Tarea 3 David Montaño Castro

viernes, 25 de marzo de 2022 07:29 p. m.

2. Invarianza de la distribución inicial de Jeffreys ante reparametrizaciones. Suponga que $Y_1, \ldots, Y_n$ es una muestra de v.a.i.i.d. Exponencial(θ), donde $\mathbb{E}[Y_i] = \theta$. Obtenga la distribución inicial de Jeffreys para θ.

Solución:

En los ejercicios vistos en clase, siempre se tenía una muestra de tamaño uno. Ahora que se está dando una muestra aleatoria de n variables aleatorias, es mejor aprovecharlas todas a solamente una. Por lo tanto, **se tiene que trabajar con la verosimilitud**, de la misma manera con la que se trabajan las distribuciones finales con más de un elemento en la muestra.

$$Y_i \sim Exp(\theta) \quad \text{Con} \quad \mathbb{E}[Y_i] = \theta \qquad i = 1, \ldots, n.$$

$$f(\underline{y}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} y_i} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} n\bar{y}}$$

$$f(\underline{y}|\theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} n\bar{y}}$$

$$\mathbb{I}(\theta) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x|\theta)\right)^2\right]$$

① $$f(\underline{y}|\theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} n\bar{y}}$$

② $$\ln(f(\underline{y}|\theta)) = \ln\left(\frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} n\bar{y}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\theta^n}\right) + \ln\left(e^{-\frac{1}{\theta} n\bar{y}}\right)$$

$$= \ln(1) - \ln(\theta^n) - \frac{1}{\theta} n\bar{y}$$

$$= -n\ln(\theta) - \frac{1}{\theta}n\bar{y}.$$

③ $$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(f(\underline{y}|\theta)) = -\frac{n}{\theta} + n\bar{y}\frac{1}{\theta^2}$$

④ $$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(f(\underline{y}|\theta))\right)^2 = \left(-\frac{n}{\theta} + n\bar{y}\frac{1}{\theta^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{n}{\theta}\right)^2 - 2\frac{n}{\theta}\left(n\bar{y}\frac{1}{\theta^2}\right) + \frac{(n\bar{y})^2}{\theta^4}$$

⑤ $\mathbb{E}[④]$ $$= \mathbb{E}\left[\left(\frac{n}{\theta}\right)^2 - 2\frac{n}{\theta}\left(n\bar{y}\frac{1}{\theta^2}\right) + \frac{(n\bar{y})^2}{\theta^4}\right]$$

$$= \left(\frac{n}{\theta}\right)^2 - \frac{2n^2}{\theta^3}\mathbb{E}[\bar{y}] + \frac{n^2}{\theta^4}\mathbb{E}[\bar{y}^2]$$

$$\mathbb{E}[\bar{y}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[y_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta = \theta$$

$$\mathbb{E}[\bar{y}^2] = Var(\bar{y}) + \mathbb{E}[\bar{y}]^2$$

$$= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) + \theta^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(y_i) + \theta^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n\theta^2\right) + \theta^2$$

$$= \frac{1}{n}\theta^2 + \theta^2$$

$$= \theta^2\left(\frac{1}{n}+1\right)$$

$$= \left(\frac{n}{\theta}\right)^2 - \frac{2n^2}{\theta^3}\theta + \frac{n^2}{\theta^4}\theta^2\left(\frac{1}{n}+1\right)$$

$$= \frac{n^2}{\theta^2} - \frac{2n^2}{\theta^2} + \frac{n^2}{\theta^2}\left(\frac{1}{n}+1\right)$$

$$= \frac{1}{\theta^2}\left(n^2 - 2n^2 + n^2\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)$$

$$\frac{1}{\theta^2}\left(= n^2\left(1-2+1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{n^2}{\theta^2}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{\theta^2}$$

La distribución a priori de Jeffreys se define como

$$f(\theta) \propto \sqrt{\mathbb{I}(\theta)}$$

Por lo tanto: $f(\theta) \propto \sqrt{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{1}{\theta}\sqrt{n}$

La verosimilitud de la distribución exponencial también cumple las **condiciones de regularidad:**

1) $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(f(\underline{y}|\theta)) = -\frac{n}{\theta} + n\bar{y}\frac{1}{\theta^2}$

Bajo condiciones de regularidad[2], se cumple que

$$\mathbb{I}(\theta) \quad = \quad -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\log f(x|\theta)\right]$$

(4) $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln(f(\underline{y} \mid \theta)) = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2n\bar{y}}{\theta^3}$

(5) $-\mathbb{E}[\ (4)\ ] = -\mathbb{E}\left[\frac{n}{\theta^2} - \frac{2n\bar{y}}{\theta^3}\right]$

$$= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n}{\theta^3}\mathbb{E}[\bar{y}]$$

$$= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n}{\theta^3}\theta$$

$$= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n}{\theta^2}$$

$$= \frac{n}{\theta^2}$$

Por lo tanto: $f(\theta) \propto \sqrt{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{1}{\theta}\sqrt{n}$

3. Estimación puntual. Obtenga el estimador puntual $\hat{\theta}^* \in \Theta \subset \mathbb{R}$ bajo la siguiente función de utilidad:

$$U(\hat{\theta}, \theta) = -\left(\frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\theta}}\right)^2$$

Solución: Not: $\mathbb{E}[\cdot] = \mathbb{E}_\theta[\cdot]$

$\bar{U}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[U(\hat{\theta}, \theta)] = \mathbb{E}\left[-\left(\frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\theta}}\right)^2\right]$

$$\bar{U}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[U(\hat{\theta},\theta)] = \mathbb{E}\left[-\left(\frac{\theta-\hat{\theta}}{\hat{\theta}}\right)^2\right]$$

$$= -\mathbb{E}\left[\frac{(\hat{\theta}-\theta)^2}{\hat{\theta}^2}\right] = -\frac{1}{\hat{\theta}^2}\mathbb{E}[(\hat{\theta}-\theta)^2]$$

$$= -\frac{1}{\hat{\theta}^2}\mathbb{E}[\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}\theta + \theta^2]$$

$$= -\frac{1}{\hat{\theta}^2}\left(\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}\,\mathbb{E}[\theta] + \mathbb{E}[\theta^2]\right)$$

$$= -1 + \frac{2}{\hat{\theta}}\mathbb{E}[\theta] - \frac{1}{\hat{\theta}^2}\mathbb{E}[\theta^2]$$

Buscar el estimador puntual de Theta tal que maximice la utilidad esperada:

$$\bar{U}(\hat{\theta}^*) = \max_{\hat{\theta}\in\Theta} \bar{U}(\hat{\theta})$$

Derivar la función para encontrar su máximo:

$$\frac{d}{d\hat{\theta}}\bar{U}(\hat{\theta}) = \frac{d}{d\hat{\theta}}\left[-1 + \frac{2}{\hat{\theta}}\mathbb{E}[\theta] - \frac{1}{\hat{\theta}^2}\mathbb{E}[\theta^2]\right]$$

$$= -\frac{2\,\mathbb{E}[\theta]}{\hat{\theta}^2} + \frac{2\,\mathbb{E}[\theta^2]}{\hat{\theta}^3}$$

Igualar a cero la derivada:

$$0 = -\frac{2\,\mathbb{E}[\theta]}{\theta^2} + \frac{2\,\mathbb{E}[\theta^2]}{\hat{\theta}^3}$$

$$\frac{2\,\mathbb{E}[\Theta]}{\hat{\Theta}^2} = \frac{2\,\mathbb{E}[\Theta^2]}{\hat{\Theta}^3}$$

$$\mathbb{E}[\Theta] = \frac{\mathbb{E}[\Theta^2]}{\hat{\Theta}}$$

$$\hat{\Theta} = \frac{\mathbb{E}[\Theta^2]}{\mathbb{E}[\Theta]}$$

Obtener segunda derivada:

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \bar{U}(\hat{\Theta}) = -\frac{2\,\mathbb{E}[\Theta]}{\hat{\Theta}^2} + \frac{2\,\mathbb{E}[\Theta^2]}{\hat{\Theta}^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\hat{\theta}^2} \bar{U}(\hat{\theta}) = \frac{4\,\mathbb{E}[\Theta]}{\hat{\Theta}^3} - \frac{6\,\mathbb{E}[\Theta^2]}{\hat{\Theta}^4}$$

$$= \frac{2}{\hat{\Theta}^3}\left(2\,\mathbb{E}[\Theta] - 3\frac{\mathbb{E}[\Theta^2]}{\hat{\Theta}}\right)$$

Evaluar:

$$\frac{2}{\left(\frac{\mathbb{E}[\Theta^2]}{\mathbb{E}[\Theta]}\right)^3}\left(2\,\mathbb{E}[\Theta] - \frac{3\,\mathbb{E}[\Theta^2]}{\frac{\mathbb{E}[\Theta^2]}{\mathbb{E}[\Theta]}}\right)$$

$$= \frac{2\,\mathbb{E}[\Theta]^3}{\mathbb{E}[\Theta^2]^3}\left(2\,\mathbb{E}[\Theta] - 3\,\mathbb{E}[\Theta]\right)$$

$$= \frac{2\,\mathbb{E}[\theta]^3}{\mathbb{E}[\theta^2]^3}\left(-\mathbb{E}[\theta]\right) = -2\,\frac{\mathbb{E}[\theta]^4}{\mathbb{E}[\theta^2]^3} < 0$$

$$\therefore \hat{\theta} = \frac{\mathbb{E}[\theta^2]}{\mathbb{E}[\theta]} \text{ es un máximo.}$$

y es estimador puntual de $U(\hat{\theta}, \theta)$.

4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de n v.a.i.i.d. $Normal(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 conocida. Suponga que la distribución inicial de μ es $\mu \sim Normal(\eta, \tau^2)$ con η y τ^2 conocidas.

(a) Construya un intervalo de credibilidad Bayesiano HPD (*highest posterior density*) del $100(1-\alpha)\%$ para μ.

(b) Construya un intervalo de predicción del $100(1-\alpha)\%$ para X_{n+1}.

(c) Considere una distribución inicial uniforme para μ, haciendo $\tau^2 \to \infty$, obtenga (a) y (b).

En clase se vio el siguiente resultado:

Ejemplo 2.7 (Predicción: Normal). Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con función de densidad

$$p(x|\theta) = N(x|\theta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\theta)^2\right\}, \qquad x \in \Re,\ \theta \in \Re,$$

con $\sigma > 0$ conocido. Supongamos que θ tiene una distribución inicial conjugada,

$$p(\theta) = N(\theta|\mu_0, \tau_0^2).$$

Entonces la distribución final de θ está dada por

$$p(\theta|x_1, \ldots, x_n) = N(\theta|\mu_1, \tau_1^2),$$

donde

$$\mu_1 = (1/\tau_0^2 + n/\sigma^2)^{-1}(\mu_0/\tau_0^2 + n\bar{x}/\sigma^2)$$

y

$$\tau_1^2 = (1/\tau_0^2 + n/\sigma^2)^{-1}.$$

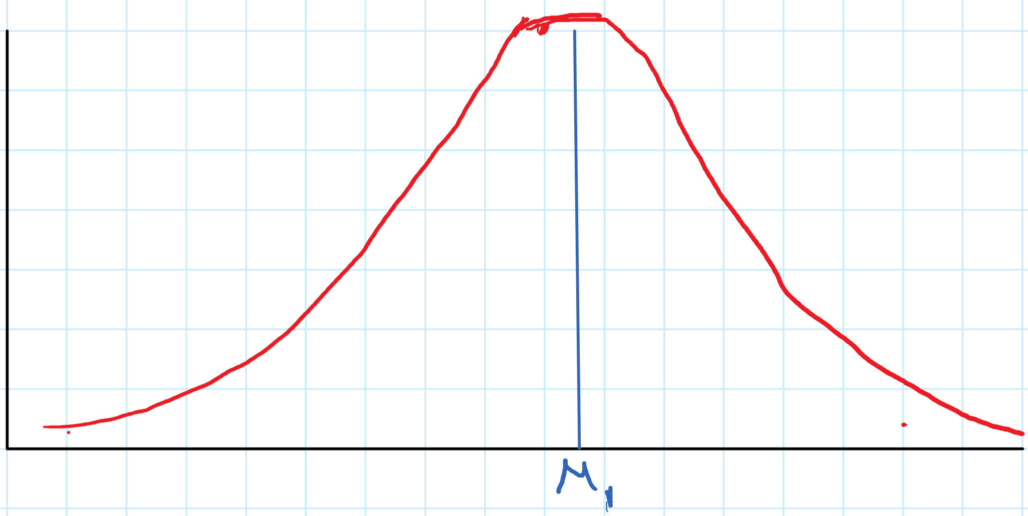
La distribución predictiva final es entonces

$$p(x|x_1, \ldots, x_n) = N(x|\mu_1, \tau_*^2),$$

con

$$\tau_*^2 = \sigma^2\tau_1^2(1/\tau_1^2 + 1/\sigma^2). = \sigma^2 + \tau_1^2$$

a) Dada una muestra aleatoria de una distribución normal y una prior también normal, **la posterior resulta ser una distribución normal**.



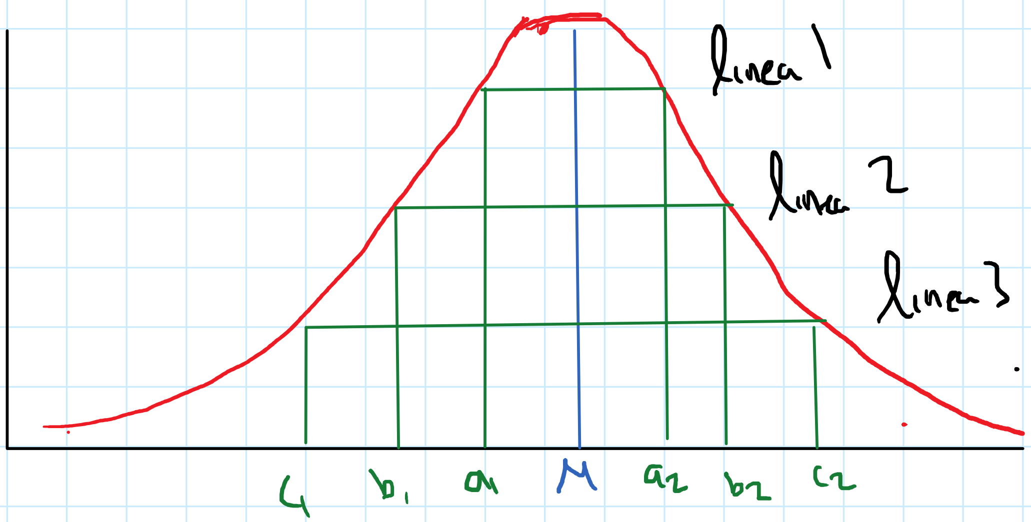
La bondad de la normal permite encontrar el intervalo de una manera sencilla, muy parecido a encontrar el intervalo de confianza. **La normal es unimodal y simétrica**

Proposición 5.1 *Sea $f(x)$ una densidad unimodal y $F(x)$ su función de distribución asociada. Sea $[a,b]$ un intervalo que satisface que*

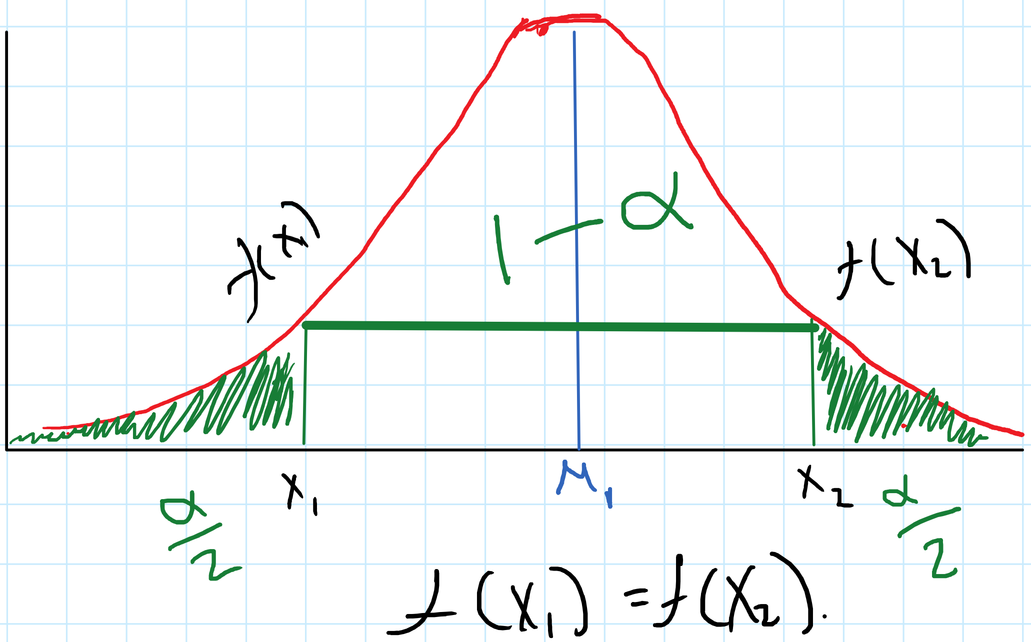
$$F(b) - F(a) = 1 - \alpha, \tag{5.2}$$

para α tal que $0 < \alpha < 1$. Entonces de entre todos los intervalos que cumplen (5.2), $[a_0, b_0]$ tiene la longitud mínima si $f(a_0) = f(b_0) > 0$ y $a_0 \leq x^* \leq b_0$, donde x^* es la moda de $f(x)$. Si además $f(x)$ es simétrica, entonces $a_0 = F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ y $b_0 = F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Si bien, la proposición anterior aplica para estadística frecuentista, esta puede resultar de ayuda para entender mejor el proceso de selección del HPD.



Si se van trazando líneas horizontales descendientes, se puede observar que f(x) = f(y) para x= a1,b1,c1 con y = a2,b2,c3 respectivamente. Por lo tanto, de manera sencilla podría **identificar ambos valores de x tales que me guarden el 1-alpha% de probabilidad haciendo que en cada cola se guarde un área de alpha/2, precisamente como se hacía en los intervalos de confianza.**



Estandarizando la distribución de manera análoga a los intervalos de confianza, se obtiene el siguiente intervalo:

$\therefore$ Posterior Normal HPD: $\Theta \in \mu_1 \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\tilde{\gamma}_1^2}$

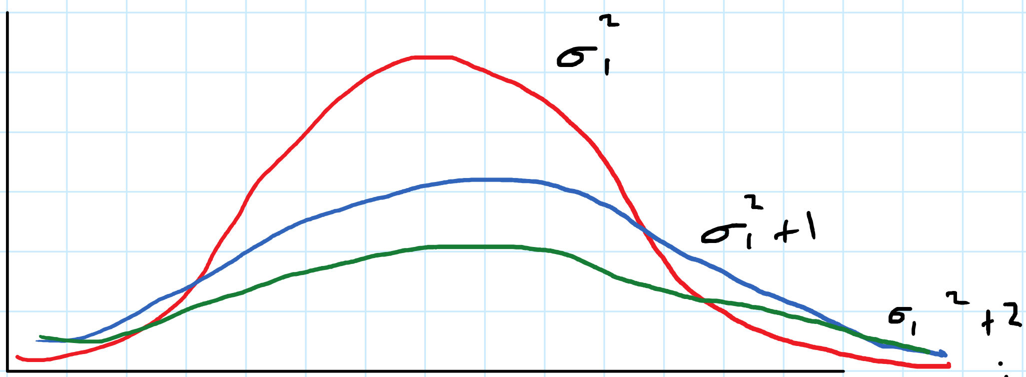
b)

De igual forma, la distribución predictiva final es una normal. Por lo tanto, todo lo anterior también aplica para la construcción de este intervalo, solo que considerando los parámetros específicos de la final.

$\therefore$ Posterior Final Normal HPD: $x_{n+1} \in \mu_1 \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sigma^2 + \tilde{\gamma}_1^2}$

c)

Cuando se tiende al infinito la varianza de una normal, esta converge en distribución a una uniforme.



En el caso de la posterior:

$$\lim_{\gamma_0^2 \to \infty} \mu_1 \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\gamma_1^2} = \lim_{\gamma_0^2 \to \infty} \mu_1 \pm \lim_{\gamma_0^2 \to \infty} Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\tilde{\gamma}_1^2}$$

$$= \mu_1 \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \lim_{\tau_0^2 \to \infty} \sqrt{\tau_1^2}$$

$$\tau_1^2 = (1/\tau_0^2 + n/\sigma^2)^{-1}.$$

$$\lim_{\tau_0^2 \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= \mu_1 \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\therefore$ Si $\tau_0^2 \to \infty$, Posterior Normal HPD: $\mu_1 \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Concuerda con el intervalo para la distribución de las muestras, lo cual hace sentido pues la prior es una distribución no informativa.

En el caso de la final.

$$\lim_{\tau_0^2 \to \infty} \mu_1 \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\tau_1^2 + \sigma^2} = \lim_{\tau_0^2 \to \infty} \mu_1 \pm \lim_{\tau_0^2 \to \infty} Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\tau_1^2 + \sigma^2}$$

$$= \mu_1 \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \lim_{\tau_0^2 \to \infty} \sqrt{\tau_1^2 + \sigma^2}$$

$$\tau_1^2 = (1/\tau_0^2 + n/\sigma^2)^{-1}.$$

$$\lim_{\tau_0^2 \to \infty} \sqrt{\tau_1^2 + \sigma^2} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \sigma^2} = \sqrt{\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + 1\right)} = \sigma \sqrt{\frac{1}{n} + 1}$$

$$= \mu_1 \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \left(\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + 1}\right) = \mu_1 \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{\frac{1+n}{n}}$$

$$= \mu_1 \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{1+n}\right)$$

$\therefore \; S_1 \quad \tau_0^2 \to \infty,$ Posterior final Noral HPD: $\mu_1 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{n+1}\right)$