Tarea 1: Paradigma Bayesiano

David Montaño Castro

Sea $x_1, ..., x_n$ una muestra de v.a.i.i.d $Binneg(r, \theta)$, donde $x_i = 1, 2, ...$ para $i = 1, ..., n$ y los parámetros son tales que $\theta \in (0, 1)$ y $r \in \mathbb{N}^+$,

$$f(x) = \binom{r + x - 1}{r - 1}(1 - \theta)^x \theta^r$$

1. Calcule la distribución final (a postoriori) de θ, es decir $f(\theta|\underline{x})$. Considerando la distribución inicial conjugada Beta, es decir, $\theta \sim Beta(\alpha_0, \beta_0)$ donde α_0 y β_0 son los hiperparémetros (valores fijos), es decir,

$$f(\theta) \propto \theta^{\alpha_0 - 1}(1 - \theta)^{\beta_0 - 1}$$

RESPUESTA

a) Función de verosimilitud

$$\begin{aligned} L(\theta|\underline{x}) &= \prod_{i=1}^{n} \binom{r + x_i - 1}{r - 1}(1 - \theta)^{x_i} \theta^r \\ &= \binom{r + x_i - 1}{r - 1}^n (1 - \theta)^{\sum_{i=1}^n x_i} \theta^{nr} \\ &\propto (1 - \theta)^{\sum_{i=1}^n x_i} \theta^{nr} \end{aligned}$$

b) Función a priori

$$f(\theta) \propto \theta^{\alpha_0 - 1}(1 - \theta)^{\beta_0 - 1}$$

Realizando las siguientes cuentas:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\theta|\underline{x}) &= L(\theta|\underline{x}) f(\theta) \\ &\propto (1 - \theta)^{\sum_{i=1}^n x_i} \theta^{nr} \theta^{\alpha_0 - 1}(1 - \theta)^{\beta_0 - 1} \\ &\propto (1 - \theta)^{\beta_0 + \sum_{i=1}^n x_i} \theta^{\alpha_0 + nr - 1} \end{aligned}$$

Y así:

$$\therefore \theta \sim Beta(\alpha_0 + nr, \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

2. Se requiere obtener la predicción de una “nueva” observación Z. Calcule:

RESPUESTA

- **La distribución predictiva inicial de** $Z, f(z)$**.**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{\Theta} \mathbb{P}(x|\theta)\mathbb{P}(\theta)d\theta \\
&= \int_0^1 \binom{r+x-1}{r-1}(1-\theta)^x\theta^r\frac{\theta^{\alpha_0-1}(1-\theta)^{\beta_0-1}}{B(\alpha_0,\beta_0)}d\theta \\
&= \frac{\binom{r+x-1}{r-1}}{B(\alpha_0,\beta_0)}\int_0^1 \theta^{r+\alpha_0-1}(1-\theta)^{x+\beta_0-1}d\theta \\
\text{Completar Beta} &= \frac{\binom{r+x-1}{r-1}}{B(\alpha_0,\beta_0)}B(r+\alpha_0,x+\beta_0)\int_0^1 \frac{\theta^{r+\alpha_0-1}(1-\theta)^{x+\beta_0-1}}{B(r+\alpha_0,x+\beta_0)}d\theta \\
&= \frac{\binom{r+x-1}{r-1}}{B(\alpha_0,\beta_0)}B(r+\alpha_0,x+\beta_0) \\
Gammas &= \frac{\Gamma(r+x)\Gamma(r+\alpha_0)\Gamma(x+\beta_0)\Gamma(\alpha_0+\beta_0)}{\Gamma(r)x!\Gamma(r+x+\alpha_0+\beta_0)\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\beta_0)}
\end{aligned}
$$

- **La distribución predictiva final de** $Z, f(z|\underline{x})$

Definiré $\alpha_1 = \alpha_0 + nr$ y $\beta_1 = \beta_0 + \sum_{i=1}^n x_i$.

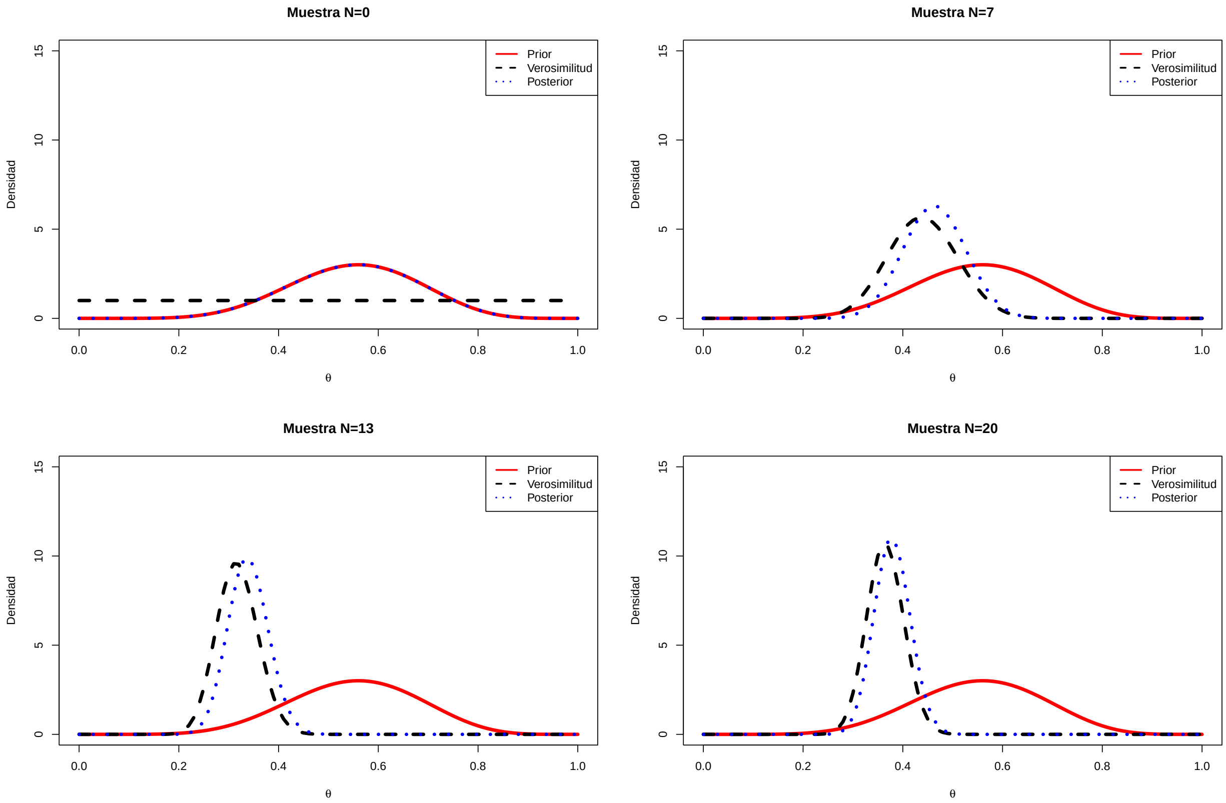
$$
\begin{aligned}
f(x^*|\underline{x}) &= \int_{\Theta} \mathbb{P}(x|\theta)\mathbb{P}(\theta|\underline{x})d\theta \\
&= \int_0^1 \binom{r+x^*-1}{r-1}(1-\theta)^{x^*}\theta^r\frac{\theta^{\alpha_1-1}(1-\theta)^{\beta_1-1}}{B(\alpha_1,\beta_1)}d\theta \\
&= \frac{\binom{r+x^*-1}{r-1}}{B(\alpha_1,\beta_1)}\int_0^1 \theta^{r+\alpha_1-1}(1-\theta)^{x+\beta_1-1}d\theta \\
\text{Completar Beta} &= \frac{\binom{r+x^*-1}{r-1}}{B(\alpha_1,\beta_1)}B(r+\alpha_1,x^*+\beta_1)\int_0^1 \frac{\theta^{r+\alpha_1-1}(1-\theta)^{x+\beta_1-1}}{B(r+\alpha_1,x+\beta_1)}d\theta \\
&= \frac{\binom{r+x^*-1}{r-1}}{B(\alpha_1,\beta_1)}B(r+\alpha_1,x^*+\beta_1) \\
Gammas &= \frac{\Gamma(r+x^*)\Gamma(r+\alpha_1)\Gamma(x+\beta_1)\Gamma(\alpha_1+\beta_1)}{\Gamma(r)x^*!\Gamma(r+x^*+\alpha_1+\beta_1)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1)} \\
&= \frac{\Gamma(r+x^*)\Gamma(r+\alpha_0+nr)\Gamma(x+\beta_0+\sum_{i=1}^n x_i)\Gamma(\alpha_0+nr+\beta_0+\sum_{i=1}^n x_i)}{\Gamma(r)x^*!\Gamma(r+x^*+\alpha_0+nr+\beta_0+\sum_{i=1}^n x_i)\Gamma(\alpha_0+nr)\Gamma(\beta_0+\sum_{i=1}^n x_i)}
\end{aligned}
$$

Hint: Las distribuciones predictivas pertenecen a la familia de distribuciones Beta-Binomial-Negativa

3. Usando los resultados de (1) y (2), especifique valores para los hiperparámetros de la verosimilitud y la distribución inicial, simula una muestra y grafique las distribuciones: $f(\theta), f(\theta|\underline{x}), f(z)$ y $f(z|\underline{x})$.

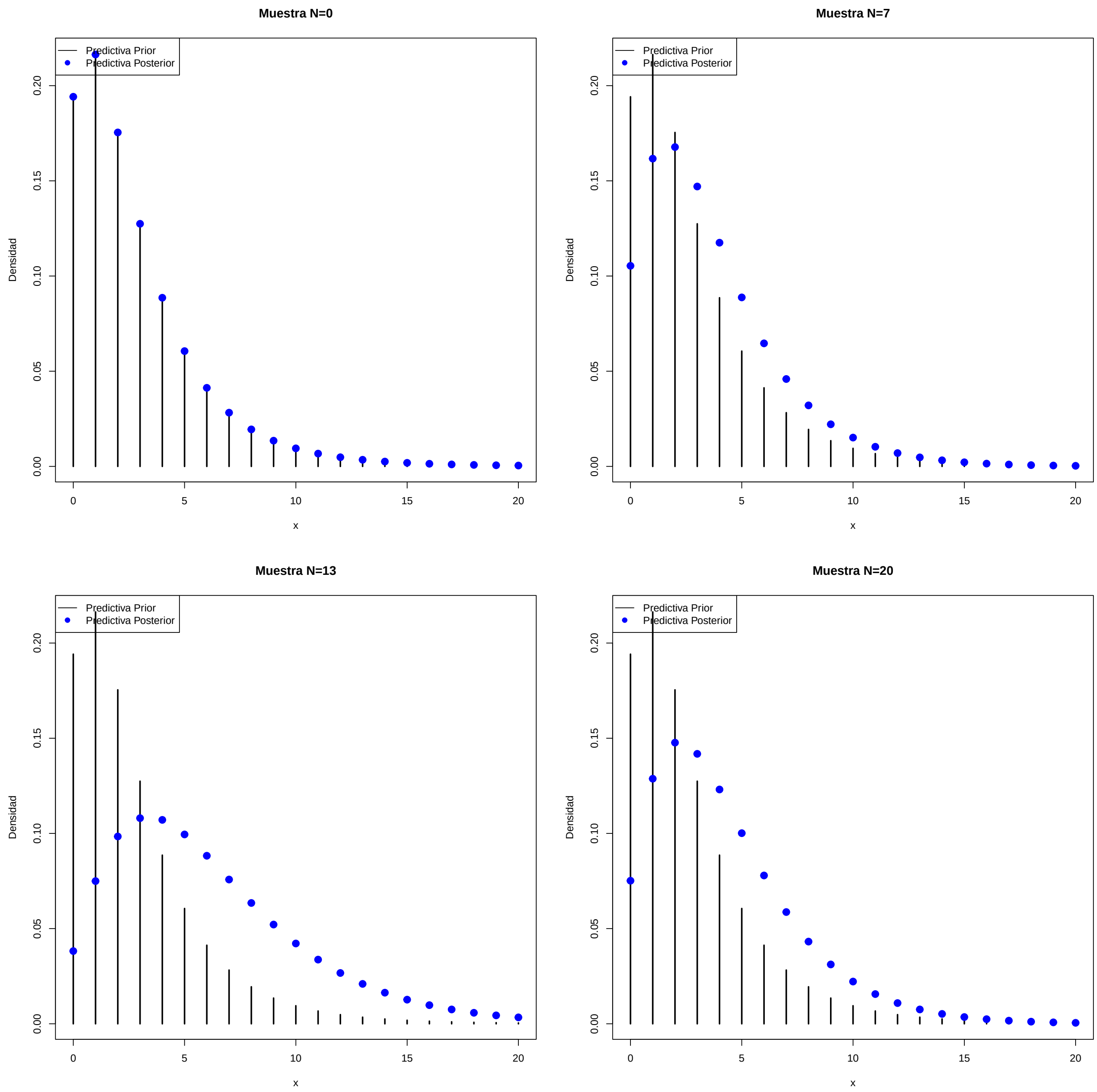
PRIORI, VEROSIMILITUD Y POSTERIORI

```
n = 20 # Número de muestras

r = 3 # Parámetro Binomial Negativa

theta = .4 # Parámetro Binomial Negativa sobre el que se encontrará distribución

alpha0 = 8 # Hiperparámetro Beta

beta0 = 6.5 # Hiperparámetro Beta

p = seq(0,1,0.01) # Probabilidades para primera gráfica

x = 0:n # valores para segunda gráfica

YY = c(0,round(n/3),round(2*n/3),n) # Numero de muestra iterativa

par(mfrow=c(2,2))
for(j in 1:4){
  n = YY[j]

  # Muestra Binomial negativa
  X = rnbinom(n = n, size = r, prob = theta)

  # Priori
  Prior = dbeta(x = p, shape1 = alpha0, shape2 = beta0)

  # Verosimilitud
  verosimilitud = dbeta(x = p, shape1 = n*r + 1, shape2 = sum(X) + 1)

  # Posteriori
  Posterior = dbeta(x = p, shape1 = alpha0 + n * r, shape2 = beta0 + sum(X))


  plot(x = p, y = Prior,xlab = expression(theta), ylab = "Densidad", col = "red", type = "l", ylim = c(

  lines(p,verosimilitud, col = "black", lty=2, lwd=4) # "Verosimilitud"

  lines(p,Posterior, col = "blue",lty=3, lwd=4) # "Posteriori"

  legend("topright", legend=c("Prior","Verosimilitud","Posterior"), lty=c(1,2,3), col=c("red","black","
}
```



PREDICTIVA INICIAL Y PREDICTIVA FINAL

```
par(mfrow = c(2,2))
for(j in 1:4){
  n = YY[j]

  # Muestra Binomial negativa
  X = rnbinom(n = n, size = r, prob = theta)

  # predictiva inicial
  predict_inicial = dbnbinom(x = x, size = r, alpha = alpha0, beta = beta0)

  # predictiva final
  predict_final = dbnbinom(x = x, size = r, alpha = n*r + alpha0, beta = beta0 + sum(X))

  plot(x, predict_inicial, col = "black",ylab="Densidad",type="h",lwd=2, main=paste0("Muestra N=",n)) #

  points(x, predict_final, col="blue",pch=19,cex=1.5) # "Predictiva Final"

  legend("topleft", legend=c("Predictiva Prior","Predictiva Posterior"), lty=c(1,NA), col=c("black","blu
}
```


Muestra N=0
Muestra N=7
Muestra N=13
Muestra N=20
Predictiva Prior
Predictiva Posterior
Densidad
x
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0
5
10
15
20