Tarea 3 David Montaño Castro

viernes, 25 de marzo de 2022 07:29 p. m.

2. Invarianza de la distribución inicial de Jeffreys ante reparametrizaciones. Suponga que $Y_1, \ldots, Y_n$ es una muestra de v.a.i.i.d. Exponencial(θ), donde $\mathbb{E}[Y_i] = \theta$. Obtenga la distribución inicial de Jeffreys para θ.

Solución:

En los ejercicios vistos en clase, siempre se tenía una muestra de tamaño uno. Ahora que se está dando una muestra aleatoria de n variables aleatorias, es mejor aprovecharlas todas a solamente una. Por lo tanto, **se tiene que trabajar con la verosimilitud**, de la misma manera con la que se trabajan las distribuciones finales con más de un elemento en la muestra.

$$Y_i \sim Exp(\theta) \quad \text{Con} \quad \mathbb{E}[Y_i] = \theta \qquad i = 1, \ldots, n.$$

$$f(\underline{y}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} y_i} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} y_i} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} n\bar{y}}$$

$$f(\underline{y}|\theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} n\bar{y}}$$

$$\mathbb{I}(\theta) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x|\theta)\right)^2\right]$$

① $$f(\underline{y}|\theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} n\bar{y}}$$

② $$\ln(f(\underline{y}|\theta)) = \ln\left(\frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} n\bar{y}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\theta^n}\right) + \ln\left(e^{-\frac{1}{\theta} n\bar{y}}\right)$$

$$= \ln(1) - \ln(\theta^n) - \frac{1}{\theta} n\bar{y}$$

$$= -n\ln(\theta) - \frac{1}{\theta} n\bar{y}.$$

$$③\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ln(f(\underline{y}|\theta)) = -\frac{n}{\theta} + n\bar{y}\frac{1}{\theta^2}$$

$$④\ \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(f(\underline{y}|\theta))\right)^2 = \left(-\frac{n}{\theta} + n\bar{y}\frac{1}{\theta^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{n}{\theta}\right)^2 - 2\frac{n}{\theta}\left(n\bar{y}\frac{1}{\theta^2}\right) + \frac{(n\bar{y})^2}{\theta^4}$$

$$⑤\ \mathbb{E}[④] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{n}{\theta}\right)^2 - 2\frac{n}{\theta}\left(n\bar{y}\frac{1}{\theta^2}\right) + \frac{(n\bar{y})^2}{\theta^4}\right]$$

$$= \left(\frac{n}{\theta}\right)^2 - \frac{2n^2}{\theta^3}\mathbb{E}[\bar{y}] + \frac{n^2}{\theta^4}\mathbb{E}[\bar{y}^2]$$

$$\mathbb{E}[\bar{y}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[y_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta = \theta$$

$$\mathbb{E}[\bar{y}^2] = Var(\bar{y}) + \mathbb{E}[\bar{y}]^2$$

$$= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=i}^{n} y_i\right) + \theta^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(y_i) + \theta^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n\theta^2\right) + \theta^2$$

$$= \frac{1}{n}\theta^2 + \theta^2$$

$$= \theta^2\left(\frac{1}{n}+1\right)$$

$$= \left(\frac{n}{\theta}\right)^2 - \frac{2n^2}{\theta^3}\theta + \frac{n^2}{\theta^4}\theta^2\left(\frac{1}{n}+1\right)$$

$$= \frac{n^2}{\theta^2} - \frac{2n^2}{\theta^2} + \frac{n^2}{\theta^2}\left(\frac{1}{n}+1\right)$$

$$= \frac{1}{\theta^2}\left(n^2 - 2n^2 + n^2\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\theta^2}\left(n^2\left(1-2+1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{n^2}{\theta^2}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{\theta^2}$$

La distribución a priori de Jeffreys se define como

$$f(\theta) \propto \sqrt{\mathbb{I}(\theta)}$$

Por lo tanto: $f(\theta) \propto \sqrt{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{1}{\theta}\sqrt{n}$

La verosimilitud de la distribución exponencial también cumple las **condiciones de regularidad:**

1) $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(f(\underline{y}|\theta)) = -\frac{n}{\theta} + n\bar{y}\frac{1}{\theta^2}$

Bajo condiciones de regularidad[2], se cumple que

$$\mathbb{I}(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x|\theta)\right]$$

④ $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln(f(\underline{y}\mid\theta)) = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2n\bar{y}}{\theta^3}$

⑤ $-\mathbb{E}[④] = -\mathbb{E}\left[\frac{n}{\theta^2} - \frac{2n\bar{y}}{\theta^3}\right]$

$$= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n}{\theta^3}\mathbb{E}[\bar{y}]$$

$$= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n}{\theta^3}\theta$$

$$= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n}{\theta^2}$$

$$= \frac{n}{\theta^2}$$

Por lo tanto: $f(\theta) \propto \sqrt{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{1}{\theta}\sqrt{n}$

3. Estimación puntual. Obtenga el estimador puntual $\hat{\theta}^* \in \Theta \subset \mathbb{R}$ bajo la siguiente función de utilidad:

$$U(\hat{\theta}, \theta) = -\left(\frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\theta}}\right)^2$$

Solución : Not : $\mathbb{E}[\cdot] = \mathbb{E}_\theta[\cdot]$

$\bar{U}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[U(\hat{\theta}, \theta)] = \mathbb{E}\left[-\left(\frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\theta}}\right)^2\right]$

$$\bar{U}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[U(\hat{\theta},\theta)] = \mathbb{E}\left[-\left(\frac{\theta-\hat{\theta}}{\hat{\theta}}\right)^2\right]$$

$$= -\mathbb{E}\left[\frac{(\hat{\theta}-\theta)^2}{\hat{\theta}^2}\right] = -\frac{1}{\hat{\theta}^2}\mathbb{E}[(\hat{\theta}-\theta)^2]$$

$$= -\frac{1}{\hat{\theta}^2}\mathbb{E}[\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}\theta + \theta^2]$$

$$= -\frac{1}{\hat{\theta}^2}\left(\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}\,\mathbb{E}[\theta] + \mathbb{E}[\theta^2]\right)$$

$$= -1 + \frac{2}{\hat{\theta}}\mathbb{E}[\theta] - \frac{1}{\hat{\theta}^2}\mathbb{E}[\theta^2]$$

Buscar el estimador puntual de Theta tal que maximice la utilidad esperada:

$$\bar{U}(\hat{\theta}^*) = \max_{\hat{\theta}\in\Theta} \bar{U}(\hat{\theta})$$

Derivar la función para encontrar su máximo:

$$\frac{d}{d\hat{\theta}}\bar{U}(\hat{\theta}) = \frac{d}{d\hat{\theta}}\left[-1 + \frac{2}{\hat{\theta}}\mathbb{E}[\theta] - \frac{1}{\hat{\theta}^2}\mathbb{E}[\theta^2]\right]$$

$$= -\frac{2\mathbb{E}[\theta]}{\hat{\theta}^2} + \frac{2\mathbb{E}[\theta^2]}{\hat{\theta}^3}$$

Igualar a cero la derivada:

$$0 = -\frac{2\mathbb{E}[\theta]}{\theta^2} + \frac{2\mathbb{E}[\theta^2]}{\hat{\theta}^3}$$

$$\frac{2\,\mathbb{E}[\theta]}{\hat{\theta}^2} = \frac{2\,\mathbb{E}[\theta^2]}{\hat{\theta}^3}$$

$$\mathbb{E}[\theta] = \frac{\mathbb{E}[\theta^2]}{\hat{\theta}}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\mathbb{E}[\theta^2]}{\mathbb{E}[\theta]}$$

Obtener segunda derivada:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\bar{U}(\hat{\theta}) = -\frac{2\,\mathbb{E}[\theta]}{\hat{\theta}^2} + \frac{2\,\mathbb{E}[\theta^2]}{\hat{\theta}^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{\theta}^2}\bar{U}(\hat{\theta}) = \frac{4\,\mathbb{E}[\theta]}{\hat{\theta}^3} - \frac{6\,\mathbb{E}[\theta^2]}{\hat{\theta}^4}$$

$$= \frac{2}{\hat{\theta}^3}\left(2\,\mathbb{E}[\theta] - 3\,\frac{\mathbb{E}[\theta^2]}{\hat{\theta}}\right)$$

Evaluar:

$$\frac{2}{\left(\frac{\mathbb{E}[\theta^2]}{\mathbb{E}[\theta]}\right)^3}\left(2\,\mathbb{E}[\theta] - \frac{3\,\mathbb{E}[\theta^2]}{\frac{\mathbb{E}[\theta^2]}{\mathbb{E}[\theta]}}\right)$$

$$= \frac{2\,\mathbb{E}[\theta]^3}{\mathbb{E}[\theta^2]^3}\left(2\,\mathbb{E}[\theta] - 3\,\mathbb{E}[\theta]\right)$$

$$= \frac{2\,\mathbb{E}[\theta]^3}{\mathbb{E}[\theta^2]^3}\left(-\mathbb{E}[\theta]\right) = -2\,\frac{\mathbb{E}[\theta]^4}{\mathbb{E}[\theta^2]^3} < 0$$

$$\therefore\ \hat{\Theta} = \frac{\mathbb{E}[\theta^2]}{\mathbb{E}[\theta]} \text{ es un máximo.}$$

y es estimador puntual de $U(\hat{\theta}, \theta)$.

4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de n v.a.i.i.d. $Normal(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 conocida. Suponga que la distribución inicial de μ es $\mu \sim Normal(\eta, \tau^2)$ con η y τ^2 conocidas.

(a) Construya un intervalo de credibilidad Bayesiano HPD (*highest posterior density*) del $100(1-\alpha)\%$ para μ.

(b) Construya un intervalo de predicción del $100(1-\alpha)\%$ para X_{n+1}.

(c) Considere una distribución inicial uniforme para μ, haciendo $\tau^2 \to \infty$, obtenga (a) y (b).