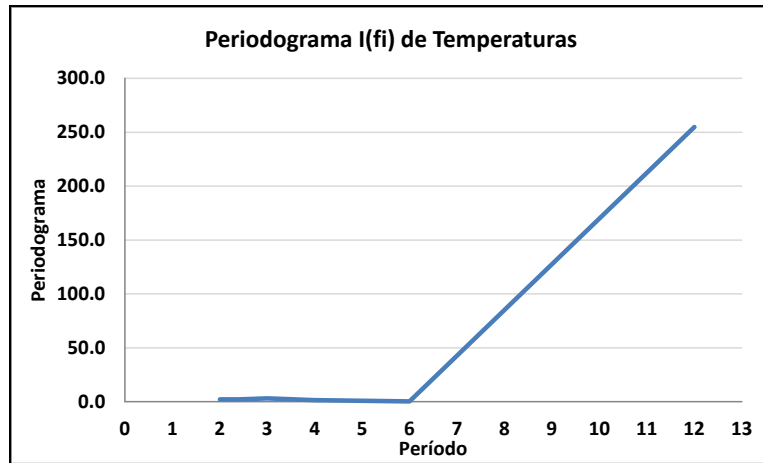
Finalmente el Periodograma se calcula con la siguiente fórmula:

$$I(f_i) = \frac{n}{2} (\alpha_i^2 + \beta_i^2)$$

El valor máximo corresponde al período T=12 y frecuencia fi=1/12=0.083. Se incluye además la gráfica de Período vs Periodograma.

Cálculo del Periodograma

| Coeficientes | Valor | Coeficientes | Valor | Indice | Período T | Frecuencia fi | I (fi) |
|--------------|----------|--------------|----------|--------|-----------|---------------|----------|
| a1 | -5.28468 | b1 | -3.81658 | 1 | 12 | 0.083 | 254.96 |
| a2 | 0.05000 | b2 | 0.17321 | 2 | 6 | 0.167 | 0.20 |
| a3 | 0.10000 | b3 | 0.50000 | 3 | 4 | 0.250 | 1.56 |
| a4 | -0.51667 | b4 | -0.51962 | 4 | 3 | 0.333 | 3.22 |
| a5 | 0.08468 | b5 | -0.58342 | 5 | 2.40 | 0.417 | 2.09 |
| a6 | -0.60000 | b6 | 0.00000 | 6 | 2 | 0.500 | 2.16 |

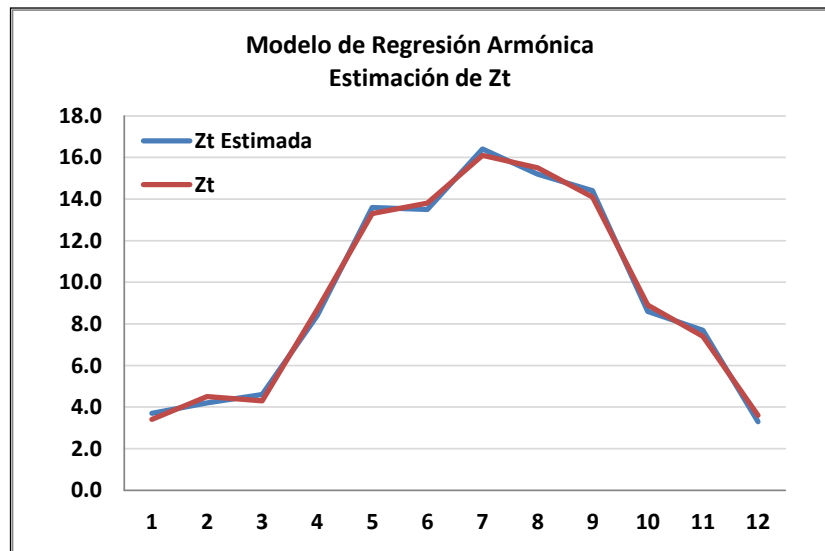


Finalmente utilizando los coeficientes calculados, se puede obtener una estimación de los valores Z_t . Este modelo lineal se conoce también como **Regresión Armónica**.

$$\hat{Z}_t = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^q \hat{\alpha}_i C_{it} + \sum_{i=1}^q \hat{\beta}_i S_{it}$$

Se puede observar la excelente estimación, pero hay que considerar que se tiene un modelo con 12 coeficientes.

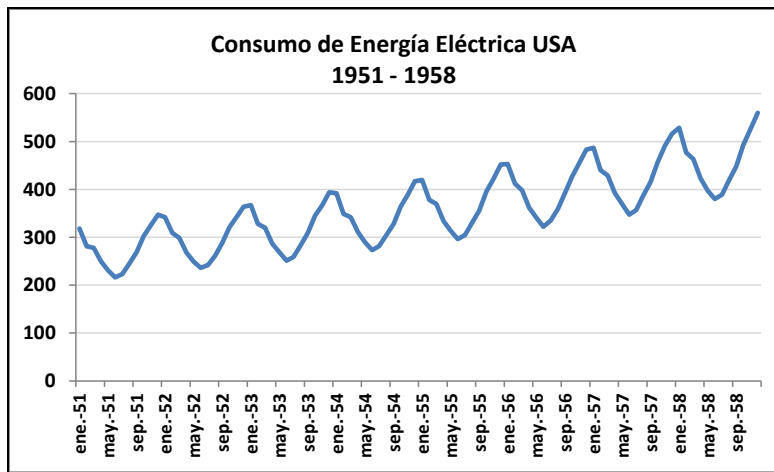
| Zt Estimada | Zt |
|-------------|------|
| 3.7 | 3.4 |
| 4.2 | 4.5 |
| 4.6 | 4.3 |
| 8.4 | 8.7 |
| 13.6 | 13.3 |
| 13.5 | 13.8 |
| 16.4 | 16.1 |
| 15.2 | 15.5 |
| 14.4 | 14.1 |
| 8.6 | 8.9 |
| 7.7 | 7.4 |
| 3.3 | 3.6 |



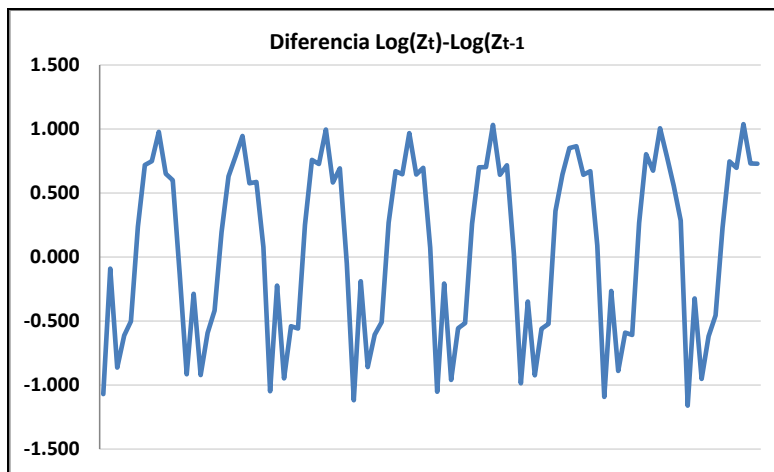
EJEMPLO 2. CÁLCULO DEL PERIODOGRAMA ENERGÍA ELÉCTRICA EN USA.

La serie de datos sobre consumo de energía eléctrica en Estados Unidos de 1951 a 1958, ha sido empleada en otros análisis. Se trata de $n=96$ observaciones mensuales, cuya gráfica claramente estacional se presenta a continuación.

| Mes | 1951 | 1952 | 1953 | 1954 | 1955 | 1956 | 1957 | 1958 |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Ene | 318 | 342 | 367 | 392 | 420 | 453 | 487 | 529 |
| Feb | 281 | 309 | 328 | 349 | 378 | 412 | 440 | 477 |
| Mar | 278 | 299 | 320 | 342 | 370 | 398 | 429 | 463 |
| Abr | 250 | 268 | 287 | 311 | 334 | 362 | 393 | 423 |
| May | 231 | 249 | 269 | 290 | 314 | 341 | 370 | 398 |
| Jun | 216 | 236 | 251 | 273 | 296 | 322 | 347 | 380 |
| Jul | 223 | 242 | 259 | 282 | 305 | 335 | 357 | 389 |
| Ago | 245 | 262 | 284 | 305 | 330 | 359 | 388 | 419 |
| Sep | 269 | 288 | 309 | 328 | 356 | 392 | 415 | 448 |
| Oct | 302 | 321 | 345 | 364 | 396 | 427 | 457 | 493 |
| Nov | 325 | 342 | 367 | 389 | 422 | 454 | 491 | 526 |
| Dic | 347 | 364 | 394 | 417 | 452 | 483 | 516 | 560 |



Se ha calculado la raíz cuadrada de serie y se ha tomado la primera diferencia para hacerla estacionaria en media y varianza.



El código fuente en SPSS para obtener el Periodograma de la serie de diferencias de raíces cuadradas de la serie original mediante la transformada rápida de Fourier que se identifica como ENERGIA, se presenta a continuación. Como procedimiento de alisamiento de la densidad espectral se selecciona la ventana de Hamming. Otras alternativas de suavizamiento son las ventanas de Parzen,

DATASET ACTIVATE Conjunto_de_datos0.

*** Análisis espectral.**

TSET PRINT=DETAILED.

SPECTRA

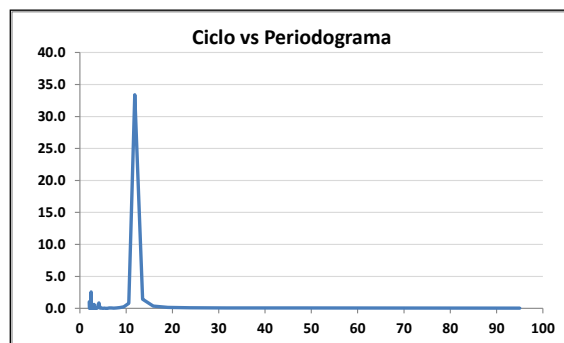
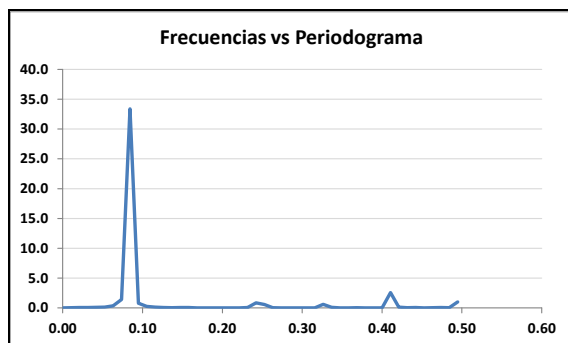
/VARIABLES=ENERGIA

/WINDOW=HAMMING

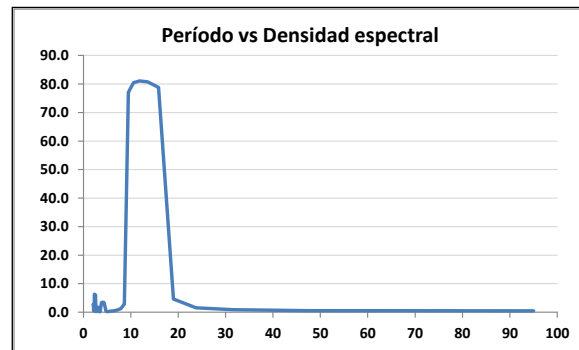
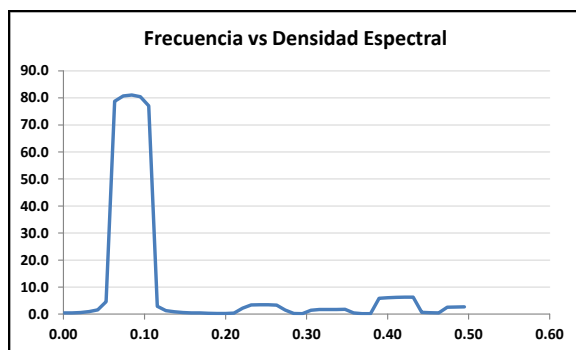
/CENTER

/PLOT=P S BY FREQUENCY PERIOD.

La siguiente tabla muestra el reporte de SPSS del Periodograma calculado, asociado a frecuencias y períodos. Se destaca la frecuencia 0.0842105 cuyo período asociado es 11.875 redondeado a 12, en cuyos valores el Períodograma alcanza su máximo. Esto es el patrón se repite cada 12 meses. Las siguientes gráficas relacionan el periodograma con frecuencias y ciclos o períodos.



La densidad espectral constituye un suavizamiento del periodograma para evitar perturbaciones de fondo, pero provoca un encubrimiento de las frecuencias más destadadas.



La tabla con los valores de $n/2$ frecuencias, períodos (ciclos), coeficientes α y β : así como el periodograma y la densidad espectral filtrada con la ventana de Hamming se presenta a continuación. En ella el Período es el recíproco de la frecuencia $T=1/f$ las transformaciones seno y coseno contienen los coeficientes α y β . El Peridograma se obtiene mediante la fórmula ya revisada que se presenta a continuación y el espectro con la aplicación de una ventana de Hamming.

$$I(f_i) = \frac{n}{2} (\alpha_i^2 + \beta_i^2)$$

PERIODOGRAMA

Nombre de la serie: ENERGIA

| No | Frecuencia | Período | α Transformación seno | β Transformación coseno | Periodograma | Estimación de la densidad espectral |
|----|------------|----------|------------------------------------|-------------------------------------|--------------|---|
| 1 | 0.0000000 | | 0.0000000 | .07341771 | 0.00000000 | .456862088 |
| 2 | 0.0105263 | 95.00000 | -0.0053013 | .03013507 | 0.04400266 | .467139099 |
| 3 | 0.0210526 | 47.50000 | 0.0054241 | .03484248 | 0.05844071 | .580590100 |
| 4 | 0.0315789 | 31.66667 | 0.0072671 | .03585735 | 0.06291230 | .903062643 |
| 5 | 0.0421053 | 23.75000 | 0.0215206 | .03937877 | 0.09464963 | 1.567774823 |
| 6 | 0.0526316 | 19.00000 | 0.0318567 | .04542244 | 0.14466811 | 4.614577313 |
| 7 | 0.0631579 | 15.83333 | 0.0502270 | .06898835 | 0.34226059 | 78.787804331 |
| 8 | 0.0736842 | 13.57143 | 0.1205341 | .12577058 | 1.42629501 | 80.719343397 |
| 9 | 0.0842105 | 11.87500 | -0.6901138 | -.48395684 | 33.39215249 | 81.073215322 |
| 10 | 0.0947368 | 10.55556 | -0.1086180 | -.07122566 | 0.79293517 | 80.473076199 |
| 11 | 0.1052632 | 9.50000 | -0.0671163 | -.02756556 | 0.24742980 | 77.092524111 |
| 12 | 0.1157895 | 8.63636 | -0.0439525 | -.03016647 | 0.13356633 | 2.890294514 |
| 13 | 0.1263158 | 7.91667 | -0.0401738 | .00111645 | 0.07591354 | 1.251688422 |
| 14 | 0.1368421 | 7.30769 | -0.0304812 | .00793943 | 0.04663043 | .857299430 |
| 15 | 0.1473684 | 6.78571 | -0.0349618 | -.00175728 | 0.05759453 | .590106398 |
| 16 | 0.1578947 | 6.33333 | -0.0304890 | .02393229 | 0.07060955 | .458884025 |
| 17 | 0.1684211 | 5.93750 | -0.0166029 | -.00336404 | 0.01348778 | .404193951 |
| 18 | 0.1789474 | 5.58824 | -0.0190644 | -.00009735 | 0.01708263 | .318378374 |
| 19 | 0.1894737 | 5.27778 | -0.0218075 | .00004202 | 0.02235181 | .211387864 |
| 20 | 0.2000000 | 5.00000 | -0.0201887 | .00150883 | 0.01926346 | .231149360 |
| 21 | 0.2105263 | 4.75000 | -0.0210035 | .00610537 | 0.02248581 | .349930189 |
| 22 | 0.2210526 | 4.52381 | -0.0125714 | .01781664 | 0.02234727 | 2.165539854 |
| 23 | 0.2315789 | 4.31818 | -0.0236681 | .03064329 | 0.07046188 | 3.419320047 |
| 24 | 0.2421053 | 4.13043 | -0.0687730 | .11446461 | 0.83809820 | 3.493367059 |
| 25 | 0.2526316 | 3.95833 | 0.0279790 | -.10736352 | 0.57855816 | 3.474958336 |
| 26 | 0.2631579 | 3.80000 | -0.0050730 | -.03276238 | 0.05165811 | 3.324639567 |
| 27 | 0.2736842 | 3.65385 | 0.0176288 | -.00012952 | 0.01460718 | 1.500357495 |
| 28 | 0.2842105 | 3.51852 | 0.0027814 | -.01270811 | 0.00795390 | .229802802 |
| 29 | 0.2947368 | 3.39286 | -0.0129458 | -.01679944 | 0.02114135 | .132297185 |
| 30 | 0.3052632 | 3.27586 | -0.0037245 | -.01223480 | 0.00768742 | 1.447221481 |
| 31 | 0.3157895 | 3.16667 | -0.0112545 | .00634951 | 0.00784802 | 1.686202956 |
| 32 | 0.3263158 | 3.06452 | -0.0348842 | .10802021 | 0.60560802 | 1.680773929 |
| 33 | 0.3368421 | 2.96875 | 0.0094063 | -.04799146 | 0.11240794 | 1.691242039 |
| 34 | 0.3473684 | 2.87879 | -0.0088246 | -.01694940 | 0.01716232 | 1.741633401 |
| 35 | 0.3578947 | 2.79412 | -0.0080618 | -.01467644 | 0.01317837 | .432022881 |
| 36 | 0.3684211 | 2.71429 | -0.0134952 | -.02310497 | 0.03365014 | .192145788 |
| 37 | 0.3789474 | 2.63889 | 0.0038334 | -.01886833 | 0.01742333 | .182885669 |
| 38 | 0.3894737 | 2.56757 | 0.0095626 | .00237100 | 0.00456204 | 5.866932372 |
| 39 | 0.4000000 | 2.50000 | -0.0136001 | .00965151 | 0.01307142 | 6.086091026 |
| 40 | 0.4105263 | 2.43590 | -0.1691835 | .16128801 | 2.56793339 | 6.167862167 |
| 41 | 0.4210526 | 2.37500 | 0.0351672 | -.03606158 | 0.11924703 | 6.300930688 |
| 42 | 0.4315789 | 2.31707 | -0.0189044 | -.02628889 | 0.04927863 | 6.265005934 |
| 43 | 0.4421053 | 2.26190 | -0.0079642 | -.03728584 | 0.06832215 | .625145545 |
| 44 | 0.4526316 | 2.20930 | 0.0120742 | -.00774815 | 0.00967356 | .494385247 |
| 45 | 0.4631579 | 2.15909 | 0.0075855 | -.02567400 | 0.03368458 | .452595515 |
| 46 | 0.4736842 | 2.11111 | 0.0118225 | -.03392324 | 0.06065619 | 2.570607301 |
| 47 | 0.4842105 | 2.06522 | 0.0160952 | -.01974264 | 0.03049489 | 2.627910838 |
| 48 | 0.4947368 | 2.02128 | 0.0000000 | .14732273 | 1.02008738 | 2.691303465 |

LA DENSIDAD ESPECTRAL Y PERIODOGRAMA DE MODELOS AR(1) Y MA(1)

El teorema de H. Wold (1938) establece que la función de Distribución Espectral $F(\omega)$ se descompone en dos partes, una aleatoria $F_1(\omega)$ y una determinista $F_2(\omega)$:

$$F(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega)$$

La parte determinística se puede representar mediante una serie de Fourier.

La Densidad Espectral es la derivada de la función de Distribución Espectral $F(\omega)$

$$f(\omega) = F'(\omega)$$

La Densidad Espectral se relaciona con la función de autocovarianza a través de la siguiente integral.

$$\gamma_k = \int_0^\pi \cos(\omega k) f(\omega) d\omega$$

La función de autocovarianza se puede ver como la transformada de Fourier de la densidad Espectral y por tanto esta última se obtiene mediante la transformada inversa de Fourier.

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(\omega k) \right] \quad \omega \in [0, \pi]$$

La Densidad Espectral se puede expresar en función de las autocorrelaciones al dividir la fórmula anterior entre γ_0

$$f^*(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(\omega k) \right] \quad \omega \in [0, \pi]$$

En consecuencia la función de autocorrelación también se puede expresar en la forma siguiente:

$$\rho_k = \int_0^\pi \cos(\omega k) f^*(\omega) d\omega$$

En consecuencia al tomar γ_0 , ésta se puede expresar por la integral:

$$\gamma_0 = \sigma_z^2 = \int_0^\pi f(\omega) d\omega$$

Ello significa que $f(\omega) d\omega$ representa la contribución a la varianza del proceso. Un pico en la función de Densidad Espectral significa que la frecuencia correspondiente contribuye a explicar en forma importante la varianza de Z_t .

Consideremos el caso particular de un proceso de ruido blanco $N(0,1)$. Tendrá varianza unitaria, pero no covaría, esto es:

$$\gamma_k = \begin{cases} 1 & \text{para } k = 0 \\ 0 & \text{para } k \geq 1 \end{cases}$$

Entonces su densidad espectral resulta constante, esto es su espectro es plano. La frase “Ruido Blanco” tiene su origen en el espectro de la luz blanca, que es plano.

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(\omega k) \right] = \frac{1}{\pi} \gamma_0 = \frac{1}{\pi} \sigma_x^2$$

ESPECTRO DE UN MODELO AR(1)

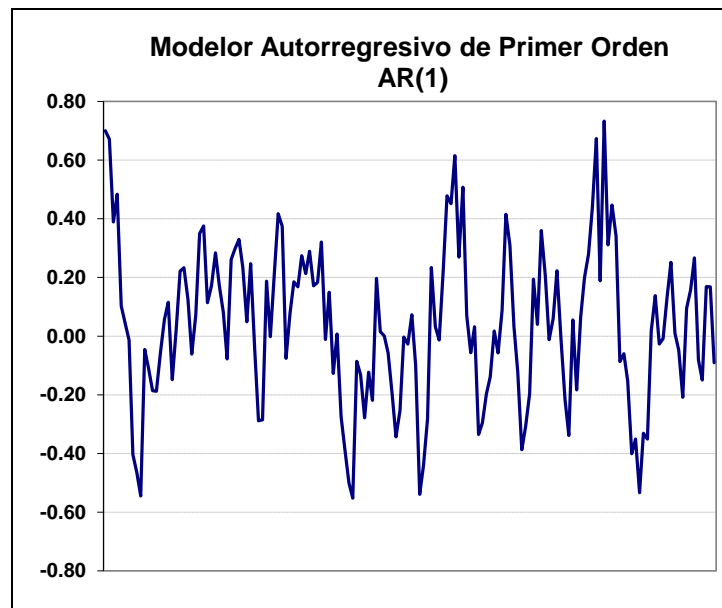
La función de densidad espectral de un proceso AR(1) en función de autocorrelaciones es la siguiente:

$$f^*(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[\rho_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(\omega k) \right]$$

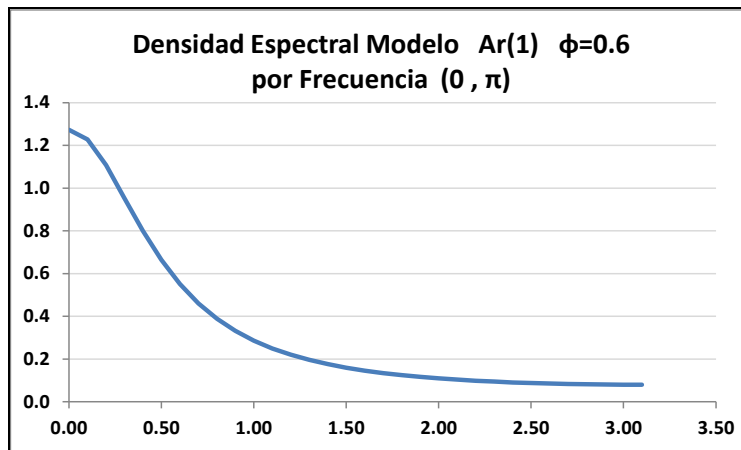
Si $\rho_0 = 1$ y $\rho_k = \phi^k$ para $k > 0$ y se sustituye en la función de densidad espectral.

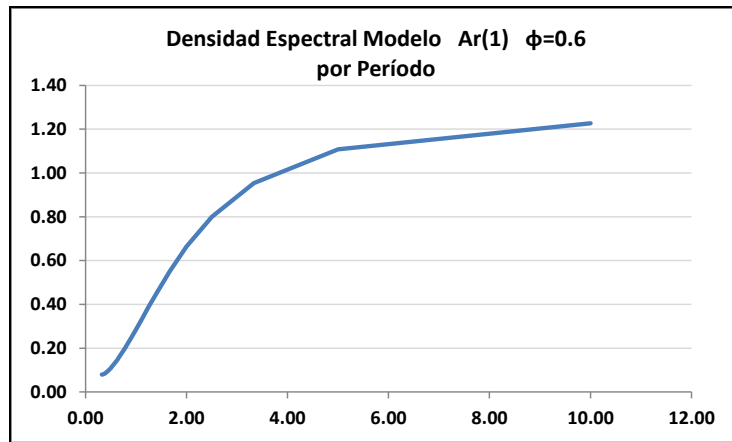
$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= \frac{1}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \cos(\omega k) \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1 - \phi^2}{1 - 2\phi \cos(\omega) + \phi^2} \quad \omega \in [0, \pi] \end{aligned}$$

Una realización de un modelo AR(1) con $\phi = 0.6$ se presenta a continuación. Observe que la serie tiende a permanecer abajo o arriba de la media cero, una vez que la cruza en cualquier sentido.



Se procede a graficar la función de densidad espectral de 0 a π para $\phi = 0.6$. Se observa un mayor valor de la Función de Densidad Espectral para frecuencias bajas, lo que se traduce en mayor valor para los ciclos largos.





ESPECTRO DE UN MODELO MA(1)

La función de densidad espectral de un proceso MA(1) en función de autocorrelaciones es la siguiente:

$$f^*(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[\rho_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(\omega k) \right]$$

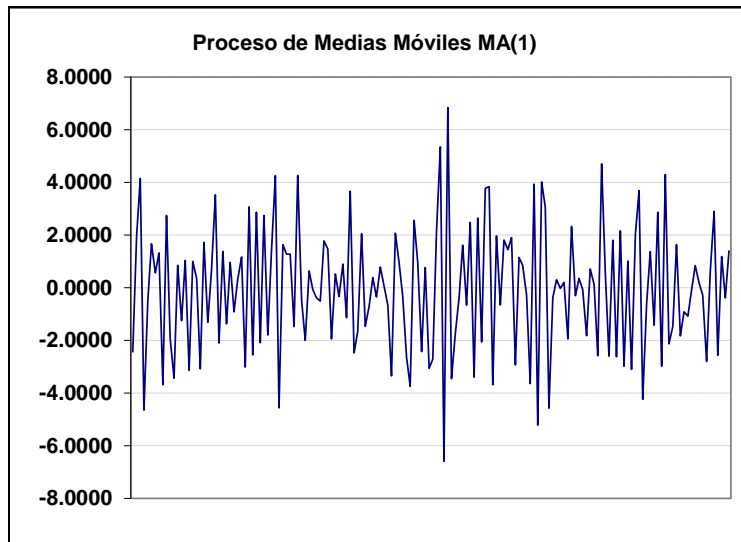
Un proceso MA(1) tiene como función de autocorrelación la siguiente:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & \text{para } k = 0 \\ -\frac{\theta}{1 + \theta^2} & \text{para } k = 1 \\ 0 & \text{para } k \geq 2 \end{cases}$$

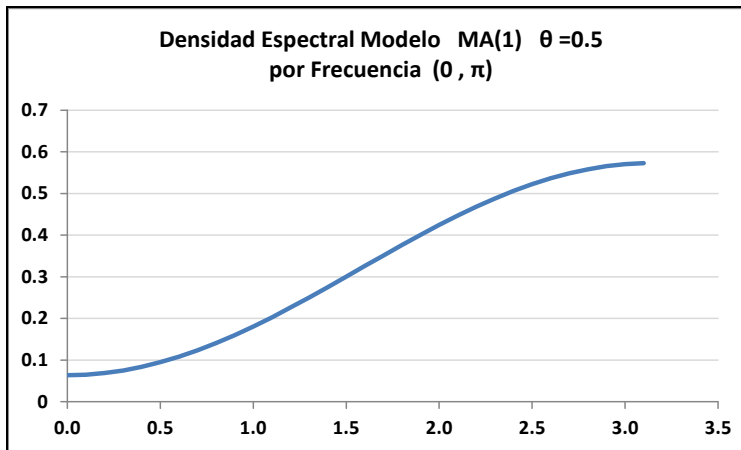
Puesto que la serie solamente adopta valor mayor a cero para $k=1$, se tiene

$$f^*(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[1 - 2 \frac{\theta}{1 + \theta^2} \cos(\omega) \right]$$

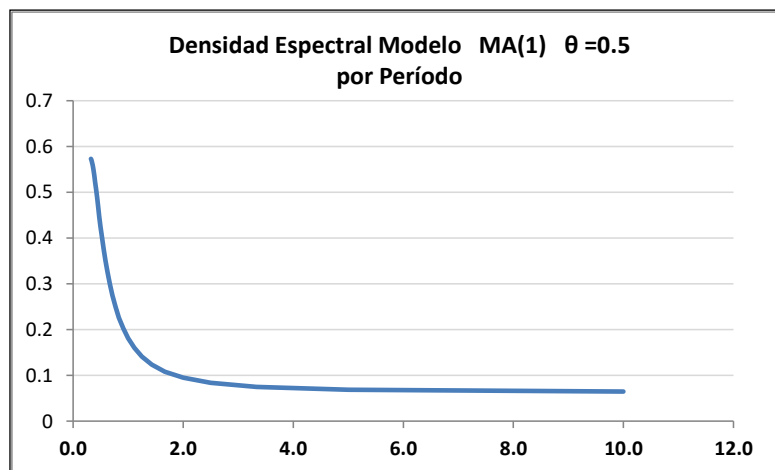
A continuación se presenta la gráfica de una realización de un modelo MA(1) con $\theta = 0.5$



Observe que la densidad espectral adopta valores altos para frecuencias altas.

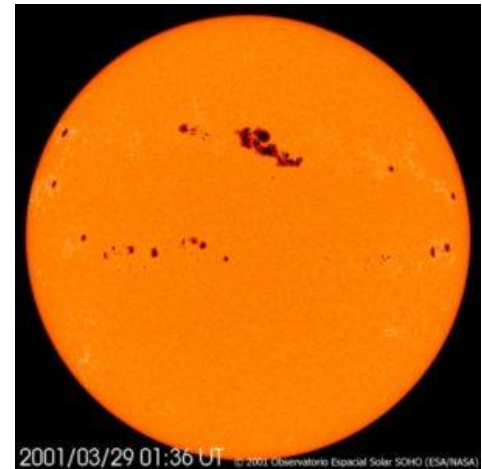


La Densidad Espectral del modelo MA(1) adopta valores altos para períodos cortos y muy bajos para períodos largos.



EJEMPLO 3 ANALISIS DE LA FRECUENCIA DE MANCHAS SOLARES

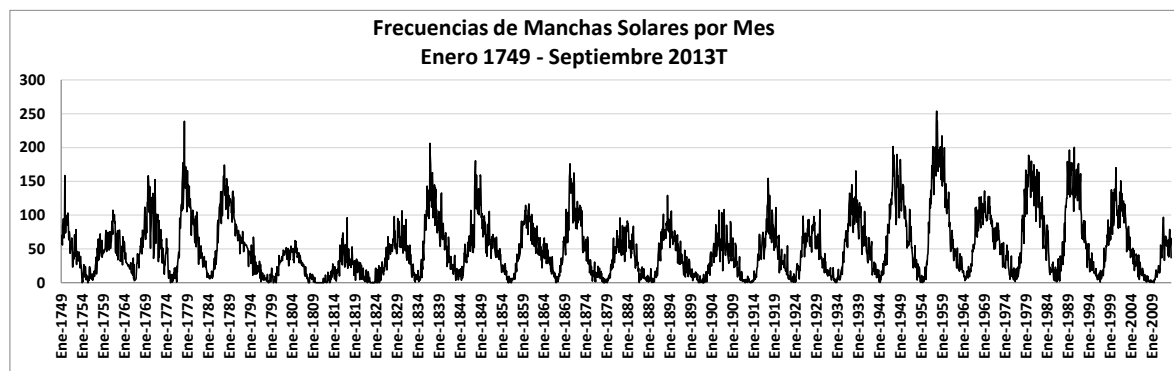
Las manchas solares son regiones de la fotosfera del Sol en las cuales disminuye la temperatura, del orden del 30%, y por contraste con menor brillo que las regiones adyacentes y se ven oscuras. Su diámetro puede superar fácilmente los 12,000 km., esto es el doble del radio terrestre. Las manchas solares presentan una elevada actividad magnética. Esta actividad magnética altera la ionosfera de la Tierra y provoca alteraciones importantes en las telecomunicaciones. También se relaciona con la presencia de auroras boreales.



La presencia las manchas solares ha llamado la atención de los astrónomos desde hace muchos siglos y a lo largo del tiempo se ha observado que su frecuencia varía y se han detectado comportamientos periódicos.

Para identificar los ciclos de actividad solar, se dispone de conteos mensuales que los astrónomos han recolectado desde hace varios siglos. La lista anexa corresponde a observaciones mensuales desde enero de 1749 a septiembre de 2013, esto es 3,177

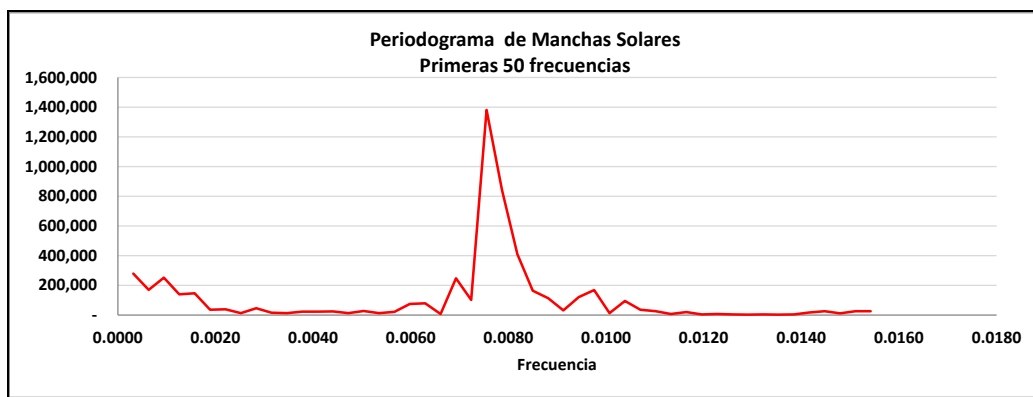
observaciones. La gráfica siguiente permite apreciar claramente períodos de mayor frecuencia, hasta 253 manchas en un mes.



El análisis espectral de esta serie, calculado mediante SPSS proporciona el siguiente reporte, del cual se presentan los primeros 50 renglones de frecuencias y períodos, pues la tabla completa se integra por 1589 renglones.

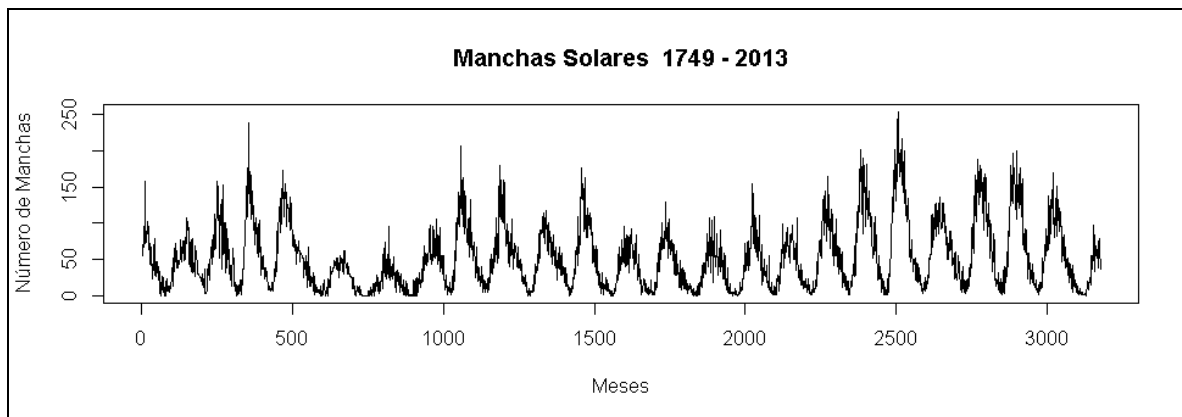
| Periodograma Manchas Solares | | | | | | |
|------------------------------|---------------|-----------|---------------------|-----------------------|--------------|-------------------------------------|
| k | Frecuencia fi | Periodo T | Transformación seno | Transformación coseno | Periodograma | Estimación de la Densidad Espectral |
| 1 | | | 0.00000 | 51.96291 | - | 2,007,996.6 |
| 2 | 0.000315 | 3177.00 | -9.98680 | 8.72721 | 279,329.97 | 2,191,371.3 |
| 3 | 0.000630 | 1588.50 | -10.16596 | -1.73319 | 168,885.00 | 1,877,970.2 |
| 4 | 0.000944 | 1059.00 | 11.40983 | -5.26481 | 250,749.26 | 2,204,691.0 |
| 5 | 0.001259 | 794.25 | 1.22334 | -9.28964 | 139,416.94 | 1,659,272.4 |
| 6 | 0.001574 | 635.40 | -8.12043 | -5.09012 | 145,858.90 | 1,366,985.4 |
| 7 | 0.001889 | 529.50 | -4.53330 | -1.42036 | 35,838.31 | 831,952.7 |
| 8 | 0.002203 | 453.86 | 4.42925 | -2.13612 | 38,399.91 | 622,636.8 |
| 9 | 0.002518 | 397.13 | 2.71483 | 0.34638 | 11,894.57 | 328,592.1 |
| 10 | 0.002833 | 353.00 | 2.16872 | 4.92407 | 45,972.38 | 277,373.8 |
| 11 | 0.003148 | 317.70 | 0.25619 | -3.02008 | 14,588.17 | 241,846.0 |
| 12 | 0.003462 | 288.82 | -2.85621 | 0.10683 | 12,972.94 | 263,919.5 |
| 13 | 0.003777 | 264.75 | -2.09266 | -3.13277 | 22,539.22 | 212,889.9 |
| 14 | 0.004092 | 244.38 | 2.48398 | 2.74329 | 21,748.95 | 207,172.0 |
| 15 | 0.004407 | 226.93 | 3.75632 | 0.70288 | 23,191.16 | 236,524.4 |
| 16 | 0.004721 | 211.80 | 0.20220 | 2.74556 | 12,035.44 | 213,446.4 |
| 17 | 0.005036 | 198.56 | 3.55280 | -1.94904 | 26,076.82 | 212,377.8 |
| 18 | 0.005351 | 186.88 | 0.86028 | -2.63923 | 12,236.48 | 325,045.5 |
| 19 | 0.005666 | 176.50 | -2.59156 | 2.58442 | 21,271.94 | 475,295.6 |
| 20 | 0.005980 | 167.21 | 2.01082 | 6.49882 | 73,489.53 | 432,242.2 |
| 21 | 0.006295 | 158.85 | 3.76937 | 5.96743 | 79,111.52 | 957,688.3 |
| 22 | 0.006610 | 151.29 | 1.93160 | -0.76572 | 6,856.07 | 1,138,935.1 |
| 23 | 0.006925 | 144.41 | 12.44026 | -0.81437 | 246,812.09 | 4,070,278.3 |
| 24 | 0.007240 | 138.13 | -8.00306 | 0.54739 | 102,185.52 | 5,780,148.4 |
| 25 | 0.007554 | 132.38 | 9.30330 | 27.99659 | 1,382,132.28 | 6,683,949.9 |
| 26 | 0.007869 | 127.08 | -21.23912 | 8.91105 | 842,444.97 | 6,496,162.2 |
| 27 | 0.008184 | 122.19 | -16.05474 | -0.80235 | 410,336.72 | 6,520,322.6 |
| 28 | 0.008499 | 117.67 | 9.63880 | -3.11832 | 162,977.19 | 3,492,656.8 |
| 29 | 0.008813 | 113.46 | 8.24863 | 1.76204 | 112,977.63 | 1,873,673.1 |
| 30 | 0.009128 | 109.55 | 0.85274 | -4.29813 | 30,491.30 | 1,329,777.3 |
| 31 | 0.009443 | 105.90 | 5.57432 | -6.65533 | 119,681.83 | 990,912.9 |
| 32 | 0.009758 | 102.48 | 5.18055 | -8.86884 | 167,524.96 | 949,509.9 |
| 33 | 0.010072 | 99.28 | -1.02283 | -2.51392 | 11,697.18 | 960,368.7 |
| 34 | 0.010387 | 96.27 | -1.63276 | 7.53917 | 94,494.01 | 748,681.8 |
| 35 | 0.010702 | 93.44 | -4.38418 | 1.74156 | 35,339.37 | 387,028.0 |
| 36 | 0.011017 | 90.77 | -2.32436 | 3.23310 | 25,178.64 | 404,173.8 |
| 37 | 0.011331 | 88.25 | 1.76851 | 0.83410 | 6,071.46 | 199,546.9 |
| 38 | 0.011646 | 85.86 | 3.49035 | -0.06212 | 19,352.02 | 134,574.8 |
| 39 | 0.011961 | 83.61 | -0.42458 | -1.34107 | 3,142.22 | 85,912.5 |
| 40 | 0.012276 | 81.46 | -0.10726 | 1.99426 | 6,333.89 | 77,132.6 |
| 41 | 0.012590 | 79.43 | 0.71271 | -1.29124 | 3,454.32 | 41,636.0 |
| 42 | 0.012905 | 77.49 | 1.07037 | 0.45759 | 2,151.87 | 38,130.5 |
| 43 | 0.013220 | 75.64 | -0.98455 | 1.11265 | 3,505.24 | 31,657.5 |
| 44 | 0.013535 | 73.88 | 0.19227 | 0.97790 | 1,577.29 | 60,378.7 |
| 45 | 0.013850 | 72.20 | 0.70664 | -1.29210 | 3,444.14 | 111,482.5 |
| 46 | 0.014164 | 70.60 | -3.20139 | -0.02622 | 16,276.38 | 126,690.5 |
| 47 | 0.014479 | 69.07 | 3.47470 | 1.91003 | 24,966.15 | 180,754.0 |
| 48 | 0.014794 | 67.60 | -2.44571 | -0.70791 | 10,294.41 | 230,324.0 |
| 49 | 0.015109 | 66.19 | -0.78384 | 3.94684 | 25,712.87 | 286,776.6 |
| 50 | 0.015423 | 64.84 | -1.38222 | -3.76489 | 25,573.72 | 254,595.0 |

A continuación se presenta el gráfico de Frecuencias vs Periodograma. El pico más alto corresponde a la frecuencia 0.007554 cuyo recíproco es el período 132.38 meses, equivalente a 11.03 años. Este es el período más destacado de las manchas solares y desde luego había sido identificado por los astrónomos hace muchos años. El pico menor que aparece al principio de la gráfica corresponde a una frecuencia 0.000994, corresponde a un período de 1,006 meses o su equivalente 83.8 años. También los astrónomos han identificado esta frecuencia de período más largo. El año de 1957-58, fue un año de elevada actividad solar y coincidió con **El Año Geofísico Internacional**, un proyecto que involucró a científicos de todas las ramas en un estudio profundo de la atmósfera, los océanos y el clima en general. También ese año la Unión Soviética colocó en órbita el primer satélite artificial Spunik I. El más próximo año de fuerte actividad solar será en 2023.

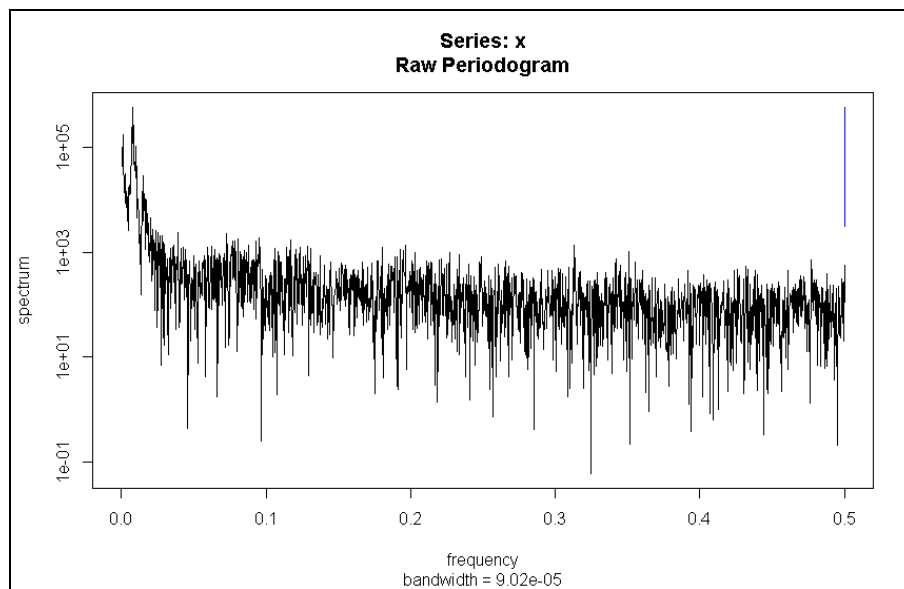


PERIODOGRAMA CON R

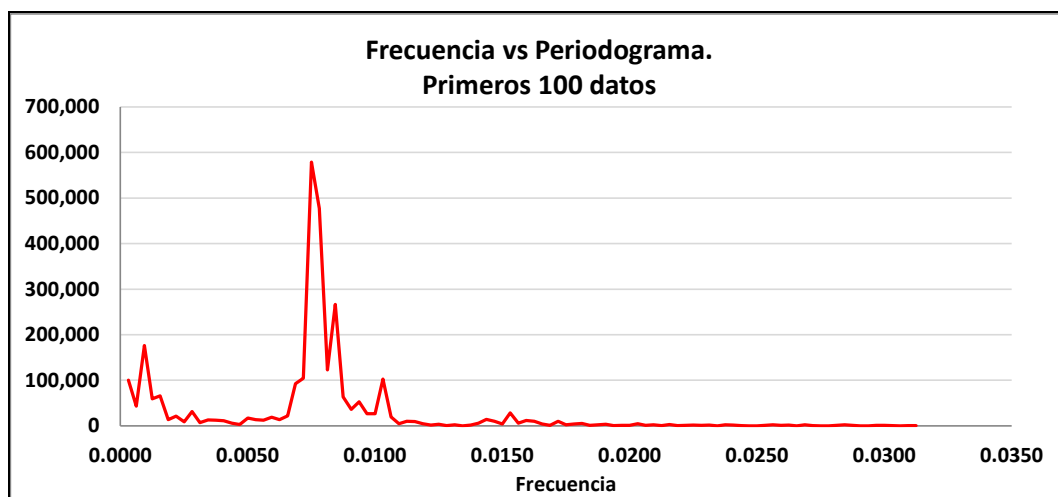
En el lenguaje R, la función que produce el Periodograma es `spectrum(DATOS)`. (Ver Scrip anexo). La gráfica de los datos obtenida mediante R, desde luego es consistente con la anterior.



R produce como resultado el gráfico Frecuencia vs Periodograma siguiente:



Del archivo asignado al reporte del Espectro, se extraen y graban en archivo CSV la frecuencia y el Periodograma. Se grafican los primeros 100 datos de ambas variables en Excel. El valor máximo del Periodograma corresponde la frecuencia 0.007500 y 579011.85 para el Periodograma. El período correspondiente al recíproco de la frecuencia máxima es $1/0.0075=133.3$ meses lo cual en años es 11.11, valor consistente con el obtenido mediante SPSS.



REGRESIÓN ARMÓNICA

La regresión armónica está fuertemente ligada al análisis espectral, pues mientras que éste nos permite identificar las frecuencias y períodos dominantes, la primera proporciona una alternativa de estimación en series que muestran un claro comportamiento estacional. El modelo general adopta la siguiente forma. Se puede estimar con un poco de esfuerzo por mínimos cuadrados. En principio el investigador debe determinar el número k de componentes armónicos que convenga a una buena estimación. Debe considerar que el número de parámetros a estimar no puede ser igual o mayor al número de observaciones.

$$Z_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \cos(2\pi f_i t) + \sum_{i=1}^k \beta_i \sin(2\pi f_i t) + \varepsilon_t$$

Considere el siguiente modelo lineal simplificado al considerar nulo el término constante.

$$Z_t = \alpha \cos(2\pi t / n) + \beta \sin(2\pi t / n) + e_t$$

Si por simplificación algebraica se definen $X_{1t} = \cos(2\pi t / n)$ $X_{2t} = \sin(2\pi t / n)$ se tiene una forma más simplificada del modelo.

$$Z_t = \alpha X_{1t} + \beta X_{2t} + \varepsilon_t$$

Se define el residual del modelo como la diferencia entre el valor observado y el estimado por el modelo lineal.

$$e_t = Z_t - \alpha X_{1t} - \beta X_{2t}$$

La suma de cuadrados de residuales resultante es la que se pretende minimizar.

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{t=1}^n (Z_t - \alpha X_{1t} - \beta X_{2t})^2$$

Se deriva la suma de cuadrados respecto de cada coeficiente y se iguala a cero para obtener un par ecuaciones lineales que se resuelven en forma simultánea y los estimadores obtenidos minimizan la suma de cuadrados de los residuales.

$$\frac{d \sum_{i=1}^n e_i^2}{d\alpha} = 2 \sum_{t=1}^n (X_{1t} Z_t - \alpha X_{1t}^2 - \beta X_{1t} X_{2t}) = 0$$

$$\frac{d \sum_{i=1}^n e_i^2}{d\beta} = 2 \sum_{t=1}^n (X_{2t} Z_t - \alpha X_{1t} X_{2t} - \beta X_{2t}^2) = 0$$

Las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^n X_{1t} Z_t &= \hat{\alpha} \sum_{t=1}^n X_{1t}^2 + \hat{\beta} \sum_{t=1}^n X_{1t} X_{2t} \\ \sum_{t=1}^n X_{2t} Z_t &= \hat{\alpha} \sum_{t=1}^n X_{1t} X_{2t} + \hat{\beta} \sum_{t=1}^n X_{2t}^2\end{aligned}$$

La solución del sistema para ambos coeficientes es la siguiente:

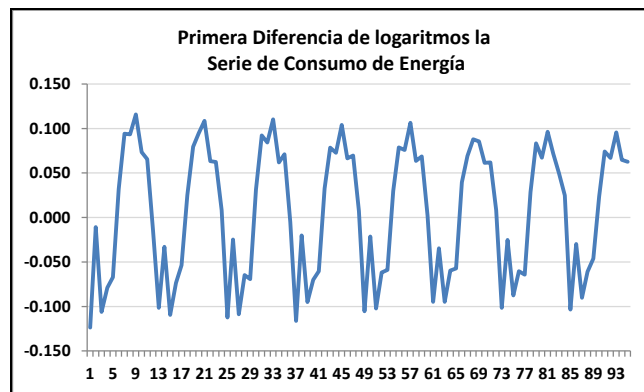
$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \frac{\sum_{t=1}^n X_{1t} Z_t \sum_{t=1}^n X_{2t}^2 - \sum_{t=1}^n X_{2t} Z_t \sum_{t=1}^n X_{1t} X_{2t}}{\sum_{t=1}^n X_{1t}^2 \sum_{t=1}^n X_{2t}^2 - \left(\sum_{t=1}^n X_{1t} X_{2t} \right)^2} \\ \hat{\beta} &= \frac{\sum_{t=1}^n X_{2t} Z_t \sum_{t=1}^n X_{1t}^2 - \sum_{t=1}^n X_{1t} Z_t \sum_{t=1}^n X_{1t} X_{2t}}{\sum_{t=1}^n X_{1t}^2 \sum_{t=1}^n X_{2t}^2 - \left(\sum_{t=1}^n X_{1t} X_{2t} \right)^2}\end{aligned}$$

De manera análoga, apoyados en un enfoque matricial se estima aplicar el modelo, que se integra por $2k+1$ parámetros.

$$Z_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \cos(2\pi f_i t) + \sum_{i=1}^k \beta_i \sin(2\pi f_i t) + \varepsilon_t$$

EJEMPLO SERIE DE CONSUMO DE ENERGÍA USA

Nuevamente considere la serie de datos de consumo de energía en USA. La serie original consta de 96 observaciones, pero después de tomar logaritmo de la serie y aplicar primera diferencia, para hacerla estacionaria en media y varianza se reduce a 95 observaciones.



Se considera $k=45$ con lo cual se tiene un modelo muy saturado de 91 coeficientes. A continuación se debe construir la matriz de datos, lo cual resulta un tanto engorroso, pues son 90 columnas con 45 correspondientes a Senos y otras 45 a Cosenos. La matriz de datos, en nuestro caso, tiene 90 columnas y 95 renglones.

$$C_{it} = \cos(2\pi f_i t) \quad S_{it} = \sin(2\pi f_i t)$$

$f_i = i/n$ es el i -ésimo armónico de la frecuencia fundamental $1/n$

A continuación se presentan las primeras 5 columnas y renglones de Cosenos y de Senos

| t | Log(Dif (Zt)) | C1t | C2t | C3t | C4t | C5t |
|---|---------------|------------|------------|------------|------------|-------------|
| 1 | -0.123696713 | 0.99781363 | 0.99126407 | 0.98037997 | 0.96520891 | 0.94581724 |
| 2 | -0.010733556 | 0.99126407 | 0.96520891 | 0.92228975 | 0.86325648 | 0.78914051 |
| 3 | -0.106160196 | 0.98037997 | 0.92228975 | 0.82800883 | 0.70123678 | 0.54694816 |
| 4 | -0.079043207 | 0.96520891 | 0.86325648 | 0.70123678 | 0.49042350 | 0.24548549 |
| 5 | -0.067139303 | 0.94581724 | 0.78914051 | 0.54694816 | 0.24548549 | -0.08257935 |

| S01t | S02t | S03t | S04t | S05t |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0.06609058 | 0.13189217 | 0.19711703 | 0.26147994 | 0.32469947 |
| 0.13189217 | 0.26147994 | 0.38649917 | 0.50476554 | 0.61421271 |
| 0.19711703 | 0.38649917 | 0.56071506 | 0.71292845 | 0.83716648 |
| 0.26147994 | 0.50476554 | 0.71292845 | 0.87148424 | 0.96940027 |
| 0.32469947 | 0.61421271 | 0.83716648 | 0.96940027 | 0.99658449 |

La tabla de análisis de la varianza asociada al ajuste se presenta a continuación. Se observa una paradoja, pues la F no es significativa, pero la R^2 no corregida por grados de libertad, es muy elevada. Ello se debe a la excesiva parametrización del modelo que provoca una importante disminución de la suma de cuadrados asociada a la regresión.

| ANOVA ^a | | | | | |
|---------------------|-----------|-------------------|----|------------------|---------|
| Modelo | | Suma de cuadrados | gl | Media cuadrática | F |
| Fuente de Variación | Regresión | .498000 | 90 | .00553333 | 2.75748 |
| | Residual | .008027 | 4 | .00200667 | |
| | Total | .506027 | 94 | | |

R2 0.984137864
Error Est 0.044795821

Los 45 coeficientes estimados de los Cosenos y los 45 de Senos se presentan en las siguientes tablas. Observe que la mayoría de los coeficientes resultan no significativos, pues sus probabilidades asociadas rebasan sensiblemente el usual 5%, pero se conservan para ser utilizados adelante. El ajuste es excelente, como lo anticipa la elevada $R^2=0.9841$. La siguiente gráfica presenta los valores observados y estimados de la serie a través del modelo ajustado, después de aplicar en forma inversa las diferencias y exponenciales de los logaritmos. Prácticamente son indistinguibles sus diferencias, pero recuerde la gran cantidad de parámetros empleados.

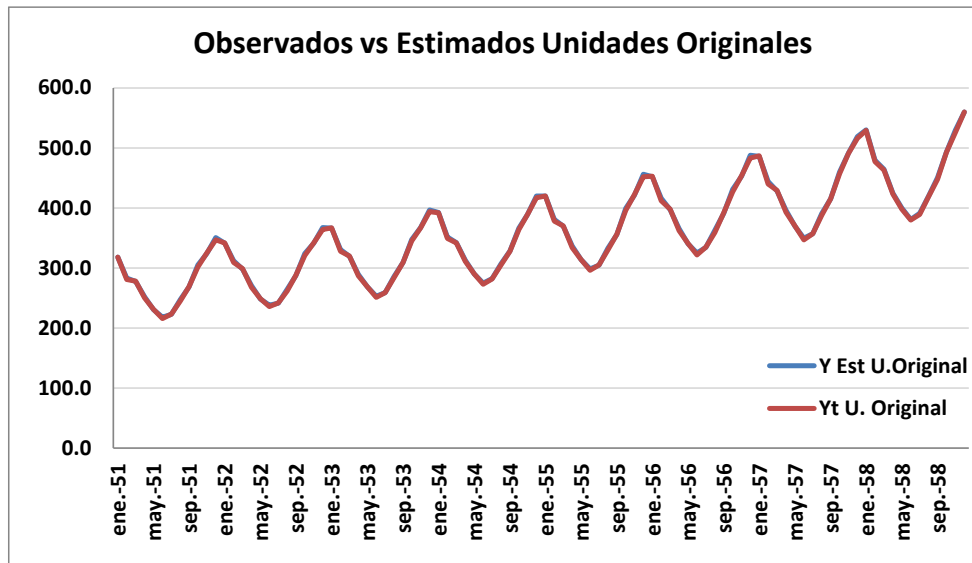


TABLA DE COEFICIENTES ESTIMADOS Y ESTADISTICA ASOCIADAS.

Las siguientes tablas presentan los coeficientes estimados para el modelo, sus errores estándares, las estadísticas T para probar si los coeficientes correspondientes son estadísticamente diferente de cero, la probabilidad asociada a la prueba de hipótesis e intervalos de confianza para los coeficientes.

| Coeficiente | Coeficientes no estandarizados | Error Estándar del Coeficiente | Coeficientes tipificados | t | Significancia | Intervalo de confianza de 95.0% para B | |
|-------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------|----------|---------------|--|-----------------|
| | B | | Beta Estándar | | | Límite inferior | Límite superior |
| (Constante) | .00595668839 | .00459595429 | | 1.29607 | .2646749693 | -.0068037264 | .018717103 |
| C1t | -.00054383744 | .00649966089 | -.0052690127 | -0.08367 | .9373376130 | -.0185897891 | .017502114 |
| C2t | -.00025786793 | .00649966089 | -.0024983741 | -0.03967 | .9702542096 | -.0183038196 | .017788084 |
| C3t | -.00044895923 | .00649966089 | -.0043497775 | -0.06907 | .9482457406 | -.0184949109 | .017596992 |
| C4t | -.00105662188 | .00649966089 | -.0102371660 | -0.16257 | .8787423898 | -.0191025735 | .016989330 |
| C5t | -.00162558595 | .00649966089 | -.0157496199 | -0.25010 | .8148275599 | -.0196715376 | .016420366 |
| C6t | -.00175658710 | .00649966089 | -.0170188352 | -0.27026 | .8003326007 | -.0198025388 | .016289365 |
| C7t | -.00496447721 | .00649966089 | -.0480987360 | -0.76381 | .4875499908 | -.0230104289 | .013081474 |
| C8t | .01244636106 | .00649966089 | .1205875684 | 1.91492 | .1280175146 | -.0055995906 | .030492313 |
| C9t | .00390263038 | .00649966089 | .0378109478 | 0.60044 | .5805775754 | -.0141433213 | .021948582 |
| C10t | .00276622433 | .00649966089 | .0268007865 | 0.42560 | .6923025034 | -.0152797273 | .020812176 |
| C11t | .00082659095 | .00649966089 | .0080084928 | 0.12717 | .9049391675 | -.0172193607 | .018872543 |
| C12t | .00213297634 | .00649966089 | .0206655125 | 0.32817 | .7592448959 | -.0159129753 | .020178928 |
| C13t | .00117489445 | .00649966089 | .0113830592 | 0.18076 | .8653432142 | -.0168710572 | .019220846 |
| C14t | .00133070832 | .00649966089 | .0128926744 | 0.20474 | .8477750316 | -.0167152433 | .019376660 |
| C15t | .00117754875 | .00649966089 | .0114087756 | 0.18117 | .8650431130 | -.0168684029 | .019223500 |
| C16t | -.00223545810 | .00649966089 | -.0216584152 | -0.34393 | .7482146722 | -.0202814098 | .015810494 |
| C17t | -.00079806825 | .00649966089 | -.0077321483 | -0.12279 | .9081985040 | -.0188440199 | .017247883 |
| C18t | -.00028334883 | .00649966089 | -.0027452478 | -0.04359 | .9673171378 | -.0183293005 | .017762603 |
| C19t | -.00053401954 | .00649966091 | -.0051738911 | -0.08216 | .9384656535 | -.0185799712 | .017511932 |
| C20t | -.00084564693 | .00649966089 | -.0081931182 | -0.13011 | .9027628649 | -.0188915986 | .017200305 |
| C21t | -.00194480566 | .00649966089 | -.0188424058 | -0.29922 | .7796773509 | -.0199907573 | .016101146 |
| C22t | -.00144180255 | .00649966089 | -.0139690198 | -0.22183 | .8353132969 | -.0194877542 | .016604149 |
| C23t | -.00315141734 | .00649966089 | -.0305327599 | -0.48486 | .6531320677 | -.0211973690 | .014894534 |
| C24t | .00543578946 | .00649966089 | .0526650825 | 0.83632 | .4500261351 | -.0126101622 | .023481741 |
| C25t | .00087508422 | .00649966089 | .0084783238 | 0.13464 | .8994029967 | -.0171708674 | .018921036 |
| C26t | -.00226163419 | .00649966089 | -.0219120245 | -0.34796 | .7454088096 | -.0203075859 | .015784317 |
| C27t | .00099321503 | .00649966089 | .0096228436 | 0.15281 | .8859464321 | -.0170527366 | .019039167 |
| C28t | .00141915064 | .00649966089 | .0137495549 | 0.21834 | .8378496315 | -.0166268010 | .019465102 |
| C29t | .00003035232 | .00649966089 | .0002940709 | 0.00467 | .9964976421 | -.0180155993 | .018076304 |
| C30t | -.00187344928 | .00649966089 | -.0181510637 | -0.28824 | .7874834122 | -.0199194009 | .016172502 |
| C31t | -.00686388937 | .00649966089 | -.0665013432 | -1.05604 | .3505111917 | -.0249098410 | .011182062 |
| C32t | .00912890982 | .00649966089 | .0884461756 | 1.40452 | .2328527516 | -.0089170418 | .027174861 |
| C33t | .00229307493 | .00649966089 | .0222166406 | 0.35280 | .7420449254 | -.0157528767 | .020339027 |
| C34t | .00207352654 | .00649966089 | .0200895284 | 0.31902 | .7656756573 | -.0159724251 | .020119478 |
| C35t | .00193878108 | .00649966089 | .0187840361 | 0.29829 | .7803352171 | -.0161071706 | .019984733 |
| C36t | .00106323211 | .00649966089 | .0103012097 | 0.16358 | .8779921634 | -.0169827195 | .019109184 |
| C37t | -.00106844736 | .00649966089 | -.0103517381 | -0.16439 | .8774003681 | -.0191143990 | .016977504 |
| C38t | -.00324151414 | .00649966091 | -.0314056699 | -0.49872 | .6441549410 | -.0212874659 | .014804438 |
| C39t | -.01285619651 | .00649966089 | -.1245582920 | -1.97798 | .1190765979 | -.0309021482 | .005189755 |
| C40t | .02052160801 | .00649966089 | .1988252467 | 3.15734 | .0342716224 | .0024756563 | .038567560 |
| C41t | .00585735036 | .00649966089 | .0567494092 | 0.90118 | .4184487242 | -.0121886013 | .023903302 |
| C42t | .00665610086 | .00649966089 | .0644881675 | 1.02407 | .3636915139 | -.0113898508 | .024702053 |
| C43t | .00587807516 | .00649966089 | .0569502031 | 0.90437 | .4169444713 | -.0121678765 | .023924027 |
| C44t | .00520710639 | .00649966089 | .0504494683 | 0.80114 | .4679400075 | -.0128388453 | .023253058 |
| C45t | .00470035489 | .00649966089 | .0455397657 | 0.72317 | .5096011080 | -.0133455968 | .022746307 |

| | | | | | | | |
|------|---------------|--------------|--------------|-----------|-------------|--------------|-------------|
| S01t | -.00006014818 | .00649966088 | -.0005827505 | -0.00925 | .9930595867 | -.0181060998 | .017985803 |
| S02t | .00077858999 | .00649966088 | .0075434316 | 0.11979 | .9104255793 | -.0172673617 | .018824542 |
| S03t | .00080737707 | .00649966088 | .0078223376 | 0.12422 | .9071345251 | -.0172385746 | .018853329 |
| S04t | .00197165329 | .00649966088 | .0191025212 | 0.30335 | .7767483921 | -.0160742984 | .020017605 |
| S05t | .00252185415 | .00649966088 | .0244331865 | 0.38800 | .7177815437 | -.0155240975 | .020567806 |
| S06t | .00393884763 | .00649966088 | .0381618415 | 0.60601 | .5772159096 | -.0141071040 | .021984799 |
| S07t | .00788753659 | .00649966088 | .0764190315 | 1.21353 | .2916817363 | -.0101584151 | .025933488 |
| S08t | -.09297464302 | .00649966088 | -.9007922941 | -14.30454 | .0001387513 | -.1110205947 | -.074928691 |
| S09t | -.00786661886 | .00649966088 | -.0762163684 | -1.21031 | .2927861059 | -.0259125705 | .010179333 |
| S10t | -.00386230932 | .00649966088 | -.0374202940 | -0.59423 | .5843353525 | -.0219082610 | .014183642 |
| S11t | -.00348955019 | .00649966088 | -.0338087872 | -0.53688 | .6198201843 | -.0215355018 | .014556401 |
| S12t | -.00071318060 | .00649966088 | -.0069097075 | -0.10973 | .9179114050 | -.0187591322 | .017332771 |
| S13t | -.00019533991 | .00649966088 | -.0018925664 | -0.03005 | .9774638444 | -.0182412915 | .017850612 |
| S14t | -.00151879699 | .00649966088 | -.0147149866 | -0.23367 | .8267105283 | -.0195647486 | .016527155 |
| S15t | .00055311389 | .00649966088 | .0053588883 | 0.08510 | .9362719466 | -.0174928377 | .018599066 |
| S16t | .00254524721 | .00649966088 | .0246598319 | 0.39160 | .7153224274 | -.0155007044 | .020591199 |
| S17t | -.00071502444 | .00649966088 | -.0069275717 | -0.11001 | .9177002395 | -.0187609761 | .017330927 |
| S18t | -.00084909491 | .00649966088 | -.0082265242 | -0.13064 | .9023691957 | -.0188950465 | .017196857 |
| S19t | -.00065715332 | .00649966087 | -.0063668827 | -0.10111 | .9243317193 | -.0187031049 | .017388798 |
| S20t | -.00042155903 | .00649966088 | -.0040843085 | -0.06486 | .9513986196 | -.0184675107 | .017624393 |
| S21t | .00000465071 | .00649966088 | .0000450588 | 0.00072 | .9994633518 | -.0180413009 | .018050602 |
| S22t | .00117174889 | .00649966088 | .0113525832 | 0.18028 | .8656988936 | -.0168742027 | .019217701 |
| S23t | .00553623267 | .00649966088 | .0536382348 | 0.85177 | .4423324740 | -.0125097190 | .023582184 |
| S24t | -.01749548471 | .00649966088 | -.1695064084 | -2.69175 | .0545587216 | -.0355414364 | .000550467 |
| S25t | -.00373553214 | .00649966088 | -.0361920031 | -0.57473 | .5962540663 | -.0217814838 | .014310419 |
| S26t | -.00403985491 | .00649966088 | -.0391404587 | -0.62155 | .5679091531 | -.0220858065 | .014006097 |
| S27t | -.00301634158 | .00649966088 | -.0292240676 | -0.46408 | .6667244195 | -.0210622932 | .015029610 |
| S28t | -.00151576027 | .00649966088 | -.0146855651 | -0.23321 | .8270492810 | -.0195617119 | .016530191 |
| S29t | -.00220714255 | .00649966088 | -.0213840778 | -0.33958 | .7512551816 | -.0202530942 | .015838809 |
| S30t | -.00114890489 | .00649966088 | -.0111312573 | -0.17676 | .8682830939 | -.0191948565 | .016897047 |
| S31t | -.00098438012 | .00649966088 | -.0095372458 | -0.15145 | .8869512996 | -.0190303318 | .017061572 |
| S32t | -.00438652316 | .00649966088 | -.0424991819 | -0.67488 | .5367479638 | -.0224324748 | .013659428 |
| S33t | -.00153854823 | .00649966088 | -.0149063481 | -0.23671 | .8245083467 | -.0195844999 | .016507403 |
| S34t | -.00173939959 | .00649966088 | -.0168523126 | -0.26761 | .8022289867 | -.0197853512 | .016306552 |
| S35t | -.00122665243 | .00649966088 | -.0118845206 | -0.18873 | .8594963670 | -.0192726041 | .016819299 |
| S36t | -.00319574528 | .00649966088 | -.0309622348 | -0.49168 | .6487062750 | -.0212416969 | .014850206 |
| S37t | -.00320940774 | .00649966088 | -.0310946046 | -0.49378 | .6473457000 | -.0212553594 | .014836544 |
| S38t | -.00091901158 | .00649966087 | -.0089039175 | -0.14139 | .8943940474 | -.0189649632 | .017126940 |
| S39t | -.00182630891 | .00649966088 | -.0176943405 | -0.28099 | .7926570382 | -.0198722605 | .016219643 |
| S40t | -.00266843731 | .00649966088 | -.0258533692 | -0.41055 | .7024419218 | -.0207143889 | .015377514 |
| S41t | .00105909544 | .00649966088 | .0102611313 | 0.16295 | .8784616353 | -.0169868562 | .019105047 |
| S42t | -.00066830508 | .00649966088 | -.0064749274 | -0.10282 | .9230532345 | -.0187142567 | .017377647 |
| S43t | -.00352091001 | .00649966088 | -.0341126194 | -0.54171 | .6167839274 | -.0215668617 | .014525042 |
| S44t | -.00055323121 | .00649966088 | -.0053600250 | -0.08512 | .9362584694 | -.0185991829 | .017492720 |
| S45t | -.00128789564 | .00649966088 | -.0124778804 | -0.19815 | .8525921028 | -.0193338473 | .016758056 |

Los coeficientes estimados se asocian a frecuencias y periodos, posteriormente se aplica la siguiente fórmula para el cálculo del Periodograma. Con $n = 90$. Se destacan las mismas frecuencias y periodos identificados mediante el análisis espectral calculado por SPSS y R mediante la transformada rápida de Fourier. La alternativa por mínimos cuadrados no es eficiente para series con elevado número de observaciones.

$$I(f_i) = \frac{n}{2} (\alpha_i^2 + \beta_i^2)$$

PERIODOGRAMA CALCULADO A PARTIR DE COEFICIENTES DE REGRESIÓN ARMONICA CALCULADOS POR MCO

| Número | Período | Frecuencia | Coseno | Valor | Seno | Valor | Peridograma |
|--------|---------|-------------|--------|---------------|------|---------------|--------------|
| 1 | 96.0 | 0.010416667 | C1t | -.00054383744 | S01t | -.00006014818 | .00001347196 |
| 2 | 48.0 | 0.020833333 | C2t | -.00025786793 | S02t | .00077858999 | .00003027142 |
| 3 | 32.0 | 0.031250000 | C3t | -.00044895923 | S03t | .00080737707 | .00003840400 |
| 4 | 24.0 | 0.041666667 | C4t | -.00105662188 | S04t | .00197165329 | .00022517399 |
| 5 | 19.2 | 0.052083333 | C5t | -.00162558595 | S05t | .00252185415 | .00040510251 |
| 6 | 16.0 | 0.062500000 | C6t | -.00175658710 | S06t | .00393884763 | .00083700535 |
| 7 | 13.7 | 0.072916667 | C7t | -.00496447721 | S07t | .00788753659 | .00390866703 |
| 8 | 12.0 | 0.083333333 | C8t | .01244636106 | S08t | -.09297464302 | .39596382665 |
| 9 | 10.7 | 0.093750000 | C9t | .00390263038 | S09t | -.00786661886 | .00347013973 |
| 10 | 9.6 | 0.104166667 | C10t | .00276622433 | S10t | -.00386230932 | .00101562437 |
| 11 | 8.7 | 0.114583333 | C11t | .00082659095 | S11t | -.00348955019 | .00057870959 |
| 12 | 8.0 | 0.125000000 | C12t | .00213297634 | S12t | -.00071318060 | .00022761966 |
| 13 | 7.4 | 0.135416667 | C13t | .00117489445 | S13t | -.00019533991 | .00006383406 |
| 14 | 6.9 | 0.145833333 | C14t | .00133070832 | S14t | -.00151879699 | .00018348880 |
| 15 | 6.4 | 0.156250000 | C15t | .00117754875 | S15t | .00055311389 | .00007616502 |
| 16 | 6.0 | 0.166666667 | C16t | -.00223545810 | S16t | .00254524721 | .00051640003 |
| 17 | 5.6 | 0.177083333 | C17t | -.00079806825 | S17t | -.00071502444 | .00005166778 |
| 18 | 5.3 | 0.187500000 | C18t | -.00028334883 | S18t | -.00084909491 | .00003605619 |
| 19 | 5.1 | 0.197916667 | C19t | -.00053401954 | S19t | -.00065715332 | .00003226623 |
| 20 | 4.8 | 0.208333333 | C20t | -.00084564693 | S20t | -.00042155903 | .00004017738 |
| 21 | 4.6 | 0.218750000 | C21t | -.00194480566 | S21t | .00000465071 | .00017020308 |
| 22 | 4.4 | 0.229166667 | C22t | -.00144180255 | S22t | .00117174889 | .00015533055 |
| 23 | 4.2 | 0.239583333 | C23t | -.00315141734 | S23t | .00553623267 | .00182615866 |
| 24 | 4.0 | 0.250000000 | C24t | .00543578946 | S24t | -.01749548471 | .01510379066 |
| 25 | 3.8 | 0.260416667 | C25t | .00087508422 | S25t | -.00373553214 | .00066239877 |
| 26 | 3.7 | 0.270833333 | C26t | -.00226163419 | S26t | -.00403985491 | .00096459376 |
| 27 | 3.6 | 0.281250000 | C27t | .00099321503 | S27t | -.00301634158 | .00045381567 |
| 28 | 3.4 | 0.291666667 | C28t | .00141915064 | S28t | -.00151576027 | .00019401830 |
| 29 | 3.3 | 0.302083333 | C29t | .00003035232 | S29t | -.00220714255 | .00021925798 |
| 30 | 3.2 | 0.312500000 | C30t | -.00187344928 | S30t | -.00114890489 | .00021734076 |
| 31 | 3.1 | 0.322916667 | C31t | -.00686388937 | S31t | -.00098438012 | .00216368917 |
| 32 | 3.0 | 0.333333333 | C32t | .00912890982 | S32t | -.00438652316 | .00461603609 |
| 33 | 2.9 | 0.343750000 | C33t | .00229307493 | S33t | -.00153854823 | .00034313955 |
| 34 | 2.8 | 0.354166667 | C34t | .00207352654 | S34t | -.00173939959 | .00032962605 |
| 35 | 2.7 | 0.364583333 | C35t | .00193878108 | S35t | -.00122665243 | .00023685967 |
| 36 | 2.7 | 0.375000000 | C36t | .00106323211 | S36t | -.00319574528 | .00051044627 |
| 37 | 2.6 | 0.385416667 | C37t | -.00106844736 | S37t | -.00320940774 | .00051488450 |
| 38 | 2.5 | 0.395833333 | C38t | -.00324151414 | S38t | -.00091901158 | .00051083983 |
| 39 | 2.5 | 0.406250000 | C39t | -.01285619651 | S39t | -.00182630891 | .00758777368 |
| 40 | 2.4 | 0.416666667 | C40t | .02052160801 | S40t | -.00266843731 | .01927156289 |
| 41 | 2.3 | 0.427083333 | C41t | .00585735036 | S41t | .00105909544 | .00159436064 |
| 42 | 2.3 | 0.437500000 | C42t | .00665610086 | S42t | -.00066830508 | .00201376396 |
| 43 | 2.2 | 0.447916667 | C43t | .00587807516 | S43t | -.00352091001 | .00211268587 |
| 44 | 2.2 | 0.458333333 | C44t | .00520710639 | S44t | -.00055323121 | .00123390098 |
| 45 | 2.1 | 0.468750000 | C45t | .00470035489 | S45t | -.00128789564 | .00106884051 |

BIBLIOGRAFÍA Bloomfield,P. "Fourier Analysis of Time Series. An Introduction". 2ª Edition. John Wiley & Sons. 2000.