# Von Dreisatz zu Integralen

Dein Wegweiser durch die Analysis

## Inhaltsverzeichnis

# -1 Ein paar Worte vorab: Hinweise zum Lernen

Liebe Leserin, lieber Leser,

herzlich willkommen zu diesem Lernmaterial! Mathematik kann richtig spannend sein, wenn man die Ideen dahinter versteht und merkt, wie alles zusammenhängt. Dieses Material soll dir dabei helfen, nicht nur Formeln zu lernen, sondern auch ein Gefühl für die Mathematik zu entwickeln. Wir wollen gemeinsam entdecken, wie du Probleme lösen und mathematische Konzepte im Alltag wiederfinden kannst.

## Wie du dieses Material am besten nutzt (Selbstlern-Strategien)

Dieses Skript ist so aufgebaut, dass du es möglichst gut im Selbststudium verwenden kannst. Hier ein paar Ratschläge, wie du das Beste daraus machst:

- **Lies aktiv:** Überfliege einen Abschnitt nicht nur, sondern versuche, jeden Satz zu verstehen. Markiere dir unklare Stellen oder Begriffe, die du nachschlagen möchtest. Ein Textmarker oder bunte Stifte können helfen, Wichtiges hervorzuheben.
- **Beispiele sind dein Freund:** Rechne die Beispiele nicht nur nach, sondern versuche zu verstehen, *warum* jeder Schritt so gemacht wird. Decke die Lösung ab und versuche, sie selbstständig zu finden, bevor du vergleichst. Variiere die Zahlen in den Beispielen und schau, was passiert.
- **Aufgaben sind Training:** Die Aufgaben dienen dazu, das Gelernte zu festigen. Beginne mit den einfacheren und steigere dich. Es ist okay, wenn nicht jede Aufgabe sofort klappt. Wichtig ist, dass du dich damit auseinandersetzt. Versuche, den Lösungsweg auch dann nachzuvollziehen, wenn du eine Lösung nachschauen musstest.
- **Nutze die verschiedenen Boxen:** Im nächsten Abschnitt erklären wir dir, was die verschiedenen farbigen Boxen bedeuten. Sie sollen dir helfen, Wichtiges schnell zu erkennen und dein Verständnis zu vertiefen.
- **Mache Pausen:** Dein Gehirn braucht Zeit, um neue Informationen zu verarbeiten. Lerne lieber in kürzeren Einheiten mit Pausen dazwischen als stundenlang am Stück. Belohne dich auch für erreichte Lernziele!
- **Sprich darüber:** Erkläre einem Freund, einer Freundin oder deinen Eltern, was du gerade gelernt hast. Wenn du es jemand anderem erklären kannst, hast du es selbst gut verstanden (das nennt man den 'Feynman-Effekt').
- **Sei neugierig:** Wenn dich ein Thema besonders interessiert, suche nach weiteren Informationen im Internet oder in Büchern. Mathematik ist ein riesiges, faszinierendes Feld!
- **Führe ein Lerntagebuch:** Notiere dir, was du gelernt hast, was dir schwerfiel und welche Fragen noch offen sind. Das hilft dir, deinen Lernfortschritt zu sehen und gezielt nachzuarbeiten.
- **Selbst-Checks:** Nach neuen Erklärungen findest du manchmal kleine Fragen wie 'Hast du's verstanden?'. Nutze sie, um kurz innezuhalten und dein Verständnis zu prüfen.

**Dein Lernabenteuer – Die Werkzeugkiste dieses Skripts**

Damit du dich in diesem Material gut zurechtfindest, gibt es verschiedene Arten von hervorgehobenen Kästen, die dir helfen sollen:

- ϟ **Merksatz:** Hier stehen die wichtigsten Definitionen, Formeln und Regeln, die du dir gut einprägen solltest. Sie sind das Kernwissen.
- **Beispiel:** Hier werden die Konzepte aus den Merksätzen an konkreten Rechnungen oder Situationen veranschaulicht. Versuche immer, die Beispiele selbst nachzuvollziehen.

- **Aufgabe:** Hier bist du gefragt! Wende das Gelernte an und übe.
- **Infobox:** Diese Kästen enthalten Hintergrundinformationen, interessante Fakten, Ausblicke oder Erklärungen, die über den reinen Lernstoff hinausgehen.
- **Kurz & Knapp:** Eine sehr knappe Zusammenfassung der wichtigsten Punkte eines Abschnitts – ideal zum Wiederholen.
- **Achtung Stolperstein!:** Hier weisen wir auf typische Fehler oder Missverständnisse hin, damit du sie vermeiden kannst.
- **Warum ist das wichtig?:** Diese Boxen erklären dir, warum ein bestimmtes Konzept nützlich ist oder wo es später wieder auftaucht.
- **Tipp:** Kleine Hinweise oder Ratschläge, die dir beim Lösen von Aufgaben oder beim Verständnis helfen können.

Dieses Material ist wie eine Landkarte für einen Teil der Mathematik. Es zeigt dir den Weg, aber gehen musst du ihn selbst. Wir haben versucht, viele Erklärungen und Beispiele einzubauen, die dir hoffentlich helfen, die Konzepte nicht nur zu lernen, sondern auch zu lieben. Wir wünschen dir viel Spaß und Erfolg dabei!

# 0 Einleitung

Willkommen auf deiner Reise durch die Analysis! Dieses Fachgebiet der Mathematik ist unglaublich mächtig und hilft uns, Veränderungen zu verstehen und zu beschreiben – von der Geschwindigkeit eines Autos bis zum Wachstum einer Pflanze. Bevor wir uns aber in die Tiefen der Differential- und Integralrechnung stürzen, wollen wir mit einigen Grundlagen beginnen, die du vielleicht schon aus früheren Schuljahren kennst. Diese Grundlagen sind das Fundament, auf dem alles Weitere aufbaut.

## ϟ 0.1 *Was erwartet dich hier?*

Dieses Lernmaterial ist dein Begleiter auf einer Reise durch wichtige Bereiche der Mathematik. Wir starten ganz einfach mit dem **Dreisatz**, den du vielleicht schon kennst. Von dort aus bauen wir unser Wissen Schritt für Schritt auf: Wir lernen **Funktionen** kennen, schauen uns an, wie sie sich verändern (**Differentialrechnung**) und wie wir Flächen unter ihnen berechnen können (**Integralrechnung**). Du wirst sehen, wie diese Ideen zusammenhängen und wofür man sie braucht. Dieses Material soll dir auch einen guten Überblick über Themen geben, die im **Abitur in NRW** wichtig sind.

Es ist wichtig zu verstehen, dass Mathematik nicht nur aus isolierten Themen besteht. Vielmehr bauen die Konzepte aufeinander auf und sind miteinander verwoben wie ein großes Netz. Der Dreisatz zum Beispiel ist eine einfache Form proportionaler Zusammenhänge, die uns direkt zu den linearen Funktionen führen. Und das Verständnis linearer Funktionen ist unerlässlich, bevor wir uns komplexeren Funktionstypen zuwenden.

**Wichtiger Hinweis und Voraussetzungen**

Die Mathematik ist ein riesiges Feld! In deinen Schulbüchern findest du noch viele weitere spannende Themen. Dieses Material hier ist ein guter Anfang und soll dir die wichtigsten Grundlagen der Analysis erklären. Es ist nicht alles, was es gibt, aber es ist ein starkes Fundament, auf dem du aufbauen kannst.

**Für wen ist dieses Material gedacht und was solltest du mitbringen?** Dieses Material ist für Alle gedacht, die sich im Selbststudium oder begleitend zum Unterricht in die Analysis einarbeiten möchten. Die Sprache ist Deutsch. Wenn Deutsch nicht deine Muttersprache ist, versuche, die mathematischen Begriffe und die Erklärungen langsam zu lesen. Mathematik hat oft ihre eigene 'Sprache' mit Symbolen, die überall auf der Welt gleich sind! Nutze vielleicht auch ein Wörterbuch für Fachbegriffe.

Um gut mit diesem Skript arbeiten zu können, solltest du einige grundlegende mathematische Fähigkeiten mitbringen:

- **Lineare Gleichungen umformen:** Du solltest sicher im Umstellen von einfachen Gleichungen nach einer Unbekannten sein (Äquivalenzumformungen).
- **Bruchrechnung:** Das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren von Brüchen sollte dir vertraut sein.
- **Grundlegende algebraische Regeln:** Dazu gehören das Ausmultiplizieren von Klammern, das Anwenden der binomischen Formeln und das Rechnen mit Potenzen und Wurzeln. Viele dieser Aspekte werden wir zwar wiederholen, aber eine gewisse Grundsicherheit ist hilfreich.

Keine Sorge, wenn nicht alles perfekt sitzt! Dieses Skript ist so aufgebaut, dass viele Konzepte von Grund auf erklärt werden. Für eine detailliertere Übersicht über algebraische Grundlagen wird es eventuell eine separate Formelsammlung oder ein Grundlagenkapitel geben. Wichtig ist deine Bereitschaft, dich aktiv mit den Inhalten auseinanderzusetzen.

***Schon gewusst? Die geheimen Lieblingszahlen der Natur?***

Hast du schon einmal die Spiralen auf einem Tannenzapfen gezählt oder die Anordnung der Kerne in einer Sonnenblume genauer betrachtet? Oft verbirgt sich dahinter eine faszinierende Zahlenfolge, die als **Fibonacci-Folge** bekannt ist!
Sie beginnt ganz einfach mit 1 und 1 (manchmal auch mit 0 und 1), und jede weitere Zahl ist die Summe ihrer beiden Vorgänger:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

(Denn $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$, und so weiter.)
Das Erstaunliche: Diese Zahlen tauchen unglaublich oft in der Natur auf!

- Die Anzahl der Blütenblätter vieler Blumen ist eine Fibonacci-Zahl (z.B. Lilien haben oft 3, Butterblumen 5, Astern 21 oder 34).
- Die Spiralen bei Tannenzapfen, Ananas oder den Kernen von Sonnenblumen verlaufen oft in Anzahlen, die benachbarte Fibonacci-Zahlen sind.
- Auch bei der Verzweigung von Bäumen oder der Anordnung von Blättern an einem Stiel findet man manchmal diese Muster.

Es ist, als ob die Natur eine Vorliebe für diese Zahlenfolge hätte, weil sie effizientes Wachstum und eine optimale Anordnung ermöglicht.
**Noch eine Verblüffung (ein kleiner Ausblick):** Wenn du aufeinanderfolgende Zahlen der Fibonacci-Folge durcheinander teilst (z.B. $8/5 = 1,6$; $13/8 = 1,625$; $21/13 \approx 1,61538$; $34/21 \approx 1,61904$), nähern sich die Ergebnisse immer mehr einer ganz besonderen irrationalen Zahl, dem **Goldenen Schnitt** $\Phi \approx 1,61803\ldots$. Dieser Wert gilt seit der Antike als Inbegriff von Ästhetik und Harmonie in Kunst und Architektur!
Die Mathematik ist voller solcher überraschender Muster und Querverbindungen, die uns helfen, die Struktur und Schönheit der Welt um uns herum – und in der Mathematik selbst – zu entdecken. Dieses Buch ist eine Einladung, einige weitere dieser faszinierenden Zusammenhänge aufzuspüren!

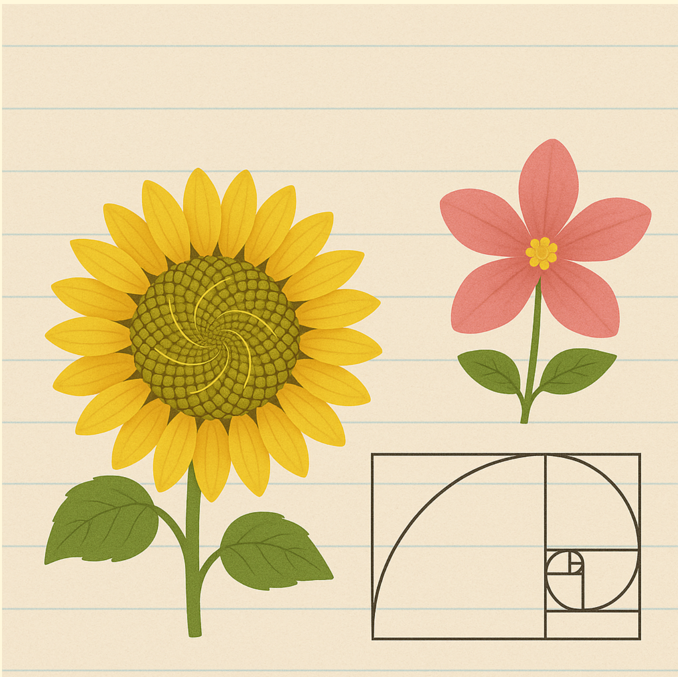

Abbildung 0.1: Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt offenbaren Muster in der Natur.

# 1 Wichtige mathematische Symbole und Schreibweisen – Ein umfassender Überblick

Liebe Leserin, lieber Leser, bevor wir uns auf die spannende Reise von den Grundlagen bis zu den komplexeren Themen der Analysis begeben, wollen wir uns die gemeinsame Sprache ansehen, die uns dabei begleiten wird: die Sprache der Mathematik. Sie besteht aus vielen Symbolen und Schreibweisen, die dazu dienen, Ideen, Regeln und Zusammenhänge präzise, kurz und eindeutig darzustellen.

Dieses Kapitel soll dir als **Nachschlagewerk und erste Orientierung** für die wichtigsten mathematischen Zeichen dienen, die dir in diesem Buch begegnen werden – von den einfachsten Rechenzeichen bis hin zu Symbolen aus der Differential- und Integralrechnung. **Keine Sorge:** Du musst nicht alle diese Symbole sofort im Detail verstehen oder auswendig lernen! Viele davon werden erst in späteren Kapiteln relevant und dort ausführlich im Kontext erklärt. Nutze dieses Kapitel, um dir einen ersten Überblick zu verschaffen oder um später schnell ein Symbol nachzuschlagen, dessen Bedeutung dir vielleicht gerade nicht präsent ist.

**Was du in diesem Kapitel (als Referenz) finden wirst:**

Dieses Kapitel dient als Übersicht und Nachschlagewerk. Es zielt darauf ab:

- dir eine möglichst vollständige Liste der in diesem Buch verwendeten mathematischen Symbole und Notationen zur Verfügung zu stellen.
- eine sehr **kurze, grundlegende Erklärung** für jedes Symbol anzubieten, damit du eine erste Vorstellung seiner Bedeutung bekommst.
- dir zu ermöglichen, Symbole, denen du in späteren Kapiteln begegnest, hier schnell nachzuschlagen.
- zu verstehen, dass die **tiefergehende Bedeutung und Anwendung** vieler dieser Symbole erst in den jeweiligen Fachkapiteln ausführlich erläutert wird. Betrachte dies als eine Art mathematisches Glossar für den Start.

Es wird nicht erwartet, dass du nach diesem Kapitel alle Notationen perfekt beherrschst, sondern dass du weißt, wo du sie bei Bedarf nachschlagen kannst.

## 1.1 Grundlegende Rechenzeichen

- **$+$ (Pluszeichen):** Für die Addition (Zusammenzählen). Beispiel: $5 + 3 = 8$.
- **$-$ (Minuszeichen):** Für die Subtraktion (Abziehen) oder als Vorzeichen. Beispiele: $8 - 3 = 5$; $-4$.
- **$\cdot$ (Malpunkt) oder $\times$ (Malkreuz):** Für die Multiplikation. Oft auch weggelassen (z.B. $2x$ für $2 \cdot x$). Beispiele: $5 \cdot 3 = 15$; $5 \times 3 = 15$.
- **$:$ (Geteiltzeichen) oder $/$ (Schrägstrich) oder $\frac{a}{b}$ (Bruchstrich):** Für die Division. Beispiele: $15 : 3 = 5$; $15/3 = 5$; $\frac{15}{3} = 5$.
- **$=$ (Gleichheitszeichen):** Zeigt an, dass Ausdrücke links und rechts davon denselben Wert haben. Beispiel: $5 + 3 = 8$.

## 1.2 Vergleichszeichen

- **$<$ (Kleiner-als-Zeichen):** Linker Wert ist kleiner als rechter. Beispiel: $3 < 8$.
- **$>$ (Größer-als-Zeichen):** Linker Wert ist größer als rechter. Beispiel: $8 > 3$.
- **$\leq$ oder $\le$ (Kleiner-gleich-Zeichen):** Linker Wert ist kleiner als oder gleich dem rechten. Beispiel: $x \leq 3$.

- **$\geq$ oder $\geq$ (Größer-gleich-Zeichen):** Linker Wert ist größer als oder gleich dem rechten. Beispiel: $x \geq 3$.
- **$\neq$ oder $\neq$ (Ungleichheitszeichen):** Die Werte sind nicht gleich. Beispiel: $5 \neq 8$.
- **$\approx$ (Ungefähr-gleich-Zeichen):** Die Werte sind ungefähr gleich (oft bei Rundungen). Beispiel: $\pi \approx 3,14$.

## 1.3 Klammern

Klammern dienen der Strukturierung von Termen und legen die Reihenfolge von Rechenoperationen fest.

- $(\dots)$ **(Runde Klammern):** Häufigste Form zur Gruppierung, für Funktionsargumente. Beispiele: $(3+5)\cdot 2 = 16$; $f(x)$.
- $[\dots]$ **(Eckige Klammern):** Oft für verschachtelte Klammerungen oder zur Bezeichnung von abgeschlossenen Intervallen. Beispiele: $10 - [2\cdot(1+1)] = 6$; $[2,5]$ (Intervall von 2 bis 5, inklusive der Grenzen).
- $\{\dots\}$ **(Geschweifte Klammern):** Typisch für Mengen oder Definitionsbereiche. Beispiele: $\{1,3,5\}$; $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$.

## 1.4 Variablen, Parameter und Konstanten

Buchstaben dienen als Platzhalter für Zahlen.

- **Variablen $(x, y, z, t, \dots)$:** Stehen für veränderliche Größen.
- **Parameter/Konstanten $(a, b, c, k, m, n, \dots)$:** Stehen für feste, aber ggf. allgemein gehaltene Zahlenwerte.

## 1.5 Potenzen, Wurzeln und Beträge

- $a^n$ **(Potenz):** $a$ (Basis) wird $n$-mal (Exponent) mit sich selbst multipliziert. Details siehe Potenzgesetze.
- $\sqrt{a}$ **(Quadratwurzel):** Die nicht-negative Zahl, die quadriert $a$ ergibt. Definiert für $a \geq 0$.
- $\sqrt[n]{a}$ **(n-te Wurzel):** Die Zahl, die $n$-mal mit sich selbst multipliziert $a$ ergibt.
- $|a|$ **(Betrag von $a$):** Der Abstand von $a$ zur Null; immer nicht-negativ. Beispiel: $|-5| = 5$.

## 1.6 Wichtige Zahlenmengen und Mengensymbole

- $\mathbb{N}$ **(Natürliche Zahlen):** $\{1, 2, 3, \dots\}$ (manchmal mit 0: $\mathbb{N}_0$).
- $\mathbb{Z}$ **(Ganze Zahlen):** $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- $\mathbb{Q}$ **(Rationale Zahlen):** Alle Zahlen darstellbar als Bruch ganzer Zahlen (z.B. $\frac{3}{4}$).
- $\mathbb{R}$ **(Reelle Zahlen):** Alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl (inkl. $\pi, \sqrt{2}$).
- $\in$ **(Element-von-Zeichen):** '$a \in M$' bedeutet '$a$ ist ein Element der Menge $M$'.
- $\setminus$ **(Ohne-Zeichen):** '$A \setminus B$' bedeutet 'Menge A ohne die Elemente von Menge B'.
- **Intervalle:** $[a, b]$ (alle $x$ mit $a \leq x \leq b$); $(a, b)$ (alle $x$ mit $a < x < b$); auch halboffene $[a, b)$ und unendliche $(a, \infty)$ sind möglich.

## 1.7 Symbole für Funktionen und Änderungen

- $f(x)$ **(Funktionsschreibweise):** 'f von x'; der Wert der Funktion $f$ an der Stelle $x$.
- $x \mapsto f(x)$ **(Zuordnungspfeil):** Drückt aus, dass $x$ auf $f(x)$ abgebildet wird.
- $D_f$ **(Definitionsbereich):** Die Menge aller erlaubten $x$-Werte für die Funktion $f$.
- $W_f$ **(Wertebereich):** Die Menge aller möglichen Funktionswerte $f(x)$.
- $\Delta x, \Delta y$ **(Delta-Symbol):** $\Delta$ steht für eine Differenz oder Änderung.

## 1.8 Spezielle Zahlen und Konstanten

- $\pi$ **(Pi):** Die Kreiszahl, $\pi \approx 3,14159\ldots$.
- $e$ **(Eulersche Zahl):** Basis des natürlichen Logarithmus, $e \approx 2,71828\ldots$. Wichtig für Wachstums-/Zerfallsprozesse (siehe Kapitel 7).
- $\infty$ **(Unendlichkeitszeichen):** Symbol für Unendlichkeit, kein Zahlenwert an sich.

## 1.9 Symbole der Analysis

Die folgenden Symbole sind zentral für die höheren Themen dieses Buches und werden in den entsprechenden Kapiteln ausführlich erklärt. Hier nur zur ersten Orientierung:

**Summen und Reihen:**

- $\sum$ **(Summenzeichen):** Kurzschreibweise für Summen vieler Terme. Beispiel: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. (Wichtig für Riemannsummen, siehe Kapitel 6.1).
- $n!$ **(Fakultät):** $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$. Produkt der ersten $n$ natürlichen Zahlen. (Begegnet uns bei Taylorreihen, siehe Kapitel 9).

**Grenzwerte (Limes):**

- $\lim_{x \to a} f(x)$ **(Limes):** Der Wert, dem sich $f(x)$ annähert, wenn $x$ sich $a$ nähert.
- $x \to \infty$ **(x geht gegen Unendlich):** $x$ wird beliebig groß positiv.
- $x \to -\infty$ **(x geht gegen Minus-Unendlich):** $x$ wird beliebig groß negativ.
- $x \to a^+$ / $x \to a^-$ **(Einseitige Grenzwerte):** $x$ nähert sich $a$ von rechts / von links. (Zentral für die Definition der Ableitung und das Verhalten von Funktionen, siehe Kapitel 5 und 4.9).

**Differentialrechnung (Ableitungen):**

- $f'(x)$ **oder** $\frac{df}{dx}$ **(Erste Ableitung):** Gibt die Steigung der Tangente an den Graphen von $f$ an der Stelle $x$ bzw. die momentane Änderungsrate an.
- $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(n)}(x)$ **(Höhere Ableitungen):** Zweite, dritte, n-te Ableitung. (Kernstück von Kapitel 5).

**Integralrechnung (Integrale):**

- $\int f(x)\,dx$ **(Unbestimmtes Integral):** Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$.
- $\int_a^b f(x)\,dx$ **(Bestimmtes Integral):** Gibt den orientierten Flächeninhalt unter dem Graphen von $f(x)$ zwischen $a$ und $b$ an.

- $F(x)$ **(Stammfunktion):** Eine Funktion, deren Ableitung $F'(x)$ die Funktion $f(x)$ ist.
- $C$ **(Integrationskonstante):** Eine beliebige Konstante, die bei unbestimmten Integralen addiert wird. (Kernstück von Kapitel 6).

**Logarithmus- und trigonometrische Funktionen:**

- $\ln(x)$ **(Natürlicher Logarithmus):** Die Umkehrfunktion zu $e^x$.
- $\log_b(x)$ **(Logarithmus zur Basis b):** Verallgemeinerung des Logarithmus.
- $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$ **(Sinus, Kosinus, Tangens):** Funktionen zur Beschreibung periodischer Vorgänge. (Siehe Kapitel 8 und 9).

**Ein wachsendes Lexikon**

Wie du siehst, ist die Sprache der Mathematik reichhaltig. Dieses Kapitel ist dein Startpunkt. Mit jedem neuen Konzept, das du lernst, werden auch neue Symbole und Schreibweisen eingeführt und erklärt. Nutze dieses Kapitel als Referenz, und scheue dich nicht, bei Unklarheiten zurückzublättern oder im jeweiligen Kapitel die detaillierten Erklärungen zu suchen. Übung macht den Meister – auch im Verstehen der mathematischen Notation!

# 2 Der Dreisatz – Dein Werkzeug für Verhältnisse

Der Dreisatz ist eines der ersten mathematischen Werkzeuge, mit denen du lernst, Beziehungen zwischen verschiedenen Mengen zu berechnen. Er begegnet dir oft im Alltag, auch wenn du ihn vielleicht nicht immer bewusst als 'Dreisatz' erkennst.

**Was ist eigentlich ein Verhältnis? Und was bedeutet 'proportional'?**

Stell dir vor, du bäckst einen Kuchen. Im Rezept steht: 'Für 4 Personen nimm 200g Mehl'. Das ist ein **Verhältnis**! Es sagt dir, wie viel Mehl du für eine bestimmte Anzahl von Personen brauchst. Wenn du für mehr Personen backen willst (z.B. 8 Personen), brauchst du auch mehr Mehl (nämlich 400g) – und zwar im gleichen Verhältnis (hier: 50g Mehl pro Person). Verhältnisse helfen uns, Mengen fair aufzuteilen oder anzupassen.
Das Wort **'proportional'** klingt vielleicht kompliziert, aber du kannst es dir auch als **'pro Portion'** vorstellen. In unserem Kuchenbeispiel ist die 'Portion' eine Person, und *pro Person* brauchen wir 50g Mehl. Wenn sich also die Anzahl der Personen (Portionen) erhöht, muss sich die Mehlmenge im gleichen Maße oder Verhältnis erhöhen, damit das Rezept noch stimmt. Verdoppelst du die Personen, verdoppelst du das Mehl. Verdreifachst du die Personen, verdreifachst du das Mehl. Das ist die Kernidee hinter 'direkt proportional'.

Der Dreisatz ist besonders nützlich, wenn zwei Größen **direkt proportional** zueinander sind. Das bedeutet, je mehr von dem einen, desto mehr von dem anderen – und umgekehrt, im stets gleichen Verhältnis.

***ϟ 2.1 Was ist der Dreisatz?***

Der Dreisatz ist eine super Methode, um Aufgaben mit **proportionalen Zusammenhängen** zu lösen. 'Proportional' bedeutet: Wenn sich eine Größe verdoppelt, verdoppelt sich auch die andere. Wenn sich eine Größe halbiert, halbiert sich auch die andere. Das Verhältnis zwischen den beiden Größen bleibt immer gleich.
Mathematisch sagt man:

$$\text{Größe}_1 \text{ ist proportional zu Größe}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\text{Größe}_1}{\text{Größe}_2} = \text{konstant}$$

Das Zeichen für 'ist proportional zu' ist $\propto$. Also: $\text{Größe}_1 \propto \text{Größe}_2$.
**Warum 'Drei-Satz'?** Weil man meistens in drei Schritten (Sätzen) zur Lösung kommt:

1. **Was weiß ich?** Schreibe das bekannte Verhältnis auf (z.B. 3 Äpfel kosten 1,80 €).
2. **Auf die Einheit bringen (Zwischenschritt):** Rechne aus, wie viel von der einen Größe einer einzelnen Einheit der anderen Größe entspricht (z.B. Was kostet 1 Apfel?). Dieser Schritt ist der Schlüssel!
3. **Hochrechnen (Schlusssatz):** Rechne von dieser Einheitsgröße auf die gesuchte Menge hoch (z.B. Was kosten 5 Äpfel?).

Schauen wir uns das an einem klassischen Beispiel an.

**Beispiel 2.1 Der Klassiker: Äpfel kaufen**

**Problem:** Wenn 3 Äpfel 1,80 Euro kosten, wie viel kosten dann 5 Äpfel?
**Lösung mit dem Dreisatz (Schritt für Schritt):**

1. **Was weiß ich? (1. Satz)** 3 Äpfel *entspricht* 1,80 Euro Diese Information ist unsere Ausgangsbasis.

2. **Auf die Einheit bringen (Preis für 1 Apfel) (2. Satz)** Um von 3 Äpfeln auf 1 Apfel zu kommen, teile ich die Anzahl der Äpfel durch 3. Damit das Verhältnis gleich bleibt, muss ich auch den Preis durch 3 teilen: $\begin{array}{rcl} 3 \text{ Äpfel} & \xrightarrow{:3} & 1 \text{ Apfel} \\ 1{,}80 \text{ Euro} & \xrightarrow{:3} & 0{,}60 \text{ Euro} \end{array}$ Also: 1 Apfel kostet 0,60 Euro.
   Diesen Wert (0,60 €/Apfel) nennt man auch den **Proportionalitätsfaktor**.

3. **Hochrechnen (Preis für 5 Äpfel) (3. Satz)** Um von 1 Apfel auf 5 Äpfel zu kommen, multipliziere ich die Anzahl der Äpfel mit 5. Entsprechend muss ich auch den Preis für einen Apfel mit 5 multiplizieren: $\begin{array}{rcl} 1 \text{ Apfel} & \xrightarrow{\times 5} & 5 \text{ Äpfel} \\ 0{,}60 \text{ Euro} & \xrightarrow{\times 5} & 3{,}00 \text{ Euro} \end{array}$

**Antwort:** 5 Äpfel kosten 3,00 Euro.

**Kurzschreibweise (oft in der Schule):**

$$\begin{array}{rcll} 3 \text{ Äpfel} & \widehat{=} & 1{,}80\ € & \\ 1 \text{ Apfel} & \widehat{=} & 1{,}80\ € : 3 = 0{,}60\ € & \text{(geteilt durch 3 auf beiden} \\ 5 \text{ Äpfel} & \widehat{=} & 0{,}60\ € \times 5 = 3{,}00\ € & \text{(mal 5 auf beiden Seiten)} \end{array}$$

*Selbst-Check:* Kannst du erklären, warum der Schritt 'Auf die Einheit bringen' so wichtig ist? Was würde passieren, wenn man ihn überspringt? (Antwort: Ohne den Preis für EINEN Apfel zu kennen, wüssten wir nicht, mit welchem Faktor wir multiplizieren müssen, um den Preis für FÜNF Äpfel zu finden. Der 'Einheitspreis' ist der Schlüssel zum Hochrechnen.)

Jetzt bist du dran! Versuche, die nächste Aufgabe genauso strukturiert zu lösen.

**Aufgabe 2.1 Bücherkauf**

Wenn 4 gleiche Notizbücher zusammen 10 Euro kosten, wie viel kosten dann 7 dieser Notizbücher? Zeichne auch ein kleines Schema wie im Beispiel (mit den Pfeilen : 4 und $\cdot 7$).

Der Dreisatz funktioniert nicht nur beim Einkaufen, sondern auch in vielen anderen Situationen.

**Beispiel 2.2 Arbeit einer Maschine**

Eine Maschine produziert in 5 Stunden 200 Teile. Wie viele Teile produziert sie in 8 Stunden (angenommen, sie arbeitet immer gleich schnell)?
**Lösung:**

1. **Was weiß ich?** 5 Stunden $\widehat{=}$ 200 Teile.

2. **Auf die Einheit (Produktion in 1 Stunde):** 1 Stunde $\widehat{=}$ 200 Teile : 5 Stunden = 40 Teile/Stunde. (Die Maschine schafft also 40 Teile pro Stunde. Das ist wieder unser Proportionalitätsfaktor).

3. **Hochrechnen (Produktion in 8 Stunden):** 8 Stunden $\widehat{=}$ 40 Teile/Stunde $\times$ 8 Stunden = 320 Teile.

**Antwort:** In 8 Stunden produziert die Maschine 320 Teile.

Manchmal muss man ein bisschen um die Ecke denken, wie bei der nächsten Aufgabe.

**Aufgabe 2.2 Autoverbrauch**

Ein Auto verbraucht auf einer Strecke von 150 km genau 12 Liter Benzin.

1. Wie viel Benzin verbraucht es auf einer Strecke von 250 km?

2. Wie weit kommt das Auto mit einem vollen Tank von 40 Litern? (Tipp: Hier ist die Literzahl gegeben und die Kilometer sind gesucht! Du rechnest also erst aus, wie weit es mit 1 Liter

kommt.)

Bisher waren alle Beispiele **direkt proportional**: mehr Äpfel → mehr Kosten, mehr Stunden → mehr Teile. Aber es gibt auch den umgekehrten Fall.

**Achtung: Antiproportionaler Dreisatz!**

Manchmal ist es auch umgekehrt: Wenn eine Größe mehr wird, wird die andere weniger. Das nennt man **antiproportional** oder **umgekehrt proportional**. **Beispiele:**

- Mehr Arbeiter → weniger Zeit, um die gleiche Arbeit zu erledigen.
- Höhere Geschwindigkeit → weniger Zeit, um die gleiche Strecke zurückzulegen.
- Mehr Pumpen → weniger Zeit, um ein Becken zu füllen.

Beim antiproportionalen Dreisatz musst du beim Schritt 'Auf die Einheit bringen' und 'Hochrechnen' auf der einen Seite der Gleichung teilen, wenn du auf der anderen multiplizierst (und umgekehrt). Das Produkt der beiden Größen bleibt konstant ($x \cdot y = k$).
**Beispiel: Bauarbeiter** 10 Arbeiter brauchen 12 Tage, um eine Mauer zu bauen. Wie viele Tage brauchen 15 Arbeiter, wenn alle gleich schnell arbeiten?

1. **Was weiß ich?** 10 Arbeiter *entspricht* 12 Tage Das bedeutet, die gesamte Arbeit beträgt 10 Arbeiter × 12 Tage = 120 Arbeitstage (Manntage).

2. **Auf die Einheit (Wie lange braucht 1 Arbeiter?):** Wenn 1 Arbeiter alleine arbeitet, braucht er 10-mal so lange wie 10 Arbeiter:
   10 Arbeiter $\xrightarrow{:10}$ 1 Arbeiter
   12 Tage $\xrightarrow{\times 10}$ 120 Tage (Hier wird multipliziert!)
   Also: 1 Arbeiter würde 120 Tage für die gesamte Arbeit brauchen.

3. **Hochrechnen (Wie lange brauchen 15 Arbeiter?):** Wenn 15 Arbeiter arbeiten, teilen sie sich die Arbeit. Sie brauchen also 15-mal weniger Zeit als ein einzelner Arbeiter:
   1 Arbeiter $\xrightarrow{\times 15}$ 15 Arbeiter
   120 Tage $\xrightarrow{:15}$ 8 Tage (Hier wird geteilt!)

**Antwort:** 15 Arbeiter brauchen 8 Tage. Man hätte auch direkt rechnen können: (10 Arbeiter × 12 Tage)/15 Arbeiter = 8 Tage.

Jetzt bist du wieder dran mit ein paar gemischten Aufgaben.

**Aufgabe 2.3 Dreisatz – Weitere Übungen**

Überlege bei jeder Aufgabe zuerst, ob sie proportional oder antiproportional ist! Schreibe deine Überlegung kurz auf.

- 6 gleiche Laborflaschen kosten 15 Euro. Wie viel kosten 10 solcher Flaschen?
- 4 Pumpen füllen ein Schwimmbecken in 12 Stunden. Wie lange würden 6 gleiche Pumpen brauchen, wenn sie alle die gleiche Leistung haben?
- 2 kg Äpfel kosten 3,80 Euro. Bestimme den Preis für 750 g Äpfel. (Tipp: Wandle Gramm in Kilogramm um: $750\,\mathrm{g} = 0,75\,\mathrm{kg}$, oder rechne alles in Gramm.)
- Ein Futtervorrat reicht für 12 Pferde 20 Tage lang. Wie lange reicht der gleiche Vorrat für 15 Pferde (wenn alle Pferde gleich viel fressen)?

***Kurz & Knapp 2.1: Dreisatz***

- **Proportionaler Dreisatz:** Je mehr A, desto mehr B. (Rechne auf 1 runter, dann auf die gesuchte Menge hoch – auf beiden Seiten gleiche Rechenoperation).
- **Antiproportionaler Dreisatz:** Je mehr A, desto weniger B. (Rechne auf 1 runter, dann auf die gesuchte Menge hoch – auf den Seiten entgegengesetzte Rechenoperationen).
- Der **Proportionalitätsfaktor** ist der Wert der einen Größe pro Einheit der anderen Größe (z.B. €/Stück, km/h, Teile/Stunde).

## Der Dreisatz und die Welt der Funktionen

Du hast es vielleicht schon geahnt: Der Dreisatz, zumindest der proportionale, hat viel mit **linearen Funktionen** zu tun. Das ist ein wichtiger Schritt, um zu verstehen, wie mathematische Ideen miteinander verbunden sind.

***ϟ 2.2 Dreisatz als lineare Funktion***

Der proportionale Dreisatz ist eigentlich schon dein erster Schritt in die Welt der **linearen Funktionen**! Wenn du zum Beispiel den Preis pro Apfel berechnest (z.B. 0,60 €/Apfel im obigen Beispiel), ist das nichts anderes als die **Steigung** einer Geraden, die durch den Ursprung geht. Die Funktion für den Apfelkauf wäre dann:

$$\text{Preis}(x) = \underbrace{0,60}_{\text{Preis pro Apfel}} \cdot x$$

wobei $x$ die Anzahl der Äpfel ist. Wenn du $x = 0$ einsetzt (du kaufst keine Äpfel), ist der Preis auch 0. Die Gerade, die diesen Zusammenhang darstellt, geht also durch den Punkt (0|0), den Ursprung des Koordinatensystems.

Stell dir ein Koordinatensystem vor: Auf der x-Achse trägst du die Anzahl der Äpfel ein, auf der y-Achse den Gesamtpreis. Die Punkte (1|0.60), (3|1.80) und (5|3.00) liegen alle auf einer Geraden, die im Ursprung beginnt.

Dieser Übergang vom konkreten Rechnen mit dem Dreisatz zur abstrakteren Darstellung mit Funktionen ist ein wichtiger Schritt in der Mathematik. Im nächsten Kapitel schauen wir uns lineare Funktionen noch viel genauer an!

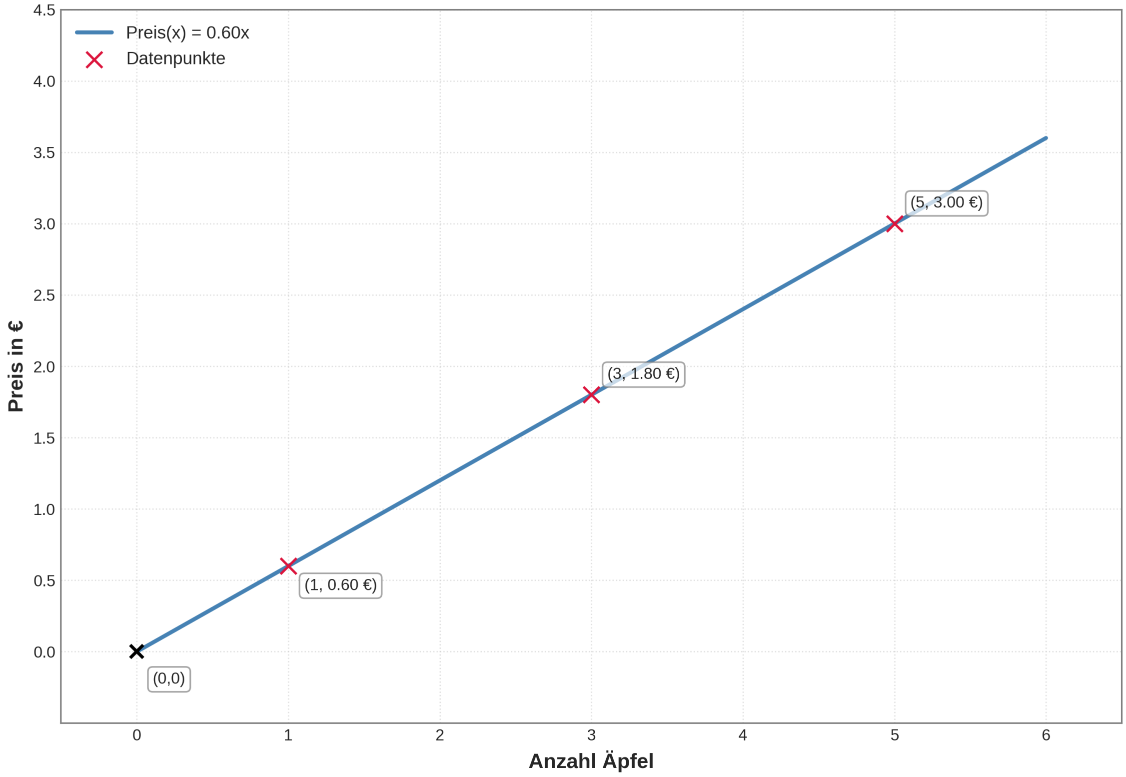


Abbildung 2.1: Preis für Äpfel als lineare Funktion

# 3 Lineare Funktionen – Geraden verstehen

Nachdem wir gesehen haben, dass der Dreisatz eng mit linearen Zusammenhängen verknüpft ist, wollen wir uns nun systematisch mit **linearen Funktionen** beschäftigen. Sie sind die einfachste Art von Funktionen, aber unglaublich wichtig als Grundlage für komplexere Modelle.

**Was du in diesem Kapitel lernen wirst:**

Nachdem du dieses Kapitel durchgearbeitet hast, wirst du in der Lage sein:
- zu erklären, was eine lineare Funktion ist und wie ihre allgemeine Form lautet.
- die Bedeutung der Parameter $a$ (Steigung) und $b$ (y-Achsenabschnitt) zu verstehen und zu interpretieren.
- den Graphen einer linearen Funktion zu zeichnen und aus einem Graphen Informationen abzulesen.
- die Steigung einer Geraden aus zwei Punkten zu berechnen.
- die Funktionsgleichung einer linearen Funktion aus verschiedenen Angaben (z.B. zwei Punkte, Steigung und ein Punkt) aufzustellen.
- Nullstellen linearer Funktionen zu berechnen und zu interpretieren.
- Wertetabellen zu erstellen und zu nutzen.
- Schnittpunkte von zwei Geraden zu berechnen.
- Anwendungsaufgaben mit linearen Funktionen zu modellieren und zu lösen.
- das Konzept der durchschnittlichen Änderungsrate zu verstehen.

**Was bedeutet 'linear'?**

'Linear' kommt vom lateinischen Wort 'linea', was 'Linie' bedeutet. Eine lineare Funktion stellt also immer eine **gerade Linie** dar, wenn du sie zeichnest. Denk an ein Lineal – das ist ein gutes Bild für etwas Lineares! Im Alltag begegnen uns lineare Zusammenhänge oft:

- Dein Taschengeld pro Woche (wenn es immer gleich viel ist und du bei Null startest oder einen festen Betrag schon hast).
- Die Kosten für Benzin, wenn der Preis pro Liter fest ist und du eine bestimmte Menge tankst (ohne Grundgebühr).
- Die Strecke, die du mit konstanter Geschwindigkeit zurücklegst, wenn du die Zeit als Variable nimmst.
- Viele Gebührenmodelle: eine feste Grundgebühr plus ein Betrag pro Einheit (z.B. pro Minute telefonieren, pro gefahrenem Kilometer).

Lineare Funktionen beschreiben also Situationen, in denen die Änderung einer Größe immer gleichmäßig erfolgt.

Jetzt wird es etwas formaler, aber keine Sorge, wir erklären alles Schritt für Schritt.

***3.1 Die allgemeine Form***

Eine lineare Funktion hat die allgemeine Form:

$$f(x) = a \cdot x + b$$

oder auch oft geschrieben als (besonders in der Geometrie):

$$y = a \cdot x + b$$

Dabei bedeuten die Buchstaben:

- $f(x)$ oder $y$: Der **Funktionswert** (oder y-Wert). Das ist das Ergebnis, das die Funktion liefert, wenn du einen bestimmten Wert für $x$ einsetzt. Im Koordinatensystem ist das die Höhe des Punktes auf der Geraden.

- $x$: Die **Variable** (oder x-Wert, Argument). Für $x$ kannst du verschiedene Zahlen einsetzen. Im Koordinatensystem ist das die Position auf der horizontalen Achse.

- $a$: Die **Steigung** der Geraden. Sie sagt dir, wie steil die Gerade ansteigt oder abfällt, wenn du auf der x-Achse um eine Einheit nach rechts gehst. Eine positive Steigung bedeutet 'bergauf', eine negative Steigung 'bergab'.

- $b$: Der **y-Achsenabschnitt**. Er sagt dir, an welcher Stelle (bei welchem y-Wert) die Gerade die y-Achse schneidet. Das ist immer der Funktionswert an der Stelle $x = 0$, denn $f(0) = a \cdot 0 + b = b$. Der Punkt ist also $(0|b)$.

Die Zahlen $a$ und $b$ nennt man auch **Parameter** der Funktion. Sie bestimmen, wie genau die Gerade aussieht und wo sie liegt.

***Warum ist das wichtig? 3.1: Parameter $a$ und $b$***

- **Die Steigung $a$ ist entscheidend!** Sie beschreibt die *Rate der Veränderung*. In Anwendungsaufgaben ist $a$ oft ein Preis pro Stück, eine Geschwindigkeit, ein Verbrauch pro Kilometer etc. Ein tiefes Verständnis der Steigung ist der Schlüssel zu vielen Problemen.

- **Der y-Achsenabschnitt $b$ ist der Startpunkt!** In vielen Anwendungen ist $b$ ein fester Grundbetrag, ein Anfangsbestand oder ein Wert zu Beginn einer Messung ($x = 0$).

Wenn du $a$ und $b$ in einer Textaufgabe identifizieren kannst, hast du oft schon die halbe Miete!

Eine lineare Funktion beschreibt also einen eindeutigen Zusammenhang: Jedem $x$-Wert wird genau ein $y$-Wert zugeordnet, und diese Wertepaare $(x|y)$ liegen alle auf einer Geraden.

Bevor wir uns nun genauer anschauen, wie sich die Parameter $a$ (Steigung) und $b$ (y-Achsenabschnitt) auf den Graphen einer linearen Funktion auswirken und wie wir mit ihnen rechnen, wollen wir noch einmal einen Schritt zurücktreten. Was genau verstehen wir eigentlich unter einer **Funktion**? Du hast diesen Begriff sicher schon oft gehört, aber eine klare und vielseitige Vorstellung davon ist Gold wert, nicht nur für lineare Funktionen, sondern für alles, was in der Mathematik noch kommt!

**Was ist eigentlich eine Funktion? – Eine vielseitige Zuordnung**

Ganz grundlegend ist eine Funktion eine Art **Zuordnungsvorschrift**. Sie nimmt sich etwas aus einer Menge (der sogenannten **Definitionsmenge**, z.B. Zahlen, die du einsetzen darfst) und ordnet diesem **eindeutig** etwas aus einer anderen Menge zu (der sogenannten **Wertemenge**, z.B. die Ergebnis-Zahlen). Stell es dir so vor: Für jede erlaubte Eingabe gibt es genau eine festgelegte Ausgabe.
Hier sind verschiedene Bilder und Ideen, die dir helfen, das Konzept „Funktion" besser zu greifen:

**0. Die Rezept-Analogie: Portionen und Mehl** Stell dir vor, du möchtest Pfannkuchen backen. Dein Rezept sagt: Für eine Portion Pfannkuchen benötigst du 100 Gramm Mehl.

- Für **1 Portion** ($x = 1$) brauchst du $1 \cdot 100\,\text{g} = \mathbf{100\,g}$ Mehl.

- Für **3 Portionen** ($x = 3$) brauchst du $3 \cdot 100\,\text{g} = \mathbf{300\,g}$ Mehl.

- Für eine **halbe Portion** ($x = 0,5$) brauchst du $0,5 \cdot 100\,\text{g} = \mathbf{50\,g}$ Mehl.

Die Anzahl der Portionen (deine Eingabe $x$) bestimmt eindeutig, wie viel Mehl (deine Ausgabe $f(x)$)

du benötigst. Als Funktionsgleichung könnten wir schreiben: $f(x) = 100 \cdot x$. Die Funktion $f$ ordnet also der Anzahl der Portionen $x$ die benötigte Mehlmenge $100x$ zu.

**1. Die Funktionsmaschine** Eine sehr beliebte und hilfreiche Vorstellung ist die einer **Maschine**:

- **Eingabe (Input):** Du wirfst eine Zahl (unser $x$) oben in die Maschine hinein.
- **Verarbeitung:** Im Inneren der Maschine wird mit dieser Zahl nach einer festen Regel etwas Bestimmtes gemacht – sie wird zum Beispiel verdoppelt ($f(x) = 2x$), es wird eine Zahl addiert ($f(x) = x + 5$), oder es werden mehrere Rechenschritte kombiniert (z.B. $f(x) = 2 \cdot (x + 2) + 3$). Diese Regel ist die **Funktionsvorschrift**.
- **Ausgabe (Output):** Unten kommt genau eine neue Zahl (unser Funktionswert $f(x)$ oder $y$) heraus.

Für jede erlaubte Eingabe $x$ liefert die Maschine also eine eindeutig bestimmte Ausgabe $f(x)$.

**2. Der (ideale) Getränkeautomat** Ein bisschen wie ein Getränkeautomat (der immer funktioniert und nie leer ist und nichts kostet ☺):

- **Eingabe:** Du drückst eine Taste (z.B. Taste Nr. 1 für 'Apfelschorle'). Die Tastenwahl ist dein $x$.
- **Ausgabe:** Du erhältst ein bestimmtes Getränk (z.B. eine Apfelschorle). Das Getränk ist dein $f(x)$.

Wichtig ist hier: **Jede Taste ist genau einem Getränk zugeordnet.** Es kann nicht sein, dass du Taste 1 drückst und mal eine Cola, mal eine Limo bekommst. Das ist das Prinzip der **Eindeutigkeit** einer Funktion! (Es kann aber sein, dass verschiedene Tasten zum selben Getränk führen – z.B. Taste 1 und Taste 5 geben beide Apfelschorle. Das ist bei Funktionen auch erlaubt: Unterschiedliche $x$-Werte können denselben $f(x)$-Wert haben. Aber ein $x$-Wert darf nicht mehrere verschiedene $f(x)$-Werte haben!)

**3. Die mathematische Sicht: Eine Abbildung** In der Mathematik nennt man eine Funktion oft auch eine **Abbildung**. Sie bildet Elemente einer Menge auf Elemente einer anderen Menge ab. Wenn wir zum Beispiel sagen, dass wir für $x$ beliebige reelle Zahlen (die Zahlen, die du vom Zahlenstrahl kennst, inklusive Brüchen, Wurzeln etc., geschrieben als $\mathbb{R}$) einsetzen dürfen und als Ergebnis auch wieder reelle Zahlen erhalten, schreiben Mathematiker das manchmal so:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Das liest sich als: 'Die Funktion $f$ bildet von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen ab.' Die genaue Vorschrift, was mit einem $x$ passiert, schreibt man dann oft mit einem Pfeil mit einem senkrechten Strich am Anfang:

$$x \mapsto f(x)$$

Für eine lineare Funktion wie $f(x) = 3x + 1$ würde das bedeuten:

$$x \mapsto 3x + 1$$

Das ist einfach eine kompakte Art zu sagen: 'Nimm ein beliebiges $x$, multipliziere es mit 3 und addiere dann 1.'
Das Wichtigste ist: Eine Funktion ist eine **eindeutige Zuordnung**. Zu jeder Eingabe (aus dem erlaubten Bereich) gibt es genau eine Ausgabe.

Jetzt, wo wir eine bessere Vorstellung davon haben, was eine Funktion allgemein ist, können wir uns ein paar typische Aufgabenstellungen rund um diese Funktionsmaschinen ansehen.

**Aufgabe 3.1 Funktionsmaschinen-Logik**

Stell dir die folgenden Funktionsmaschinen vor. Gib jeweils die Funktionsgleichung $f(x) = \dots$ an, die beschreibt, was die Maschine mit der Eingabe $x$ macht.

1. Maschine M1: Verdoppelt die Eingabe $x$ und addiert anschließend 5.
2. Maschine M2: Subtrahiert von der Eingabe $x$ die Zahl 7 und multipliziert das Ergebnis mit 3.
3. Maschine M3: Multipliziert die Eingabe $x$ mit sich selbst (quadriert sie) und zieht dann 4 ab.
4. Maschine M4: Addiert zur Eingabe $x$ die Zahl 2, dividiert das Ergebnis durch 4 und addiert dann $x$.

**Aufgabe 3.2 Werte aus der Maschine**

Gegeben sind die folgenden Funktionsmaschinen durch ihre Funktionsgleichungen. Welche Ausgabe $f(x)$ (oder $y$) erzeugt die Maschine, wenn die angegebene Zahl $x$ eingegeben wird?

1. $f(x) = 4x - 7$
   - Was kommt raus bei $x = 3$?
   - Was kommt raus bei $x = 0$?
   - Was kommt raus bei $x = -2$?
2. $g(x) = -2(x + 3)$
   - Was kommt raus bei $x = 1$?
   - Was kommt raus bei $x = -3$?
   - Was kommt raus bei $x = -5$?

***Weißt du noch, wie...? 3.1: Grundrechenarten, Vorzeichen und Brüche***

Für lineare Funktionen und das Umstellen von Gleichungen brauchen wir ein paar grundlegende Rechenregeln immer wieder. Das gilt besonders für Steigungen, wo oft Brüche auftauchen. Lass uns kurz checken, ob alles sitzt!

**1. Multiplikation und Division mit Vorzeichen** Beim Multiplizieren und Dividieren von Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen gilt:

- **Gleiche Vorzeichen:** Das Ergebnis ist **positiv (+)**.
  - $(+) \cdot (+) = (+)$, z.B. $3 \cdot 4 = 12$
  - $(-) \cdot (-) = (+)$, z.B. $(-3) \cdot (-4) = 12$
  - $(+) : (+) = (+)$, z.B. $10 : 2 = 5$
  - $(-) : (-) = (+)$, z.B. $(-10) : (-2) = 5$
- **Unterschiedliche Vorzeichen:** Das Ergebnis ist **negativ (-)**.
  - $(+) \cdot (-) = (-)$, z.B. $3 \cdot (-4) = -12$
  - $(-) \cdot (+) = (-)$, z.B. $(-3) \cdot 4 = -12$
  - $(+) : (-) = (-)$, z.B. $10 : (-2) = -5$
  - $(-) : (+) = (-)$, z.B. $(-10) : 2 = -5$

**2. Minus vor der Klammer / Subtraktion einer negativen Zahl** Ein Minuszeichen vor einer Zahl oder Klammer kehrt das Vorzeichen um. Besonders wichtig:

- $a - (-b) = a + b$
- Beispiel: $7 - (-5) = 7 + 5 = 12$
- Beispiel: $-2 - (-8) = -2 + 8 = 6$

**3. Punkt- vor Strichrechnung** Denk immer dran: Multiplikation ($\cdot$) und Division (:) werden **vor** Addition (+) und Subtraktion (-) ausgeführt.

- Regel: Zuerst Klammern, dann Punktrechnung, dann Strichrechnung.
- Beispiel 1: $5 + 2 \cdot 3 = 5 + 6 = 11$
- Beispiel 2: $(5 + 2) \cdot 3 = 7 \cdot 3 = 21$
- Beispiel 3: $10 - 8 : 2 = 10 - 4 = 6$

**4. Rechnen mit Brüchen** Brüche begegnen uns oft, z.B. bei Steigungsdreiecken.

**4.1 Kürzen und Erweitern**

- **Kürzen:** Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl (außer 0) teilen. Der Wert des Bruchs ändert sich nicht. *Formel:* $\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}$ Beispiel: $\frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$
- **Erweitern:** Zähler und Nenner mit derselben Zahl (außer 0) multiplizieren. Der Wert des Bruchs ändert sich nicht. *Formel:* $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ Beispiel: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$

**4.2 Addition und Subtraktion von Brüchen**

- **Gleicher Nenner:** Zähler addieren/subtrahieren, Nenner beibehalten. *Formeln:* $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ und $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ Beispiel: $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{1+3}{7} = \frac{4}{7}$
- **Ungleiche Nenner:** Erst auf einen **gemeinsamen Nenner** (Hauptnenner) erweitern, dann addieren/subtrahieren. Beispiel: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

**4.3 Multiplikation von Brüchen**

- Regel: Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner. *Formel:* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ Beispiel: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ (Kürzen nicht vergessen!)

**4.4 Division von Brüchen**

- Regel: Mit dem **Kehrwert (Reziprokwert)** des zweiten Bruchs multiplizieren. *Formel:* $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ Beispiel: $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$
- Einen **Doppelbruch** löst du ebenfalls so auf: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ Beispiel: $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

**Kurze Übungen dazu:** Berechne die folgenden Terme.

(a) $(-5) \cdot 6 =?$

(b) $7 \cdot (-3) =?$

(c) $(-8) \cdot (-4) =?$

(d) $12 : (-3) =?$

(e) $(-21) : 7 =?$

(f) $(-30) : (-5) =?$

(g) $9 - (-4) =?$

(h) $-6 - (-10) =?$

(i) $3 - (-3) + (-3) =?$

(j) $4 + 6 \cdot (-2) =?$

(k) $15 : 3 - 7 =?$

(l) $(-2) \cdot (5 - 1) =?$

(m) $20 - (-5) \cdot 2 =?$

(n) $18 : (-3) - (-4) =?$

(o) $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} =?$

(p) $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} =?$

(q) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} =?$

(r) $\frac{3}{7} : \frac{2}{5} =?$

(s) $3 \cdot \frac{2}{11} =?$

(t) $(-\frac{1}{3}) \cdot \frac{2}{5} =?$

(u) $\frac{4}{5} + (-\frac{1}{2}) =?$

(v) $(-\frac{2}{3}) : (-\frac{4}{9}) =?$

(w) $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} =?$

(x) $1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} =?$

Wenn du bei diesen Aufgaben sicher bist, fällt dir der Umgang mit Termen und Gleichungen bei linearen Funktionen gleich viel leichter!

## 3.1 Grafische Darstellung – Wie sieht eine lineare Funktion aus?

Wie schon gesagt: Der Graph (die zeichnerische Darstellung) einer linearen Funktion ist immer eine Gerade. Die Parameter $a$ und $b$ bestimmen ihr Aussehen:

- **Die Steigung $a$ bestimmt die Richtung und Neigung:**
  - Ist $a > 0$ (positiv), **steigt** die Gerade an (wenn man von links nach rechts schaut). Je größer $a$, desto steiler steigt sie.
  - Ist $a < 0$ (negativ), **fällt** die Gerade ab. Je kleiner $a$ (d.h. je größer der Betrag von $a$), desto steiler fällt sie.
  - Ist $a = 0$, ist die Gerade **waagerecht** (parallel zur x-Achse). Die Funktion ist dann $f(x) = b$, also eine konstante Funktion. Jeder x-Wert hat denselben y-Wert $b$.
- **Der y-Achsenabschnitt $b$ bestimmt die Lage:** Er gibt an, wo die Gerade die y-Achse schneidet. Eine Änderung von $b$ verschiebt die Gerade parallel nach oben oder unten.

Hier sind einige Beispiele grafisch dargestellt:

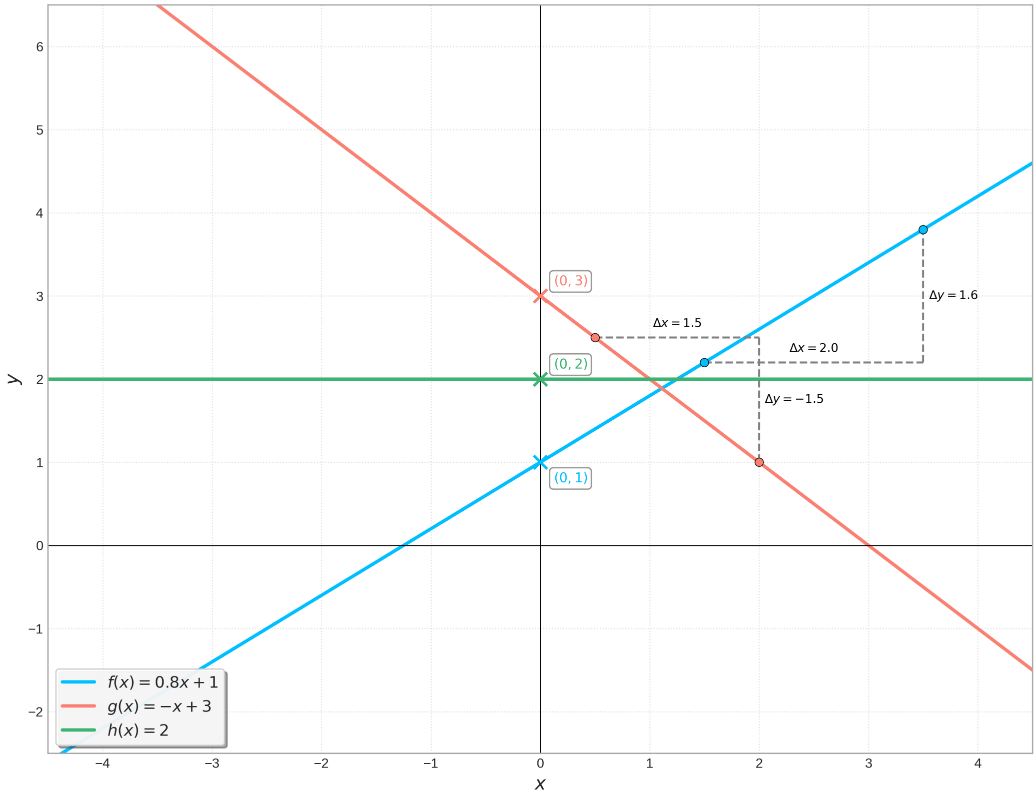


Abbildung 3.1: Beispiele für lineare Funktionen mit unterschiedlichen Steigungen und y-Achsenabschnitten

Es ist sehr hilfreich, wenn du dir vorstellen kannst, wie sich die Gerade verändert, wenn du $a$ oder $b$ variierst.

**Trick zum Zeichnen einer Geraden (mit $a$ und $b$):**

Um eine Gerade $f(x) = ax + b$ schnell zu zeichnen, brauchst du nur zwei Punkte. So findest du sie leicht:

1. **Der y-Achsenabschnitt $b$:** Markiere den Punkt $P_1(0|b)$ auf der y-Achse. Das ist dein erster Punkt, denn für $x = 0$ ist $f(0) = b$.

2. **Das Steigungsdreieck für $a$:** Die Steigung $a$ kannst du oft als Bruch schreiben, z.B. $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Veränderung in y-Richtung geteilt durch Veränderung in x-Richtung).

   - Gehe vom Punkt $P_1(0|b)$ aus $\Delta x$ Einheiten nach **rechts** (entlang der x-Achse).
   - Von dort gehe $\Delta y$ Einheiten nach **oben** (wenn $a$ positiv ist, also $\Delta y > 0$) oder $\Delta y$ Einheiten nach **unten** (wenn $a$ negativ ist, also $\Delta y < 0$).
   - Der Punkt, den du so erreichst, ist dein zweiter Punkt $P_2$.

   Beispiele für das Steigungsdreieck:

   - $a = 2 = \frac{2}{1}$: Gehe 1 nach rechts, 2 nach oben.
   - $a = -0.5 = -\frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$: Gehe 2 nach rechts, 1 nach unten.
   - $a = \frac{3}{4}$: Gehe 4 nach rechts, 3 nach oben.

   Wenn $a$ eine ganze Zahl ist (z.B. $a = 3$), kannst du sie als Bruch $a = \frac{a}{1}$ schreiben (also 1 nach rechts, $a$ nach oben/unten).

3. **Verbinden:** Zeichne eine Gerade durch die beiden Punkte $P_1$ und $P_2$. Fertig!

Dieser 'Zeichentrick' ist sehr nützlich!

Die Steigung ist ein zentrales Konzept, nicht nur bei linearen Funktionen. Schauen wir sie uns genauer an.

## 3.2 Die Steigung $a$ – Wie steil ist es?

Die Steigung $a$ gibt an, um wie viele Einheiten sich der y-Wert ändert, wenn der x-Wert um eine Einheit zunimmt.

**ϟ *3.2 Die Steigung $a$ aus zwei Punkten***

Wenn eine Gerade durch zwei gegebene Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ verläuft, kannst du ihre Steigung $a$ wie folgt berechnen:

$$a = \frac{\text{Unterschied der y-Werte}}{\text{Unterschied der x-Werte}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Das Symbol $\Delta$ (Delta, ein griechischer Buchstabe, oft als Dreieck geschrieben) steht in der Mathematik häufig für eine 'Differenz' oder einen 'Unterschied'. Die Formel $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist fundamental. Man kann sie sich auch als 'Höhenunterschied geteilt durch Längenunterschied' vorstellen, wenn man ein **Steigungsdreieck** zwischen den beiden Punkten zeichnet.

Ein Steigungsdreieck ist ein rechtwinkliges Dreieck, das du dir unter (oder über) der Geraden zwischen zwei Punkten vorstellen kannst. Die horizontale Kathete hat die Länge $\Delta x = |x_2 - x_1|$ und die vertikale Kathete die Länge $\Delta y = |y_2 - y_1|$. Das Vorzeichen von $a$ ergibt sich dann aus der Richtung.

**Beispiel 3.1 Steigung aus zwei Punkten berechnen und visualisieren**

Gegeben sind die Punkte $P_1(1|2)$ und $P_2(3|6)$. Wie groß ist die Steigung der Geraden durch diese Punkte?
Wir identifizieren die Koordinaten: $x_1 = 1, y_1 = 2$ $x_2 = 3, y_2 = 6$
Nun berechnen wir die Differenzen: Unterschied der y-Werte: $\Delta y = y_2 - y_1 = 6 - 2 = 4$. Unterschied der x-Werte: $\Delta x = x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$.
Jetzt setzen wir in die Formel für die Steigung ein:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$$

Die Steigung der Geraden ist $a = 2$. Das bedeutet: Wenn du auf der Geraden 1 Einheit nach rechts gehst, gehst du 2 Einheiten nach oben.

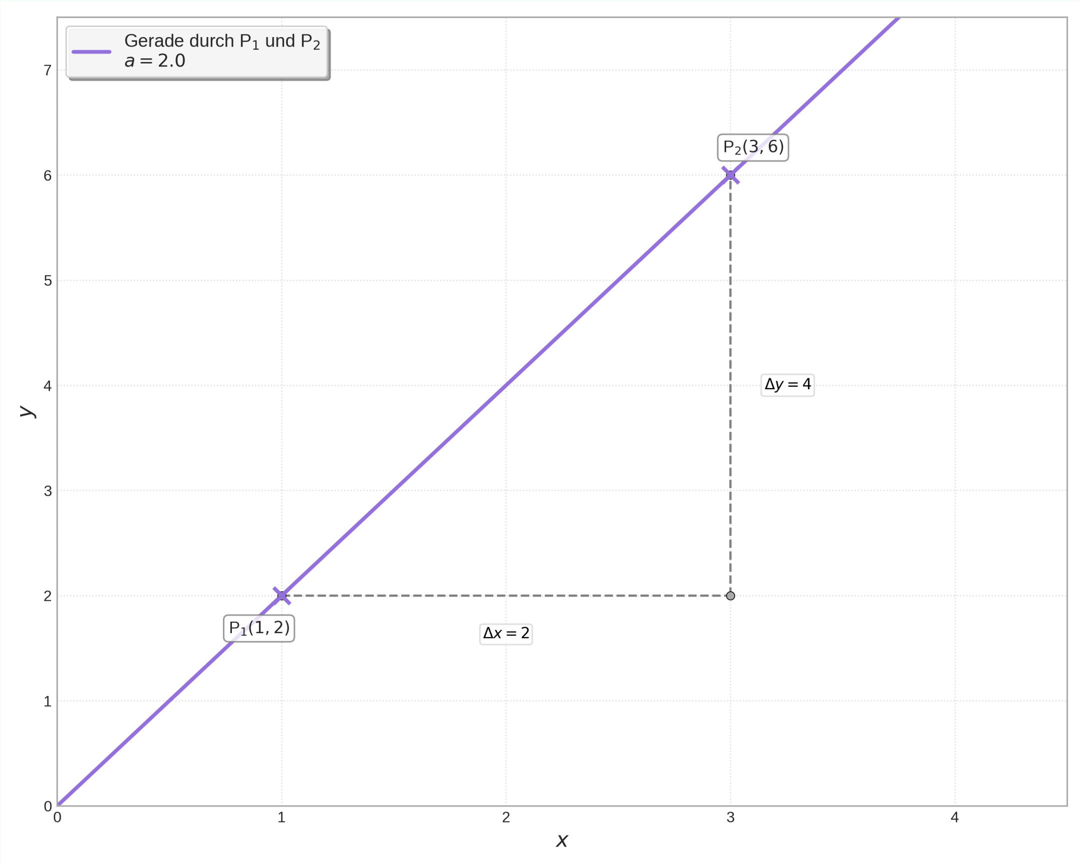


Abbildung 3.2: Steigungsdreieck zur Berechnung von $a$

Es ist egal, welchen Punkt du als $P_1$ und welchen als $P_2$ wählst, das Ergebnis für $a$ ist dasselbe: $a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2-6}{1-3} = \frac{-4}{-2} = 2$.

*Selbst-Check:* Was wäre die Steigung, wenn $P_2(3|2)$ wäre? Wie würde die Gerade dann aussehen? (Antwort: $a = (2-2)/(3-1) = 0/2 = 0$. Die Gerade wäre waagerecht.)

Üben wir das gleich.

**Aufgabe 3.3 Steigung zwischen zwei Punkten**

Berechne die Steigung der Geraden, die durch die folgenden Punktepaare verläuft. Versuche auch, dir vorzustellen oder zu skizzieren, wie die Gerade ungefähr aussieht (steigend/fallend, steil/flach).

1. $A(-1|1)$ und $B(2|7)$
2. $C(0|4)$ und $D(3|1)$
3. $E(-2|-3)$ und $F(4|-3)$ (Was ist hier besonders?)
4. $G(2|1)$ und $H(2|5)$ (Was ist hier besonders? Ist das noch eine Funktion $y = f(x)$? Begründe!)

**Sonderfall: Senkrechte Geraden**

Du hast vielleicht bemerkt, dass bei der Berechnung der Steigung $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ der Nenner $x_2 - x_1$ nicht Null sein darf. Was passiert, wenn $x_1 = x_2$ ist, wie z.B. bei den Punkten $G(2|1)$ und $H(2|5)$? Dann liegen die Punkte übereinander und bilden eine **senkrechte Gerade** (parallel zur y-Achse). Die Gleichung einer solchen Geraden ist z.B. $x = 2$. Für senkrechte Geraden ist die Steigung **nicht definiert** (man würde durch Null teilen). Wichtig ist auch: Eine senkrechte Gerade ist **keine Funktion** im Sinne von $y = f(x)$, da einem $x$-Wert (hier $x = 2$) unendlich viele $y$-Werte zugeordnet werden. Das widerspricht der Eindeutigkeit einer Funktion. Merke dir also: Lineare Funktionen $f(x) = ax + b$ können steigend, fallend oder waagerecht sein, aber niemals senkrecht.

Mit der Steigung $a$ und dem y-Achsenabschnitt $b$ ist eine lineare Funktion vollständig bestimmt. Wenn wir diese beiden Werte kennen, können wir die Funktionsgleichung aufschreiben.

## 3.3 Funktionsgleichung aufstellen

Es gibt verschiedene Wege, die Gleichung einer linearen Funktion $f(x) = ax+b$ zu bestimmen, je nachdem, welche Informationen gegeben sind.

### 3.3.1 Aus zwei Punkten eine Gerade machen

Oft hat man nicht direkt $a$ und $b$ gegeben, sondern zum Beispiel zwei Punkte, durch die die Gerade verlaufen soll. Daraus lässt sich die Funktionsgleichung $f(x) = ax + b$ eindeutig bestimmen.

**ϟ *3.3 Geradengleichung aus 2 Punkten bestimmen***

So gehst du vor, um die Gleichung einer Geraden durch die Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ zu finden:

1. **Steigung $a$ berechnen:** Benutze die dir bekannte Formel:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

   (Voraussetzung: $x_1 \neq x_2$, sonst wäre es eine senkrechte Linie und keine Funktion der Form $f(x) = ax + b$).

2. **y-Achsenabschnitt $b$ berechnen:** Setze die berechnete Steigung $a$ und die Koordinaten **eines der beiden Punkte** (egal welchen, nimm den, der dir sympathischer ist oder einfacher aussieht) in die allgemeine Geradengleichung $y = ax + b$ ein. Du erhältst dann eine Gleichung, in der nur noch $b$ die Unbekannte ist. Löse diese Gleichung nach $b$ auf. Also, wenn du $P_1(x_1|y_1)$ nimmst: $y_1 = a \cdot x_1 + b \implies b = y_1 - a \cdot x_1$.

3. **Funktionsgleichung hinschreiben:** Setze die berechneten Werte für $a$ und $b$ in die allgemeine Form $f(x) = ax + b$ ein. Fertig!

Das klingt vielleicht kompliziert, ist aber mit etwas Übung ein Standardverfahren.

**Gleichungen umformen – So machen wir das (Äquivalenzumformungen)**

Wenn wir Gleichungen lösen, wenden wir **Äquivalenzumformungen** an. Das bedeutet, wir verändern beide Seiten der Gleichung auf die gleiche Weise, sodass die Lösung der Gleichung erhalten bleibt. Wir schreiben das so auf, dass jeder Schritt klar nachvollziehbar ist. Hinter einen senkrechten Strich schreiben wir, welche Operation wir auf beiden Seiten durchführen.
Beispiel: Löse $3x - 5 = 7$ nach $x$ auf.

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 7 && | + 5 \\ 3x &= 12 && | : 3 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Achte darauf, dass die Gleichheitszeichen schön untereinander stehen. Das hilft, den Überblick zu behalten.

**Beispiel 3.2 Gerade durch $P(1|3)$ und $Q(4|9)$**

Gegeben sind die Punkte $P(1|3)$ und $Q(4|9)$. Also: $x_P = 1, y_P = 3$ und $x_Q = 4, y_Q = 9$.

**Schritt 1: Steigung $a$ berechnen**

$$a = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{9-3}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$

Die Steigung ist also $a = 2$.

**Schritt 2: y-Achsenabschnitt $b$ berechnen** Wir haben $a = 2$. Nun setzen wir die Koordinaten von Punkt $P(1|3)$ in die Geradengleichung $y = ax + b$ ein: $y_P = a \cdot x_P + b$

$$\begin{aligned} 3 &= 2 \cdot 1 + b \\ 3 &= 2 + b \qquad\qquad | -2 \\ 3 - 2 &= b \\ 1 &= b \end{aligned}$$

Der y-Achsenabschnitt ist $b = 1$.

(Zur Probe könntest du auch Punkt $Q(4|9)$ und $a = 2$ einsetzen: $y_Q = a \cdot x_Q + b$

$$\begin{aligned} 9 &= 2 \cdot 4 + b \\ 9 &= 8 + b \qquad\qquad | -8 \\ 1 &= b \end{aligned}$$

Es kommt dasselbe Ergebnis für $b$ heraus, was gut ist!)

**Schritt 3: Funktionsgleichung angeben** Mit der berechneten Steigung $a = 2$ und dem y-Achsenabschnitt $b = 1$ lautet die Funktionsgleichung der Geraden:

$$f(x) = 2x + 1$$

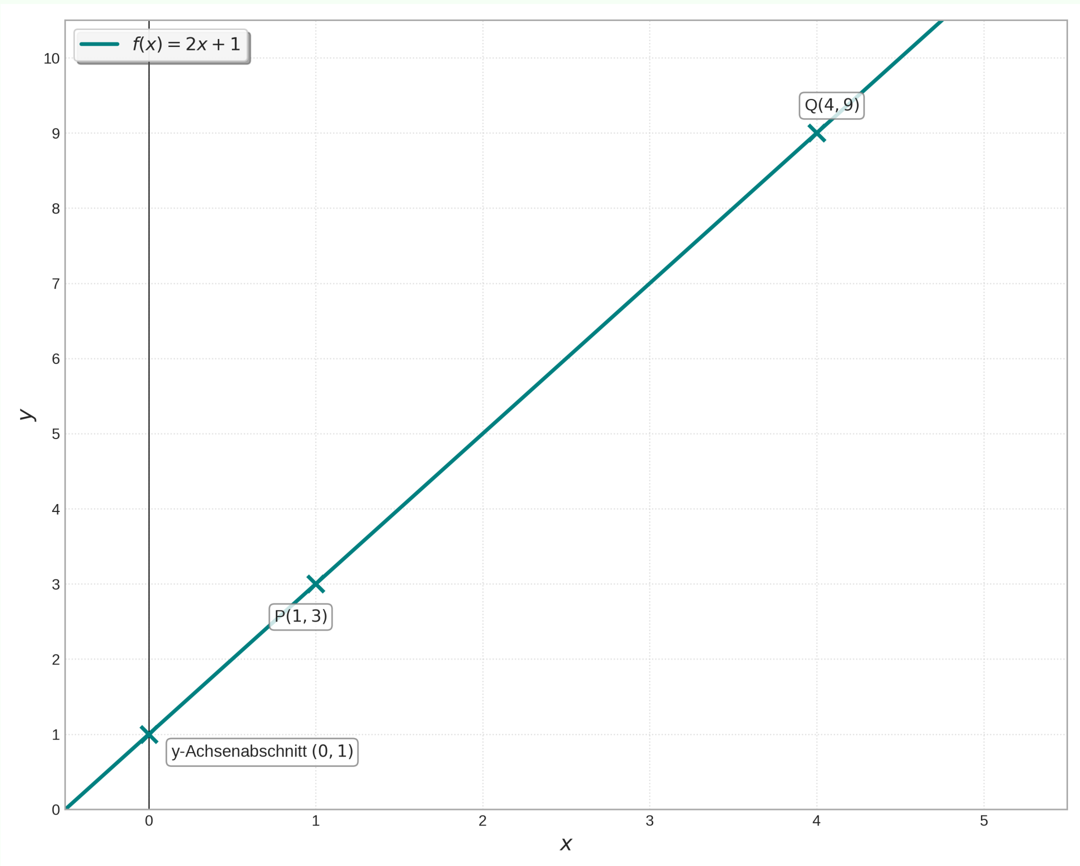


Abbildung 3.3: Die Gerade $f(x) = 2x + 1$ durch die Punkte P und Q

Jetzt eine Aufgabe für dich, um das Verfahren zu üben.

**Aufgabe 3.4 Lineare Funktionen umfassend bestimmen und analysieren**

**Teil 1: Gerade mit positiver Steigung**
Gegeben sind die Punkte $C(-2|0)$ und $D(2|8)$, durch die eine lineare Funktion $f(x) = ax+b$ verläuft.

(a) **Steigung berechnen:** Berechne die Steigung $a$ der Geraden durch die Punkte C und D.

(b) **Y-Achsenabschnitt berechnen:** Bestimme den y-Achsenabschnitt $b$ der Geraden.

(c) **Funktionsgleichung aufstellen:** Gib die vollständige Funktionsgleichung $f(x)$ an.

(d) **Nullstelle bestimmen:** Berechne die Nullstelle $x_N$ der Funktion $f(x)$. Welcher der gegebenen Punkte entspricht der Nullstelle?

(e) **Funktionswerte berechnen:**

- Welchen Wert hat $f(0)$? Was sagt dieser Wert über den Graphen aus?
- Berechne $f(1)$.

(f) **Argument für einen Funktionswert finden:** Für welchen Wert von $x$ gilt $f(x) = 6$?

(g) **Punktprobe:** Liegt der Punkt $P(3|10)$ auf der Geraden? Begründe deine Antwort rechnerisch.

(h) **Skizze und Überprüfung:** Zeichne den Graphen der Funktion $f(x)$ in ein Koordinatensystem. Markiere die Punkte C und D sowie den y-Achsenabschnitt und die Nullstelle. Überprüfe anhand deiner Zeichnung, ob deine berechneten Werte für $a$ (Steigungsdreieck) und $b$ plausibel sind.

(i) **Vorzeichen der Funktionswerte:** Was kannst du über das Vorzeichen der Funktionswerte $f(x)$ sagen für $x$-Werte, die kleiner als die Nullstelle sind ($x < x_N$), und für $x$-Werte, die größer als die Nullstelle sind ($x > x_N$)? Begründe dies anhand der Steigung und der Nullstelle.

**Teil 2: Gerade mit negativer Steigung**
Gegeben sind die Punkte $E(-1|3)$ und $F(1|-1)$, durch die eine lineare Funktion $g(x) = ax + b$ verläuft.

(a) **Steigung berechnen:** Berechne die Steigung $a$ der Geraden durch die Punkte E und F.

(b) **Y-Achsenabschnitt berechnen:** Bestimme den y-Achsenabschnitt $b$ der Geraden.

(c) **Funktionsgleichung aufstellen:** Gib die vollständige Funktionsgleichung $g(x)$ an.

(d) **Nullstelle bestimmen:** Berechne die Nullstelle $x_N$ der Funktion $g(x)$.

(e) **Funktionswerte berechnen:**

- Welchen Wert hat $g(0)$? Was sagt dieser Wert über den Graphen aus?
- Berechne $g(3)$.

(f) **Argument für einen Funktionswert finden:** Für welchen Wert von $x$ gilt $g(x) = 7$?

(g) **Punktprobe:** Liegt der Punkt $Q(0.5|0)$ auf der Geraden? Begründe deine Antwort rechnerisch. (Tipp: Vergleiche mit deiner Berechnung aus Teil d)).

(h) **Skizze und Überprüfung:** Zeichne den Graphen der Funktion $g(x)$ in ein Koordinatensystem. Markiere die Punkte E und F sowie den y-Achsenabschnitt und die Nullstelle. Überprüfe anhand deiner Zeichnung, ob deine berechneten Werte für $a$ (Ist die Gerade fallend? Wie ist das Steigungsdreieck?) und $b$ plausibel sind.

(i) **Vorzeichen der Funktionswerte:** Was kannst du über das Vorzeichen der Funktionswerte $g(x)$ sagen für $x$-Werte, die kleiner als die Nullstelle sind ($x < x_N$), und für $x$-Werte, die größer als die Nullstelle sind ($x > x_N$)? Begründe dies anhand der (negativen) Steigung und der Nullstelle.

### 3.3.2 Nullstellen linearer Funktionen – Wo die Gerade die x-Achse trifft

Ein wichtiger Punkt einer Funktion ist ihre **Nullstelle**. Das ist der x-Wert, an dem der Funktionswert $f(x)$ gleich Null ist. Grafisch ist das der **Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse**.

***ϟ 3.4 Nullstelle einer linearen Funktion berechnen***

Um die Nullstelle $x_N$ einer linearen Funktion $f(x) = ax + b$ zu finden, setzt du den Funktionsterm gleich Null und löst nach $x$ auf:

$$f(x_N) = 0$$

$$ax_N + b = 0$$

Wenn $a \neq 0$ ist, kannst du die Gleichung umformen:

$$\begin{aligned} ax_N + b &= 0 \qquad && | - b \\ ax_N &= -b && | : a \quad \text{(falls } a \neq 0\text{)} \\ x_N &= -\tfrac{b}{a} \end{aligned}$$

Die Nullstelle ist also $x_N = -b/a$. Der Punkt auf der x-Achse ist $N(-b/a|0)$.
**Sonderfälle:**

- **Fall 1: $a \neq 0$ und $b = 0$ (proportionale Funktion $f(x) = ax$)** Dann ist $x_N = -0/a = 0$. Die Nullstelle ist im Ursprung (0|0). Die Gerade geht durch den Ursprung.
- **Fall 2: $a = 0$ (konstante Funktion $f(x) = b$)**
  - Wenn $b \neq 0$ (z.B. $f(x) = 3$): Die Gleichung $b = 0$ ist ein Widerspruch. Die Gerade ist parallel zur x-Achse und schneidet sie nie. Es gibt **keine Nullstelle**.
  - Wenn $b = 0$ (also $f(x) = 0$): Die Gleichung $0 = 0$ ist immer wahr. Die Gerade ist die x-Achse selbst. Es gibt **unendlich viele Nullstellen** (jeder x-Wert ist eine Nullstelle).

**Beispiel 3.3 Nullstelle berechnen**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x - 4$. Wir suchen die Nullstelle, also setzen wir $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 0 \qquad && | + 4 \\ 2x &= 4 && | : 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Die Nullstelle ist $x_N = 2$. Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist $N(2|0)$. Mit der Formel: $x_N = -b/a = -(-4)/2 = 4/2 = 2$. Passt!

**Aufgabe 3.5 Nullstellen finden**

Berechne die Nullstellen der folgenden linearen Funktionen. Gib auch den Schnittpunkt mit der x-Achse an.

1. $f(x) = 3x + 6$
2. $g(x) = -0.5x + 2$
3. $h(x) = 4x$
4. $k(x) = 5$ (Was passiert hier?)

### 3.3.3 Wertetabellen erstellen und nutzen

Eine **Wertetabelle** ist eine Tabelle, die zu ausgewählten x-Werten die zugehörigen y-Werte (Funktionswerte) einer Funktion auflistet. Sie ist sehr nützlich, um:

- Einen ersten Überblick über den Verlauf der Funktion zu bekommen.
- Punkte zu sammeln, um den Graphen der Funktion (hier eine Gerade) zu zeichnen.
- Spezifische Funktionswerte schnell nachzuschlagen.

***ϟ 3.5 Wertetabelle erstellen***

So erstellst du eine Wertetabelle für eine Funktion $f(x)$:

1. **Wähle x-Werte aus:** Entscheide dich für einige x-Werte, für die du die Funktionswerte berechnen möchtest. Oft wählt man ganze Zahlen rund um den Ursprung (z.B. -2, -1, 0, 1, 2) oder Werte, die für eine Anwendungsaufgabe relevant sind.
2. **Berechne die y-Werte:** Setze jeden gewählten x-Wert in die Funktionsgleichung $f(x)$ ein und berechne den zugehörigen y-Wert.
3. **Trage die Wertepaare in eine Tabelle ein:**

**Beispiel 3.4 Wertetabelle für $f(x) = 0.5x + 1$**

Wir erstellen eine Wertetabelle für die Funktion $f(x) = 0.5x + 1$ für die x-Werte -2, -1, 0, 1, 2.

- $x = -2 \implies f(-2) = 0.5 \cdot (-2) + 1 = -1 + 1 = 0$
- $x = -1 \implies f(-1) = 0.5 \cdot (-1) + 1 = -0.5 + 1 = 0.5$
- $x = 0 \implies f(0) = 0.5 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$ (Das ist der y-Achsenabschnitt!)
- $x = 1 \implies f(1) = 0.5 \cdot 1 + 1 = 0.5 + 1 = 1.5$
- $x = 2 \implies f(2) = 0.5 \cdot 2 + 1 = 1 + 1 = 2$

Die Wertetabelle sieht dann so aus:

| $x$ | $f(x) = 0.5x + 1$ |
|---|---|
| -2 | 0 |
| -1 | 0.5 |
| 0 | 1 |
| 1 | 1.5 |
| 2 | 2 |

Tabelle 3.1: Wertetabelle für $f(x) = 0.5x + 1$

Mit diesen Punkten $(-2|0)$, $(-1|0.5)$, $(0|1)$, $(1|1.5)$, $(2|2)$ könntest du nun die Gerade zeichnen. Für eine Gerade reichen eigentlich zwei Punkte, aber eine Wertetabelle mit mehr Punkten gibt mehr Sicherheit beim Zeichnen und hilft, Rechenfehler zu entdecken.

**Aufgabe 3.6 Deine Wertetabelle**

Erstelle eine Wertetabelle für die Funktion $g(x) = -2x+3$ für die x-Werte von -3 bis 3 in Einerschritten. Zeichne anschließend den Graphen der Funktion mithilfe der Punkte aus deiner Wertetabelle.

### 3.3.4 Einen x-Wert oder y-Wert bestimmen

Manchmal ist ein x-Wert gegeben und der zugehörige y-Wert (Funktionswert) ist gesucht. Manchmal ist es umgekehrt: ein y-Wert ist bekannt und man möchte wissen, welcher x-Wert dazu gehört.

***ϟ 3.6 x- oder y-Wert bestimmen***

Gegeben sei eine lineare Funktion $f(x) = ax + b$.

- **y-Wert (Funktionswert) zu einem gegebenen x-Wert bestimmen:** Setze den gegebenen x-Wert einfach in die Funktionsgleichung ein und berechne $f(x)$. Beispiel: $f(x) = 2x + 1$. Was ist $f(3)$? $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$. Der y-Wert ist 7. Der Punkt ist $(3|7)$.
- **x-Wert zu einem gegebenen y-Wert (Funktionswert) bestimmen:** Setze den gegebenen y-Wert für $f(x)$ in die Funktionsgleichung ein: $y_{gegeben} = ax + b$. Löse diese Gleichung dann nach $x$ auf:

$$\begin{aligned} y_{gegeben} &= ax + b && \mid -b \\ y_{gegeben} - b &= ax && \mid : a \quad \text{(falls } a \neq 0) \\ \tfrac{y_{gegeben} - b}{a} &= x \end{aligned}$$

Beispiel: $f(x) = 2x + 1$. Für welchen x-Wert ist $f(x) = 9$?

$$\begin{aligned} 9 &= 2x + 1 && \mid -1 \\ 8 &= 2x && \mid : 2 \\ 4 &= x \end{aligned}$$

Der gesuchte x-Wert ist 4. Der Punkt ist $(4|9)$.

Diese beiden Operationen sind grundlegend im Umgang mit Funktionen.

**Aufgabe 3.7 Umgang mit linearen Funktionen: Werte und Schnittpunkte**

**Teil 1: Funktion** $f(x) = -3x + 7$
Gegeben ist die Funktion $f(x) = -3x + 7$.

(a) Berechne $f(-2)$, $f(0)$ und $f(4)$.

(b) Für welchen Wert von $x$ gilt $f(x) = 10$?

(c) Für welchen Wert von $x$ gilt $f(x) = -5$?

(d) An welcher Stelle schneidet der Graph die y-Achse? An welcher die x-Achse (Nullstelle)?

**Teil 2: Funktion** $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$
Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

(a) Berechne $g(-4)$, $g(0)$ und $g(6)$.

(b) Für welchen Wert von $x$ gilt $g(x) = 3$?

(c) Für welchen Wert von $x$ gilt $g(x) = -2.5$?

(d) An welcher Stelle schneidet der Graph die y-Achse? An welcher die x-Achse (Nullstelle)?

**Teil 3: Funktion $h(x) = -4x$**
Gegeben ist die Funktion $h(x) = -4x$.

(a) Berechne $h(-1.5)$, $h(0)$ und $h(2.5)$.

(b) Für welchen Wert von $x$ gilt $h(x) = 12$?

(c) Für welchen Wert von $x$ gilt $h(x) = -1$?

(d) An welcher Stelle schneidet der Graph die y-Achse? An welcher die x-Achse (Nullstelle)? Was ist hier besonders?

### 3.3.5 Schnittpunkte zweier Geraden – Wo treffen sie sich?

Oft haben wir nicht nur eine Gerade, sondern zwei (oder mehr) und möchten wissen, ob und wo sie sich schneiden. Der Schnittpunkt zweier Geraden $f(x)$ und $g(x)$ ist der Punkt $(x_S|y_S)$, der auf beiden Geraden liegt. Das bedeutet, an der Stelle $x_S$ müssen beide Funktionen denselben Funktionswert $y_S$ haben.

**ϟ *3.7 Schnittpunkt zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ berechnen***

Um den Schnittpunkt (oder die Schnittpunkte) zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ zu finden, gehst du wie folgt vor:

1. **Funktionsterme gleichsetzen:** Setze die beiden Funktionsterme gleich:
$$f(x) = g(x)$$
2. **Gleichung nach $x$ auflösen:** Löse die entstandene Gleichung nach der Variablen $x$. Der Wert (oder die Werte), den du für $x$ erhältst, ist die x-Koordinate des Schnittpunkts (der Schnittpunkte), $x_S$.
3. **y-Koordinate berechnen:** Setze den gefundenen x-Wert $x_S$ in **eine der beiden ursprünglichen Funktionsgleichungen** ($f(x)$ oder $g(x)$ – es ist egal welche, da der Punkt ja auf beiden liegen soll) ein, um die zugehörige y-Koordinate $y_S$ zu berechnen.
$$y_S = f(x_S) \quad \text{oder} \quad y_S = g(x_S)$$
4. **Schnittpunkt angeben:** Der Schnittpunkt ist $S(x_S|y_S)$.

Zwei nicht-parallele Geraden haben immer genau einen Schnittpunkt. Parallele Geraden haben keinen Schnittpunkt (wenn sie verschieden sind) oder unendlich viele (wenn sie identisch sind).

**Beispiel 3.5 Schnittpunkt zweier Geraden berechnen**

Gegeben sind die beiden linearen Funktionen: $f(x) = 2x - 1$ $g(x) = -0.5x + 4$
Wir suchen den Schnittpunkt $S(x_S|y_S)$.
**Schritt 1: Funktionsterme gleichsetzen.** $f(x) = g(x)$ $2x - 1 = -0.5x + 4$

**Schritt 2: Gleichung nach $x$ auflösen.** Wir verwenden unsere Äquivalenzumformungen:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= -0.5x + 4 && \mid +0.5x \\ 2.5x - 1 &= 4 && \mid +1 \\ 2.5x &= 5 && \mid :2.5 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Die x-Koordinate des Schnittpunkts ist $x_S = 2$.
**Schritt 3: y-Koordinate berechnen.** Wir setzen $x_S = 2$ in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen ein, z.B. in $f(x)$: $y_S = f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$. Zur Probe können wir auch in $g(x)$ einsetzen: $y_S = g(2) = -0.5 \cdot 2 + 4 = -1 + 4 = 3$. Das Ergebnis ist dasselbe, also $y_S = 3$.
**Schritt 4: Schnittpunkt angeben.** Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist $S(2|3)$.

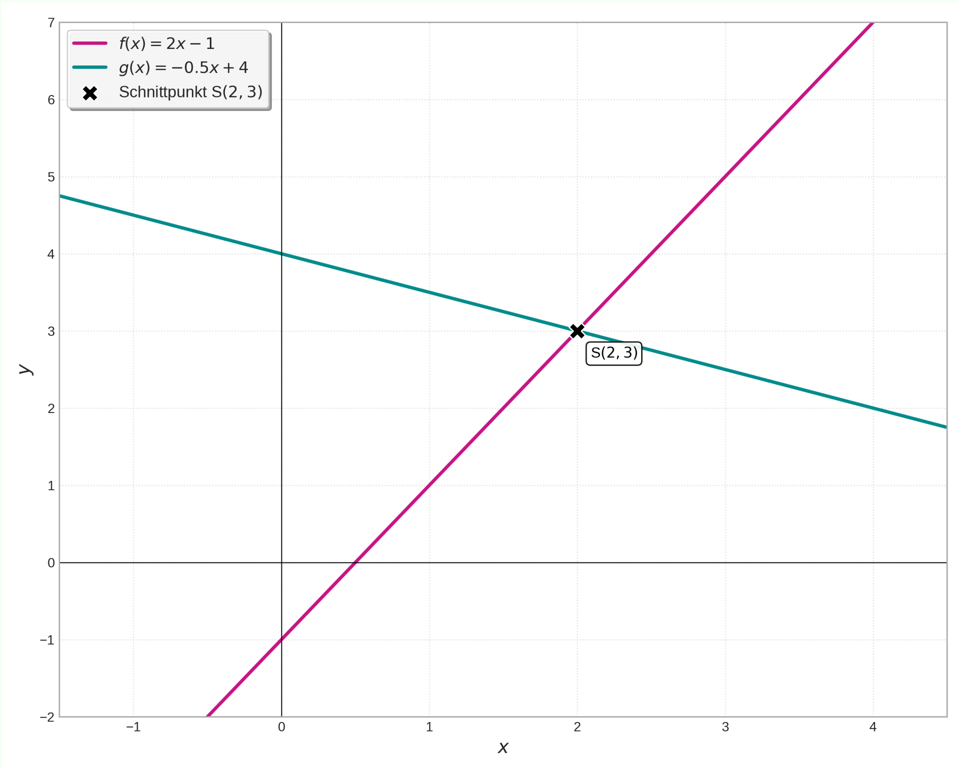


Abbildung 3.4: Schnittpunkt der Geraden $f(x) = 2x - 1$ und $g(x) = -0.5x + 4$

**Aufgabe 3.8 Schnittpunkte berechnen und zeichnen**

1. Berechne den Schnittpunkt der folgenden Geradenpaare:
   - $f(x) = x + 3$ und $g(x) = -2x + 9$
   - $h(x) = 0.25x - 2$ und $k(x) = 0.25x + 1$ (Was stellst du hier fest? Wie liegen die Geraden zueinander?)
   - $m(x) = \frac{1}{3}x + 1$ und $n(x) = -\frac{2}{3}x + 4$
2. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = -x + 5$ und $g(x) = 2x - 1$.
   - Berechne ihren Schnittpunkt $S$.
   - Zeichne beide Geraden und ihren Schnittpunkt in ein Koordinatensystem.

**_Warum ist das wichtig? 3.2: Schnittpunkte_**

Die Fähigkeit, Schnittpunkte von Funktionen zu berechnen, ist fundamental. Sie wird nicht nur bei Geraden benötigt, sondern auch bei Parabeln, Exponentialfunktionen und allen anderen Funktionstypen. Immer wenn gefragt wird, wann zwei Größen gleich sind oder wann sich zwei Prozesse treffen, führt dies mathematisch auf die Berechnung von Schnittpunkten. Die Nullstellenbestimmung ist ein Spezialfall davon: der Schnittpunkt mit der x-Achse (der Funktion $y = 0$).

Lineare Funktionen sind nicht nur abstrakte Gebilde, sondern haben viele praktische Anwendungen.

## 3.4 Anwendungsaufgaben – Lineare Funktionen im echten Leben

Viele reale Situationen lassen sich durch lineare Funktionen modellieren, zumindest näherungsweise. Oft gibt es eine Art 'Startwert' (entspricht $b$) und eine konstante Änderungsrate (entspricht $a$).

**Beispiel 3.6 Kosten für einen Handyvertrag**

Ein Handyvertrag kostet monatlich eine Grundgebühr von 10 Euro. Jede SMS kostet zusätzlich 0,05 Euro. Stelle eine Funktion auf, die die Gesamtkosten $K(x)$ in Abhängigkeit von der Anzahl $x$ der SMS beschreibt.
**Überlegung:**

- Die Grundgebühr von 10 Euro zahlst du immer, auch wenn du keine SMS schreibst. Das ist dein fester Anteil, der nicht von $x$ abhängt. Das ist also der y-Achsenabschnitt $b = 10$.
- Jede SMS kostet 0,05 Euro. Dieser Betrag wird mit der Anzahl $x$ der SMS multipliziert. Das ist also die Steigung $a = 0,05$ (Kosten pro SMS).

**Funktionsgleichung:** Die Kostenfunktion $K(x)$ lautet:

$$K(x) = 0,05x + 10$$

Hier ist $x$ die Anzahl der SMS und $K(x)$ die Gesamtkosten in Euro für einen Monat.
**Frage:** Wie viel kostet es, wenn man 100 SMS schreibt? Wir setzen $x = 100$ in die Funktion ein: $K(100) = 0,05 \cdot 100 + 10 = 5 + 10 = 15$. Antwort: Es kostet 15 Euro, wenn man 100 SMS schreibt.
**Frage:** Was bedeutet $K(0)$? $K(0) = 0,05 \cdot 0 + 10 = 10$. Das sind die Kosten, wenn man keine SMS schreibt – also die reine Grundgebühr.

Solche Kostenfunktionen sind typische Anwendungsbeispiele.

**Aufgabe 3.9 Taxifahrt**

Ein Taxifahrer verlangt eine Grundgebühr von 3,50 Euro für jede Fahrt. Zusätzlich kostet jeder gefahrene Kilometer 2 Euro.

1. Stelle die Kostenfunktion $K(x)$ auf, wobei $x$ die Anzahl der gefahrenen Kilometer ist. Identifiziere $a$ und $b$ und erkläre ihre Bedeutung in diesem Kontext.
2. Wie viel kostet eine Fahrt von 15 km?
3. Du hast 25 Euro dabei. Wie viele Kilometer kannst du maximal fahren, wenn du den vollen Betrag ausgeben möchtest? (Tipp: Setze $K(x) = 25$ und löse die Gleichung nach $x$ auf.)
4. Zeichne den Graphen der Funktion $K(x)$ für $x$-Werte von 0 km bis 20 km. Wähle passende Einheiten für die Achsen.

**Achtung Stolperstein! 3.1: Typische Fehler bei linearen Funktionen**

- **Vorzeichenfehler bei der Steigung:** Achte genau auf die Vorzeichen von $y_2, y_1, x_2, x_1$ bei der Formel $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Ein falsches Vorzeichen kehrt die Richtung der Geraden um!
- **Verwechslung von $a$ und $b$:** Die Steigung $a$ gibt an, wie steil es ist, der y-Achsenabschnitt $b$ ist der Startwert auf der y-Achse.
- **Fehler beim Umstellen von Gleichungen:** Übe das sichere Umstellen von Gleichungen (Äquivalenzumformungen), besonders wenn du $x$ bei gegebenem $y$ suchst oder $b$ aus einem Punkt und der Steigung.
- **Steigungsdreieck falsch ablesen/zeichnen:** Denke daran: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (erst 'nach oben/unten', dann 'nach rechts').

Hier sind noch ein paar weitere Übungen, um dein Verständnis zu festigen.

**Aufgabe 3.10 Lineare Funktionen – Übungen querbeet**

1. **Paketversand:** Ein Paketversand kostet 5 Euro Grundgebühr. Jedes Kilogramm Gewicht kostet zusätzlich 1,50 Euro.
   - Wie lautet die Kostenfunktion $K(g)$, wenn $g$ das Gewicht in Kilogramm ist?
   - Was kostet ein Paket, das 3,2 kg wiegt?
   - Ein Paket kostet 15,50 Euro. Wie schwer war es?
2. **Kerzenlänge:** Eine Kerze ist anfangs 20 cm lang. Pro Stunde brennt sie gleichmäßig 2,5 cm ab.
   - Stelle eine Funktion $L(t)$ auf, die die Länge der Kerze nach $t$ Stunden beschreibt. (Achtung: Die Länge nimmt ab. Was bedeutet das für das Vorzeichen der Steigung $a$?)
   - Wie lang ist die Kerze nach 3 Stunden?
   - Nach wie vielen Stunden ist die Kerze komplett abgebrannt? (Das bedeutet, ihre Länge ist 0 cm.)
   - Für welchen Zeitraum $t$ ist diese Funktion realistisch? (Definitionsbereich der Anwendung)
3. **Funktion aus Punkten:** Eine Gerade geht durch die Punkte $P_1(2|5)$ und $P_2(5|14)$. Bestimme ihre Funktionsgleichung $f(x) = ax + b$.
4. **Funktion aus Steigung und Punkt:** Die Steigung einer Geraden ist $a = -2$. Die Gerade geht außerdem durch den Punkt $P(1|3)$. Bestimme den y-Achsenabschnitt $b$ und gib die vollständige Funktionsgleichung an. (Tipp: Setze $a$ und die Koordinaten von $P$ in $y = ax + b$ ein und löse nach $b$.)

Das Konzept der Steigung als Änderungsrate ist fundamental und führt uns zu einem wichtigen Begriff in der Analysis.

## 3.5 Die durchschnittliche Änderungsrate – Ein Vorgeschmack auf mehr

Bei linearen Funktionen ist die Steigung $a$ konstant. Das bedeutet, die Änderungsrate ist immer gleich, egal welches Intervall man betrachtet. Bei kurvigen Funktionen ist das anders. Dort spricht man von der **durchschnittlichen Änderungsrate** über ein bestimmtes Intervall.

### ϟ 3.8 *Was ist das und wie berechnet man sie?*

Die durchschnittliche Änderungsrate einer Funktion $f$ im Intervall $[x_1, x_2]$ gibt an, wie stark sich der Funktionswert $f(x)$ **im Durchschnitt** ändert, wenn sich der $x$-Wert von $x_1$ nach $x_2$ ändert. Sie ist nichts anderes als die **Steigung der Sekante** (eine Gerade, die durch die beiden Punkte $(x_1|f(x_1))$ und $(x_2|f(x_2))$ auf dem Funktionsgraphen geht).
Die Formel lautet:

$$\text{Durchschnittliche Änderungsrate im Intervall } [x_1, x_2] = m_{Sekante} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Du siehst, das ist genau die gleiche Formel wie für die Steigung $a$ einer linearen Funktion! Bei **linearen Funktionen** ist die durchschnittliche Änderungsrate in jedem Intervall konstant und entspricht genau der Steigung $a$ der Geraden. Bei anderen (nicht-linearen) Funktionen ändert sich die durchschnittliche Änderungsrate jedoch, je nachdem, welches Intervall $[x_1, x_2]$ man wählt.

Ein Beispiel aus dem Alltag macht das klarer.

### Beispiel 3.7 Durchschnittliche Fahrleistung

Am 1. Mai (Tag 0 eines Beobachtungszeitraums) zeigt der Kilometerzähler eines Autos 10.000 km. Am 1. Oktober (nach 5 Monaten, also am Tag $5 \times 30 = 150$ ungefähr, oder einfacher: Monat 0 bis Monat 5) zeigt er 25.000 km. Wie viele Kilometer ist das Auto **durchschnittlich** pro Monat gefahren?
Hier können wir die Monate als 'x-Werte' und die Kilometerstände als 'Funktionswerte' betrachten.
$x_1 = 0$ Monate (Startzeitpunkt) $f(x_1) = 10.000$ km (Kilometerstand zu Beginn)
$x_2 = 5$ Monate (Endzeitpunkt) $f(x_2) = 25.000$ km (Kilometerstand am Ende)
Die Veränderung der Monate ist $\Delta x = x_2 - x_1 = 5 - 0 = 5$ Monate. Die Veränderung des Kilometerstandes ist $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = 25.000 \text{ km} - 10.000 \text{ km} = 15.000$ km.
Die durchschnittliche Fahrleistung (Änderungsrate) ist:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{15.000 \text{ km}}{5 \text{ Monate}} = 3.000 \text{ km/Monat}$$

Das Auto ist also im Durchschnitt 3000 km pro Monat gefahren. Das heißt nicht, dass es jeden Monat genau 3000 km gefahren ist – mal mehr, mal weniger – aber im Schnitt über die 5 Monate waren es 3000 km/Monat.

Dieser Begriff ist sehr nützlich, um Veränderungen über Zeiträume zu analysieren.

### Aufgabe 3.11 Deine durchschnittliche Rate

Denke dir ein eigenes Beispiel aus dem Alltag aus, bei dem eine Größe sich über die Zeit oder eine andere Einheit verändert (z.B. Wasserverbrauch einer Familie über mehrere Tage, Wachstum einer Pflanze über Wochen, Temperaturänderung im Laufe eines Tages, Anzahl der gelesenen Seiten eines Buches über mehrere Abende).

1. Beschreibe die Situation klar. Welche Größe ändert sich in Abhängigkeit von welcher anderen Größe?
2. Lege zwei Messpunkte (Anfangswert mit zugehörigem 'x1' und Endwert mit zugehörigem 'x2') fest.
3. Berechne die durchschnittliche Änderungsrate. Was sagt diese Rate in deinem Beispiel konkret aus? Welche Einheit hat sie?

**Kurz & Knapp 3.1: Lineare Funktionen**

- **Form:** $f(x) = ax + b$ (Graph ist eine Gerade).
- $a$ = **Steigung:** Gibt an, wie stark die Gerade steigt/fällt. $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- $b$ = **y-Achsenabschnitt:** Schnittpunkt mit der y-Achse bei $(0|b)$.
- **Nullstelle $x_N$:** Schnittpunkt mit der x-Achse. Lösung von $ax + b = 0 \implies x_N = -b/a$ (für $a \neq 0$).
- **Wertetabelle:** Hilft beim Zeichnen und Verstehen.
- **Durchschnittliche Änderungsrate:** Ist bei linearen Funktionen immer gleich der Steigung $a$.

**Ausblick: Von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate**

Die durchschnittliche Änderungsrate betrachtet, wie der Name schon sagt, einen Durchschnitt über ein Intervall. In der **Differentialrechnung**, einem Kerngebiet der Analysis, wollen wir aber oft wissen, wie schnell sich etwas in einem **einzigen Moment** ändert. Das nennt man die **momentane Änderungsrate** oder auch die **Ableitung** einer Funktion an einer bestimmten Stelle. Stell dir vor, du machst das Intervall $[x_1, x_2]$ immer kleiner und kleiner, sodass $x_2$ ganz nah an $x_1$ heranrückt. Was passiert dann mit der Steigung der Sekante? Sie nähert sich der Steigung der **Tangente** an den Graphen im Punkt $(x_1|f(x_1))$. Diese Tangentensteigung ist dann die momentane Änderungsrate. Das ist eine der faszinierendsten Ideen der Analysis, die wir später genauer untersuchen werden!

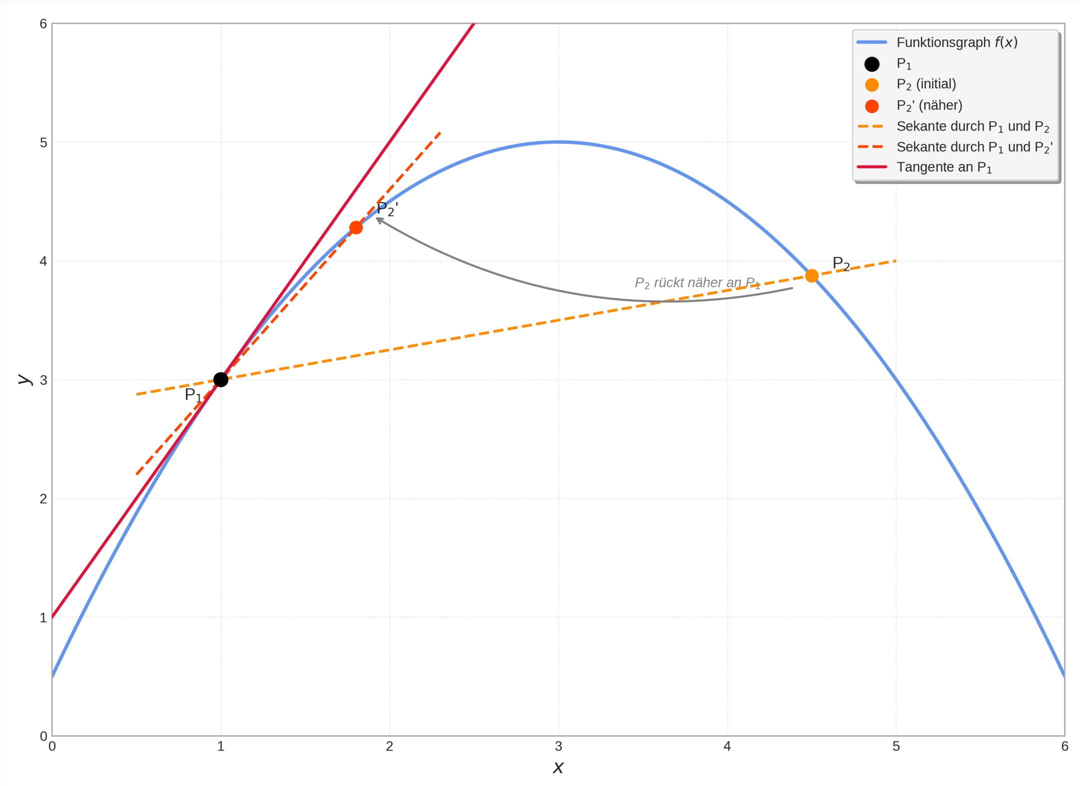


Abbildung 3.5: Von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung

**Aufgabe 3.12 Checkliste: Eigenschaften einer linearen Funktion analysieren**

Betrachte die lineare Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$. Bearbeite die folgenden Punkte, um dein Verständnis dieser Funktion zu überprüfen:

(a) **Nullstelle:** Berechne die Nullstelle $x_0$ der Funktion $f(x)$ (d.h. die Stelle, an der $f(x_0) = 0$ ist).

(b) **Y-Achsenabschnitt:** Bestimme den Schnittpunkt mit der y-Achse (den y-Achsenabschnitt $b$). Welchen Wert hat die Funktion an der Stelle $x = 0$?

(c) **Skizze:** Zeichne den Graphen der Funktion $f(x)$ sorgfältig in ein Koordinatensystem. Markiere deutlich die Nullstelle auf der x-Achse und den y-Achsenabschnitt auf der y-Achse.

(d) **Funktionswerte positiv/negativ:**

- Für welche $x$-Werte sind die Funktionswerte $f(x)$ **positiv** (d.h. der Graph verläuft oberhalb der x-Achse)? Gib den Bereich an.
- Für welche $x$-Werte sind die Funktionswerte $f(x)$ **negativ** (d.h. der Graph verläuft unterhalb der x-Achse)? Gib den Bereich an.

(e) **Rolle der Steigung:** Wie hilft dir das Vorzeichen der Steigung $a = \frac{1}{2}$ dabei, die Bereiche aus Teil (d) schnell zu bestimmen, sobald du die Nullstelle kennst? Erkläre in eigenen Worten.

(f) **Rolle des y-Achsenabschnitts:** Betrachte den y-Achsenabschnitt $b = -1$. Hilft dir dieser Wert auch dabei, das Vorzeichen der Funktion in einem bestimmten Bereich (z.B. für $x$-Werte nahe Null) zu bestimmen? Begründe.

(g) **Wertebereich:** Der Wertebereich einer nicht-konstanten linearen Funktion ist die Menge aller reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Wie kannst du das an deinem Graphen erkennen oder dir vorstellen, dass jeder y-Wert irgendwann einmal getroffen wird?

**Aufgabe 3.13 Checkliste: Verhalten linearer Funktionen verstehen und interpretieren**

Gegeben sei die lineare Funktion $g(x) = -2x + 4$. Führe eine Analyse dieser Funktion anhand der folgenden Punkte durch:

(a) **Nullstelle und y-Achsenabschnitt:** Berechne die Nullstelle von $g(x)$ und gib den y-Achsenabschnitt an.

(b) **Skizze:** Zeichne den Graphen der Funktion $g(x)$. Achte darauf, die Achsenschnittpunkte klar zu kennzeichnen.

(c) **Vorzeichen der Funktionswerte:**

- In welchem Intervall ist $g(x) > 0$?
- In welchem Intervall ist $g(x) < 0$?

(d) **Argumentation mit Steigung und Nullstelle:** Erkläre, wie du allein aus dem Vorzeichen der Steigung $a = -2$ und der Lage der Nullstelle $x_0$ schlussfolgern kannst, ob die Funktionswerte für $x$-Werte, die größer als die Nullstelle sind ($x > x_0$), positiv oder negativ sein müssen.

(e) **Vergleich mit dem y-Achsenabschnitt:** Bestätigt der y-Achsenabschnitt deine Überlegungen zum Vorzeichen der Funktion für $x = 0$? Liegt $x = 0$ in dem von dir bestimmten positiven oder negativen Bereich?

(f) **Gedankenexperiment:** Stell dir eine lineare Funktion $h(x)$ vor, von der du nur weißt: Ihre Steigung ist positiv ($a > 0$) und ihre Nullstelle ist ebenfalls positiv ($x_0 > 0$).

- Mache eine grobe Skizze, wie solch eine Funktion aussehen könnte.

- Welches Vorzeichen muss der y-Achsenabschnitt dieser Funktion $h(x)$ haben? Begründe deine Antwort mathematisch oder anhand deiner Skizze.

# 4 Quadratische Funktionen – Die Welt der Parabeln

Nach den Geraden, die von linearen Funktionen beschrieben werden, wenden wir uns nun einer weiteren wichtigen Funktionsklasse zu: den **quadratischen Funktionen**. Ihre Graphen sind keine Geraden mehr, sondern elegante Kurven, die **Parabeln** genannt werden. Du wirst sehen, dass diese Parabeln in vielen Bereichen der Natur und Technik eine Rolle spielen und dass wir mit den richtigen Werkzeugen auch ihre Eigenschaften genau untersuchen können.

**Was du in diesem Kapitel lernen wirst:**

Nachdem du dieses Kapitel durchgearbeitet hast, wirst du in der Lage sein:

- zu erklären, was eine quadratische Funktion ist, ihren Graphen (die Parabel) zu erkennen und Beispiele aus Alltag und Technik zu nennen.
- die **Normalform** $f(x) = ax^2 + bx + c$ zu nutzen und die Bedeutung der Parameter $a, b, c$ für Öffnungsrichtung, Form (Stauchung/Streckung) und den y-Achsenabschnitt der Parabel zu interpretieren.
- den **Scheitelpunkt** $S(x_S|y_S)$ einer Parabel mit der Formel $x_S = -b/(2a)$ zu berechnen und die Funktion durch **quadratische Ergänzung** in die **Scheitelpunktform** $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ umzuwandeln, um den Scheitelpunkt direkt abzulesen.
- die **Nullstellen** quadratischer Funktionen mit der Mitternachtsformel oder der p-q-Formel zu bestimmen, die Rolle der Diskriminante zu verstehen und die **faktorisierte Form** $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ zu nutzen.
- die **Symmetrieeigenschaften** von Parabeln (insbesondere die Achsensymmetrie zur Geraden $x = x_S$) zu verstehen und anzuwenden.
- eine vollständige **Kurvendiskussion** für quadratische Funktionen durchzuführen, d.h. alle wesentlichen Eigenschaften zu analysieren und den Graphen sorgfältig zu zeichnen.
- **Anwendungsaufgaben** (z.B. Flugbahnen, Optimierungsprobleme) mit quadratischen Funktionen zu modellieren und zu lösen.
- die notwendigen **algebraischen Werkzeuge** (binomische Formeln, Termumformungen, Umgang mit Potenzen und Brüchen) sicher einzusetzen.
- ein tiefgehendes qualitatives Verständnis für die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Darstellungsformen, Parametern, besonderen Punkten und dem Graphen einer Parabel zu entwickeln.
- einen ersten Einblick in Funktionen mit höheren Potenzen

**Was bedeutet 'quadratisch' und wo begegnet es uns?**

Das Wort 'quadratisch' erinnert dich vielleicht an das 'Quadrat' einer Zahl, also eine Zahl mit sich selbst multipliziert (z.B. $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$). Genau das ist der Kern: In einer quadratischen Funktion kommt die Variable (meistens $x$) in der zweiten Potenz vor, also als $x^2$.
Parabeln findest du überall:

- Die **Flugbahn** eines Balls, den du wirfst, oder eines Wasserstrahls aus einem Springbrunnen ist (unter idealisierten Bedingungen ohne Luftwiderstand) eine Parabel.
- **Satellitenschüsseln** und die Reflektoren in **Autoscheinwerfern** sind oft parabelförmig (genauer: Paraboloid, eine 3D-Parabel). Diese Form hat die tolle Eigenschaft, parallel einfallende Strahlen (Funkwellen oder Licht) in einem Punkt, dem Brennpunkt, zu sammeln – oder umgekehrt, Licht von einer Quelle im Brennpunkt parallel auszusenden.
- Die **Kabel von Hängebrücken** bilden unter der Last der Fahrbahn annähernd eine Parabelform.
- In der Physik beschreiben quadratische Funktionen oft Zusammenhänge mit **gleichmäßiger**

**Beschleunigung**, z.B. den zurückgelegten Weg beim freien Fall.

- Viele **Optimierungsprobleme** führen auf quadratische Funktionen: Wann ist eine Fläche bei gegebenem Umfang maximal? Bei welcher Produktionsmenge sind die Kosten minimal?

Du siehst, es lohnt sich, diese Funktionsart genauer kennenzulernen!

## 4.1 Die allgemeine Form und erste Eigenschaften

Jede quadratische Funktion lässt sich in einer Standardform schreiben, die uns erste Hinweise auf das Aussehen ihres Graphen gibt.

***ϟ 4.1 Die quadratische Funktion in Normalform***

Die **allgemeine Form** (auch **Normalform** oder Polynomform zweiten Grades genannt) einer quadratischen Funktion lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Dabei sind $a, b, c$ reelle Zahlen, die man **Koeffizienten** oder **Parameter** der Funktion nennt.

- Der Koeffizient $a$ (vor dem $x^2$) ist der **Öffnungsfaktor** oder **Streckfaktor**.
  - Er darf **nicht Null** sein ($a \neq 0$), sonst wäre der $x^2$-Term nicht vorhanden und die Funktion wäre linear ($f(x) = bx + c$) oder konstant ($f(x) = c$, falls auch $b = 0$).
  - Das **Vorzeichen von** $a$ bestimmt die **Öffnungsrichtung** der Parabel:
    * $a > 0$: Die Parabel ist **nach oben geöffnet** (wie ein Tal oder ein lachender Mund $\smile$). Intuitiv: Für sehr große positive oder negative $x$-Werte wird $x^2$ sehr groß und positiv. Multipliziert mit einem positiven $a$ bleibt das Ergebnis groß und positiv, die $y$-Werte gehen also nach oben.
    * $a < 0$: Die Parabel ist **nach unten geöffnet** (wie ein Berg oder ein trauriger Mund $\frown$). Intuitiv: Für sehr große $x$-Werte wird $x^2$ sehr groß und positiv. Multipliziert mit einem negativen $a$ wird das Ergebnis groß und negativ, die $y$-Werte gehen also nach unten.
  - Um die Form der Parabel (ihre Breite oder Schmalheit) zu beschreiben, verwenden wir den **Betrag** von $a$.

    *Kurze Erinnerung zum Betrag einer Zahl:* Der Betrag einer Zahl $x$, geschrieben als $|x|$, ist ihr Abstand von der Null auf dem Zahlenstrahl. Der Betrag ist immer eine nicht-negative Zahl (also positiv oder Null).
    * Ist eine Zahl $x$ **positiv oder Null**, ist ihr Betrag sie selbst: $|x| = x$.
      Beispiele: $|7| = 7$; $|0| = 0$.
    * Ist eine Zahl $x$ **negativ**, ist ihr Betrag die positive Gegenzahl: $|x| = -x$.
      Beispiel: $|-3| = -(-3) = 3$.

    Der Betrag $|a|$ gibt uns also den Wert von $a$ ohne sein Vorzeichen an.
  - Der nun erklärte **Betrag von** $a$ (also $|a|$) bestimmt die **Form (Breite/Schmalheit)** der Parabel im Vergleich zur *Normalparabel* $y = x^2$ (bei der $a = 1$ ist):
    * $|a| > 1$: Die Parabel ist **gestreckter** (schmaler, steiler) als die Normalparabel.
    * $0 < |a| < 1$: Die Parabel ist **gestauchter** (breiter, flacher) als die Normalparabel.
    * $|a| = 1$: Die Parabel hat dieselbe Öffnungsweite wie die Normalparabel.
- Der Koeffizient $b$ (vor dem $x$) beeinflusst zusammen mit $a$ die **Lage des Scheitelpunkts** und damit die Position der Parabel im Koordinatensystem (Verschiebung nach links/rechts und oben/unten). Ist $b = 0$, liegt der Scheitelpunkt auf der y-Achse.

- Der Koeffizient $c$ ist der **y-Achsenabschnitt**. Er gibt direkt den y-Wert an, bei dem die Parabel die y-Achse schneidet. Denn für $x = 0$ ist $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist also immer $P_y(0|c)$.

Allein aus diesen drei Koeffizienten $a, b, c$ können wir also schon eine Menge über die Parabel aussagen!

**Aufgabe 4.1 Parameter-Check**

Betrachte die folgenden quadratischen Funktionen. Gib für jede Funktion die Werte der Koeffizienten $a, b$ und $c$ an. Was kannst du sofort über die Öffnungsrichtung, die Form (schmaler/breiter als Normalparabel) und den y-Achsenabschnitt sagen?

1. $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$
2. $g(x) = -x^2 + 3x - 1$
3. $h(x) = 0.25x^2 + 2$ (Achtung, welcher Koeffizient ist hier Null?)
4. $k(x) = -3x^2 - 6x$ (Und hier?)

***Schon gewusst? Quadratzahlen zum Anfassen – Ein Trick mit ungeraden Zahlen!***

Du weißt, dass $3^2 = 9$ oder $4^2 = 16$ bedeutet. Aber wusstest du, dass du jede Quadratzahl auch durch das Addieren einer Reihe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen erhalten kannst? Schau mal:

- $1 = \mathbf{1}^2$
- $1 + 3 = 4 = \mathbf{2}^2$
- $1 + 3 + 5 = 9 = \mathbf{3}^2$
- $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = \mathbf{4}^2$
- $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = \mathbf{5}^2$

Erkennst du das Muster? Die Summe der ersten $n$ ungeraden Zahlen ergibt immer $n^2$! So verbirgt sich hinter einfachen Additionen eine direkte Verbindung zu den quadratischen Zahlen, die den quadratischen Funktionen ihren Namen geben. Dieses Muster lässt sich sogar geometrisch darstellen, indem man Quadrate aus 'L-förmigen' Anbauten aus einer ungeraden Anzahl von Kästchen zusammensetzt. Eine schöne Verbindung zwischen Arithmetik und Geometrie!

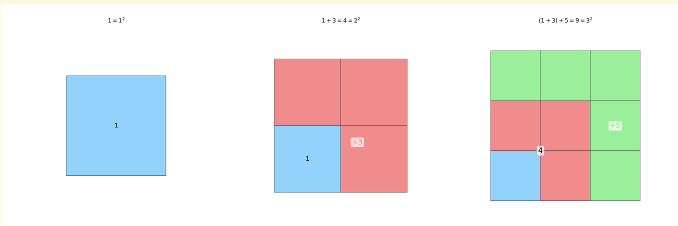


Abbildung 4.1: Geometrische Darstellung: Summe ungerader Zahlen ergibt Quadratzahlen.

## 4.2 Grafische Darstellung – So sehen Parabeln aus

Die grafische Darstellung einer quadratischen Funktion ist immer eine Parabel. Ihre genaue Form und Lage hängt von den Parametern $a, b, c$ ab.

**Digitale Helfer: Funktionsplotter und Analyse-Tools**

Wenn du den Graphen einer Funktion schnell visualisieren möchtest oder die Berechnung von besonderen Punkten (Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte) sehr aufwendig wird, gibt es nützliche digitale Werkzeuge, die dir helfen können. Seiten wie **Wolfram Alpha** (wolframalpha.com) oder grafikfähige Taschenrechner bzw. Mathematik-Software (z.B. GeoGebra) sind hier sehr mächtig.
**Was können diese Werkzeuge für dich tun?**

- **a) Graphen zeichnen lassen:** Du kannst einfach eine Funktionsgleichung als Text eingeben (z.B. `plot x^3 - 3x^2 + 4`) und erhältst sofort eine genaue Zeichnung des Graphen. Das ist super, um deine eigenen Skizzen zu überprüfen oder ein Gefühl für den Verlauf komplexerer Funktionen zu bekommen.
- **b) Wichtige Punkte bestimmen lassen:** Diese Tools können oft auch automatisch besondere Punkte berechnen und anzeigen, wie:
  - Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse)
  - Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte)
  - Wendepunkte

**Was bedeutet 'numerisch finden'?** Manchmal lassen sich Gleichungen (z.B. zur Bestimmung von Nullstellen oder Extrempunkten) nicht exakt mit den Formeln lösen, die du kennst, besonders bei Polynomen höheren Grades oder komplizierten Funktionen. Dann verwenden diese Computerprogramme oft **numerische Verfahren**. Stell dir 'numerisch' so vor: Das Programm probiert nicht eine exakte Formel aus, sondern nähert sich der Lösung schrittweise immer genauer an, bis das Ergebnis eine bestimmte Genauigkeit erreicht hat. Es rechnet also mit Zahlenwerten ('numerus' ist Latein für Zahl), um eine gute Näherung für die gesuchten Punkte zu finden. Das Ergebnis ist dann meist ein Dezimalwert, z.B. $x \approx 1.769$.
**Ein kleines Beispiel für Wolfram Alpha:** Wenn du die Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ untersuchen möchtest, von der wir vielleicht schon wissen, dass eine Nullstelle $x_1 = 1$ ist, aber die anderen nicht so leicht zu finden sind:

- **Mögliche Eingaben könnten sein:**
  - Um den Graphen zu sehen: `plot x^3 - 2x^2 - 5x + 6`
  - Um direkt nach Nullstellen zu fragen: `roots of x^3 - 2x^2 - 5x + 6`
  - Um nach lokalen Extrema zu fragen: `local extrema of x^3 - 2x^2 - 5x + 6`
- **Mögliche Ergebnisse (Wolfram Alpha zeigt vieles davon an):**
  - Ein Graph der Funktion.
  - **Roots (Nullstellen):** z.B. $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$.
  - **Local maximum/minimum (Extrempunkte):** z.B. lokales Maximum bei $x \approx -0.786$, lokales Minimum bei $x \approx 2.12$.
  - **Inflection point (Wendepunkt):** z.B. bei $x \approx 0.667$.

Diese Werkzeuge sind also eine tolle Ergänzung, um deine eigenen Rechnungen zu überprüfen und ein tieferes visuelles Verständnis zu entwickeln. Sie ersetzen aber nicht das grundlegende Verständnis der Konzepte und Rechenwege, die du in diesem Buch lernst – denn nur so weißt du, was du das Werkzeug fragen musst und ob seine Antwort sinnvoll ist!

**Beispiel 4.1 Beispiele für Parabeln und ihre Graphen**

Schauen wir uns ein paar typische Beispiele an, um ein Gefühl dafür zu bekommen, wie die Parameter den Graphen beeinflussen:

1. **Die Normalparabel:** $f(x) = x^2$ Hier ist $a = 1, b = 0, c = 0$. Sie ist nach oben geöffnet, hat die 'normale' Breite und ihr Scheitelpunkt (tiefster Punkt) liegt im Ursprung $(0|0)$.

2. **Gestauchte, nach oben geöffnete Parabel, verschoben:** $g(x) = 0.5x^2 - 2$ Hier ist $a = 0.5$ (nach oben geöffnet, breiter), $b = 0$, $c = -2$. Der y-Achsenabschnitt ist bei $-2$. Da $b = 0$, liegt der Scheitelpunkt auf der y-Achse, nämlich bei $S(0|-2)$.

3. **Nach unten geöffnete Parabel, verschoben:** $h(x) = -x^2 + 4x - 3$ Hier ist $a = -1$ (nach unten geöffnet, normale Breite), $b = 4$, $c = -3$. Der y-Achsenabschnitt ist bei $-3$. Der Scheitelpunkt liegt nicht auf der y-Achse, da $b \neq 0$. Wir werden später lernen, ihn exakt zu berechnen. Für $h(x)$ liegt er bei $S(2|1)$.

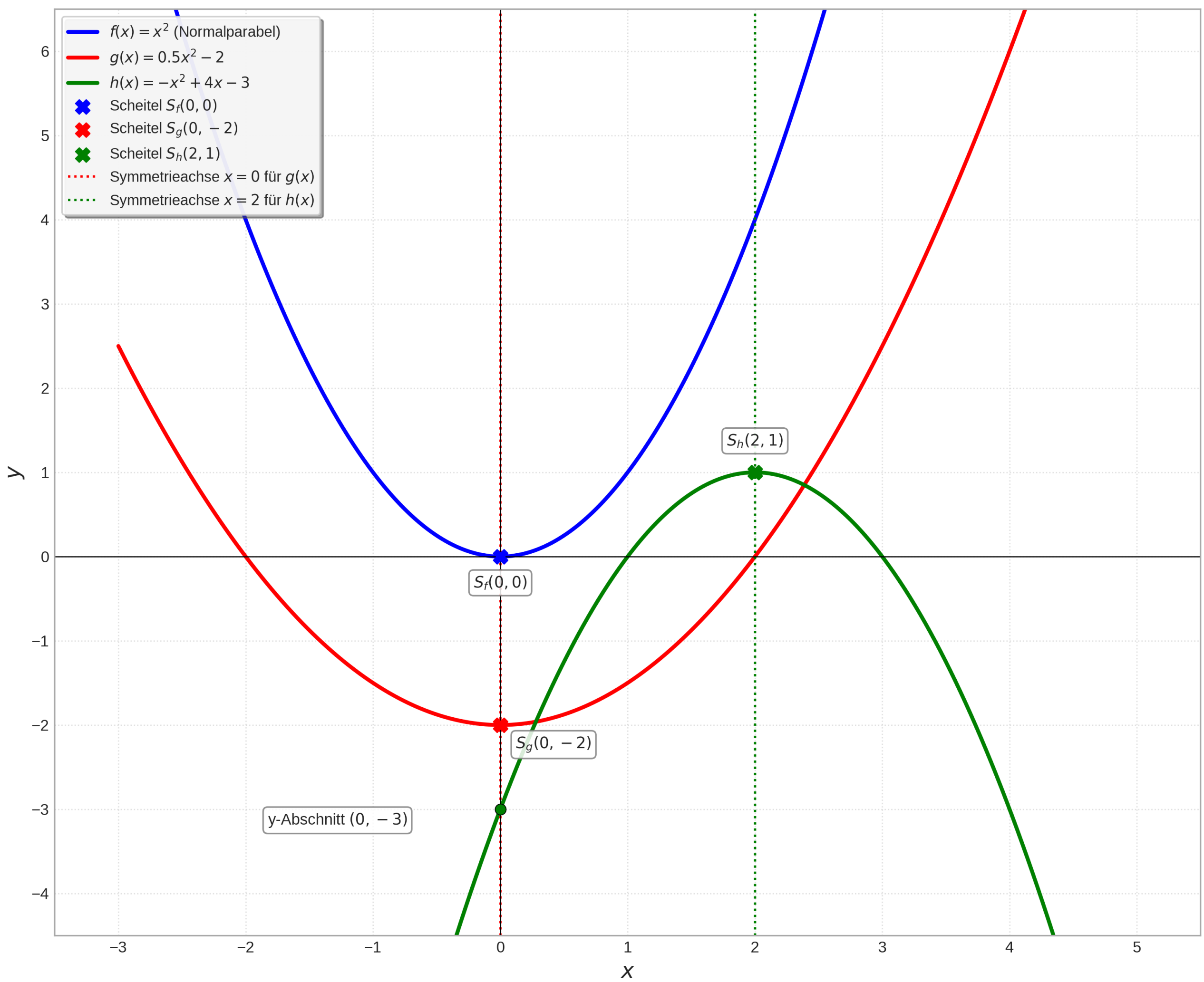


Abbildung 4.2: Verschiedene Parabeln und ihre Eigenschaften

Um eine Parabel ungefähr zu skizzieren, kannst du eine Wertetabelle anlegen, wie du es von linearen Funktionen kennst. Wähle einige x-Werte, berechne die zugehörigen y-Werte $f(x)$ und trage die Punkte $(x|f(x))$ in ein Koordinatensystem ein. Verbinde die Punkte dann zu einer glatten Kurve.

**Aufgabe 4.2 Parabeln skizzieren mit Wertetabelle**

1. Erstelle eine Wertetabelle für die Normalparabel $f(x) = x^2$ für $x$-Werte von $-3$ bis 3 (in Einerschritten). Zeichne den Graphen.
2. Erstelle eine Wertetabelle für $g(x) = 2x^2$ für dieselben x-Werte. Zeichne den Graphen in dasselbe Koordinatensystem wie $f(x)$. Was beobachtest du im Vergleich zur Normalparabel?
3. Erstelle eine Wertetabelle für $h(x) = -0.5x^2 + 1$ für dieselben x-Werte. Zeichne den Graphen ebenfalls in dasselbe Koordinatensystem. Was beobachtest du?

***Weißt du noch, wie...? 4.1: Algebra-Fitness für quadratische Funktionen***

Bei quadratischen Funktionen werden wir oft Terme umformen, Klammern auflösen und mit Potenzen rechnen. Ein sicherer Umgang mit den folgenden Regeln wird dir das Leben deutlich erleichtern!

**1. Binomische Formeln – Deine Helfer beim Ausmultiplizieren und Zusammenfassen**
Diese drei Formeln solltest du im Schlaf beherrschen, da sie oft beim Umformen von Funktionstermen (z.B. von der Scheitelpunktform in die Normalform und umgekehrt) vorkommen:

- **Erste Binomische Formel:** $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
  *Beispiel:* $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
- **Zweite Binomische Formel:** $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
  *Beispiel:* $(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$
- **Dritte Binomische Formel:** $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
  *Beispiel:* $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$

**2. Potenzen und Vorzeichen – Die Macht der Klammer!** Beim Quadrieren von Zahlen und Termen, besonders mit Minuszeichen, sind Klammern entscheidend:

- **Eine negative Zahl quadrieren:** $(-A)^2 = (-A) \cdot (-A) = A^2$ (Das Ergebnis ist positiv)
  *Beispiel:* $(-4)^2 = 16$.
- **Das Negative einer Quadratzahl:** $-A^2 = -(A \cdot A)$ (Erst quadrieren, dann das Vorzeichen nehmen)
  *Beispiel:* $-4^2 = -(16) = -25$.
- **Merke:** $(-x)^2 = x^2$, aber $-x^2$ ist das Negative von $x^2$.
- *Anwendung beim Einsetzen:* Wenn du z.B. $x = -3$ in den Term $2x^2$ einsetzt, rechnest du: $2 \cdot (-3)^2 = 2 \cdot 9 = 18$. Hättest du $2 \cdot -3^2$ gerechnet, käme $2 \cdot (-9) = -18$ heraus – ein großer Unterschied!

**3. Quadrieren von Brüchen** Auch Brüche können quadriert werden – das ist wichtig, wenn z.B. der Koeffizient $a$ oder Koordinaten von Punkten Brüche sind:

- **Regel:** Zähler und Nenner getrennt quadrieren. *Formel:* $\left(\frac{P}{Q}\right)^2 = \frac{P^2}{Q^2}$ (für $Q \neq 0$)
  *Beispiel:* $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$
- **Mit negativem Vorzeichen:** Das Quadrat eines negativen Bruchs ist positiv. *Formel:* $\left(-\frac{P}{Q}\right)^2 = \frac{(-P)^2}{Q^2} = \frac{P^2}{Q^2}$
  *Beispiel:* $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{(-1)^2}{3^2} = \frac{1}{9}$

**Kurze Übungen dazu:** Berechne bzw. vereinfache die folgenden Terme:

(a) $(x+5)^2 = ?$

(b) $(y-6)^2 = ?$

(c) $(2a+1)^2 = ?$

(d) $(3x-4y)^2 = ?$

(e) $(z+9)(z-9) = ?$

(f) $(0,5x-2)^2 = ?$

(g) $(-9)^2 = ?$

(h) $-6^2 = ?$

(i) $5 \cdot (-2)^2 = ?$

(j) $-3 \cdot 4^2 = ?$

(k) $10 - (-1)^2 = ?$

(l) $(-x-y)^2 = ?$

(m) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = ?$

(n) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 = ?$

(o) $8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = ?$

(p) $(x^2+1)(x^2-1) = ?$

(q) $(-(x+1))^2 = ?$

(r) $\frac{1}{2} \cdot (-4)^2 - 3 = ?$

Wenn diese Grundlagen sitzen, bist du bestens für die spannende Welt der quadratischen Funktionen gerüstet!

Der wichtigste Punkt einer Parabel ist ihr **Scheitelpunkt**.

## 4.3 Der Scheitelpunkt – Höchster oder tiefster Punkt der Parabel

Der Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ ist der Punkt, an dem die Parabel ihre 'Kehrtwende' macht. Bei einer nach oben geöffneten Parabel ist er der tiefste Punkt (Minimum), bei einer nach unten geöffneten Parabel der höchste Punkt (Maximum). Die Parabel ist symmetrisch zu der senkrechten Geraden, die durch den Scheitelpunkt geht (die Symmetrieachse $x = x_S$).

Es gibt zwei gängige Methoden, um den Scheitelpunkt zu finden:

***4.2 Methoden zur Bestimmung des Scheitelpunkts***

Gegeben sei eine quadratische Funktion in der Normalform $f(x) = ax^2 + bx + c$.
**Methode 1: Mit der Scheitelpunktformel für $x_S$** Die x-Koordinate des Scheitelpunkts, $x_S$, lässt sich direkt berechnen mit:

$$x_S = -\frac{b}{2a}$$

Die y-Koordinate des Scheitelpunkts, $y_S$, erhält man, indem man $x_S$ in die Funktionsgleichung einsetzt:

$$y_S = f(x_S) = a(x_S)^2 + b(x_S) + c$$

Diese Methode ist oft der schnellste Weg, um die Koordinaten des Scheitelpunkts zu erhalten.
**Methode 2: Umwandlung in die Scheitelpunktform durch quadratische Ergänzung** Jede quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ kann in die sogenannte **Scheitelpunktform (SPF)** umgewandelt werden:

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$$

Aus dieser Form kann man die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(x_S|y_S)$ direkt ablesen:

- $x_S$ ist der Wert in der Klammer, dessen Vorzeichen beim Ablesen **umgedreht** wird. (Steht $(x-3)^2$, ist $x_S = 3$; steht $(x+2)^2$, ist $x_S = -2$).
- $y_S$ ist der Wert, der hinter der Klammer addiert (oder subtrahiert) wird, mit seinem **ursprünglichen Vorzeichen**.

Der Koeffizient $a$ ist in beiden Formen derselbe. Die Umwandlung von der Normalform in die Scheitelpunktform geschieht durch das Verfahren der **quadratischen Ergänzung**.

Beide Methoden führen zum selben Ergebnis. Die quadratische Ergänzung ist ein wichtiges algebraisches

Verfahren, das auch in anderen Kontexten nützlich ist, aber die Formel $x_S = -b/(2a)$ ist oft schneller für die reine Scheitelpunktbestimmung.

**Beispiel 4.2 Scheitelpunkt von $f(x) = x^2 + 4x + 1$**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 1$. Koeffizienten: $a = 1$, $b = 4$, $c = 1$.
**Schritt 1: x-Koordinate $x_S$ des Scheitelpunkts berechnen**

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -\frac{4}{2} = -2$$

Die Symmetrieachse der Parabel ist also die Gerade $x = -2$.
**Schritt 2: y-Koordinate $y_S$ des Scheitelpunkts berechnen** Setze $x_S = -2$ in die Funktionsgleichung $f(x)$ ein: $y_S = f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$.
**Ergebnis:** Der Scheitelpunkt der Parabel ist $S(-2|-3)$. Da $a = 1 > 0$ ist, ist die Parabel nach oben geöffnet, und der Scheitelpunkt $S(-2|-3)$ ist der **tiefste Punkt** (Minimum) der Parabel.

Die quadratische Ergänzung ist ein mächtiges Werkzeug, um die Struktur quadratischer Terme besser zu verstehen.

**Quadratische Ergänzung – Schritt für Schritt erklärt**

Das Ziel der quadratischen Ergänzung ist es, einen Ausdruck der Form $ax^2 + bx + c$ so umzuformen, dass er einen Teil enthält, der einer binomischen Formel $(u \pm v)^2 = u^2 \pm 2uv + v^2$ entspricht. Dies führt uns direkt zur Scheitelpunktform.
**Vorgehen am Beispiel $f(x) = x^2 + 4x + 1$ (hier ist $a = 1$):**

1. **Konzentriere dich auf die Terme mit $x^2$ und $x$**: $x^2 + 4x$.
2. **Erinnere dich an die 1. binomische Formel**: $(x + k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$.
3. **Vergleiche**: Wir wollen $x^2 + 4x$ so ergänzen, dass es zu $x^2 + 2kx + k^2$ passt. Offensichtlich muss $2kx = 4x$ sein. Daraus folgt $2k = 4$, also $k = 2$.
4. **Bestimme das 'fehlende' quadratische Glied $k^2$**: Wenn $k = 2$, dann ist $k^2 = 2^2 = 4$. Dieses Glied fehlt uns, um $(x + 2)^2$ bilden zu können.
5. **Die 'Ergänzung':** Addiere und subtrahiere $k^2 = 4$ geschickt, um den Wert des Terms nicht zu verändern: $f(x) = (x^2 + 4x \underbrace{+4 - 4}_{\text{Quadratische Ergänzung}}) + 1$
6. **Binomische Formel bilden:** Die ersten drei Terme $x^2 + 4x + 4$ sind jetzt $(x + 2)^2$. $f(x) = (x + 2)^2 - 4 + 1$
7. **Rest zusammenfassen:** $f(x) = (x + 2)^2 - 3$

Das ist die Scheitelpunktform! Wir lesen ab: $a = 1$. In $(x - x_S)^2$ ist $x_S = -2$. Und $y_S = -3$. Also $S(-2|-3)$. Das ist dasselbe Ergebnis wie mit der Formel!
**Was tun, wenn $a \neq 1$? Beispiel:** $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$

1. **Klammere $a$ aus den ersten beiden Termen aus:** $f(x) = -2(x^2 - 4x) - 5$ (Achtung: $8x/(-2) = -4x$)
2. **Führe die quadratische Ergänzung innerhalb der Klammer durch** (für $x^2 - 4x$): Hier ist $p = -4$, also $k = p/2 = -2$, und $k^2 = (-2)^2 = 4$. $f(x) = -2(x^2 - 4x \underbrace{+4 - 4}_{\text{Ergänzung}}) - 5$
3. **Binomische Formel in der Klammer bilden:** $f(x) = -2((x - 2)^2 - 4) - 5$

4. **Äußere Klammer auflösen** (den Faktor $a = -2$ wieder reinmultiplizieren): $f(x) = -2(x-2)^2 + (-2) \cdot (-4) - 5$ $f(x) = -2(x-2)^2 + 8 - 5$

5. **Rest zusammenfassen:** $f(x) = -2(x-2)^2 + 3$

Scheitelpunktform! $a = -2$, $x_S = 2$, $y_S = 3$. Also $S(2|3)$.

Die quadratische Ergänzung mag anfangs etwas knifflig erscheinen, aber sie ist ein sehr grundlegendes Verfahren, das dir auch später bei Kreisgleichungen oder anderen mathematischen Umformungen begegnen wird. Übung macht hier den Meister!
Hier ist noch eine grafische Darstellung des Prinzips der quadratischen Ergänzung.

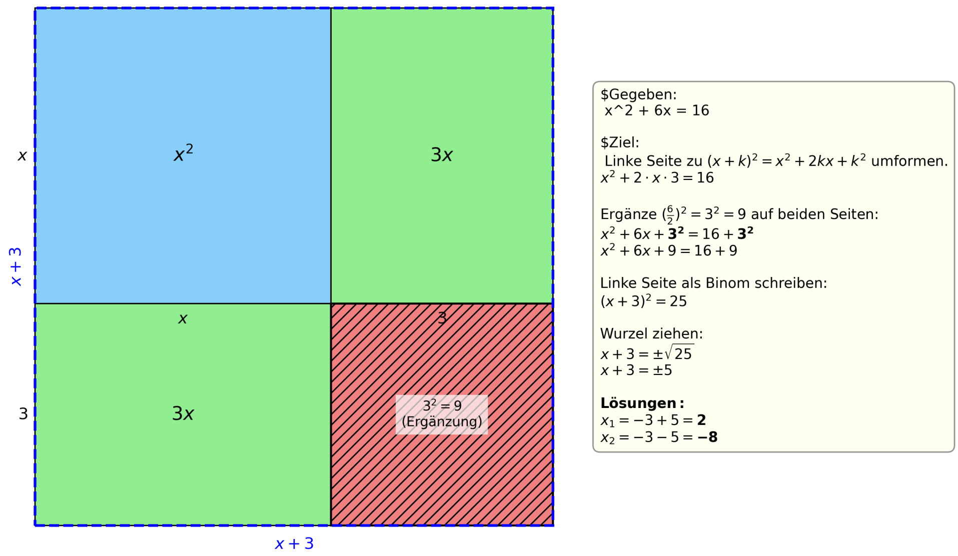


Abbildung 4.3: Grafische Darstellung der quadratischen Ergänzung für $x^2 + 6x = 16$

**Aufgabe 4.3 Übung zur quadratischen Ergänzung und Scheitelpunktbestimmung**

Bestimme für die folgenden Funktionen den Scheitelpunkt, indem du die Normalform durch quadratische Ergänzung in die Scheitelpunktform überführst. Gib auch an, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 5$
2. $g(x) = x^2 + 8x + 10$
3. $h(x) = 2x^2 + 4x - 1$ (Tipp: Erst den Faktor 2 ausklammern!)
4. $k(x) = -x^2 - 2x + 3$ (Tipp: Erst den Faktor -1 ausklammern!)

Vergleiche deine Ergebnisse für $x_S$ mit der Formel $x_S = -b/(2a)$.

## 4.4 Symmetrie von Parabeln

Eine der auffälligsten Eigenschaften von Parabeln ist ihre Symmetrie. Jede Parabel ist **achsensymmetrisch**. Das bedeutet, es gibt eine Gerade (die Symmetrieachse), an der man die Parabel spiegeln kann, sodass sie genau auf sich selbst abgebildet wird.

***ϟ 4.3 Symmetrieachse einer Parabel***

- Die Symmetrieachse einer Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist immer eine **senkrechte Gerade**, die durch den **Scheitelpunkt** $S(x_S|y_S)$ verläuft.
- Die Gleichung dieser Symmetrieachse lautet daher:
$$x = x_S$$
wobei $x_S = -\frac{b}{2a}$ die x-Koordinate des Scheitelpunkts ist.

- **Spezialfall: Symmetrie zur y-Achse** Eine Parabel ist genau dann achsensymmetrisch zur y-Achse (deren Gleichung $x = 0$ ist), wenn ihre Symmetrieachse $x = x_S$ mit der y-Achse zusammenfällt. Das bedeutet $x_S = 0$. Setzen wir $x_S = -\frac{b}{2a} = 0$. Da $a \neq 0$ sein muss, kann dieser Ausdruck nur Null werden, wenn der Zähler $b = 0$ ist. Also: **Eine Parabel** $f(x) = ax^2 + bx + c$ **ist genau dann achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn** $b = 0$ **ist.** Die Funktionsgleichung lautet dann $f(x) = ax^2 + c$.

**Wie testet man rechnerisch auf Achsensymmetrie zur y-Achse?** Eine Funktion $f(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn für alle $x$ aus dem Definitionsbereich gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

Setzt man also $-x$ in die Funktion ein, muss dasselbe herauskommen, als wenn man $x$ einsetzt.

**Beispiel 4.3 Symmetrieuntersuchung**

**1. Funktion** $f(x) = 2x^2 - 3$ Hier ist $a = 2, b = 0, c = -3$. Da $b = 0$ ist, erwarten wir Achsensymmetrie zur y-Achse. Test: $f(-x) = 2(-x)^2 - 3 = 2x^2 - 3 = f(x)$. Die Bedingung ist erfüllt, die Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Der Scheitelpunkt liegt bei $S(0|-3)$.
**2. Funktion** $g(x) = x^2 + 4x + 1$ Hier ist $a = 1, b = 4, c = 1$. Da $b \neq 0$, ist die Funktion NICHT achsensymmetrisch zur y-Achse. Test: $g(-x) = (-x)^2 + 4(-x) + 1 = x^2 - 4x + 1$. Das ist ungleich $g(x) = x^2 + 4x + 1$ (es sei denn $x = 0$). Die Funktion ist aber achsensymmetrisch zu ihrer Symmetrieachse $x = x_S$. Wir hatten berechnet $x_S = -2$. Die Symmetrieachse ist also $x = -2$. Das bedeutet z.B., dass $g(-1)$ denselben Wert haben muss wie $g(-3)$, da beide Punkte den gleichen Abstand (nämlich 1) von der Symmetrieachse $x = -2$ haben. $g(-1) = (-1)^2 + 4(-1) + 1 = 1 - 4 + 1 = -2$. $g(-3) = (-3)^2 + 4(-3) + 1 = 9 - 12 + 1 = -2$. Stimmt!

**Aufgabe 4.4 Symmetrie prüfen und bestimmen**

1. Untersuche die folgenden Funktionen rechnerisch auf Achsensymmetrie zur y-Achse, indem du $f(-x)$ berechnest und mit $f(x)$ vergleichst.
   - $f_1(x) = -3x^2 + 5$
   - $f_2(x) = x^2 - 2x + 1$
   - $f_3(x) = 4x^2$
2. Bestimme für die Funktion $f(x) = 0.5x^2 - 3x + 1$ die Gleichung ihrer Symmetrieachse. Überprüfe dann für zwei verschiedene x-Werte, die symmetrisch zu dieser Achse liegen, ob ihre Funktionswerte gleich sind.

Ein weiteres wichtiges Merkmal von Funktionen sind ihre Nullstellen.

## 4.5 Nullstellen – Wo schneidet die Parabel die x-Achse?

Nullstellen einer Funktion sind die x-Werte, an denen der Funktionswert $f(x)$ gleich Null ist. Grafisch sind das die **Schnittpunkte (oder der Berührpunkt) des Graphen mit der x-Achse**. Eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ kann, wie du vielleicht schon in Skizzen gesehen hast:

- **zwei verschiedene** reelle Nullstellen haben (die Parabel schneidet die x-Achse an zwei Stellen).
- **genau eine** (man sagt auch doppelte) reelle Nullstelle haben (die Parabel berührt die x-Achse genau in ihrem Scheitelpunkt).
- **keine** reelle Nullstelle haben (die Parabel verläuft komplett oberhalb oder komplett unterhalb der x-Achse und schneidet oder berührt sie nie).

Um die Nullstellen zu finden, setzen wir den Funktionsterm gleich Null: $f(x) = 0 \implies ax^2+bx+c = 0$. Dies ist eine **quadratische Gleichung**, und für ihre Lösung gibt es bekannte Formeln.

***ϟ 4.4 Die Mitternachtsformel und die p-q-Formel***

**1. Die Mitternachtsformel (oft auch ABC-Formel genannt):** Diese Formel ist universell einsetzbar für jede quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ (wobei $a \neq 0$). Die Lösungen (Nullstellen) $x_1$ und $x_2$ sind gegeben durch:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel, $D = b^2 - 4ac$, wird **Diskriminante** genannt. Das Vorzeichen der Diskriminante entscheidet über die Anzahl der reellen Lösungen (Nullstellen):

- $D > 0$: Zwei verschiedene reelle Nullstellen. Die Wurzel $\sqrt{D}$ ist eine positive reelle Zahl.
- $D = 0$: Genau eine (doppelte) reelle Nullstelle: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. (Der Scheitelpunkt liegt auf der x-Achse). Die Wurzel $\sqrt{D}$ ist Null.
- $D < 0$: Keine reelle Nullstelle. Man kann im Reellen keine Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen. Die Parabel schneidet die x-Achse nicht.

*Warum 'Diskriminante'?* Weil sie die Fälle unterscheidet (lat. discriminare = unterscheiden).
**2. Die p-q-Formel:** Diese Formel ist eine spezielle Version für quadratische Gleichungen, die bereits in der **Normalform** $x^2+px+q = 0$ vorliegen (d.h., der Koeffizient vor $x^2$ ist 1). Wenn deine Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 1$ ist, musst du sie zuerst durch $a$ teilen: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Dann ist $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$. Die Lösungen (Nullstellen) sind dann:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Auch hier entscheidet der Ausdruck unter der Wurzel, $D_{pq} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ (die Diskriminante der p-q-Formel), über die Anzahl der Nullstellen.
**Welche Formel soll ich nehmen?**

- Die Mitternachtsformel funktioniert immer und du musst nicht vorher durch $a$ teilen.
- Die p-q-Formel ist etwas kürzer, wenn die Gleichung schon in der Form $x^2 + px + q = 0$ ist oder leicht dorthin gebracht werden kann.

Wähle die Formel, mit der du dich sicherer fühlst und weniger Fehler machst! Es ist gut, beide zu kennen.

Machen wir Beispiele für beide Formeln.

**Beispiel 4.4 Nullstellen von $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$**

Wir setzen $f(x) = 0$: $2x^2 - 4x - 6 = 0$. Koeffizienten: $a = 2$, $b = -4$, $c = -6$.
**Schritt 1: Diskriminante $D$ berechnen** $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 16 - (-48) = 16 + 48 = 64$. Da $D = 64 > 0$, wissen wir, dass es zwei verschiedene reelle Nullstellen geben wird.
**Schritt 2: Mitternachtsformel anwenden**

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm 8}{4}$$

Die beiden Nullstellen sind: $x_1 = \frac{4+8}{4} = \frac{12}{4} = 3$. $x_2 = \frac{4-8}{4} = \frac{-4}{4} = -1$. Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind also $N_1(3|0)$ und $N_2(-1|0)$.

**Beispiel 4.5 Nullstellen von $f(x) = x^2 - 6x + 5$**

Wir setzen $f(x) = 0$: $x^2 - 6x + 5 = 0$. Diese Gleichung ist schon in der Normalform $x^2 + px + q = 0$. Koeffizienten für die p-q-Formel: $p = -6$ und $q = 5$.
**Schritt 1: Diskriminante $D_{pq}$ der p-q-Formel berechnen** $D_{pq} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 5 = (-3)^2 - 5 = 9 - 5 = 4$. Da $D_{pq} = 4 > 0$, erwarten wir zwei verschiedene reelle Nullstellen.
**Schritt 2: p-q-Formel anwenden** $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D_{pq}}$ $x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{4}$ $x_{1,2} = 3 \pm 2$
Die beiden Nullstellen sind: $x_1 = 3 + 2 = 5$. $x_2 = 3 - 2 = 1$. Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind $N_1(5|0)$ und $N_2(1|0)$.

Achte immer sorgfältig auf die Vorzeichen, wenn du die Werte für $a, b, c$ oder $p, q$ einsetzt!

**Aufgabe 4.5 Nullstellen finden – Übung und Vertiefung**

Berechne die Nullstellen der folgenden Funktionen. Entscheide selbst, welche Methode (Ausklammern, p-q-Formel, Mitternachtsformel, Substitution) am besten geeignet ist. Überprüfe bei quadratischen Gleichungen immer zuerst die Diskriminante, um die Anzahl der erwarteten reellen Nullstellen zu bestimmen.

1. $f(x) = x^2 - x - 6$

   ***Tipp 4.1: Lösungsweg***

   Dies ist eine Standard-quadratische Gleichung. p-q-Formel oder Mitternachtsformel sind hier gut geeignet.

2. $g(x) = -2x^2 + 12x - 18$

   ***Tipp 4.2: Besondere Diskriminante***

   Was sagt $D = 0$ über den Graphen und die Art der Nullstelle aus?

3. $h(x) = x^2 + 2x + 5$

   ***Tipp 4.3: Keine reellen Nullstellen?***

   Was bedeutet es für den Graphen, wenn die Diskriminante $D < 0$ ist?

4. $k(x) = 3x^2 - 12$

   ***Tipp 4.4: Vereinfachung***

   Hier geht es auch ohne Mitternachtsformel! Denke an das direkte Auflösen nach $x^2$. (Siehe Infobox zu Sonderfällen).

5. $m(x) = -0.5x^2 + 2x$

   ***Tipp 4.5: Ausklammern***

   Auch hier ist Ausklammern der schnellste Weg! (Siehe Infobox zu Sonderfällen).

6. **Polynom 3. Grades durch Ausklammern:** $p(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

**Tipp 4.6: Strategie**

Klammere zuerst den gemeinsamen Faktor $x$ aus. Übrig bleibt ein quadratischer Term, dessen Nullstellen du mit den bekannten Formeln finden kannst.

7. **Biquadratische Funktion:** $q(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

**Tipp 4.7: Substitution**

Ersetze (substituiere) $x^2$ durch eine neue Variable, z.B. $z = x^2$. Dadurch erhältst du eine quadratische Gleichung in $z$. Löse diese nach $z$ und substituiere dann zurück ($x^2 = z_1$, $x^2 = z_2$), um die Nullstellen für $x$ zu finden. Achtung: Nicht jede Lösung für $z$ führt zu reellen Lösungen für $x$!

8. **Produkt aus Linearfaktoren (versteckt):** $r(x) = (x^2 - 4)(x^2 + x - 2)$

**Tipp 4.8: Satz vom Nullprodukt und Faktorisieren**

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Setze also jeden Klammerausdruck gleich Null. Der erste Faktor lässt sich mit der 3. binomischen Formel zerlegen. Für den zweiten Faktor kannst du die p-q-Formel verwenden.

9. **Funktion mit bekannter Nullstelle (für Knobler):** Gegeben ist die Funktion $s(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Es ist bekannt, dass $x_1 = 1$ eine Nullstelle ist. Finde die anderen Nullstellen.

**Tipp 4.9: Faktor abspalten**

Wenn $x_1 = 1$ eine Nullstelle ist, dann ist $(x - 1)$ ein Linearfaktor des Polynoms. Du könntest versuchen, $s(x)$ als $(x - 1) \cdot$ (quadratischer Term) zu schreiben. Überlege: $(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$. Vergleiche die Koeffizienten dieses ausmultiplizierten Terms mit den Koeffizienten von $s(x) = 1x^3 - 2x^2 - 5x + 6$:

- $a$ muss 1 sein.
- $-c$ muss 6 sein, also $c = -6$.
- $b - a = -2 \implies b - 1 = -2 \implies b = -1$.

Der quadratische Term ist also $(x^2 - x - 6)$. Finde nun dessen Nullstellen. (Dieses Verfahren nennt man Koeffizientenvergleich und ist eine Alternative zur Polynomdivision, welche wir später kennenlernen, wenn eine Nullstelle bekannt ist).

10. **Nullstellen und Parameter:** Für welche Werte des Parameters $k$ hat die Funktion $f_k(x) = x^2 - 2kx + (k + 2)$ genau eine, zwei oder keine reelle(n) Nullstelle(n)?

**Tipp 4.10: Diskriminante**

Untersuche die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ der quadratischen Gleichung $f_k(x) = 0$ in Abhängigkeit von $k$. Setze $D = 0$ für eine Nullstelle, $D > 0$ für zwei und $D < 0$ für keine.

**Sonderfälle beim Nullstellenfinden – Denk an die Abkürzungen!**

Nicht immer musst du die großen Lösungsformeln bemühen. Für spezielle Formen quadratischer Gleichungen geht es schneller:

- **Fall 1:** $c = 0$ **(der konstante Term fehlt, also** $ax^2 + bx = 0$**)** Hier kannst du immer $x$ ausklammern: $x(ax + b) = 0$. Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer seiner Faktoren Null ist. Also: $x_1 = 0 \quad \text{ODER} \quad ax + b = 0$. Die zweite Gleichung $ax + b = 0$ löst du einfach nach $x$ auf: $ax = -b \implies x_2 = -\frac{b}{a}$. Eine Nullstelle ist also immer $x_1 = 0$ (die Parabel geht durch den Ursprung), die andere ist $x_2 = -b/a$. Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 6x$. Nullstellen: $x(2x - 6) = 0 \implies x_1 = 0$ oder $2x - 6 = 0 \implies 2x = 6 \implies x_2 = 3$.

- **Fall 2:** $b = 0$ **(der lineare Term** $bx$ **fehlt, also** $ax^2+c = 0$ **– reinquadratische Gleichung)** Diese Gleichung kannst du direkt nach $x^2$ auflösen: $ax^2 = -c \implies x^2 = -\frac{c}{a}$. Dann ziehst du die Wurzel: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Diese Gleichung hat reelle Lösungen, wenn der Ausdruck unter der Wurzel (Radikand) nicht-negativ ist, also $-\frac{c}{a} \geq 0$.

  - Wenn $-\frac{c}{a} > 0$: zwei Lösungen $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ und $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.
  - Wenn $-\frac{c}{a} = 0$ (also $c = 0$, was uns zu Fall 1 führt, wenn $b$ auch 0 ist, oder $x^2 = 0$): eine Lösung $x = 0$.
  - Wenn $-\frac{c}{a} < 0$: keine reelle Lösung.

  Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 8$. Nullstellen: $2x^2 - 8 = 0 \implies 2x^2 = 8 \implies x^2 = 4 \implies x_{1,2} = \pm 2$. Beispiel: $f(x) = x^2 + 1$. Nullstellen: $x^2 + 1 = 0 \implies x^2 = -1$. Keine reellen Lösungen.

Halte immer Ausschau nach diesen einfacheren Fällen, bevor du die Mitternachts- oder p-q-Formel anwendest!

**Achtung Stolperstein! 4.1: Typische Fehler bei quadratischen Funktionen**

- **Vorzeichenfehler bei der quadratischen Ergänzung:** Besonders beim Ausklammern eines negativen Faktors $a$ oder beim Auflösen der Klammer.
- **Vorzeichenfehler in der Mitternachts-/p-q-Formel:** Achte genau auf $-b$ oder $-p/2$ und die Zeichen unter der Wurzel.
- **Diskriminante falsch interpretiert:** $D < 0$ bedeutet keine *reelle* Nullstelle, nicht unbedingt 'keine Lösung' (es gibt komplexe Lösungen, die hier aber meist nicht relevant sind).
- **Scheitelpunktform** $a(x-x_S)^2+y_S$ **falsch abgelesen:** $x_S$ hat in der Formel ein Minus, beim Ablesen also 'Vorzeichen umdrehen'. $y_S$ wird direkt übernommen.
- **Vergessen, durch** $a$ **zu teilen bei der p-q-Formel:** Die p-q-Formel gilt nur für $x^2+px+q = 0$.

**Der Satz von Vieta – Eine elegante Beziehung (für Fortgeschrittene)**

Wenn eine quadratische Gleichung in der Normalform $x^2 + px + q = 0$ zwei Lösungen $x_1$ und $x_2$ hat (also zwei Nullstellen), dann gibt es einen interessanten Zusammenhang zwischen den Lösungen und den Koeffizienten $p$ und $q$:

- $x_1 + x_2 = -p$ (Die Summe der Lösungen ist gleich $-p$)
- $x_1 \cdot x_2 = q$ (Das Produkt der Lösungen ist gleich $q$)

Dieser Satz von Vieta kann nützlich sein:

- Um Lösungen zu überprüfen: Wenn du $x_1, x_2$ berechnet hast, kannst du schnell testen, ob ihre Summe $-p$ und ihr Produkt $q$ ergibt.
- Um Gleichungen zu 'konstruieren': Wenn du Nullstellen $x_1, x_2$ kennst, kannst du $p = -(x_1+x_2)$ und $q = x_1x_2$ berechnen und so die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ aufstellen.
- Manchmal, um Nullstellen durch 'scharfes Hinsehen' zu erraten, wenn $p$ und $q$ ganze Zahlen sind. (Suche zwei Zahlen, deren Produkt $q$ und deren Summe $-p$ ist).

Beispiel: $x^2 - 6x + 5 = 0$. Hier ist $p = -6, q = 5$. Wir suchen zwei Zahlen, deren Produkt 5 und deren Summe $-(-6) = 6$ ist. Das sind 1 und 5. Also $x_1 = 1, x_2 = 5$.

**Aufgabe 4.6**

Anwendung des Satzes von Vieta (Kopfrechnen für Profis): Versuche, die Nullstellen der folgenden quadratischen Funktionen (in Normalform $x^2 + px + q = 0$) durch 'scharfes Hinsehen' mit dem Satz von Vieta zu finden. Suche also zwei Zahlen $x_1, x_2$, für die gilt: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

(b) $g(x) = x^2 - 3x - 4$

(c) $h(x) = x^2 + 7x + 10$

***Tipp 4.11: Satz von Vieta nutzen***

Für $f(x) = x^2 - 5x + 6$: Hier ist $p = -5$ und $q = 6$. Du suchst also zwei Zahlen, deren Summe $-p = -(-5) = 5$ ist und deren Produkt $q = 6$ ist. Welche Zahlen könnten das sein? (Denke an die Teiler von 6).

### ϟ *4.5 Die faktorisierte Form (Nullstellenform) quadratischer Funktionen*

Wenn eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ die (nicht notwendigerweise verschiedenen) reellen Nullstellen $x_1$ und $x_2$ besitzt, kann sie auch in der **faktorisierten Form** (auch Linearfaktorzerlegung oder Nullstellenform genannt) geschrieben werden:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

**Warum ist das nützlich?**

- Man kann die Nullstellen $x_1$ und $x_2$ direkt ablesen.
- Wenn die Nullstellen und ein weiterer Punkt der Parabel gegeben sind, kann man leicht den Öffnungsfaktor $a$ und damit die Funktionsgleichung bestimmen (siehe Aufgabe **??**, Teil 3).
- Sie zeigt, dass eine quadratische Funktion als Produkt zweier linearer Faktoren (mal dem Faktor $a$) dargestellt werden kann.

Wenn es nur eine (doppelte) Nullstelle $x_1$ gibt ($D = 0$), dann ist $x_1 = x_2$, und die Form lautet $f(x) = a(x - x_1)^2$. Das ist dann gleichzeitig die Scheitelpunktform, wobei der Scheitelpunkt auf der x-Achse liegt ($y_S = 0$). Wenn es keine reellen Nullstellen gibt ($D < 0$), existiert keine solche reelle Faktorisierung.

Mit all diesen Werkzeugen – Scheitelpunktbestimmung und Nullstellenberechnung – können wir nun eine vollständige 'Kurvendiskussion' für quadratische Funktionen durchführen.

## 4.6 Kurvendiskussion einer quadratischen Funktion – Das volle Programm

Eine Kurvendiskussion bedeutet, eine Funktion so vollständig wie möglich zu untersuchen, um ihre Eigenschaften und den Verlauf ihres Graphen zu verstehen. Für quadratische Funktionen ist das noch überschaubar, aber die Systematik hilft dir auch bei komplexeren Funktionen.

**ϟ *4.6 Checkliste der Untersuchungspunkte***

Eine vollständige Untersuchung (Kurvendiskussion) einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2+bx+c$ umfasst typischerweise die folgenden Punkte:

1. **Grundlegende Eigenschaften und Definitionsbereich $D_f$:**
   - Koeffizienten $a, b, c$ identifizieren.
   - Öffnungsrichtung ($a > 0$ nach oben, $a < 0$ nach unten).
   - Form ($|a| > 1$ gestreckt, $0 < |a| < 1$ gestaucht).
   - Definitionsbereich: Für quadratische Funktionen immer $D_f = \mathbb{R}$ (alle reellen Zahlen sind erlaubt).
2. **Symmetrie:**
   - Die Parabel ist immer achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden $x = x_S$, die durch ihren Scheitelpunkt geht. (Siehe Abschnitt 4.4)
   - Wenn $b = 0$ (also $f(x) = ax^2 + c$), dann ist $x_S = 0$, und die Parabel ist speziell achsensymmetrisch zur y-Achse.
3. **Verhalten für $x \to \pm\infty$ (Globalverhalten):** Was passiert mit $f(x)$, wenn $x$ sehr groß positiv oder sehr groß negativ wird?
   - Wenn $a > 0$: $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ und $f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$.
   - Wenn $a < 0$: $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$.
4. **Schnittpunkt mit der y-Achse ($P_y$):** Berechne $f(0)$. Der Punkt ist $P_y(0|c)$. (Sehr einfach!)
5. **Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse, $N_1, N_2$):** Setze $f(x) = 0$ und löse die quadratische Gleichung $ax^2+bx+c = 0$. Bestimme die Anzahl der Nullstellen über die Diskriminante. Berechne die Nullstellen $x_1, x_2$ (falls vorhanden). Die Punkte sind $N_1(x_1|0)$ und $N_2(x_2|0)$.
6. **Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ (Extrempunkt):** Berechne $x_S = -b/(2a)$ und $y_S = f(x_S)$. Gib an, ob es ein **Hochpunkt (Maximum)**, wenn $a < 0$, oder ein **Tiefpunkt (Minimum)**, wenn $a > 0$, ist.
7. **Wertebereich $W_f$:** Welche y-Werte kann die Funktion annehmen?
   - Wenn $a > 0$ (Minimum bei $y_S$): $W_f = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq y_S\} = [y_S, \infty)$.
   - Wenn $a < 0$ (Maximum bei $y_S$): $W_f = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \leq y_S\} = (-\infty, y_S]$.
8. **Skizze des Graphen:** Zeichne die Parabel unter Verwendung aller berechneten Punkte (y-Achsenabschnitt, Nullstellen, Scheitelpunkt) und Eigenschaften (Öffnung, Symmetrieachse) möglichst genau in ein Koordinatensystem. Eine Wertetabelle kann zusätzlich helfen.

Das sieht nach einer langen Liste aus, aber viele dieser Punkte sind schnell abgehakt oder ergeben sich direkt aus vorherigen Berechnungen. Wichtig ist die systematische Abarbeitung.

**Beispiel 4.6 Vollständige Untersuchung von $f(x) = -x^2 + 2x + 3$**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

1. **Grundlegendes und $D_f$:** Koeffizienten: $a = -1, b = 2, c = 3$. Da $a = -1 < 0$, ist die Parabel nach unten geöffnet. Da $|a| = 1$, hat sie die normale Öffnungsweite. Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$.

2. **Symmetrie:** Symmetrieachse $x = x_S$. Da $b \neq 0$, nicht symmetrisch zur y-Achse. $x_S$ wird beim Scheitelpunkt berechnet.

3. **Verhalten für $x \to \pm\infty$:** Da $a = -1 < 0$: $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$. $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$.

4. **y-Achsenabschnitt $P_y$:** $f(0) = c = 3$. Also $P_y(0|3)$.

5. **Nullstellen $N_1, N_2$:** Setze $f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$. Mitternachtsformel (siehe früheres Beispiel): $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Nullstellenpunkte: $N_1(-1|0)$ und $N_2(3|0)$.

6. **Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$:** $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = -\frac{2}{-2} = 1$. $y_S = f(1) = -(1)^2 + 2(1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$. Scheitelpunkt $S(1|4)$. Da $a = -1 < 0$, ist dies ein **Hochpunkt (Maximum)**. Die Symmetrieachse ist die Gerade $x = 1$.

7. **Wertebereich $W_f$:** Da Hochpunkt bei $y_S = 4$ und nach unten geöffnet: $W_f = (-\infty, 4]$.

8. **Skizze des Graphen:**

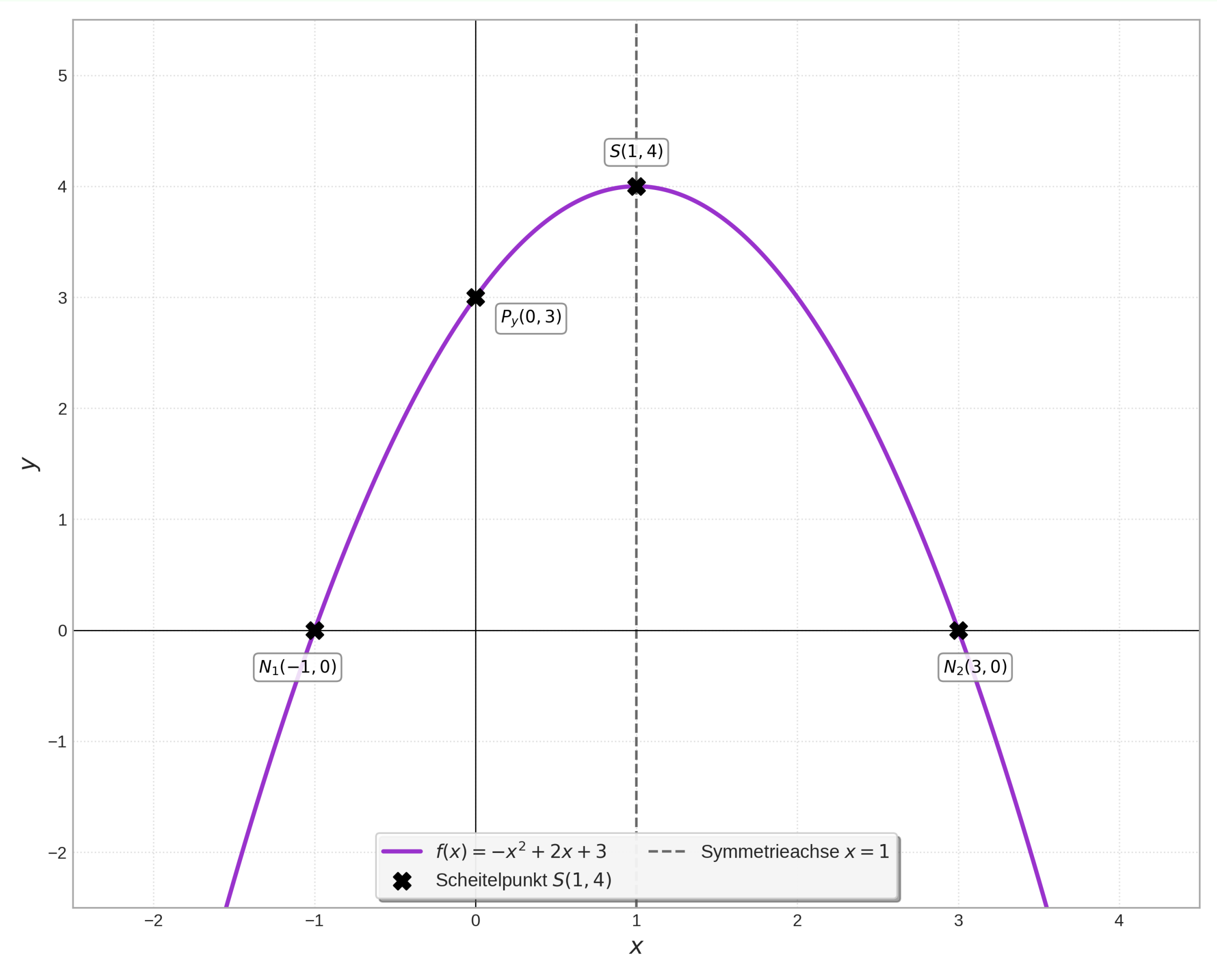


Abbildung 4.4: Graph der Funktion $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ mit wichtigen Punkten

Eine vollständige Kurvendiskussion gibt dir ein sehr gutes Bild von der Funktion.

**Aufgabe 4.7 Deine Kurvendiskussion – Quadratische Funktionen**

Führe eine vollständige Kurvendiskussion (gemäß der obigen Checkliste) für die folgenden quadratischen Funktionen durch und skizziere jeweils den Graphen.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
2. $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$
3. $h(x) = x^2 + 2x + 2$ (Was ist hier bei den Nullstellen und dem Scheitelpunkt besonders?)
4. $k(x) = x^2 - 2x + 3$ (Untersuche, ob diese Funktion Nullstellen besitzt. Wie wirkt sich das auf den Graphen und den Wertebereich aus?)
5. $m(x) = -x^2 - 3x + 4$ (Achte auf die Vorzeichen bei der Berechnung des Scheitelpunkts und der Nullstellen.)

## 4.7 Anwendungsaufgaben mit quadratischen Funktionen – Modellieren und Optimieren

Quadratische Funktionen sind extrem nützlich, um reale Probleme zu modellieren, besonders wenn es um Flugbahnen, Flächen oder Optimierungsaufgaben (Suche nach Maxima oder Minima) geht.

**Aufgabe 4.8 Der Brückenbogen – eine klassische Anwendung**

Ein parabelförmiger Brückenbogen wird durch eine quadratische Funktion $f(x)$ beschrieben. Der Ursprung des Koordinatensystems $(0|0)$ liegt direkt unter der Mitte des Bogens auf Wasserniveau (x-Achse). Der Bogen beginnt und endet auf Wasserniveau bei $x = -20\,\text{m}$ und $x = 20\,\text{m}$. In der Mitte (also bei $x = 0$) ist der Bogen $8\,\text{m}$ hoch.

1. **Informationen sammeln:** Welche drei Punkte des Graphen der Funktion $f(x)$ sind dir damit bekannt? Notiere ihre Koordinaten.
2. **Funktionsgleichung bestimmen:**
   - Da der Scheitelpunkt offensichtlich auf der y-Achse liegt (genau in der Mitte bei $x = 0$), welche Form hat die quadratische Funktion dann? (Tipp: Welcher Koeffizient ist Null?)
   - Nutze den Punkt $(0|8)$, um den Koeffizienten $c$ zu bestimmen.
   - Nutze einen der anderen Punkte (z.B. $(20|0)$), um den Koeffizienten $a$ zu bestimmen.
   - Schreibe die vollständige Funktionsgleichung $f(x)$ des Brückenbogens auf.
3. **Anwendung der Funktion:** Wie hoch ist der Brückenbogen an der Stelle $x = 10\,\text{m}$ vom Mittelpunkt aus gemessen?
4. **Skizze:** Erstelle eine Skizze des Brückenbogens im Koordinatensystem.

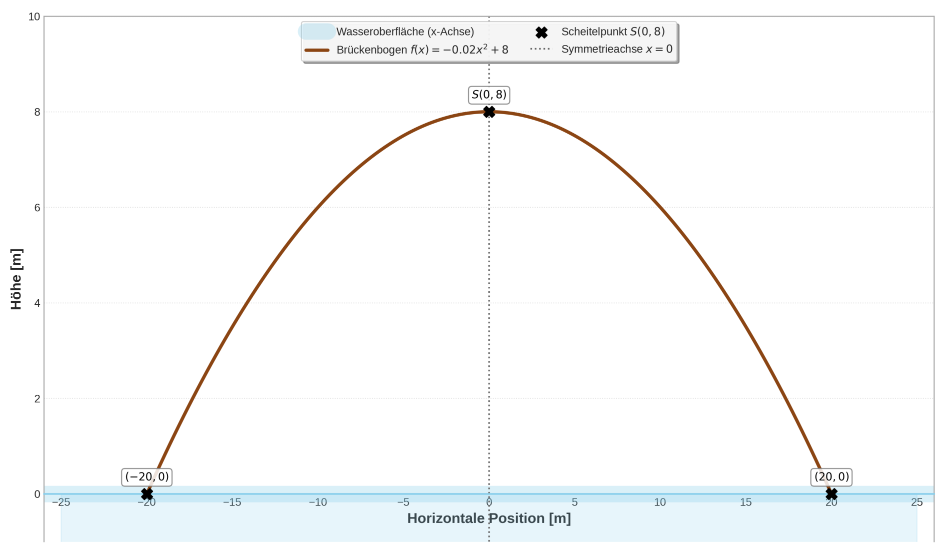


Abbildung 4.5: Skizze eines parabelförmigen Brückenbogens

Eine weitere typische Anwendung ist die Beschreibung von Flugbahnen.

### Aufgabe 4.9 Flugbahn eines Balls

Ein Ball wird schräg nach oben geworfen. Seine Flughöhe $h(x)$ in Metern über dem Boden kann in Abhängigkeit von der horizontalen Entfernung $x$ (in Metern vom Abwurfpunkt) durch die Funktion

$$h(x) = -0.1x^2 + 1.2x + 1.6$$

beschrieben werden (für $x \geq 0$ und solange $h(x) \geq 0$).

1. **Abwurfhöhe:** Aus welcher Höhe wurde der Ball abgeworfen? (Tipp: Das ist die Höhe an der Stelle $x = 0$.)

2. **Maximale Flughöhe:** Berechne die maximale Flughöhe des Balls. (Tipp: Das ist die y-Koordinate des Scheitelpunkts.)

3. **Horizontale Entfernung bei max. Höhe:** Bei welcher horizontalen Entfernung vom Abwurfpunkt erreicht der Ball seine maximale Höhe? (Tipp: Das ist die x-Koordinate des Scheitelpunkts.)

4. **Wurfweite:** Bei welcher horizontalen Entfernung trifft der Ball wieder auf dem Boden auf? (Tipp: Gesucht ist die positive Nullstelle der Funktion, da $h(x) = 0$ bedeutet, dass der Ball auf dem Boden ist.)

5. **Skizze:** Skizziere die Flugbahn des Balls (den Graphen von $h(x)$ im relevanten Bereich). Markiere Abwurfpunkt, höchsten Punkt und Auftreffpunkt.

### Aufgabe 4.10 Weitere Anwendungs- und Verständnisaufgaben

1. **Rechteck mit maximaler Fläche:** Ein Bauer hat 40 Meter Zaun und möchte damit ein rechteckiges Feld an einer langen, geraden Mauer abgrenzen. Die Seite an der Mauer braucht keinen Zaun. Welche Abmessungen (Länge und Breite) sollte das Feld haben, damit seine Fläche maximal wird?

   - Sei $x$ die Länge der Seite, die senkrecht zur Mauer steht. Drücke die andere Zaunseite (parallel zur Mauer) ebenfalls durch $x$ aus (bedenke die 40m Gesamtzaunlänge).

- Stelle eine Funktion $A(x)$ für die Fläche des Rechtecks in Abhängigkeit von $x$ auf.
- Bestimme den Scheitelpunkt dieser quadratischen Funktion $A(x)$. Was bedeuten die Koordinaten des Scheitelpunkts für das Problem?
- Gib die optimalen Abmessungen und die maximale Fläche an.

2. **Funktion aus Scheitelpunkt und Punkt finden:** Eine Parabel hat ihren Scheitelpunkt bei $S(2|-1)$ und geht durch den Punkt $P(4|7)$. Bestimme ihre Funktionsgleichung. (Tipp: Setze den Scheitelpunkt in die Scheitelpunktform $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ ein. Setze dann die Koordinaten von $P$ ein, um $a$ zu berechnen.)

3. **Funktion aus Nullstellen und Punkt finden:** Eine Parabel schneidet die x-Achse bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$. Außerdem geht sie durch den Punkt $P(1|-4)$. Bestimme ihre Funktionsgleichung. (Tipp: Nutze die faktorisierte Form einer quadratischen Funktion: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, die wir im Merksatz **??** kennengelernt haben. Setze die Nullstellen ein und dann den Punkt $P$, um $a$ zu berechnen.)

4. **Parameter untersuchen:** Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^2 - 2kx + 4$ mit dem Parameter $k \in \mathbb{R}$.
   - Bestimme die Koordinaten des Scheitelpunkts in Abhängigkeit von $k$.
   - Für welche Werte von $k$ hat die Funktion genau eine Nullstelle? Keine Nullstellen? Zwei Nullstellen? (Tipp: Untersuche die Diskriminante $D$ in Abhängigkeit von $k$.)
   - Auf welcher Kurve liegen alle Scheitelpunkte der Schar $f_k(x)$? (Tipp: Drücke $y_S$ durch $x_S$ aus. Diese Kurve nennt man auch *Ortskurve* der Scheitelpunkte.)

***Kurz & Knapp 4.1: Quadratische Funktionen***

- **Formen:** Normalform $ax^2 + bx + c$; Scheitelpunktform $a(x - x_S)^2 + y_S$; Faktorisierte Form $a(x - x_1)(x - x_2)$.
- **Graph:** Parabel, Öffnung durch Vorzeichen von $a$, Breite durch Betrag von $a$.
- **Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$:** Extremwert (Max/Min). $x_S = -b/(2a)$, $y_S = f(x_S)$.
- **Symmetrie:** Achsensymmetrisch zu $x = x_S$. Symmetrisch zur y-Achse, wenn $b = 0$.
- **Nullstellen:** Schnittpunkte mit x-Achse, Lösung von $ax^2 + bx + c = 0$ (Mitternachts-/p-q-Formel). Anzahl durch Diskriminante $D = b^2 - 4ac$.
- **y-Achsenabschnitt:** Bei $(0|c)$.

**Ausblick: Mehr als nur Parabeln**

Quadratische Funktionen sind Polynomfunktionen zweiten Grades. Es gibt natürlich auch Polynomfunktionen höheren Grades (kubische Funktionen mit $x^3$, quartische Funktionen mit $x^4$ usw.), die komplexere Kurvenverläufe haben können. Die Werkzeuge, die du hier für quadratische Funktionen lernst (Scheitelpunkt, Nullstellen, Symmetrie), sind oft auch erste Schritte zur Analyse dieser komplizierteren Funktionen, ergänzt durch die Methoden der Differentialrechnung.

**Aufgabe 4.11 Checkliste: Parabeln verstehen – Mehr als nur Formeln**

Diese Aufgabe soll dir helfen, dein qualitatives Verständnis für quadratische Funktionen und ihre Graphen (Parabeln) zu vertiefen. Oft kann man schon viel über eine Parabel aussagen, ohne gleich jede Formel parat haben zu müssen! Nutze für deine Argumentationen auch immer kleine Skizzen.

**Teil 1: Argumentieren mit Nullstellen und dem Öffnungsfaktor $a$**

Stell dir vor, du kennst von einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ die Nullstellen (also die $x$-Werte, an denen $f(x) = 0$ ist) und das Vorzeichen des Parameters $a$.

(a) Eine Parabel hat die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 5$. Der Öffnungsfaktor ist $a > 0$.

- Skizziere diese Parabel grob. Ist sie nach oben oder nach unten geöffnet?
- In welchen $x$-Bereichen (Intervallen) verlaufen die Funktionswerte $f(x)$ oberhalb der x-Achse (sind also positiv)? In welchen Bereichen verlaufen sie unterhalb (sind also negativ)? Begründe mit deiner Skizze.
- Ohne den Scheitelpunkt genau zu berechnen: Was kannst du über die Lage seiner x-Koordinate $x_S$ sagen? (Tipp: Symmetrie!)

(b) Betrachte nun eine andere Parabel mit denselben Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 5$, aber diesmal mit einem Öffnungsfaktor $a < 0$.

- Skizziere auch diesen Fall. Wie ändern sich die Antworten auf die Fragen aus (a) bezüglich Öffnung und Vorzeichen der Funktionswerte?

**Teil 2: Argumentieren mit dem y-Achsenabschnitt $c$ und dem Öffnungsfaktor $a$ (Nullstellen sind unbekannt)**

Stell dir vor, du kennst von einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ nur den y-Achsenabschnitt $c$ (also den Wert $f(0)$) und das Vorzeichen des Öffnungsfaktors $a$.

(a) Eine Parabel ist nach oben geöffnet ($a > 0$) und schneidet die y-Achse bei $c = -2$.

- Skizziere zwei *mögliche* Verläufe für diese Parabel.
- Muss diese Parabel zwangsläufig Nullstellen besitzen? Begründe deine Antwort (denke an die Lage des Scheitelpunkts).
- Was kannst du über den y-Wert des Scheitelpunkts $y_S$ im Vergleich zum y-Achsenabschnitt $c$ sagen? Ist $y_S \leq c$, $y_S \geq c$ oder kann das variieren? Begründe.

(b) Eine Parabel ist nach unten geöffnet ($a < 0$) und schneidet die y-Achse bei $c = 3$.

- Skizziere auch hier zwei *mögliche* Verläufe.
- Kannst du mit Sicherheit sagen, ob diese Parabel Nullstellen hat? Oder ob sie keine hat? Oder ist beides möglich? Erkläre deine Überlegungen.

(c) Eine Parabel ist nach oben geöffnet ($a > 0$) und ihr y-Achsenabschnitt $c$ ist ebenfalls positiv ($c > 0$, z.B. $c = 4$).

- Beschreibe und skizziere die drei Möglichkeiten für die Anzahl der Nullstellen (keine, eine, zwei).
- Welche Bedingung muss für den Scheitelpunkt (insbesondere dessen y-Koordinate $y_S$) erfüllt sein, damit die Parabel in diesem Fall
  - keine Nullstellen hat?
  - genau eine Nullstelle hat?
  - zwei Nullstellen hat?

Versuche, deine Antworten immer auch mit kleinen, beschrifteten Skizzen zu untermauern!

***Warum ist das wichtig? 4.1: Grundlegendes Verständnis für später***

Ein tiefes Verständnis dafür, wie sich Parameter (wie $a$ und $c$) und besondere Punkte (wie Nullstellen und Scheitelpunkte) auf das Aussehen und Verhalten von linearen und quadratischen Funktionen auswirken, ist nicht nur für diese Funktionstypen selbst wichtig. Dieses Wissen bildet eine entscheidende Grundlage für die Untersuchung komplexerer Funktionen, wie zum Beispiel $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ oder auch $g(x) = (x-1)^4 + 2$. Auch dort wirst du oft auf lineare oder quadratische Zusammenhänge stoßen, wenn du bestimmte Eigenschaften dieser komplexeren Funktionen analysierst. Ein gutes Fundament hier erleichtert dir also den Zugang zu vielen weiteren spannenden Themen der Analysis! ☺

## 4.8 Ein erster Blick auf Polynomfunktionen höheren Grades

Lineare (Polynome 1. Grades) und quadratische Funktionen (Polynome 2. Grades) haben uns bereits gezeigt, wie nützlich Funktionen zur Beschreibung von Zusammenhängen sein können – von einfachen Kostenverläufen bis hin zu komplexen Flugbahnen. Doch was, wenn Situationen noch vielschichtiger werden? Hier kommen **Polynomfunktionen $n$-ten Grades** ins Spiel. Sie sind eine natürliche Erweiterung dessen, was du bereits kennst, und erlauben uns, noch eine größere Vielfalt an Kurven und damit an Phänomenen mathematisch zu erfassen. Lassen wir uns diese genauer ansehen!

Eine Polynomfunktion $n$-ten Grades hat die allgemeine Form:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dabei sind $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ reelle Zahlen, die man Koeffizienten nennt. Der höchste Exponent $n$ (eine natürliche Zahl) bestimmt den **Grad** des Polynoms, und der Koeffizient $a_n$ darf nicht Null sein ($a_n \neq 0$).

Lineare Funktionen ($f(x) = a_1 x + a_0$) und quadratische Funktionen ($f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$) sind also die einfachsten Vertreter dieser großen Funktionsfamilie. Doch wie sehen Graphen von Polynomen mit einem Grad größer als 2 aus? Sie können deutlich komplexere Formen mit mehr Kurven, 'Bergen' und 'Tälern' aufweisen.

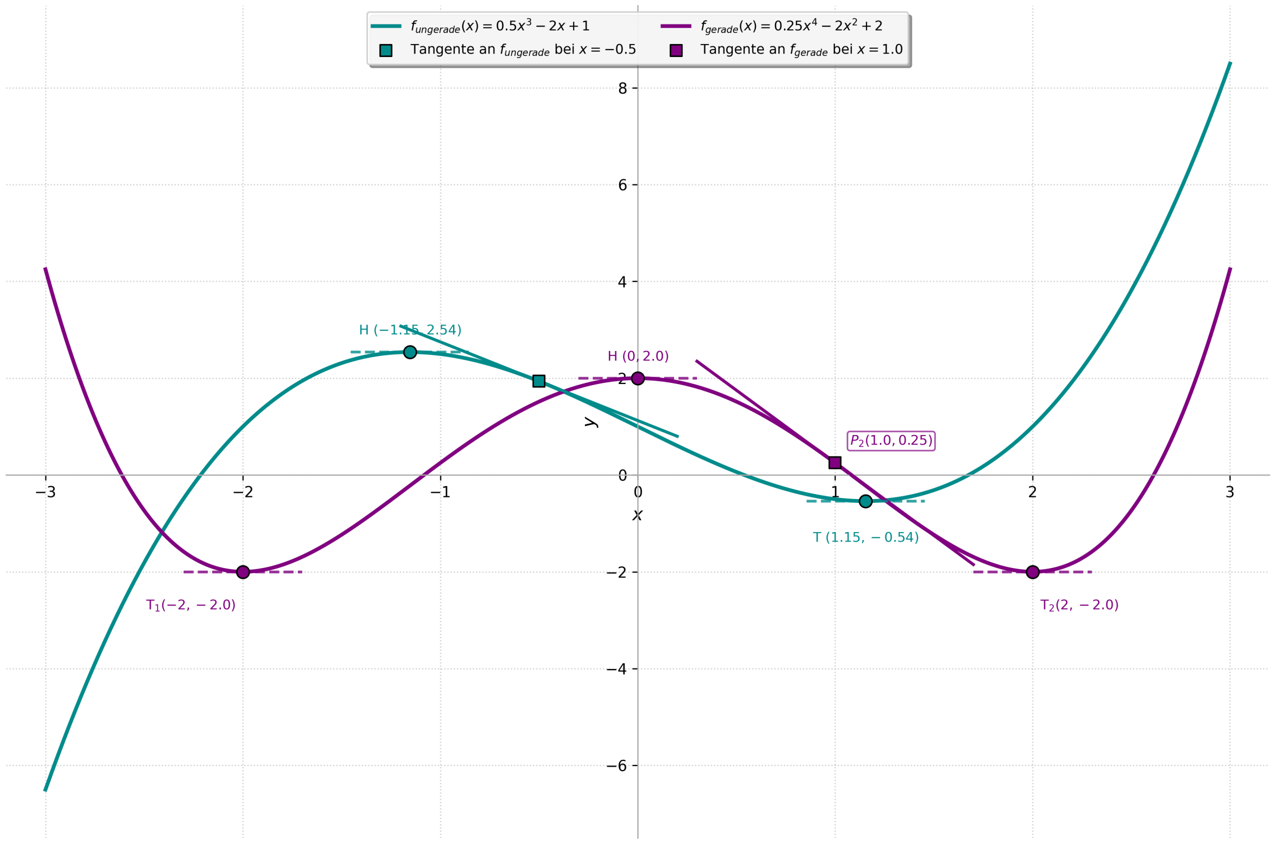


Abbildung 4.6: Beispiele für Graphen von Polynomfunktionen höheren Grades: ein Polynom 3. Grades (ungerade, in Türkis) und ein Polynom 4. Grades (gerade, in Lila) in einem Koordinatensystem, jeweils mit angedeuteten waagerechten und zusätzlichen nicht-horizontalen Tangenten.

Wenn du dir die Graphen in Abbildung 4.6 ansiehst, erkennen wir interessante Verläufe und besondere Punkte:

Betrachten wir zuerst die türkisfarbene Kurve, den Graphen der Funktion $f_{\mathbf{ungerade}}(x) = 0.5x^3 - 2x + 1$ (ein Polynom 3. Grades).

- Wenn wir von links kommen (sehr kleine $x$-Werte), **steigt** der Graph an, bis er einen lokalen Hochpunkt $H(-1.15|2.54)$ erreicht. Man sagt auch, die Funktion ist in diesem Bereich steigend.
- Nach diesem Hochpunkt beginnt der Graph zu **fallen** (die Funktion ist fallend), bis er einen lokalen Tiefpunkt $P_t(1.15|-0.54)$ erreicht.
- Von diesem Tiefpunkt aus **steigt** der Graph dann wieder an für größere $x$-Werte.

An dem Punkt $H$, wo der Graph vom Steigen ins Fallen übergeht, und am Punkt $P_t$, wo er vom Fallen ins Steigen übergeht, muss etwas Besonderes mit der Steigung passieren. Stell dir vor, du fährst mit einem Fahrrad diese Kurve entlang: Um von einer Bergauffahrt in eine Bergabfahrt zu wechseln (oder umgekehrt), musst du für einen winzigen Moment an der Kuppe (oder in der Talsohle) eine Steigung von Null haben – du bist für einen Augenblick waagerecht.

Nun zur lilafarbenen Kurve, dem Graphen von $f_{\mathbf{gerade}}(x) = 0.25x^4 - 2x^2 + 2$ (ein Polynom 4. Grades).

- Dieser Graph **fällt** von links kommend bis zum lokalen Tiefpunkt $T_1(-2|-2)$.
- Dann **steigt** er an bis zum lokalen Hochpunkt $H(0|2)$.
- Anschließend **fällt** er wieder bis zum lokalen Tiefpunkt $T_2(2|-2)$.
- Und schließlich **steigt** er für größere $x$-Werte wieder an.

Auch hier gilt: An jedem dieser lokalen Hoch- und Tiefpunkte $(T_1, H, T_2)$ findet ein Wechsel von Steigen zu Fallen oder von Fallen zu Steigen statt. Intuitiv ist klar, dass die Steigung an diesen Umkehrpunkten genau Null sein muss. Der Graph verläuft dort für einen infinitesimal (also einen gedanklich unendlich kleinen, aber von Null verschiedenen) kleinen Moment waagerecht.

Diese lokalen Hochpunkte (manchmal auch Maxima genannt) und Tiefpunkte (Minima genannt) sind oft die interessantesten Punkte eines Funktionsgraphen.

**Eine wichtige Beobachtung: Waagerechte Tangenten**

Stell dir vor, du legst an einen solchen lokalen Hoch- oder Tiefpunkt eine Gerade an, die den Graphen an dieser Stelle 'sanft berührt', ohne ihn zu schneiden. Solch eine Gerade nennt man eine **Tangente** an den Graphen.
Wenn du dir die Tangenten an den Spitzen der 'Berge' und in den 'Tälern' der Polynomgraphen in Abbildung 4.6 vorstellst (angedeutet durch die kurzen waagerechten Linien an den Punkten H, $P_t$, $T_1$ und $T_2$), wirst du feststellen:

- Diese Tangenten scheinen **waagerecht** zu verlaufen.
- Eine waagerechte Gerade hat aber die **Steigung Null**!

Diese Beobachtung – dass an lokalen Hoch- und Tiefpunkten die Steigung der Tangente Null zu sein scheint – ist ein extrem wichtiges Konzept in der Mathematik. Es gibt uns einen ersten Hinweis darauf, wie wir solche besonderen Punkte später, mit den Methoden der Differentialrechnung, auch rechnerisch exakt finden können. Behalte diese Idee im Hinterkopf!

Obwohl wir Polynomfunktionen höheren Grades hier nicht so detailliert untersuchen wie lineare oder quadratische Funktionen (dafür fehlen uns noch einige Werkzeuge), ist es gut zu wissen, dass sie existieren und dass die Konzepte von Steigung und besonderen Punkten auch bei ihnen eine zentrale Rolle spielen werden. Die Fähigkeit, Graphen zu interpretieren und Besonderheiten zu erkennen, wird dir auf deinem weiteren Weg in der Analysis sehr helfen.

## 4.9 Grenzwerte (Limes) – Verhalten im Unendlichen und an Lücken

Bevor wir uns einer vollständigen Kurvendiskussion zuwenden, müssen wir noch ein wichtiges Konzept verstehen: den **Grenzwert** oder **Limes** (abgekürzt lim). Der Grenzwert beschreibt, welchem Wert sich eine Funktion annähert, wenn sich die Variable $x$ einem bestimmten Wert nähert oder wenn $x$ unendlich groß (positiv oder negativ) wird.

**Was ist ein Grenzwert?**

Stell dir vor, du gehst auf einer Straße und näherst dich einer Kreuzung. Der Grenzwert wäre in diesem Bild die Kreuzung selbst – der Punkt, dem du dich beliebig nahe annähern kannst. Oder stell dir vor, du lässt einen Ball immer wieder fallen, aber jedes Mal nur noch aus der halben Höhe des vorherigen Wurfs. Die Höhe, aus der du den Ball fallen lässt, nähert sich dem Grenzwert Null, auch wenn du ihn (theoretisch) unendlich oft fallen lassen könntest, ohne genau Null zu erreichen. In der Mathematik untersuchen wir mit Grenzwerten oft:

- Das Verhalten einer Funktion für sehr große positive oder negative x-Werte ($x \to \infty$ oder $x \to -\infty$). Das nennt man **Verhalten im Unendlichen**.
- Das Verhalten einer Funktion in der Nähe von Definitionslücken (Stellen, an denen die Funktion nicht definiert ist).

Für quadratische Funktionen haben wir den Grenzwert schon benutzt, als wir das Verhalten gegen Unendlich betrachtet haben.

### 4.9.1 Verhalten von Polynomfunktionen im Unendlichen

Für Polynomfunktionen (ganzrationale Funktionen) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ist das Verhalten für $x \to \pm\infty$ relativ einfach zu bestimmen. Es hängt **nur vom Summanden mit der höchsten Potenz von** $x$ ab (also $a_n x^n$) und dessen Koeffizienten $a_n$. Die Terme mit niedrigeren Potenzen spielen für sehr große $|x|$ keine Rolle mehr.

***ϟ 4.7 Verhalten von Polynomen im Unendlichen***

Für eine Polynomfunktion $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ gilt: Das Verhalten für $x \to \pm\infty$ wird bestimmt durch den Term $a_n x^n$. Man unterscheidet vier Fälle, abhängig vom Grad $n$ (gerade oder ungerade) und dem Vorzeichen des Leitkoeffizienten $a_n$:

1. $n$ **ist gerade,** $a_n > 0$ (z.B. $f(x) = 2x^4 + \dots$ oder $f(x) = x^2 + \dots$)
   - $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ (kommt von links oben)
   - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (geht nach rechts oben)

   Graphisch: 'Kommt von oben, geht nach oben' ($\nwarrow \cdots \nearrow$)
2. $n$ **ist gerade,** $a_n < 0$ (z.B. $f(x) = -x^2 + \dots$ oder $f(x) = -3x^6 + \dots$)
   - $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ (kommt von links unten)
   - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (geht nach rechts unten)

   Graphisch: 'Kommt von unten, geht nach unten' ($\swarrow \cdots \searrow$)

3. $n$ **ist ungerade,** $a_n > 0$ (z.B. $f(x) = x^3 + \dots$ oder $f(x) = 0.5x^5 + \dots$)
   - $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ (kommt von links unten)
   - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (geht nach rechts oben)

   Graphisch: 'Kommt von unten, geht nach oben' ($\swarrow \cdots \nearrow$)

4. $n$ **ist ungerade,** $a_n < 0$ (z.B. $f(x) = -x^3 + \dots$ oder $f(x) = -2x^7 + \dots$)
   - $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ (kommt von links oben)
   - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (geht nach rechts unten)

   Graphisch: 'Kommt von oben, geht nach unten' ($\nwarrow \cdots \searrow$)

**Beispiel 4.7 Grenzwerte von Polynomen bestimmen**

1. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 10$. Der Term mit der höchsten Potenz ist $2x^3$. Hier ist $n = 3$ (ungerade) und $a_3 = 2$ (positiv). Also: $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
2. $g(x) = -0.5x^4 + 100x^3 - 2$. Der Term mit der höchsten Potenz ist $-0.5x^4$. Hier ist $n = 4$ (gerade) und $a_4 = -0.5$ (negativ). Also: $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

**Aufgabe 4.12 Grenzwerte im Unendlichen**

Bestimme das Verhalten der folgenden Polynomfunktionen für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$:

1. $f(x) = -x^5 + 3x^2 - 7$
2. $g(x) = 0.1x^6 - 1000x + 200$
3. $h(x) = (2 - x)(x + 1)(x - 3)$ (Tipp: Multipliziere die Klammern nicht vollständig aus. Überlege dir, was der Term mit der höchsten Potenz sein wird und welches Vorzeichen sein Koeffizient hat.)

**Aufgabe 4.13 Polynom 3. Grades: Wertetabelle, Graph und Verhalten**

Betrachten wir die Polynomfunktion 3. Grades:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

(a) **Wertetabelle erstellen:** Erstelle eine Wertetabelle für $f(x)$ für die ganzzahligen $x$-Werte von $-2$ bis 3.

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

(b) **Graph skizzieren:** Zeichne den Graphen der Funktion $f(x)$ in ein Koordinatensystem, indem du die Punkte aus deiner Wertetabelle verbindest. Wähle die Achsenskalierung so, dass alle berechneten Punkte gut sichtbar sind.

(c) **Besondere Punkte identifizieren:**

- Kannst du anhand deiner Wertetabelle und/oder deiner Skizze vermutliche **Nullstellen** der Funktion erkennen? Notiere die $x$-Werte.
- Fallen dir in deiner Skizze Bereiche auf, die lokale **Hochpunkte** (Berggipfel) oder **Tiefpunkte** (Talsohlen) sein könnten? Markiere diese im Graphen und notiere die ungefähren

Koordinaten $(x|y)$ dieser Punkte, soweit du sie aus deiner Tabelle oder Zeichnung ablesen kannst.

(d) **Verhalten im Unendlichen (Globalverhalten):** Du kennst bereits das Konzept des Grenzwerts (Limes). Überlege dir, wie sich die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ für sehr große positive und sehr große negative $x$-Werte verhält. Welcher Term in der Funktionsgleichung dominiert das Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$?

- Was erwartest du für $f(x)$, wenn $x \to \infty$ (d.h. $x$ wird beliebig groß positiv)?
- Was erwartest du für $f(x)$, wenn $x \to -\infty$ (d.h. $x$ wird beliebig groß negativ)?

Passt dieses Verhalten zu deiner Skizze?

# 5 Einführung in die Differentialrechnung

Stell dir vor, du fährst mit einem Fahrrad einen Hügel hinauf und dann wieder hinunter. Manchmal ist der Anstieg steil, manchmal flach, und bei der Abfahrt wirst du immer schneller. Die **Differentialrechnung** gibt uns die mathematischen Werkzeuge an die Hand, um genau solche *Veränderungen* zu beschreiben und zu analysieren. Es geht darum, wie sich eine Größe (z.B. deine Höhe am Berg) ändert, wenn sich eine andere Größe (z.B. die zurückgelegte Strecke) ändert – und das nicht nur im Durchschnitt über eine längere Strecke, sondern in jedem einzelnen Augenblick!

**Was du in diesem Kapitel lernen wirst:**

Nachdem du dieses Kapitel durchgearbeitet hast, wirst du in der Lage sein:

- das **Konzept der Ableitung** als Grenzwert des Differenzenquotienten (h-Methode), als lokale (momentane) Änderungsrate und als Steigung der Tangente an einen Funktionsgraphen zu verstehen und zu erklären.
- die grundlegenden **Ableitungsregeln** – Konstanten-, Potenz- (auch für negative und gebrochene Exponenten), Faktor- und Summenregel – sicher anzuwenden, um Polynomfunktionen und verwandte Terme zu differenzieren.
- die erweiterten Ableitungsregeln – **Produkt-, Quotienten- und Kettenregel** – zu verstehen und korrekt auf komplexere Funktionen anzuwenden.
- die **erste, zweite und gegebenenfalls höhere Ableitungen** einer Funktion zu berechnen und ihre jeweilige Bedeutung (z.B. Steigung, Krümmung, Änderungsrate der Steigung) zu interpretieren.
- das **Monotonieverhalten** (steigend, fallend) und das **Krümmungsverhalten** (links-/rechtsgekrümmt) von Funktionsgraphen mithilfe der ersten bzw. zweiten Ableitung systematisch zu analysieren.
- **lokale Extrempunkte** (Hoch- und Tiefpunkte), **Wendepunkte** (inklusive der Unterscheidung zu Sattelpunkten) von Funktionen rechnerisch zu bestimmen und ihre Art zu klassifizieren.
- Gleichungen von **Tangenten und Normalen** an einen Funktionsgraphen an gegebenen Stellen oder mit gegebenen Eigenschaften aufzustellen.
- das **Verhalten von Funktionen im Unendlichen** (Grenzwerte für $x \to \pm\infty$) und an **Definitionslücken** (insbesondere Polstellen bei Funktionen wie $f(x) = a/x^n$ und deren Transformationen) zu untersuchen.
- eine vollständige **Kurvendiskussion** für Polynomfunktionen (und einfache gebrochen-rationale Funktionen) durchzuführen, alle relevanten Eigenschaften zu ermitteln und den Graphen präzise zu skizzieren.
- die erlernten Methoden der Differentialrechnung zur Lösung von **Anwendungs- und Optimierungsproblemen** (z.B. aus Geometrie, Physik oder wirtschaftlichen Kontexten) sowie zur **Rekonstruktion von Funktionen** aus gegebenen Bedingungen einzusetzen.

Du wirst somit ein fundamentales und vielseitiges Werkzeug der Analysis meistern, um Funktionen tiefgreifend zu verstehen, zu beschreiben und ihre Eigenschaften in verschiedensten Kontexten nutzbar zu machen!

Wir haben im Kapitel über lineare Funktionen bereits die **durchschnittliche Änderungsrate** kennengelernt, die der Steigung einer Sekante durch zwei Punkte des Graphen entspricht. Die Differentialrechnung geht nun einen entscheidenden Schritt weiter: Wir wollen die **momentane Änderungsrate** bestimmen, also die Steigung der Funktion in einem *einzigen Punkt*. Diese momentane Änderungsrate wird durch die **Ableitung** der Funktion beschrieben.

## Von der Sekante zur Tangente – Die Idee der Ableitung

Erinnerst du dich an die durchschnittliche Änderungsrate $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$? Das war die Steigung der Geraden (Sekante) durch die Punkte $P_1(x_1|f(x_1))$ und $P_2(x_2|f(x_2))$ auf dem Graphen.
Um die Steigung in *genau einem Punkt* $P_1(x_0|f(x_0))$ zu finden, lassen wir den zweiten Punkt $P_2(x|f(x))$ immer näher an $P_1$ heranwandern. Das Intervall $[x_0, x]$ wird also immer kleiner. Die Sekante durch $P_1$ und $P_2$ nähert sich dabei immer mehr einer speziellen Geraden an, die den Graphen im Punkt $P_1$ nur noch 'berührt' – diese Gerade nennt man die **Tangente** an den Graphen im Punkt $P_1$. Die Steigung dieser Tangente ist dann die **momentane Änderungsrate** der Funktion an der Stelle $x_0$ und wird als **Ableitung** $f'(x_0)$ bezeichnet.

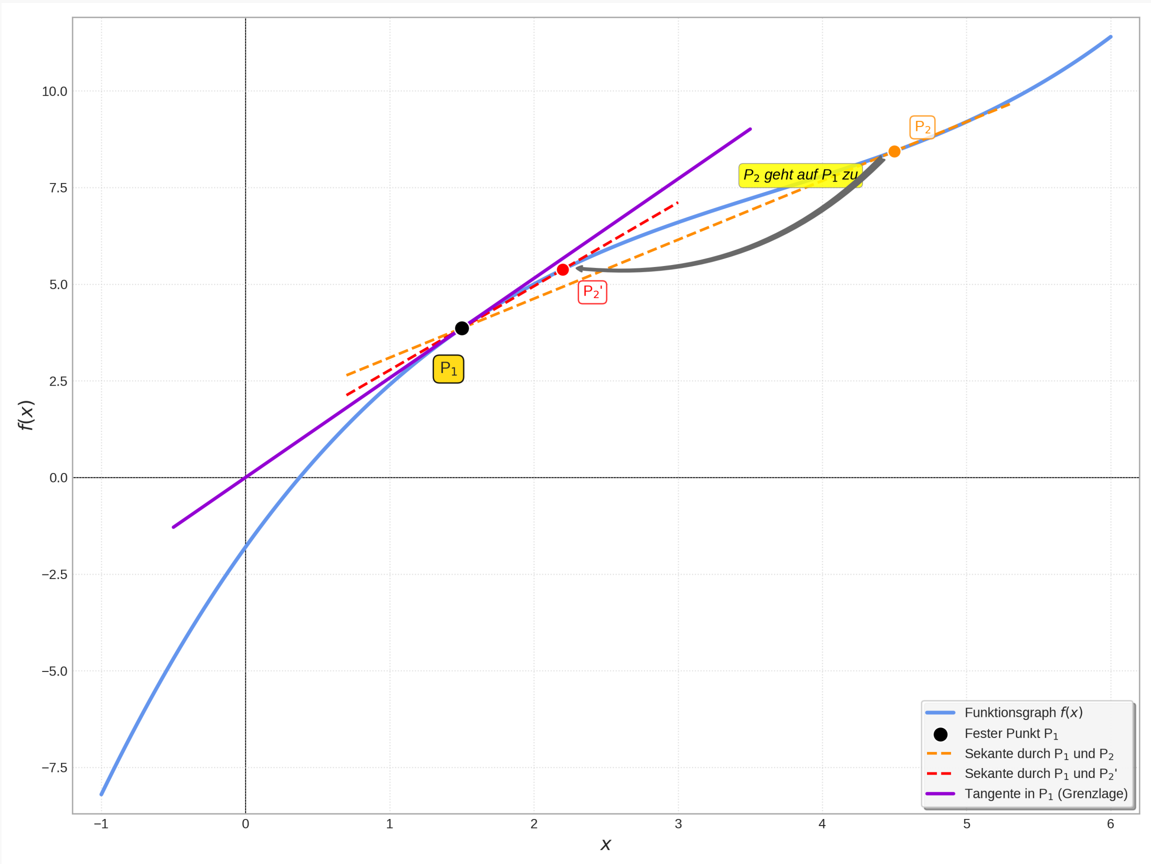


Abbildung 5.1: Von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung

Dieser Prozess des 'Heranwanderns' wird mathematisch durch den **Grenzwert** (Limes) beschrieben. Die formale Definition der Ableitung lautet daher:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ oder alternativ mit } h = x - x_0;\ f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Die zweite Form mit $h$ (die sogenannte **h-Methode**) ist oft praktischer für Berechnungen. Das Berechnen von Ableitungen über diesen Grenzwert kann aufwendig sein. Glücklicherweise gibt es für viele Funktionstypen feste Regeln, die uns das Ableiten erleichtern! Aber es ist wichtig, die Idee dahinter einmal verstanden zu haben.

### Beispiel 5.1 Ableitung von $f(x) = x^2 + 1$

Wir wollen die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2+1$ an einer beliebigen Stelle $x_0$ mit der h-Methode bestimmen. Die Formel lautet: $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
**Schritt 1: $f(x_0 + h)$ und $f(x_0)$ bestimmen.** $f(x_0) = x_0^2 + 1$ $f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2 + 1 = (x_0^2 + 2x_0h + h^2) + 1 = x_0^2 + 2x_0h + h^2 + 1$.

**Schritt 2: Differenz $f(x_0+h)-f(x_0)$ bilden.** $f(x_0+h)-f(x_0)=(x_0^2+2x_0h+h^2+1)-(x_0^2+1)$ $f(x_0+h)-f(x_0)=x_0^2+2x_0h+h^2+1-x_0^2-1$ $f(x_0+h)-f(x_0)=2x_0h+h^2$.
**Schritt 3: Differenzenquotient $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ bilden und vereinfachen.** $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{2x_0h+h^2}{h}$ Hier können wir $h$ aus dem Zähler ausklammern (solange $h\neq 0$, was für den Grenzwertprozess der Fall ist, da $h$ sich nur Null nähert): $\frac{h(2x_0+h)}{h}=2x_0+h$.
**Schritt 4: Grenzwert für $h\to 0$ bilden.** $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}(2x_0+h)$. Wenn $h$ gegen Null geht, wird der Term $2x_0+h$ zu $2x_0+0=2x_0$. Also: $f'(x_0)=2x_0$.
Da $x_0$ eine beliebige Stelle war, können wir auch schreiben: Die Ableitungsfunktion von $f(x)=x^2+1$ ist $f'(x)=2x$. Das bedeutet, die Steigung der Tangente an die Parabel $y=x^2+1$ an der Stelle $x$ ist immer $2x$. An der Stelle $x=1$ ist die Steigung $2\cdot 1=2$, an der Stelle $x=3$ ist sie $2\cdot 3=6$.

**Aufgabe 5.1 Experiment zur Sekantensteigung und h-Methode**

Gegeben ist die Funktion $f(x)=x^2$. Wir wollen die Steigung der Tangente im Punkt $P(1|1)$ untersuchen.

1. **Experiment mit Sekantensteigungen:** Wähle einen festen Punkt $P_1(1|f(1))$. Berechne $f(1)$. Wähle nun verschiedene zweite Punkte $P_2(x|f(x))$, wobei $x$ immer näher an 1 rückt. Berechne jeweils die Steigung der Sekante $m_{Sek}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.
   - $x=2$
   - $x=1.5$
   - $x=1.1$
   - $x=1.01$
   - $x=1.001$

   Was beobachtest du bei den Werten für die Sekantensteigung? Welchem Wert scheinen sie sich anzunähern?
2. **Exakte Berechnung mit der h-Methode:** Bestimme die Ableitung $f'(x_0)$ für $f(x)=x^2$ an der Stelle $x_0=1$ mit der h-Methode: $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$. Vergleiche dein Ergebnis mit deiner Beobachtung aus Teil a).
3. Bestimme die allgemeine Ableitungsfunktion $f'(x)$ für $f(x)=x^2$ mit der h-Methode.

**Aufgabe 5.2 Weitere Übungen zur h-Methode**

Bestimme die Ableitungsfunktion $f'(x)$ für die folgenden Funktionen mithilfe der h-Methode. Zeige alle algebraischen Umformungsschritte.

1. $f(x)=3x+2$

   ***Tipp 5.1: Lineare Funktion***

   Welche Steigung erwartest du bei einer linearen Funktion? Das Ergebnis der h-Methode sollte dies bestätigen.
2. $f(x)=x^2-x$
3. $f(x)=c$ (wobei $c$ eine beliebige Konstante ist)

**Tipp 5.2: Konstante Funktion**

Wie sieht der Graph einer konstanten Funktion aus? Welche Steigung hat er überall?

4. $f(x) = ax^2$ (wobei $a$ eine Konstante ist)

**Tipp 5.3: Parameter $a$**

Behandle $a$ während der Rechnung wie eine feste Zahl. Das Ergebnis wird $a$ enthalten.

Diese Übungen helfen dir, das Prinzip der h-Methode zu verinnerlichen und algebraische Termumformungen zu trainieren.

***Weißt du noch, wie...? 5.1: Potenzgesetze – Fit im Umgang mit Exponenten***

Potenzen begegnen uns ständig, und ein sicherer Umgang mit den Potenzgesetzen ist Gold wert, nicht nur beim Ableiten! Hier eine Auffrischung der wichtigsten Regeln:

**1. Grundlagen und Definitionen**

- **Positive ganzzahlige Exponenten:** $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ (für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$)
- **Exponent Null:** $a^0 = 1$ (für $a \neq 0$)
  *Beispiel:* $5^0 = 1$; $(-2)^0 = 1$
- **Exponent Eins:** $a^1 = a$
  *Beispiel:* $x^1 = x$; $10^1 = 10$

**2. Multiplikation und Division von Potenzen**

- **Gleiche Basis, verschiedene Exponenten (Multiplikation):** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
  *Beispiel:* $x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$
- **Gleiche Basis, verschiedene Exponenten (Division):** $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (für $a \neq 0$)
  *Beispiel:* $\frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$
- **Gleicher Exponent, verschiedene Basen (Multiplikation):** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
  *Beispiel:* $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$
- **Gleicher Exponent, verschiedene Basen (Division):** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (für $b \neq 0$)
  *Beispiel:* $\left(\frac{x}{2}\right)^4 = \frac{x^4}{2^4} = \frac{x^4}{16}$

**3. Potenzieren von Potenzen (Potenz einer Potenz)**

- **Regel:** $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
  *Beispiel:* $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$

**4. Negative Exponenten** Negative Exponenten bedeuten, dass die Potenz im Nenner eines Bruchs steht (oder umgekehrt).

- **Definition:** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (für $a \neq 0$)
  *Beispiel:* $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$; $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
- **Kehrwert eines Bruchs:** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ (für $a, b \neq 0$)
  *Beispiel:* $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$
- **Im Nenner:** $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$ (für $a \neq 0$)
  *Beispiel:* $\frac{1}{x^{-5}} = x^5$

**5. Gebrochen rationale Exponenten (Wurzeln)** Gebrochene Exponenten stehen für Wurzeln. Der Nenner des Exponenten ist der Wurzelexponent.

- **Quadratwurzel:** $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ (für $a \geq 0$)
  *Beispiel:* $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$
- **n-te Wurzel:** $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ (für $a \geq 0$, wenn $n$ gerade ist)
  *Beispiel:* $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$; $\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$
- **Allgemeiner gebrochener Exponent:** $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
  *Beispiel:* $4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$ *Beispiel mit negativem Bruch im Exponenten:* $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

**Kurze Übungen dazu:** Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich oder berechne den Wert:

(a) $x^5 \cdot x^{-3} =?$

(b) $\frac{a^2}{a^6} =?$

(c) $(y^4)^2 =?$

(d) $(3b)^3 =?$

(e) $\left(\frac{c}{4}\right)^2 =?$

(f) $z^{-5} =?$

(g) $\left(\frac{2}{x}\right)^{-3} =?$

(h) $64^{\frac{1}{3}} =?$

(i) $25^{\frac{3}{2}} =?$

(j) $16^{-\frac{1}{4}} =?$

(k) $\sqrt{x^8} =?$

(l) $\frac{1}{y^{-2}} =?$

(m) $(2x^2y^{-1})^3 =?$

(n) $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}} =?$

(o) $(b^0 \cdot b^3)^{-1} =?$

(p) $(x+2)^3 =?$ *(Tipp: Schreibe als $(x+2)^2 \cdot (x+2)$)*

Diese Regeln sind sehr mächtig und helfen dir, auch komplizierte Terme zu zähmen!

## ϟ *5.1 Was ist die Ableitung $f'(x)$?*

Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle $x$ (oft auch $x_0$ geschrieben) hat mehrere wichtige Bedeutungen:

- Sie ist die **momentane Änderungsrate** der Funktion $f$ an der Stelle $x$.
- Sie ist die **Steigung der Tangente** an den Graphen von $f$ im Punkt $(x|f(x))$.
- Sie ist der **Grenzwert des Differenzenquotienten** (Steigung der Sekante), wenn das Intervall $\Delta x$ gegen Null geht.

Die Funktion $f'(x)$, die jeder Stelle $x$ ihre Ableitung zuordnet, heißt **Ableitungsfunktion** oder kurz Ableitung von $f$. Den Vorgang des Bestimmens der Ableitung nennt man **Differenzieren** oder **Ableiten**.

## *Warum ist das wichtig? 5.1: Anwendungen der Ableitung*

Warum ist die Ableitung so ein mächtiges Werkzeug? Mit ihr können wir:

- **Extremstellen** (Hoch- und Tiefpunkte) von Funktionen finden: Dort ist die Tangentensteigung (also die Ableitung) oft Null.
- Das **Monotonieverhalten** von Funktionen untersuchen: Wo steigt oder fällt ein Graph? (Positives Vorzeichen von $f' \implies$ Graph steigt; negatives Vorzeichen von $f' \implies$ Graph fällt).
- **Wendepunkte** finden: Punkte, an denen sich das Krümmungsverhalten eines Graphen ändert (z.B. von einer Rechts- in eine Linkskurve). Hier spielt die zweite Ableitung $f''(x)$ eine Rolle.
- **Optimierungsprobleme** lösen: Wo wird ein Wert maximal oder minimal (z.B. maximale Fläche, minimale Kosten)?

- **Physikalische Prozesse** beschreiben: Geschwindigkeit ist die Ableitung des Weges nach der Zeit, Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit.

Die Differentialrechnung ist somit ein Schlüsselwerkzeug in vielen Naturwissenschaften, Ingenieurwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften und natürlich in der Mathematik selbst.

***Schon gewusst? Die Natur als schlaue Optimiererin***

Hast du dich jemals gefragt, warum Seifenblasen immer perfekt rund sind oder warum Bienen ihre Waben in exakten Sechsecken bauen? Es scheint, als ob die Natur eine eingebaute Mathematikerin ist, die ständig nach den besten, effizientesten Lösungen sucht!

- **Seifenblasen:** Eine Seifenblase umschließt mit einer gegebenen Menge Seifenlösung ein maximales Volumen Luft. Die Kugelform ist dabei die geometrische Form, die bei gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche hat. So minimiert die Seifenblase ihre Oberflächenspannung.
- **Bienenwaben:** Die sechseckige Struktur der Bienenwaben ist extrem stabil und materialsparend. Mit einer minimalen Menge Wachs wird maximaler Raum für Honig und Brut geschaffen.
- **Lichtstrahlen:** Licht nimmt immer den Weg der schnellsten Zeit (Fermatsches Prinzip). Daraus lassen sich die Gesetze der Reflexion und Brechung herleiten, die erklären, warum ein Strohhalm im Wasserglas geknickt aussieht.

Viele dieser 'optimalen' Formen und Wege in der Natur lassen sich mit den Werkzeugen der Differentialrechnung beschreiben und verstehen. Wenn wir zum Beispiel das Maximum oder Minimum einer Größe suchen (maximale Fläche, minimaler Materialverbrauch, schnellster Weg), suchen wir oft nach Stellen, an denen die Änderungsrate (also die Ableitung) Null wird. Es ist faszinierend, wie die Mathematik uns hilft, diese natürlichen 'Optimierungsstrategien' zu entschlüsseln!

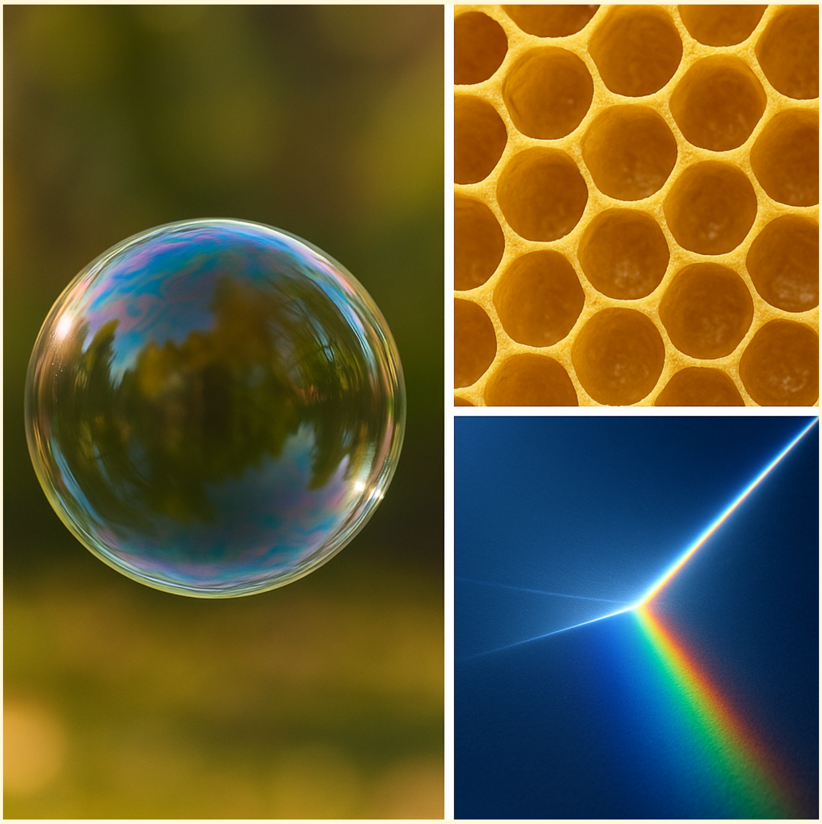

Abbildung 5.2: Optimale Formen und Wege finden sich überall in der Natur.

## 5.1 Ableitungsregeln – Dein Werkzeugkasten zum Differenzieren

Glücklicherweise müssen wir nicht für jede Funktion mühsam den Grenzwert des Differenzenquotienten berechnen. Es gibt eine Reihe von **Ableitungsregeln**, die uns das Leben sehr erleichtern. Diese Regeln sind wie ein Werkzeugkasten – für jede Art von Funktion gibt es das passende Werkzeug. Wir werden diese Regeln Schritt für Schritt einführen und üben.

### 5.1.1 Die Basis: Ableiten von Konstanten und Potenzen von $x$

Fangen wir mit den grundlegendsten Bausteinen an.

**ϟ *5.2 Ableitung einer konstanten Funktion***

Die Ableitung einer konstanten Funktion $f(x) = c$ (wobei $c$ eine beliebige reelle Zahl ist) ist immer Null.

$$(c)' = 0$$

**Beispiele:**

- $f(x) = 5 \implies f'(x) = 0$
- $g(x) = -17.3 \implies g'(x) = 0$
- $h(x) = \pi \implies h'(x) = 0$ (denn $\pi$ ist auch nur eine Zahl/Konstante)

*Warum ist das so?* Eine konstante Funktion hat einen waagerechten Graphen. Die Steigung einer waagerechten Geraden ist überall Null. Eine Konstante ändert sich nicht, ihre momentane Änderungsrate ist also Null.

Die nächste wichtige Regel betrifft Potenzen von $x$.

**ϟ *5.3 Ableitung von $f(x) = x^n$***

Für Funktionen der Form $f(x) = x^n$ (wobei $n$ eine beliebige reelle Zahl sein kann, also auch Brüche oder negative Zahlen) ist die Ableitung:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

**Die Regel in Worten:** 'Ziehe den alten Exponenten als Faktor nach vorne und verringere dann den Exponenten um 1.'
**Beispiele:**

- $f(x) = x^3 \implies n = 3 \implies f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$
- $g(x) = x^7 \implies n = 7 \implies g'(x) = 7 \cdot x^{7-1} = 7x^6$
- $h(x) = x = x^1 \implies n = 1 \implies h'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$ (Die Ableitung von $f(x) = x$ ist also 1. Das ist logisch, denn $y = x$ ist die Ursprungsgerade mit der Steigung 1.)
- $k(x) = \sqrt{x}$. Hier müssen wir erst umschreiben: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Also $n = \frac{1}{2}$. $k'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$. Das kann man auch wieder umschreiben: $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Also: $k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $m(x) = \frac{1}{x^2}$. Umschreiben: $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$. Also $n = -2$. $m'(x) = -2 \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3}$. Umschreiben: $-2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

**Tipp 5.4: Umgang mit Wurzeln und Brüchen beim Ableiten**

Um die Potenzregel auch für Wurzeln und Brüche mit $x$ im Nenner anwenden zu können, ist es sehr hilfreich, diese zuerst in Potenzschreibweise umzuwandeln:

- $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ (speziell: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$)
- $\frac{1}{x^k} = x^{-k}$ (speziell: $\frac{1}{x} = x^{-1}$)

Nach dem Ableiten kannst du das Ergebnis oft wieder in die ursprüngliche Schreibweise zurückführen, wenn das übersichtlicher ist.

### 5.1.2 Kombinationen: Faktor- und Summenregel

Selten bestehen Funktionen nur aus einem einzigen $x^n$-Term. Meistens haben wir Vielfache davon oder Summen und Differenzen.

**ϟ 5.4 Ableitung von $c \cdot g(x)$**

Ein konstanter Faktor $c$ (also eine Zahl), der mit einer Funktion $g(x)$ multipliziert wird, bleibt beim Ableiten einfach erhalten und wird mit der Ableitung von $g(x)$ multipliziert:

$$(c \cdot g(x))' = c \cdot g'(x)$$

**Beispiele:**

- $f(x) = 5x^3$. Hier ist $c = 5$ und $g(x) = x^3$. Wir wissen $(x^3)' = 3x^2$. $f'(x) = 5 \cdot (x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$.
- $g(x) = -2x^4 \implies g'(x) = -2 \cdot (x^4)' = -2 \cdot 4x^3 = -8x^3$.
- $h(x) = \frac{3}{x} = 3 \cdot \frac{1}{x} = 3 \cdot x^{-1}$. $h'(x) = 3 \cdot (x^{-1})' = 3 \cdot (-1x^{-2}) = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$.

Die letzte Grundregel, die wir für Polynome brauchen, ist die Summenregel.

**ϟ 5.5 Ableitung von $g(x) \pm h(x)$**

Die Ableitung einer Summe (oder Differenz) von zwei (oder mehr) Funktionen ist einfach die Summe (oder Differenz) ihrer einzelnen Ableitungen:

$$(g(x) + h(x))' = g'(x) + h'(x)$$

$$(g(x) - h(x))' = g'(x) - h'(x)$$

**In Worten:** 'Jeder Summand wird für sich abgeleitet, und die Ergebnisse werden dann addiert bzw. subtrahiert.'

Mit diesen vier Regeln (Konstanten-, Potenz-, Faktor- und Summenregel) können wir nun jede beliebige ganzrationale Funktion (Polynomfunktion) ableiten!

**Beispiel 5.2 Anwendung aller Grundregeln**

Leite die Funktion $f(x) = 4x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 5x - \sqrt{2}$ ab.
Wir leiten jeden Summanden einzeln ab und nutzen dabei die Faktor- und Potenzregel:

- $(4x^5)' = 4 \cdot (x^5)' = 4 \cdot (5x^4) = 20x^4$
- $(-\frac{2}{3}x^3)' = -\frac{2}{3} \cdot (x^3)' = -\frac{2}{3} \cdot (3x^2) = -2x^2$

- $(5x)' = 5 \cdot (x)' = 5 \cdot 1 = 5$
- $(-\sqrt{2})'$: Da $\sqrt{2}$ eine Konstante ist, ist ihre Ableitung 0.

Zusammengesetzt ergibt das die Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = 20x^4 - 2x^2 + 5$$

**Aufgabe 5.3 Grundregeln üben**

Leite die folgenden Funktionen ab. Notiere dir, welche Regeln du benutzt.

1. $f_1(x) = 6x^4 - 3x^3 + 0.5x^2 - x + 12$
2. $f_2(x) = -2x^5 + \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 9x$
3. $f_3(x) = (x-2)(x+3)$ (Tipp: Erst ausmultiplizieren!)
4. $f_4(x) = 4\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} + 2x^{-1}$ (Tipp: Erst in Potenzschreibweise umwandeln!)
5. $f_5(x) = ax^2 + bx + c$ (Hier sind $a, b, c$ Konstanten/Parameter. Was ist die Ableitung?)

***Tipp 5.5: Nach welcher Variable wird abgeleitet?***

In der Mathematik ist es üblich, dass Funktionen mit $f(x)$ bezeichnet werden und $x$ die Variable ist, nach der abgeleitet wird. Alle anderen Buchstaben in der Funktion (wie $a, b, c, k, \pi, \dots$) werden dann als **Konstanten** behandelt, es sei denn, es ist ausdrücklich etwas anderes gesagt (z.B. bei Funktionen mit mehreren Variablen, was aber erst viel später kommt). Wenn eine Funktion z.B. $f(t) = at^2 + v_0t$ heißt, ist $t$ die Variable und $a$ sowie $v_0$ sind Konstanten. Die Ableitung nach $t$ wäre dann $f'(t) = 2at + v_0$. Achte also immer genau darauf, welcher Buchstabe die Variable ist, nach der du ableiten sollst! Oft wird das durch die Schreibweise $f(x)$, $g(t)$, $A(r)$ etc. schon angedeutet. Bei der h-Methode $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ist $x_0$ der feste Punkt, an dem wir die Steigung suchen (wird also wie eine Konstante behandelt), und $h$ ist die Variable, die gegen Null geht. Die Ableitung $f'(x_0)$ ist dann die momentane Änderungsrate von $f$ bezüglich ihrer ursprünglichen Variablen (z.B. $x$), ausgewertet an der Stelle $x_0$.

**Aufgabe 5.4 Variable und Konstanten unterscheiden**

Leite die folgenden Funktionen nach der jeweils angegebenen Variablen ab. Behandle alle anderen Buchstaben als Konstanten.

1. $f(t) = 5t^2 - at + b$. Leite nach $t$ ab. ($f'(t) =?$)
2. $g(a) = 3a^2x - 2at + 5x^2$. Leite nach $a$ ab. ($g'(a) =?$)
3. $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$. Leite nach $t$ ab. ($s'(t) =?$) (Dies ist die Formel für den Weg bei gleichmäßiger Beschleunigung $g$ mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ und Anfangsweg $s_0$.)
4. $U(r) = 2\pi r$. Leite nach $r$ ab. ($U'(r) =?$) (Umfang eines Kreises)
5. $A(x) = k \cdot x^3 - m \cdot x$. Leite nach $x$ ab. ($A'(x) =?$)

***Warum ist das wichtig? 5.2: Ableitung von Polynomen***

Das Ableiten von Polynomfunktionen ist eine fundamentale Fähigkeit. Viele komplexere Funktionen werden in der höheren Mathematik durch Polynome angenähert (z.B. durch Taylorreihen – ein Ausblick für später!). Wenn du Polynome sicher ableiten kannst, hast du eine wichtige Grundlage für viele weitere Themen der Analysis geschaffen, insbesondere für Kurvendiskussionen, bei denen Nullstellen der Ableitung (Extremstellen) und Nullstellen der zweiten Ableitung (Wendestellen) gesucht werden.

## 5.2 Die erste Ableitung $f'(x)$ – Was sie uns verrät

Wir wissen jetzt, dass die erste Ableitung $f'(x)$ die Steigung der Tangente an den Graphen von $f(x)$ an der Stelle $x$ angibt. Aber was können wir daraus über den Verlauf der Funktion $f(x)$ schließen? Eine ganze Menge!

### 5.2.1 Monotonie – Wo steigt und fällt der Graph?

Das **Monotonieverhalten** einer Funktion beschreibt, in welchen Intervallen der Graph der Funktion steigt, fällt oder konstant verläuft. Die erste Ableitung ist hier unser Detektiv!

**ϟ 5.6 *Monotonie und erste Ableitung***

Sei $f$ eine in einem Intervall $I$ differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x \in I$:

- Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x$ in $I$, dann ist $f(x)$ in diesem Intervall **streng monoton steigend**. (Die Tangenten haben eine positive Steigung $\implies$ es geht bergauf).
- Wenn $f'(x) < 0$ für alle $x$ in $I$, dann ist $f(x)$ in diesem Intervall **streng monoton fallend**. (Die Tangenten haben eine negative Steigung $\implies$ es geht bergab).
- Wenn $f'(x) = 0$ für alle $x$ in $I$, dann ist $f(x)$ in diesem Intervall **konstant**. (Die Tangenten sind waagerecht).

Um die Monotonieintervalle einer Funktion zu bestimmen, untersuchst du also das **Vorzeichen der ersten Ableitung** $f'(x)$.

**Beispiel 5.3 Monotonieverhalten untersuchen**

Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
**Schritt 1: Erste Ableitung bilden.** $f'(x) = (x^3)' - (3x^2)' + (1)' = 3x^2 - 6x + 0 = 3x^2 - 6x$.
**Schritt 2: Nullstellen der ersten Ableitung finden.** Wir setzen $f'(x) = 0$, um die Stellen zu finden, an denen die Tangente waagerecht ist (mögliche Extremstellen, an denen sich das Monotonieverhalten ändern könnte): $3x^2 - 6x = 0$ Wir klammern $3x$ aus (Sonderfall $c = 0$ bei quadratischen Gleichungen): $3x(x-2) = 0$ Die Lösungen sind $3x = 0 \implies x_1 = 0$ und $x - 2 = 0 \implies x_2 = 2$. An den Stellen $x = 0$ und $x = 2$ hat die Funktion waagerechte Tangenten. Diese Stellen teilen die x-Achse in Intervalle, in denen wir das Vorzeichen von $f'(x)$ untersuchen.
**Schritt 3: Vorzeichen von $f'(x)$ in den Intervallen untersuchen.** Die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ teilen die x-Achse in drei offene Intervalle:

- Intervall 1: $(-\infty, 0)$ (links von 0)
- Intervall 2: $(0, 2)$ (zwischen 0 und 2)
- Intervall 3: $(2, \infty)$ (rechts von 2)

Wir wählen für jedes Intervall einen Testwert und setzen ihn in $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ ein:

- Intervall 1: Wähle $x = -1$. $f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 3(1) + 6 = 3 + 6 = 9$. Da $f'(-1) = 9 > 0$, ist $f(x)$ im Intervall $(-\infty, 0)$ streng monoton steigend.
- Intervall 2: Wähle $x = 1$. $f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = 3 - 6 = -3$. Da $f'(1) = -3 < 0$, ist $f(x)$ im Intervall $(0, 2)$ streng monoton fallend.

- Intervall 3: Wähle $x = 3$. $f'(3) = 3(3)^2 - 6(3) = 3(9) - 18 = 27 - 18 = 9$. Da $f'(3) = 9 > 0$, ist $f(x)$ im Intervall $(2, \infty)$ streng monoton steigend.

**Zusammenfassung des Monotonieverhaltens:** Basierend auf der Untersuchung der Vorzeichen von $f'(x)$ in den offenen Intervallen und der Tatsache, dass $f(x)$ als Polynomfunktion überall stetig ist, können wir schließen:

- $f(x)$ ist **streng monoton steigend** für $x \in (-\infty, 0]$.
- $f(x)$ ist **streng monoton fallend** für $x \in [0, 2]$.
- $f(x)$ ist **streng monoton steigend** für $x \in [2, \infty)$.

*Anmerkung zur Präzision:* Wenn wir sagen, eine Funktion ist 'streng monoton steigend auf $[a, b]$', bedeutet das, dass für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$. Dies ist hier erfüllt, da $f'(x)$ in den *offenen* Intervallen $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ und $(2, \infty)$ jeweils ein eindeutiges Vorzeichen hat und die Funktion $f$ an den Stellen $x = 0$ und $x = 2$ stetig ist. An den Punkten $x = 0$ und $x = 2$ selbst ist die Steigung $f'(x)$ zwar Null, die Funktion setzt aber ihren Trend (bis zu diesem Punkt steigend/fallend und ab diesem Punkt fallend/steigend) fort. Manchmal kann die Angabe von Monotonieintervallen mit offenen oder geschlossenen Klammern zu Diskussionen führen. Wichtig ist das Verständnis, dass sich das Monotonieverhalten *an den Stellen ändern kann, wo $f'(x) = 0$ ist.*

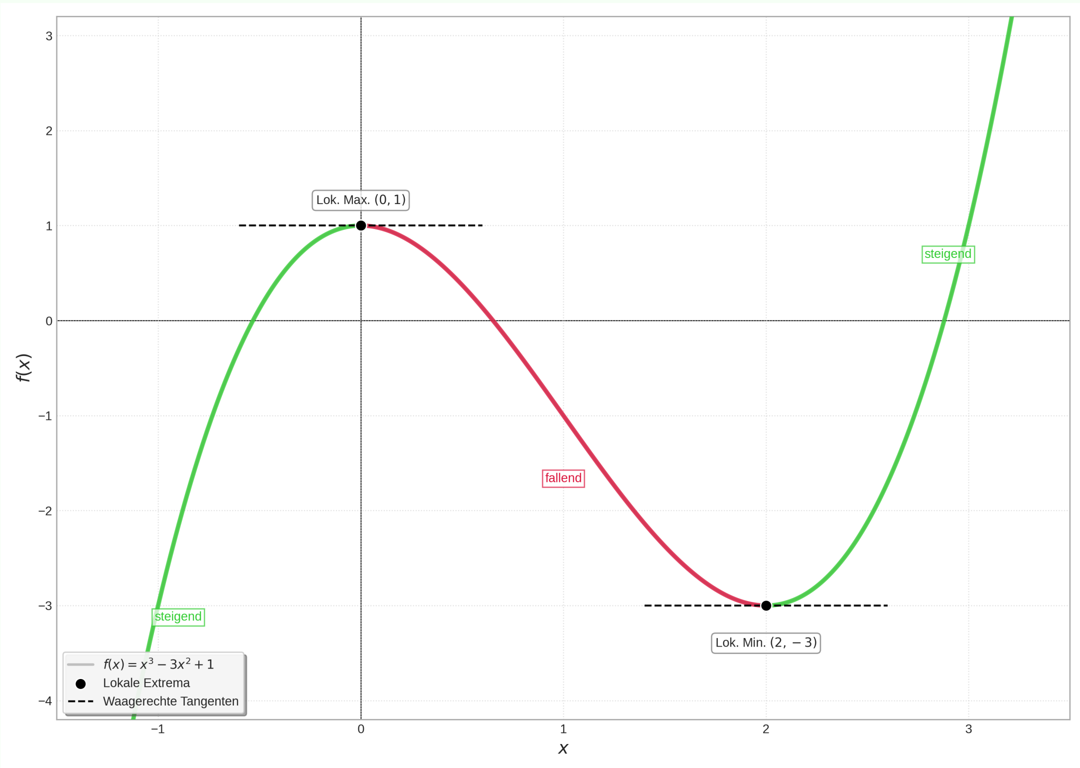


Abbildung 5.3: Monotonieverhalten von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

**Aufgabe 5.5 Monotonie untersuchen – Vielfältige Polynome**

Untersuche das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen. Bestimme dazu die erste Ableitung, deren Nullstellen und das Vorzeichen der Ableitung in den entsprechenden Intervallen. Skizziere grob den Verlauf der ersten Ableitung und überlege, was das für die Steigung der Originalfunktion bedeutet.

1. $f_1(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

**Tipp 5.6: Nullstellen von $f_1'(x)$**

Die Ableitung ist eine quadratische Funktion. Ihre Nullstellen kannst du mit der p-q-Formel oder Mitternachtsformel finden.

2. $f_2(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$

**Tipp 5.7: Nullstellen von $f_2'(x)$**

Die Ableitung ist ein Polynom 3. Grades. Versuche, $x$ oder $x^2$ auszuklammern, um die Nullstellen zu finden.

3. $f_3(x) = x^3 + 6x - 1$

**Tipp 5.8: Immer positiv?**

Untersuche die Ableitung $f_3'(x)$. Kann dieser Term jemals Null oder negativ werden? Was bedeutet das für die Monotonie von $f_3(x)$?

4. $f_4(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

**Tipp 5.9: Immer negativ?**

Untersuche die Ableitung $f_4'(x)$. Kann dieser Term jemals Null oder positiv werden? (Hinweis: Quadratische Ergänzung bei $f_4'(x)$ könnte helfen, das Vorzeichen zu bestimmen.)

5. $f_5(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

**Tipp 5.10: Nicht-ganzzahlige Nullstellen von $f_5'(x)$**

Die Nullstellen der Ableitung sind hier nicht unbedingt ganze Zahlen, aber mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen gut zu finden.

6. **Anwendung im Kontext:** Die Temperatur $T$ in Grad Celsius während eines bestimmten Tagesabschnitts kann näherungsweise durch die Funktion $T(t) = -0.1t^3 + 1.2t^2 - 2.5t + 15$ für $0 \leq t \leq 8$ (Stunden nach Beobachtungsbeginn) beschrieben werden.
   - In welchen Zeiträumen steigt die Temperatur?
   - In welchen Zeiträumen fällt die Temperatur?
   - Gibt es Zeitpunkte, an denen sich die Temperatur kurzzeitig nicht ändert (waagerechte Tangente)? Fällt an diesen Zeitpunkten etwas auf bezüglich der Temperatur? Versuche den Graph anhand der Monotonie und des y-Achsenabschnittes schon mal grob zu skizzieren!

### 5.2.2 Extremstellen – Gipfel und Täler im Funktionsgraphen

Stellen, an denen die Funktion von steigend zu fallend übergeht (oder umgekehrt), sind oft besonders interessant. Hier liegen lokale **Hochpunkte** (Maxima) oder **Tiefpunkte** (Minima), zusammenfassend **Extrempunkte** genannt.

### ϟ 5.7 Extremstellen finden mit der ersten Ableitung

Um lokale Extremstellen einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ zu finden, gehst du wie folgt vor:
**1. Notwendige Bedingung für Extremstellen:** Wenn $f(x)$ an der Stelle $x_E$ eine lokale Extremstelle hat, dann muss die Tangente dort waagerecht sein, also gilt:

$$f'(x_E) = 0$$

Die Stellen $x_E$, an denen $f'(x_E) = 0$ ist, nennt man **kritische Stellen** oder **potentielle Extremstellen**. Nicht jede kritische Stelle ist aber automatisch eine Extremstelle (es könnte auch ein Sattelpunkt sein, dazu später mehr).
**2. Hinreichende Bedingung für Extremstellen (Vorzeichenwechselkriterium von $f'$):** Nachdem du eine kritische Stelle $x_E$ (also eine Nullstelle von $f'(x)$) gefunden hast, musst du prüfen, ob dort tatsächlich ein Extremum vorliegt. Das geht mit dem Vorzeichenwechsel (VZW) von $f'(x)$ an der Stelle $x_E$:

- Wenn $f'(x)$ an der Stelle $x_E$ das Vorzeichen von **Plus nach Minus** wechselt (d.h. $f(x)$ ist links von $x_E$ steigend und rechts davon fallend), dann hat $f(x)$ an der Stelle $x_E$ einen **lokalen Hochpunkt (Maximum)**.
- Wenn $f'(x)$ an der Stelle $x_E$ das Vorzeichen von **Minus nach Plus** wechselt (d.h. $f(x)$ ist links von $x_E$ fallend und rechts davon steigend), dann hat $f(x)$ an der Stelle $x_E$ einen **lokalen Tiefpunkt (Minimum)**.
- Wenn $f'(x)$ an der Stelle $x_E$ **keinen Vorzeichenwechsel** hat (z.B. von Plus nach Plus), dann liegt bei $x_E$ **kein Extrempunkt**, sondern ein Sattelpunkt (Terrassenpunkt) vor.

Die y-Koordinate des Extrempunktes erhältst du, indem du $x_E$ in die Originalfunktion $f(x)$ einsetzt: $y_E = f(x_E)$.

### *Tipp 5.11: Extrempunkte und Monotonie – Das Bild im Kopf*

- **Hochpunkt (Maximum $\wedge$):** Der Graph steigt erst an ($f'(x) > 0$, wie ein Pfeil $\nearrow$), erreicht den Gipfel (dort ist $f'(x_E) = 0$), und fällt dann wieder ab ($f'(x) < 0$, wie ein Pfeil $\searrow$). Die Form ähnelt einem 'Dach' oder einem umgedrehten 'V'.
- **Tiefpunkt (Minimum $\vee$):** Der Graph fällt erst ab ($f'(x) < 0$, Pfeil $\searrow$), erreicht den Talboden ($f'(x_E) = 0$), und steigt dann wieder an ($f'(x) > 0$, Pfeil $\nearrow$). Die Form ähnelt einem 'Tal' oder einem 'V'.

Diese Vorstellung hilft dir, den Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung richtig zu interpretieren. Später werden wir sehen, dass die zweite Ableitung $f''(x)$ uns eine alternative (und oft schnellere) Möglichkeit bietet, die Art eines Extrempunktes zu bestimmen, indem sie uns sagt, ob der Graph an dieser Stelle 'lachend' (linksgekrümmt $\implies$ Tiefpunkt) oder 'traurig' (rechtsgekrümmt $\implies$ Hochpunkt) ist.

### Beispiel 5.4 Extremstellen bestimmen

Bestimme die lokalen Extremstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ aus dem vorherigen Beispiel. Wir hatten bereits berechnet: $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Die Nullstellen von $f'(x)$ waren $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Das sind unsere kritischen Stellen.
Nun untersuchen wir den Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ an diesen Stellen:

- **Untersuchung bei $x_1 = 0$:** Wir wissen: Links von $x = 0$ (z.B. bei $x = -1$) war $f'(-1) = 9 > 0$ (steigend). Rechts von $x = 0$ (z.B. bei $x = 1$) war $f'(1) = -3 < 0$ (fallend). Es gibt also einen

Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ von $+$ nach $-$ bei $x = 0$. Somit liegt bei $x = 0$ ein **lokaler Hochpunkt** vor. Die y-Koordinate ist $f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 1 = 1$. Der Hochpunkt ist $H(0|1)$.

- **Untersuchung bei $x_2 = 2$:** Wir wissen: Links von $x = 2$ (z.B. bei $x = 1$) war $f'(1) = -3 < 0$ (fallend). Rechts von $x = 2$ (z.B. bei $x = 3$) war $f'(3) = 9 > 0$ (steigend). Es gibt also einen Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ von $-$ nach $+$ bei $x = 2$. Somit liegt bei $x = 2$ ein **lokaler Tiefpunkt** vor. Die y-Koordinate ist $f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 1 = 8 - 3(4) + 1 = 8 - 12 + 1 = -3$. Der Tiefpunkt ist $T(2|-3)$.

Die Funktion hat also einen Hochpunkt bei $H(0|1)$ und einen Tiefpunkt bei $T(2|-3)$.

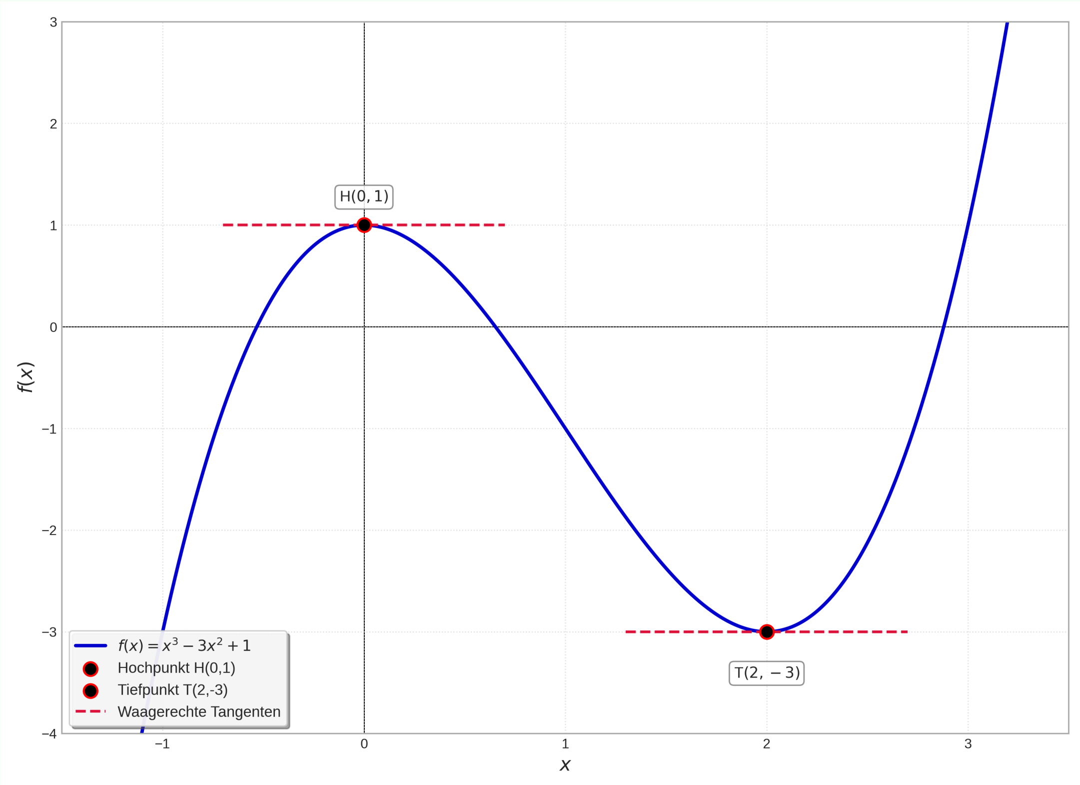


Abbildung 5.4: Hoch- und Tiefpunkt von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

**Aufgabe 5.6 Extrempunkte finden – Vielfältige Herausforderungen**

Bestimme die lokalen Extrempunkte (Art und Koordinaten) der folgenden Funktionen. Verwende primär das **Vorzeichenwechselkriterium der ersten Ableitung ($f'(x)$)**. Du kannst deine Ergebnisse zusätzlich mit dem Kriterium der zweiten Ableitung ($f''(x)$) überprüfen, wo dies sinnvoll und einfach möglich ist.

1. $f_1(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

> ***Tipp 5.12: Standardfall Polynom 3. Grades***
>
> Bestimme $f_1'(x)$. Finde die Nullstellen von $f_1'(x)$ (das sind deine Kandidaten für Extremstellen). Untersuche den Vorzeichenwechsel von $f_1'(x)$ an diesen Stellen, um die Art der Extrema (Hoch- oder Tiefpunkt) zu bestimmen. Zur Überprüfung kannst du auch $f_1''(x)$ bilden und die Kandidaten dort einsetzen. Vergiss nicht, auch die y-Koordinaten der Extrempunkte zu berechnen.

2. $f_2(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 5$
3. $f_3(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2$

4. **Schwer: Funktion mit Parameter $k$**
   Gegeben ist die Funktion $f_k(x) = x^3 - 3kx + 2$, wobei $k \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Untersuche in Abhängigkeit von $k$:

   - Für welche Werte von $k$ hat die Funktion $f_k(x)$ keine lokalen Extrempunkte?
   - Für welche Werte von $k$ hat die Funktion $f_k(x)$ genau einen lokalen Extrempunkt? (Überlege, was das für die Ableitung bedeutet – kann ein Polynom 3. Grades nur einen Extrempunkt haben, wenn es nicht konstant ist?) Was liegt stattdessen an der kritischen Stelle vor, wenn es kein Extremum ist?
   - Für welche Werte von $k$ hat die Funktion $f_k(x)$ genau zwei lokale Extrempunkte? Bestimme deren Art (Hoch-/Tiefpunkt) und ihre Lage (x-Koordinaten) in Abhängigkeit von $k$.

   ***Tipp 5.13: Fallunterscheidung für Parameter $k$***

   Die erste Ableitung ist $f'_k(x) = 3x^2 - 3k$. Setze $f'_k(x) = 0$ und löse nach $x^2$. Die Anzahl der Lösungen für $x$ (und damit die Anzahl der kritischen Stellen) hängt vom Wert und Vorzeichen von $k$ ab. Unterscheide die Fälle $k < 0$, $k = 0$ und $k > 0$. Nutze dann das Vorzeichenwechselkriterium von $f'_k(x)$ oder die zweite Ableitung $f''_k(x)$, um die Art der Extrema zu bestimmen.

5. **Anwendung: Optimale Form** Ein oben offener quaderförmiger Behälter mit quadratischer Grundfläche soll ein Volumen von $V = 32\ \text{cm}^3$ haben. Bestimme die Abmessungen (Seitenlänge der Grundfläche und Höhe), für die der Materialverbrauch (also die Oberfläche) minimal wird.

   (a) Sei $a$ die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche und $h$ die Höhe des Quaders. Stelle die Formel für das Volumen $V$ und die Oberfläche $O$ (Grundfläche + 4 Seitenflächen) auf.
   (b) Drücke $h$ mithilfe der Volumenformel durch $a$ aus (Nebenbedingung).
   (c) Setze $h$ in die Oberflächenformel ein, um eine Zielfunktion $O(a)$ zu erhalten, die nur noch von $a$ abhängt.
   (d) Bestimme die erste Ableitung $O'(a)$ und finde die kritischen Stellen.
   (e) Überprüfe mit der zweiten Ableitung $O''(a)$, ob ein Minimum vorliegt. (Hier ist die zweite Ableitung oft der schnellste Weg zur Klassifizierung in Optimierungsaufgaben).
   (f) Berechne die optimale Seitenlänge $a$ und die zugehörige Höhe $h$.

***Tipp 5.14: Skizze hilft!***

Eine kleine Skizze des Vorzeichenverlaufs von $f'(x)$ (eine Art 'Zahlenstrahl' mit den Nullstellen von $f'$ und den Vorzeichen dazwischen) kann sehr helfen, um die Vorzeichenwechsel und damit die Art der Extrempunkte schnell zu erkennen. Es kann auch sehr helfen, alle bereits erlangten Kenntnisse über Funktionen auszunutzen, um $f'(x)$ zu skizzieren. Wenn die Nullstellen schon klar sind, dann kannst du schnell eine steigende/fallende lineare Funktion,welche durch den schnell ablesbaren y-Achsenabschnitt geht, skizzieren. Ähnliches gilt auch für Parabeln, du musst nur erkennen, ob die Parabel nach unten oder oben geöffnet ist.

## 5.3 Höhere Ableitungen – Die Ableitung der Ableitung (und so weiter)

Wir haben gesehen, dass die erste Ableitung $f'(x)$ uns Informationen über die Steigung und das Monotonieverhalten der Funktion $f(x)$ gibt. Aber wir können auch die Ableitungsfunktion $f'(x)$ selbst wieder ableiten! Das Ergebnis nennen wir die **zweite Ableitung** von $f(x)$ und schreiben sie als $f''(x)$ (gelesen 'f zwei Strich von x').

### ϟ 5.8 *Zweite und höhere Ableitungen*

- Die **zweite Ableitung** $f''(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist die Ableitung ihrer ersten Ableitung $f'(x)$:
$$f''(x) = (f'(x))'$$
- Man kann diesen Prozess fortsetzen: Die Ableitung der zweiten Ableitung ist die **dritte Ableitung** $f'''(x)$, die Ableitung der dritten ist die **vierte Ableitung** $f^{(4)}(x)$ (ab hier verwendet man oft römische Ziffern oder Zahlen in Klammern, um die Striche zu vermeiden), und so weiter.
$$f'''(x) = (f''(x))'$$
$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' \quad \text{(die n-te Ableitung)}$$

### *Warum ist das wichtig? 5.3: Bedeutung höherer Ableitungen*

- **Erste Ableitung $f'(x)$:** Gibt die Steigung von $f(x)$ an. In der Physik: Wenn $s(t)$ der Weg ist, ist $s'(t)$ die Geschwindigkeit $v(t)$.
- **Zweite Ableitung $f''(x)$:** Gibt die *Änderung der Steigung* von $f(x)$ an. Sie beschreibt das **Krümmungsverhalten** des Graphen von $f(x)$. In der Physik: Wenn $v(t)$ die Geschwindigkeit ist, ist $v'(t) = s''(t)$ die Beschleunigung $a(t)$. Die zweite Ableitung sagt uns also, wie schnell sich die Geschwindigkeit ändert.
- **Dritte Ableitung $f'''(x)$ und höher:** Haben auch ihre Bedeutungen, z.B. in der Physik der 'Ruck' (Änderung der Beschleunigung), sind aber in der Schulmathematik für Kurvendiskussionen seltener direkt relevant als $f'$ und $f''$.

Die zweite Ableitung ist also die 'Ableitung der Steigung' oder die 'Steigung der Steigungsfunktion'.

### Beispiel 5.5 Höhere Ableitungen bilden

Bestimme die ersten drei Ableitungen der Funktion $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x + 10$.
$f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x + 10$
$f'(x) = (x^4)' - (5x^3)' + (2x^2)' - (7x)' + (10)'$ $f'(x) = 4x^3 - 5\cdot 3x^2 + 2\cdot 2x - 7\cdot 1 + 0$ $f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 4x - 7$
$f''(x) = (f'(x))' = (4x^3 - 15x^2 + 4x - 7)'$ $f''(x) = (4x^3)' - (15x^2)' + (4x)' - (7)'$ $f''(x) = 4\cdot 3x^2 - 15\cdot 2x + 4\cdot 1 - 0$ $f''(x) = 12x^2 - 30x + 4$
$f'''(x) = (f''(x))' = (12x^2 - 30x + 4)'$ $f'''(x) = (12x^2)' - (30x)' + (4)'$ $f'''(x) = 12\cdot 2x - 30\cdot 1 + 0$ $f'''(x) = 24x - 30$
Man könnte so weitermachen: $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(5)}(x) = 0$, und alle weiteren Ableitungen wären ebenfalls null.

### Aufgabe 5.7 Höhere Ableitungen berechnen

Bestimme die erste, zweite und dritte Ableitung der folgenden Funktionen:

1. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$
2. $g(x) = -0.1x^5 + x^3 - 7$
3. $h(t) = 2t^2 - \frac{1}{t}$ (Tipp: $\frac{1}{t} = t^{-1}$)

## 5.4 Die zweite Ableitung $f''(x)$ – Krümmung und Wendepunkte

Nachdem wir wissen, was höhere Ableitungen sind, konzentrieren wir uns nun auf die Bedeutung der **zweiten Ableitung** $f''(x)$. Sie gibt uns Auskunft über das **Krümmungsverhalten** des Graphen von $f(x)$ und hilft uns, **Wendepunkte** zu finden.

### 5.4.1 Krümmungsverhalten – Links- oder Rechtskurve?

Die zweite Ableitung beschreibt, wie sich die Steigung der Funktion ändert.

- Wenn $f''(x) > 0$, bedeutet das, dass die Steigung $f'(x)$ zunimmt. Stell dir vor, du fährst auf dem Graphen: Erst ist die Steigung vielleicht negativ (bergab), dann wird sie weniger negativ, dann Null, dann positiv (bergauf). Das entspricht einer **Linkskurve** (man sagt auch, der Graph ist **konvex** oder 'nach oben offen' in diesem Bereich).

- Wenn $f''(x) < 0$, bedeutet das, dass die Steigung $f'(x)$ abnimmt. Du fährst vielleicht erst steil bergauf, dann wird der Anstieg flacher, dann Null, dann geht es bergab. Das entspricht einer **Rechtskurve** (man sagt auch, der Graph ist **konkav** oder 'nach unten offen' in diesem Bereich).

***ϟ 5.9 Krümmung und zweite Ableitung***

Sei $f$ eine in einem Intervall $I$ zweimal differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x \in I$:

- Wenn $f''(x) > 0$ für alle $x$ in $I$, dann ist der Graph von $f(x)$ in diesem Intervall **linksgekrümmt** (konvex). (Der Graph macht eine 'Linkskurve', wie ein lachender Smiley $\smile$ bei positiver zweiten Ableitung).

- Wenn $f''(x) < 0$ für alle $x$ in $I$, dann ist der Graph von $f(x)$ in diesem Intervall **rechtsgekrümmt** (konkav). (Der Graph macht eine 'Rechtskurve', wie ein trauriger Smiley $\frown$ bei negativer zweiten Ableitung).

- Wenn $f''(x) = 0$ an einer Stelle $x_W$, dann **könnte** dort ein **Wendepunkt** vorliegen (ein Punkt, an dem sich das Krümmungsverhalten ändert).

Um die Krümmungsintervalle zu bestimmen, untersuchst du also das **Vorzeichen der zweiten Ableitung** $f''(x)$.

**Beispiel 5.6 Krümmungsverhalten untersuchen**

Untersuche das Krümmungsverhalten von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Wir hatten $f'(x) = 3x^2 - 6x$ und $f''(x) = 6x - 6$.
**Schritt 1: Nullstellen der zweiten Ableitung finden.** $f''(x) = 0 \implies 6x - 6 = 0$

$$\begin{aligned} 6x - 6 &= 0 \qquad && | + 6 \\ 6x &= 6 && | : 6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

An der Stelle $x = 1$ könnte sich das Krümmungsverhalten ändern.
**Schritt 2: Vorzeichen von $f''(x)$ in den Intervallen untersuchen.** Die Stelle $x = 1$ teilt die x-Achse in zwei Intervalle: $(-\infty, 1)$ und $(1, \infty)$.

- Intervall $(-\infty, 1)$: Wähle Testwert $x = 0$. $f''(0) = 6(0) - 6 = -6$. Da $f''(0) < 0$, ist der Graph von $f(x)$ im Intervall $(-\infty, 1)$ rechtsgekrümmt.

- Intervall $(1, \infty)$: Wähle Testwert $x = 2$. $f''(2) = 6(2) - 6 = 12 - 6 = 6$. Da $f''(2) > 0$, ist der Graph von $f(x)$ im Intervall $(1, \infty)$ linksgekrümmt.

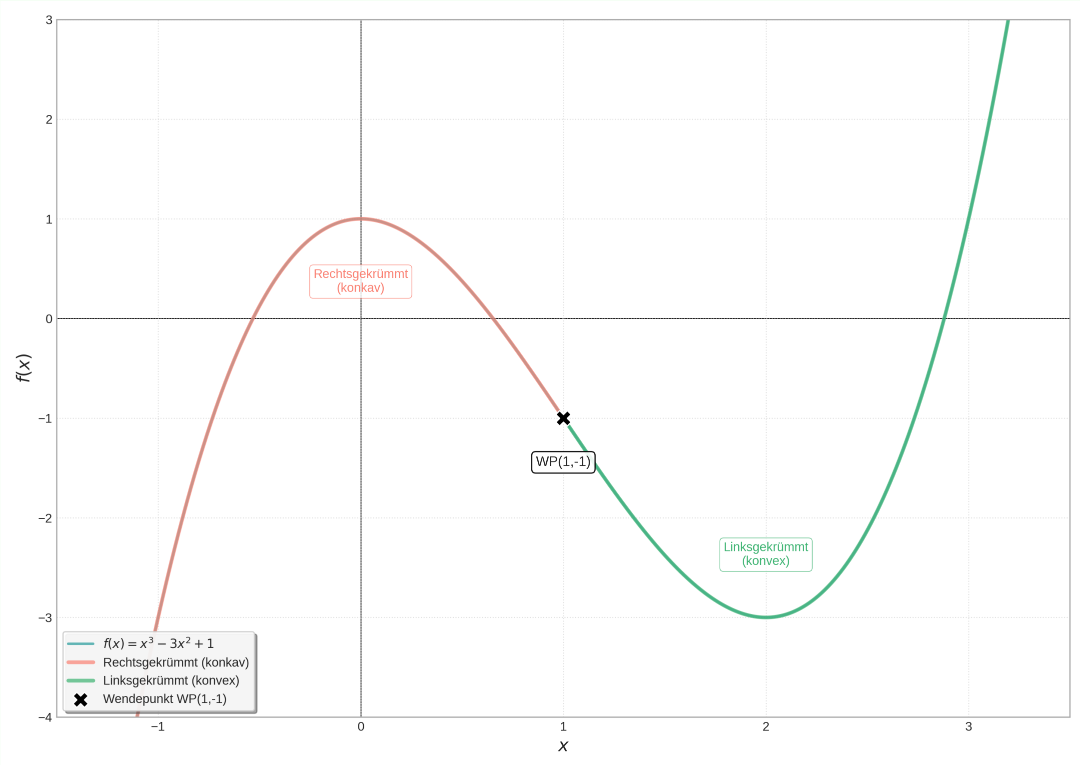


Abbildung 5.5: Krümmungsverhalten von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

### 5.4.2 Wendepunkte – Wo die Kurve ihre Richtung ändert

Ein **Wendepunkt** ist ein Punkt auf dem Graphen einer Funktion, an dem sich das Krümmungsverhalten ändert. Das bedeutet, der Graph wechselt dort von einer Linkskurve in eine Rechtskurve oder umgekehrt. Die Tangente an diesem Punkt nennt man **Wendetangente**.

***5.10 Wendepunkte finden***

Um Wendepunkte einer Funktion $f(x)$ zu finden (die mindestens zweimal differenzierbar sein muss):
**1. Notwendige Bedingung für Wendepunkte:** Wenn $f(x)$ an der Stelle $x_W$ einen Wendepunkt hat, dann muss gelten:

$$f''(x_W) = 0$$

Die Stellen $x_W$, an denen $f''(x_W) = 0$ ist, sind **potentielle Wendestellen**.
**2. Hinreichende Bedingung für Wendepunkte:** Es gibt zwei gängige hinreichende Bedingungen, um zu bestätigen, dass an einer potentiellen Wendestelle $x_W$ tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt:

- **Vorzeichenwechselkriterium von $f''(x)$:** Wenn $f''(x)$ an der Stelle $x_W$ einen Vorzeichenwechsel hat (von $+$ nach $-$ oder von $-$ nach $+$), dann liegt bei $x_W$ ein Wendepunkt vor.

- **Mit der dritten Ableitung $f'''(x)$:** Wenn $f''(x_W) = 0$ und zusätzlich $f'''(x_W) \neq 0$ ist, dann liegt bei $x_W$ ein Wendepunkt vor. (Diese Bedingung ist oft einfacher zu prüfen, wenn die dritte Ableitung leicht zu bilden ist und nicht Null ist.)

Die y-Koordinate des Wendepunktes erhältst du, indem du $x_W$ in die Originalfunktion $f(x)$ einsetzt: $y_W = f(x_W)$. Der Wendepunkt ist dann $W(x_W|y_W)$.

**Wendepunkte – Mehr als nur ein Krümmungswechsel**

Wir haben gelernt, dass an einem Wendepunkt $x_W$ die zweite Ableitung $f''(x_W) = 0$ ist (und $f'''(x_W) \neq 0$ oder ein Vorzeichenwechsel von $f''$ stattfindet). Das bedeutet, die Krümmung des Graphen wechselt dort ihr Vorzeichen (z.B. von einer Rechts- in eine Linkskurve). Aber was bedeutet das für die Steigung der Funktion, also für $f'(x)$?

**Der Wendepunkt als Extremum der Steigung:** Da $f''(x)$ die Ableitung von $f'(x)$ ist, bedeutet $f''(x_W) = 0$ und ein Vorzeichenwechsel von $f''(x)$ bei $x_W$ (oder $f'''(x_W) \neq 0$), dass die **erste Ableitung $f'(x)$ an der Stelle $x_W$ eine Extremstelle** hat!

- Wechselt $f''(x)$ von $-$ nach $+$ (also der Graph von $f(x)$ von rechts- zu linkskrümmt), dann hat $f'(x)$ bei $x_W$ ein *Minimum*. Die Steigung von $f(x)$ ist an dieser Stelle am geringsten (d.h. am stärksten negativ oder am wenigsten positiv).

- Wechselt $f''(x)$ von $+$ nach $-$ (also der Graph von $f(x)$ von links- zu rechtskrümmt), dann hat $f'(x)$ bei $x_W$ ein *Maximum*. Die Steigung von $f(x)$ ist an dieser Stelle am größten.

Ein Wendepunkt ist also eine Stelle, an der die **Steigung des Graphen von $f(x)$ am extremsten** ist (entweder maximal oder minimal im lokalen Sinne).

**Intuition – Der Weg zwischen den 'Gipfeln und Tälern':** Stell dir vor, ein Graph hat einen Hochpunkt (Steigung 0) und danach einen Tiefpunkt (Steigung 0). Dazwischen muss die Steigung von 0 erst negativ geworden sein (bergab) und dann wieder weniger negativ, um beim Tiefpunkt wieder 0 zu werden. Irgendwo auf diesem Weg muss die Steigung ihren negativsten (minimalen) Wert erreicht haben – genau das ist der Wendepunkt! Die Straße macht dort die 'schärfste Kurve' nach unten. Analoges gilt für den Übergang von einem Tief- zu einem Hochpunkt.

**Sattelpunkte als Spezialfall:** Wenn an einem Wendepunkt $x_W$ zusätzlich gilt, dass $f'(x_W) = 0$ ist (die Tangente also waagerecht ist), dann nennen wir diesen Punkt einen **Sattelpunkt**. Hier ist die Steigung nicht nur extrem (nämlich 0), sondern es findet auch ein Krümmungswechsel statt, aber kein Monotoniewechsel der Funktion $f(x)$ selbst.

Die Betrachtung des Wendepunkts als Extremum der ersten Ableitung kann helfen, sein Auftreten und seine Bedeutung besser zu verstehen. Es ist ein schönes Beispiel dafür, wie die verschiedenen Ableitungen zusammenwirken, um das Verhalten einer Funktion zu beschreiben.

**Beispiel 5.7 Wendepunkt bestimmen**

Bestimme den Wendepunkt von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Wir hatten: $f'(x) = 3x^2 - 6x$ $f''(x) = 6x - 6$

**Schritt 1: Notwendige Bedingung $f''(x_W) = 0$.** $6x_W - 6 = 0 \implies 6x_W = 6 \implies x_W = 1$. Die potentielle Wendestelle ist bei $x_W = 1$.

**Schritt 2: Hinreichende Bedingung prüfen.** *Möglichkeit a) Vorzeichenwechsel von $f''(x)$:* Wir hatten bereits im vorherigen Beispiel gesehen: Links von $x = 1$ (z.B. $x = 0$): $f''(0) = -6 < 0$ (rechtsgekrümmt). Rechts von $x = 1$ (z.B. $x = 2$): $f''(2) = 6 > 0$ (linksgekrümmt). Da ein Vorzeichenwechsel von $f''(x)$ von $-$ nach $+$ an der Stelle $x = 1$ stattfindet, liegt dort ein Wendepunkt vor.

*Möglichkeit b) Mit der dritten Ableitung $f'''(x)$:* $f'''(x) = (f''(x))' = (6x - 6)' = 6$. Nun setzen wir $x_W = 1$ in $f'''(x)$ ein: $f'''(1) = 6$. Da $f'''(1) = 6 \neq 0$ (und $f''(1) = 0$ war), liegt bei $x_W = 1$ ein Wendepunkt vor.

**Schritt 3: y-Koordinate des Wendepunkts berechnen.** $y_W = f(x_W) = f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$. Der Wendepunkt ist $W(1|-1)$.

Am Wendepunkt $W(1|-1)$ wechselt der Graph von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung.

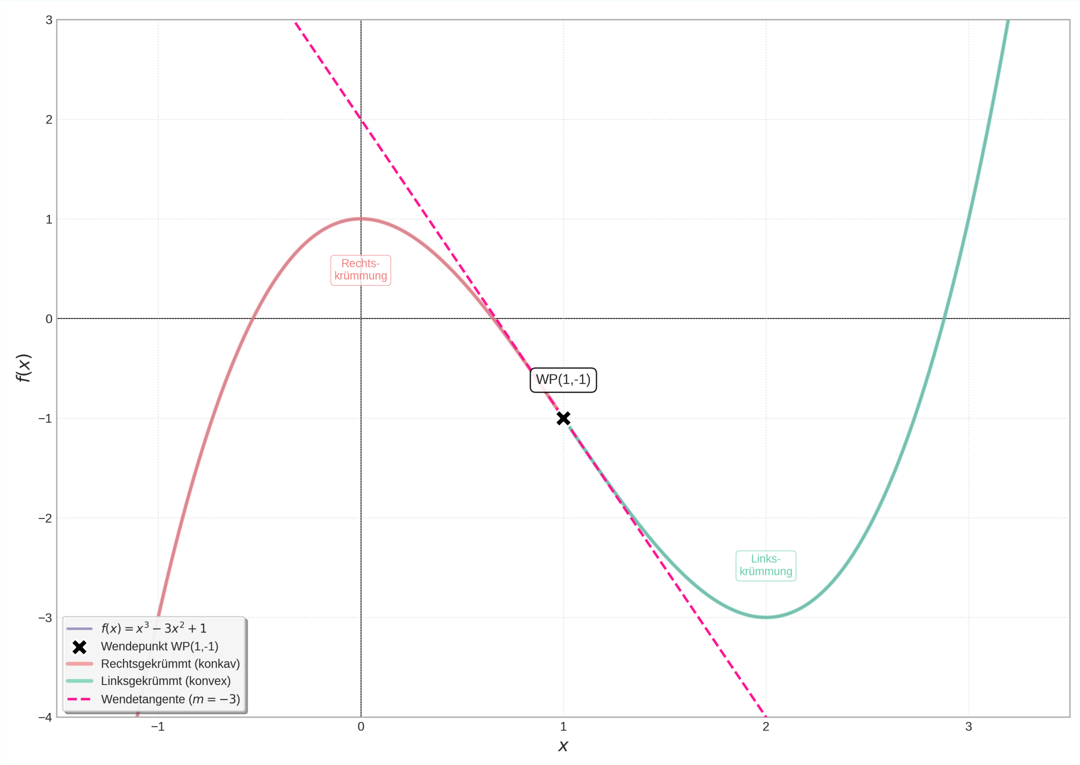


Abbildung 5.6: Wendepunkt von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

**Tipp 5.15: Zweite Ableitung für Extremstellen**

Die zweite Ableitung kann auch als hinreichende Bedingung für Extremstellen dienen (anstelle des Vorzeichenwechsels von $f'$): Sei $x_E$ eine Stelle mit $f'(x_E) = 0$.

- Wenn $f''(x_E) < 0 \implies$ Lokaler Hochpunkt bei $x_E$. (Der Graph ist dort rechtsgekrümmt, wie ein Bergipfel).
- Wenn $f''(x_E) > 0 \implies$ Lokaler Tiefpunkt bei $x_E$. (Der Graph ist dort linksgekrümmt, wie ein Talboden).
- Wenn $f''(x_E) = 0 \implies$ Keine Aussage möglich mit diesem Kriterium! Dann muss man das Vorzeichenwechselkriterium von $f'$ verwenden. Es könnte ein Sattelpunkt oder doch ein Extremum sein.

**Aufgabe 5.8 Krümmung und Wendepunkte – Vielfältige Untersuchungen**

Untersuche die folgenden Funktionen auf ihr Krümmungsverhalten (Intervalle für Links- und Rechtskrümmung) und bestimme gegebenenfalls die Koordinaten der Wendepunkte. Nutze dazu die zweite und, falls nötig, die dritte Ableitung.

1. $f_1(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 + 1$

   **Tipp 5.16: Polynom 4. Grades**

   Die zweite Ableitung $f_1''(x)$ wird eine quadratische Funktion sein. Deren Nullstellen (potentielle Wendestellen) findest du mit den bekannten Lösungsformeln. Überprüfe die hinreichende Bedingung für Wendepunkte.

2. $f_2(x) = x^5 - 5x^4 + 3x - 2$

***Tipp 5.17: Polynom 5. Grades***

Die zweite Ableitung $f_2''(x)$ wird ein Polynom 3. Grades sein. Versuche, $x$ (oder eine höhere Potenz von $x$) auszuklammern, um die Nullstellen von $f_2''(x)$ zu finden.

3. **Anwendung: Infektionsgeschehen**
Die Funktion $N(t) = -t^3 + 12t^2 + 20t$ beschreibt die Anzahl der neu infizierten Personen pro Tag während einer Grippewelle ($t$ in Tagen, $t \geq 0$).
   - Bestimme die Funktion $N'(t)$, welche die Änderungsrate der Neuinfektionen (also die 'Geschwindigkeit' der Ausbreitung) beschreibt.
   - Bestimme die Funktion $N''(t)$, welche die Änderungsrate der Wachstumsrate der Neuinfektionen beschreibt.
   - Zu welchem Zeitpunkt $t_W$ ist die Zunahme der täglichen Neuinfektionen am größten? (Das bedeutet, $N'(t)$ hat ein Maximum, also suche einen Wendepunkt von $N(t)$, an dem die Krümmung von links nach rechts wechselt, d.h. $N''(t_W) = 0$ und $N'''(t_W) < 0$).
   - Interpretiere die Bedeutung dieses Zeitpunktes $t_W$ für den Verlauf der Grippewelle. Was passiert mit der Zunahme der Neuinfektionen nach diesem Zeitpunkt?

4. **Schwer: Funktion mit Parameter $a$**
Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = x^4 + ax^3$ mit $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
   - Bestimme die zweite Ableitung $f_a''(x)$.
   - Zeige, dass $x_1 = 0$ eine potentielle Wendestelle ist. Untersuche mit der dritten Ableitung $f_a'''(x)$, ob für $x_1 = 0$ tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt.
   - Bestimme die andere potentielle Wendestelle $x_2$ in Abhängigkeit von $a$.
   - Für welche Werte von $a$ existiert dieser zweite Wendepunkt $x_2$? (Beachte, dass $x_2 \neq x_1$ sein sollte für einen *anderen* Wendepunkt).
   - Untersuche das Krümmungsverhalten für $a = 2$ und $a = -2$ und skizziere grob die Verläufe (ohne vollständige Kurvendiskussion, Fokus auf Krümmung und Wendepunkte).

***Tipp 5.18: Parameter $a$***

Behandle $a$ wie eine Konstante beim Ableiten. Die Ergebnisse für Wendestellen und Krümmungsintervalle werden dann von $a$ abhängen.

### 5.4.3 Tangenten und Normalen – Geraden am Graphen

Wir wissen bereits, dass die erste Ableitung $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x)$ im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ angibt. Mit diesem Wissen können wir die Gleichung dieser Tangente und auch die Gleichung der Normalen (die Senkrechte zur Tangente im selben Punkt) bestimmen.

***ϟ 5.11 Gleichung der Tangente***

Die Gleichung der Tangente $t(x)$ an den Graphen einer Funktion $f(x)$ im Punkt $P(x_0|y_0)$ mit $y_0 = f(x_0)$ lautet:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$$

oder

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Dabei ist $m_T = f'(x_0)$ die Steigung der Tangente. Diese Formel ist die Punkt-Steigungs-Form einer Geraden.

### ϟ 5.12 Gleichung der Normale

Die Normale $n(x)$ ist die Gerade, die senkrecht zur Tangente $t(x)$ im Punkt $P(x_0|y_0)$ steht. Für die Steigungen $m_T$ der Tangente und $m_N$ der Normalen gilt (wenn $m_T \neq 0$): $m_N = -\frac{1}{m_T}$. Die Gleichung der Normalen $n(x)$ im Punkt $P(x_0|y_0)$ mit $y_0 = f(x_0)$ lautet also, falls $f'(x_0) \neq 0$:

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + y_0$$

Falls $f'(x_0) = 0$ (horizontale Tangente, z.B. an Extrempunkten), ist die Tangente $y = y_0$ und die Normale eine senkrechte Gerade $x = x_0$.

### *Tipp 5.19: Tangenten und Normalen an besonderen Punkten*

- **An Extrempunkten ($f'(x_E) = 0$):** Die Tangente ist waagerecht: $t(x) = f(x_E)$. Die Normale ist senkrecht: $x = x_E$ (keine Funktion der Form $y = mx + b$). Die Berechnung einer Normalen*gleichung* in der Form $y = mx + b$ ist hier also nicht sinnvoll, aber die Normale existiert als senkrechte Linie.
- **An Wendepunkten ($W(x_W|f(x_W))$):** Die Tangente im Wendepunkt wird **Wendetangente** genannt. Ihre Steigung $f'(x_W)$ ist oft die größte oder kleinste Steigung in der Umgebung des Wendepunkts. Die Normale im Wendepunkt wird **Wendenormale** genannt.
- **An beliebigen Punkten:** Man kann die Tangente und Normale an *jedem* Punkt des Graphen berechnen, an dem die Funktion differenzierbar ist, nicht nur an ausgezeichneten Punkten wie Extrema oder Wendepunkten.

### Beispiel 5.8 Wendetangente und Wendenormale berechnen

Wir betrachten wieder die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Aus einem früheren Beispiel wissen wir: $f'(x) = 3x^2 - 6x$ $f''(x) = 6x - 6$ $f'''(x) = 6$ Der Wendepunkt liegt bei $x_W = 1$, mit $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$. Also $W(1|-1)$.

**1. Wendetangente $t_W(x)$ im Punkt $W(1|-1)$:** Steigung im Wendepunkt: $m_T = f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = 3 - 6 = -3$. Punkt-Steigungs-Form: $t_W(x) = m_T(x - x_W) + f(x_W)$ $t_W(x) = -3(x-1) + (-1)$ $t_W(x) = -3x + 3 - 1$

$$t_W(x) = -3x + 2$$

**2. Wendenormale $n_W(x)$ im Punkt $W(1|-1)$:** Steigung der Tangente war $m_T = -3$. Steigung der Normalen: $m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$. Punkt-Steigungs-Form: $n_W(x) = m_N(x - x_W) + f(x_W)$ $n_W(x) = \frac{1}{3}(x-1) + (-1)$ $n_W(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} - 1$ $n_W(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} - \frac{3}{3}$

$$n_W(x) = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

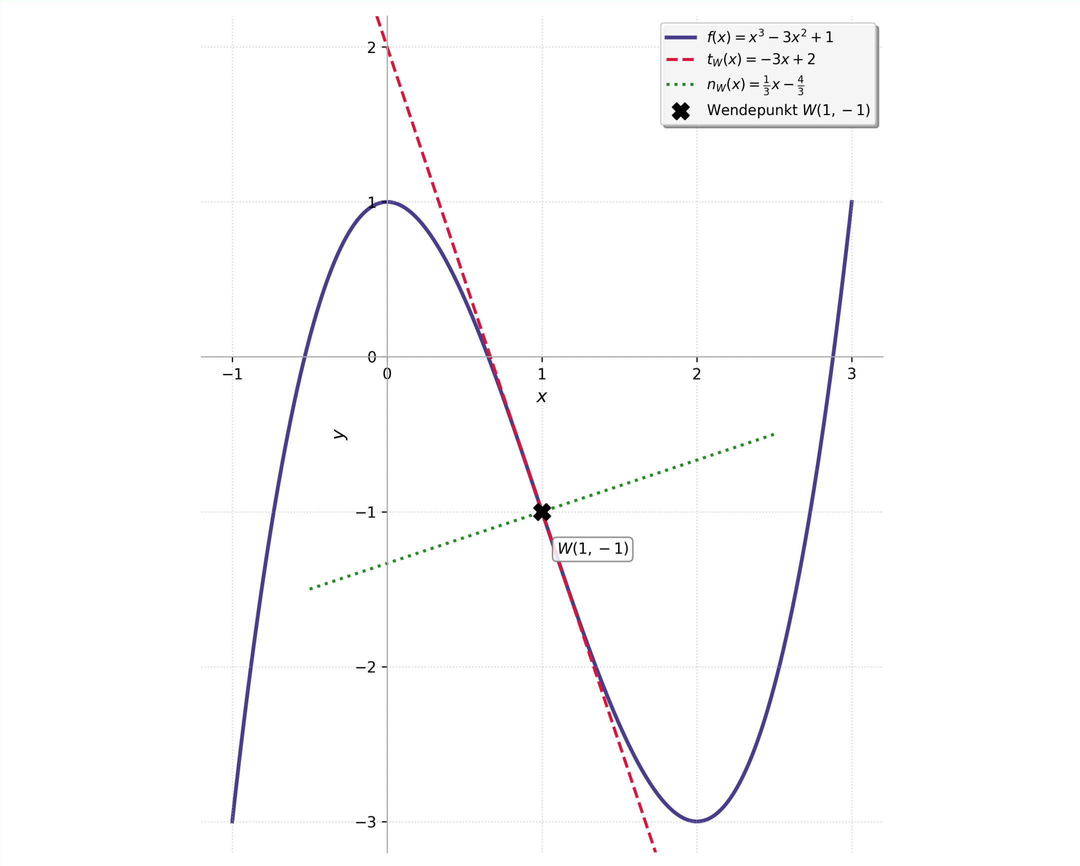


Abbildung 5.7: Wendetangente und Wendenormale für $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ im Punkt $W(1|-1)$

**Aufgabe 5.9 Tangenten und Normalen bestimmen – Vielfältige Aufgaben**

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1$.

   - Bestimme die Gleichung der Tangente und der Normalen an den Graphen von $f$ an der Stelle $x_0 = 2$.
   - An welchen Stellen $x$ hat der Graph von $f$ eine Tangente mit der Steigung $m = 0$? Was für Punkte sind das?
   - (Schwer): Gibt es eine Tangente an den Graphen von $f$, die parallel zur Geraden $y = -2x + 5$ ist? Wenn ja, bestimme die Berührpunkte und die Gleichungen dieser Tangenten.

2. Gegeben ist die Funktion $g(x) = x^3 - 3x$.

   - Bestimme die Wendepunkt(e) von $g(x)$.
   - Bestimme die Gleichung der Wendetangente(n).
   - Zeige, dass die Wendetangente im Ursprung (falls vorhanden) die x-Achse nur im Ursprung schneidet.

3. **Orthogonale Tangenten (Für Experten):** Gegeben ist die Parabel $f(x) = x^2$. Gibt es zwei Punkte $P_1(x_1|f(x_1))$ und $P_2(x_2|f(x_2))$ auf der Parabel, deren Tangenten sich senkrecht schneiden und deren x-Koordinaten die Bedingung $x_1 \cdot x_2 = -1/4$ erfüllen?

   ***Tipp 5.20: Orthogonalität***

   Zwei Geraden mit Steigungen $m_1$ und $m_2$ sind orthogonal (senkrecht), wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$ (vorausgesetzt $m_1, m_2 \neq 0$).

4. **Normale durch den Ursprung:** Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$, bestimme den Punkt $P(x_0|f(x_0))$ auf dem Graphen, dessen Normale durch den Ursprung $(0|0)$ verläuft.

5. **Wendetangente mit speziellen Eigenschaften (Schwer):** Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x + 1$.

   - Bestimme die Koordinaten des Wendepunktes $W$.
   - Bestimme die Gleichung der Wendetangente $t_W(x)$ und der Wendenormalen $n_W(x)$.
   - Die Wendetangente, die Wendenormale und die y-Achse bilden ein Dreieck. Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
   - Unter welchem Winkel schneidet die Wendetangente die x-Achse? (Tipp: Der Tangens des Steigungswinkels $\alpha$ einer Geraden ist gleich ihrer Steigung $m$, also $\tan(\alpha) = m$. Du suchst $\alpha = \arctan(m)$.)

6. **Berührbedingung und Parameter (Schwer):** Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2 + 2x + 2$ und die Geradenschar $g_k(x) = kx - 2$ (wobei $k \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist).

   - Für welchen Wert von $k$ berührt die Gerade $g_k(x)$ die Parabel $f(x)$?

     ***Tipp 5.21: Berührbedingung***

     Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ berühren sich an einer Stelle $x_B$, wenn gilt:

     (a) $f(x_B) = g(x_B)$ (gleicher Funktionswert am Berührpunkt)

     (b) $f'(x_B) = g'(x_B)$ (gleiche Steigung am Berührpunkt)

     Du erhältst ein Gleichungssystem für $x_B$ und $k$.

   - Bestimme den Berührpunkt und die Gleichung der gemeinsamen Tangente für diesen Wert von $k$.
   - (Für Experten): Gibt es einen Wert für $k$, sodass die Gerade $g_k(x)$ eine Normale zur Parabel $f(x)$ an einem Punkt $P(x_0|f(x_0))$ ist? Wenn ja, bestimme $k$ und den Punkt $P$.

### 5.4.4 Sattelpunkte – Besondere Wendepunkte mit horizontaler Tangente

In der Kurvendiskussion haben wir bereits Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte) und Wendepunkte kennengelernt. Sattelpunkte, auch Terrassenpunkte genannt, sind eine spezielle Art von Wendepunkten, die eine interessante Eigenschaft mit Extrempunkten teilen: Die Tangente an den Graphen ist an einem Sattelpunkt **waagerecht**, genau wie bei einem Hoch- oder Tiefpunkt. Der Unterschied ist jedoch, dass die Funktion an einem Sattelpunkt ihr Monotonieverhalten *nicht* ändert.

Stell dir vor, du fährst auf einer kurvigen Bergstraße. Ein Hochpunkt ist ein Gipfel, ein Tiefpunkt ein Tal. Ein Wendepunkt ist eine Stelle, an der eine Rechtskurve in eine Linkskurve übergeht (oder umgekehrt). Ein Sattelpunkt ist nun ein Wendepunkt, an dem die Straße für einen kurzen Moment exakt horizontal verläuft, bevor sie ihre Krümmung ändert und in derselben Richtung (steigend oder fallend) weiterführt.

***ϟ 5.13 Definition und Bedingungen für einen Sattelpunkt***

Ein Punkt $S(x_S|f(x_S))$ auf dem Graphen einer Funktion $f(x)$ ist ein **Sattelpunkt** (oder Terrassenpunkt), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. **Horizontale Tangente:** Die erste Ableitung ist an der Stelle $x_S$ Null.

$$f'(x_S) = 0$$

(Dies ist die notwendige Bedingung auch für Extremstellen.)

2. **Kein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung:** Die erste Ableitung $f'(x)$ wechselt an der Stelle $x_S$ **nicht** das Vorzeichen. Das bedeutet, die Funktion ist links und rechts von $x_S$ entweder beidesmal steigend oder beidesmal fallend. *Alternativ (und oft einfacher zu prüfen mit höheren Ableitungen):*

3. **Zweite Ableitung ist Null:** Die zweite Ableitung ist an der Stelle $x_S$ Null.

$$f''(x_S) = 0$$

(Dies ist die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt.)

4. **Dritte Ableitung ist ungleich Null:** Die dritte Ableitung an der Stelle $x_S$ ist nicht Null.

$$f'''(x_S) \neq 0$$

(Dies ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass bei $f''(x_S) = 0$ tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt und kein Extremum höherer Ordnung, bei dem $f''$ zufällig Null ist.)

Zusammenfassend: Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit einer horizontalen Tangente.

***Warum ist das wichtig? 5.4: Sattelpunkte erkennen***

Sattelpunkte sind wichtig, weil sie Stellen markieren, an denen die Steigung kurzzeitig Null wird, ohne dass ein lokales Maximum oder Minimum vorliegt. In Optimierungsprozessen könnten solche Punkte 'falsche Freunde' sein – man denkt, man hat ein Optimum erreicht, aber tatsächlich geht es danach in gleicher Richtung weiter. In der Physik können sie Übergangszustände oder instabile Gleichgewichtslagen repräsentieren.

**Beispiel 5.9 Untersuchung auf Sattelpunkte bei $f(x) = x^3$**

Die einfachste Funktion mit einem Sattelpunkt im Ursprung ist $f(x) = x^3$.

1. **Ableitungen bilden:** $f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$ $f''(x) = 6x$ $f'''(x) = 6$

2. **Potentielle Stellen für horizontale Tangenten (kritische Stellen):** $f'(x) = 0 \implies 3x^2 = 0 \implies x = 0$. Einzige kritische Stelle ist $x_S = 0$.

3. **Überprüfung mit Vorzeichenwechsel von $f'(x)$:**

   - Links von $x = 0$ (z.B. $x = -1$): $f'(-1) = 3(-1)^2 = 3 > 0$ (steigend).
   - Rechts von $x = 0$ (z.B. $x = 1$): $f'(1) = 3(1)^2 = 3 > 0$ (steigend).

   Da $f'(x)$ bei $x = 0$ keinen Vorzeichenwechsel hat (von + nach +), liegt hier kein Extrempunkt vor.

4. **Überprüfung der Wendepunktbedingungen:** $f''(x_S) = f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$. (Notwendige Bedingung für Wendepunkt erfüllt). $f'''(x_S) = f'''(0) = 6 \neq 0$. (Hinreichende Bedingung für Wendepunkt erfüllt). Da $f'(0) = 0$ und bei $x = 0$ ein Wendepunkt vorliegt, ist $P(0|f(0))$ ein Sattelpunkt.

5. **Koordinaten des Sattelpunkts:** $f(0) = 0^3 = 0$. Der Sattelpunkt ist $S(0|0)$.

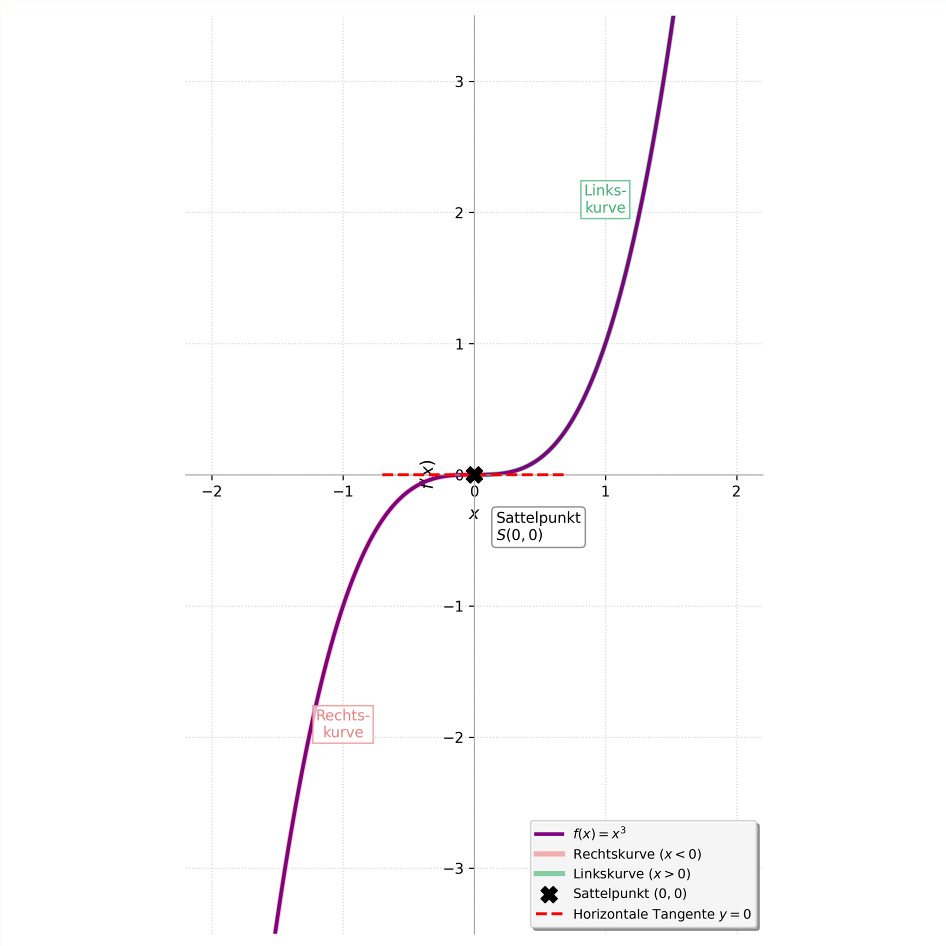


Abbildung 5.8: Sattelpunkt der Funktion $f(x) = x^3$ im Ursprung

**Beispiel 5.10 Untersuchung auf Sattelpunkte bei $f(x) = (x-1)^3 + 2$**

1. **Ableitungen bilden (Kettenregel!):** $f(x) = (x-1)^3 + 2$ $f'(x) = 3(x-1)^2 \cdot 1 + 0 = 3(x-1)^2$ $f''(x) = 3 \cdot 2(x-1)^1 \cdot 1 = 6(x-1)$ $f'''(x) = 6$

2. **Potentielle Stellen für horizontale Tangenten:** $f'(x) = 0 \implies 3(x-1)^2 = 0 \implies (x-1)^2 = 0 \implies x - 1 = 0 \implies x = 1$. Kritische Stelle ist $x_S = 1$.

3. **Überprüfung mit Vorzeichenwechsel von $f'(x)$:** $f'(x) = 3(x-1)^2$. Da $(x-1)^2$ immer $\geq 0$ ist (und nur für $x = 1$ gleich Null ist), ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x$. Es gibt keinen Vorzeichenwechsel bei $x = 1$. Also kein Extrempunkt.

4. **Überprüfung der Wendepunktbedingungen:** $f''(x_S) = f''(1) = 6(1-1) = 6 \cdot 0 = 0$. (Notwendige Bedingung erfüllt). $f'''(x_S) = f'''(1) = 6 \neq 0$. (Hinreichende Bedingung erfüllt). Da $f'(1) = 0$ und bei $x = 1$ ein Wendepunkt vorliegt, ist $P(1|f(1))$ ein Sattelpunkt.

5. **Koordinaten des Sattelpunkts:** $f(1) = (1-1)^3 + 2 = 0^3 + 2 = 2$. Der Sattelpunkt ist $S(1|2)$.

***Tipp 5.22: Systematisches Vorgehen bei der Suche nach Sattelpunkten***

1. Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$ (und ggf. $f'''(x)$).

2. Setze $f'(x) = 0$ und löse nach $x$. Das sind die Kandidaten $x_E$ für Extrem- oder Sattelpunkte.

3. Setze diese Kandidaten $x_E$ in $f''(x)$ ein:

- Wenn $f''(x_E) \neq 0$, dann liegt ein Extrempunkt vor (Hochpunkt bei $f''(x_E) < 0$, Tiefpunkt bei $f''(x_E) > 0$).
- Wenn $f''(x_E) = 0$, dann könnte ein Sattelpunkt vorliegen. Fahre fort mit Schritt 4.

4. Wenn $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) = 0$:
   - Prüfe $f'''(x_E)$. Wenn $f'''(x_E) \neq 0$, dann ist es ein Sattelpunkt.
   - Alternativ (oder wenn $f'''(x_E)$ auch 0 ist): Prüfe das Vorzeichenwechselkriterium für $f'(x)$ an der Stelle $x_E$. Gibt es keinen Vorzeichenwechsel, ist es ein Sattelpunkt (vorausgesetzt, es ist auch ein Wendepunkt, d.h. $f''(x)$ wechselt an $x_E$ das Vorzeichen).

**Aufgabe 5.10 Extrempunkte und Sattelpunkte finden und identifizieren**

Untersuche die folgenden Funktionen auf Extrempunkte und Sattelpunkte. Gib jeweils die Koordinaten und die Art des Punktes an. Nutze die notwendigen und hinreichenden Bedingungen.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

   ***Tipp 5.23: Analyse dieser kubischen Funktion***

   Bestimme $f'(x)$ und $f''(x)$. Gibt es Stellen $x_S$, für die $f'(x_S) = 0$ und $f''(x_S) = 0$ gilt? Überprüfe dann $f'''(x_S)$ oder das Vorzeichenwechselverhalten von $f'(x)$ an diesen Stellen. Hat die Funktion auch 'normale' Extrempunkte?

2. $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

   ***Tipp 5.24: Polynom 4. Grades***

   Diese Funktion ähnelt einer der ursprünglichen Aufgaben. Untersuche hier sorgfältig alle kritischen Stellen ($g'(x) = 0$). Prüfe, ob bei $g''(x_E) = 0$ eventuell ein Sattelpunkt vorliegt oder ob es sich trotz $g''(x_E) = 0$ um ein Extremum handeln könnte (dann das VZW-Kriterium für $g'(x)$ nutzen!). Hat diese Funktion Sattelpunkte?

3. $h(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3$

   ***Tipp 5.25: Ein Polynom 5. Grades***

   Bestimme $h'(x)$, $h''(x)$ und $h'''(x)$.

   - Wo ist $h'(x) = 0$?
   - Welche dieser Stellen sind auch Nullstellen von $h''(x)$?
   - Was sagt $h'''(x)$ an diesen speziellen Stellen aus? Gibt es sowohl Extrempunkte als auch Sattelpunkte?

4. **Für Experten:** Konstruiere eine Polynomfunktion $k(x)$ vom Grad 5, die bei $x = 0$ einen Sattelpunkt hat und bei $x = 2$ einen Tiefpunkt. (Beginne mit den Bedingungen für die Ableitungen.)

**Achtung Stolperstein! 5.1: Sattelpunkte nicht übersehen**

- Wenn $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) = 0$ ist, ist die Untersuchung noch nicht abgeschlossen! Es könnte ein Sattelpunkt sein. Man darf nicht vorschnell auf 'kein Extremum' schließen, ohne die Wendepunkteigenschaft (z.B. mit $f'''(x_E) \neq 0$ oder VZW von $f''$) zu prüfen.

- Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt, aber nicht jeder Wendepunkt ist ein Sattelpunkt (nur die mit horizontaler Tangente).

***Kurz & Knapp 5.1: Sattelpunkte***

- **Definition:** Ein Punkt auf dem Graphen, an dem die Tangente waagerecht ist ($f'(x_S) = 0$), aber kein Extremum vorliegt (kein Vorzeichenwechsel von $f'(x)$).
- **Eigenschaft:** Sattelpunkte sind immer auch Wendepunkte (Krümmungswechsel).
- **Bedingungen (üblich):** $f'(x_S) = 0$ UND $f''(x_S) = 0$ UND $f'''(x_S) \neq 0$.

### 5.4.5 Nullstellen von Polynomen höheren Grades – Die Polynomdivision

Für quadratische Funktionen (Grad 2) haben wir die p-q-Formel oder die Mitternachtsformel, um Nullstellen zu finden. Aber was machen wir bei Polynomen höheren Grades, z.B. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$? Hierfür gibt es keine allgemeine, einfache Lösungsformel wie bei quadratischen Gleichungen.

Ein wichtiges Werkzeug, um die Nullstellen solcher Polynome zu finden, ist die **Polynomdivision**. Die Idee ist, wenn wir eine Nullstelle $x_1$ des Polynoms $f(x)$ kennen (z.B. durch Raten oder aus dem Kontext der Aufgabe), dann wissen wir, dass $(x - x_1)$ ein Faktor von $f(x)$ sein muss. Stell dir vor, du multiplizierst Linearfaktoren: $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ würde ein Polynom 3. Grades ergeben, dessen Nullstellen $x_1, x_2, x_3$ sind. Die Polynomdivision ist der umgekehrte Prozess: Wir teilen das gegebene Polynom durch einen bekannten Faktor $(x - x_1)$, um ein Restpolynom zu erhalten, dessen Grad um 1 niedriger ist.

***ϟ 5.14 Polynomdivision***

Wenn $x_1$ eine Nullstelle eines Polynoms $f(x)$ vom Grad $n$ ist, dann ist der Term $(x - x_1)$ ein Linearfaktor von $f(x)$. Man kann $f(x)$ durch $(x - x_1)$ ohne Rest teilen:

$$f(x) : (x - x_1) = g(x)$$

wobei $g(x)$ ein Restpolynom vom Grad $n - 1$ ist. Die weiteren Nullstellen von $f(x)$ sind dann die Nullstellen von $g(x)$. Wenn $f(x)$ vom Grad 3 ist, ist $g(x)$ vom Grad 2, und dessen Nullstellen können wir mit der p-q-Formel oder Mitternachtsformel finden.

Das Verfahren der Polynomdivision ähnelt der schriftlichen Division von Zahlen.

**Beispiel 5.11 Polynomdivision durchführen**

Gegeben ist das Polynom $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Wir haben durch Probieren (z.B. Teiler des konstanten Gliedes 6: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$) herausgefunden, dass $x_1 = 1$ eine Nullstelle ist, denn $f(1) = 1^3 - 2(1)^2 - 5(1) + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$. Wir teilen nun $f(x)$ durch den Linearfaktor $(x - 1)$:

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1)$$

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6\big) : \big(x - 1\big) = x^2 - x - 6 \\
\underline{-x^3 \ + x^2} \\
\qquad\quad -x^2 - 5x \\
\qquad\quad \underline{\ \ x^2 \ \ - x} \\
\qquad\qquad\quad -6x + 6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{\ \ 6x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Das Ergebnis der Polynomdivision ist $x^2 - x - 6$. Nun suchen wir die Nullstellen dieses quadratischen Restpolynoms $g(x) = x^2 - x - 6$: $x^2 - x - 6 = 0$. Mit der p-q-Formel ($p = -1, q = -6$): $x_{2,3} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{(\frac{-1}{2})^2 - (-6)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$. $x_2 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$. $x_3 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$. Die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ sind also $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ und $x_3 = -2$.

***Tipp 5.26: Nullstelle raten und Koeffizientenvergleich***

Das Raten einer ersten Nullstelle (oft ganzzahlige Teiler des konstanten Gliedes) ist ein üblicher erster Schritt. Wenn die Polynomdivision zu aufwendig erscheint oder nicht explizit gefordert ist, kann man nach dem Finden einer Nullstelle $x_1$ auch den **Koeffizientenvergleich** nutzen, wie im Tipp der Aufgabe $s(x)$ in der nächsten Aufgabensammlung gezeigt.

**Aufgabe 5.11 Nullstellen finden – Übung und Vertiefung**

Berechne die Nullstellen der folgenden Funktionen. Entscheide selbst, welche Methode (Ausklammern, p-q-Formel, Mitternachtsformel, Substitution, Polynomdivision nach Raten einer Nullstelle) am besten geeignet ist. Überprüfe bei quadratischen Gleichungen immer zuerst die Diskriminante, um die Anzahl der erwarteten reellen Nullstellen zu bestimmen.

1. $f(x) = x^2 - x - 6$

   ***Tipp 5.27: Lösungsweg***

   Dies ist eine Standard-quadratische Gleichung. p-q-Formel oder Mitternachtsformel sind hier gut geeignet.

2. $g(x) = -2x^2 + 12x - 18$

   ***Tipp 5.28: Besondere Diskriminante***

   Was sagt $D = 0$ über den Graphen und die Art der Nullstelle aus?

3. $h(x) = x^2 + 2x + 5$

   ***Tipp 5.29: Keine reellen Nullstellen?***

   Was bedeutet es für den Graphen, wenn die Diskriminante $D < 0$ ist?

4. $k(x) = 3x^2 - 12$

   ***Tipp 5.30: Vereinfachung***

   Hier geht es auch ohne Mitternachtsformel! Denke an das direkte Auflösen nach $x^2$. (Siehe Infobox zu Sonderfällen).

5. $m(x) = -0.5x^2 + 2x$

   ***Tipp 5.31: Ausklammern***

   Auch hier ist Ausklammern der schnellste Weg! (Siehe Infobox zu Sonderfällen).

6. **Polynom 3. Grades durch Ausklammern:** $p(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

**Tipp 5.32: Strategie**

Klammere zuerst den gemeinsamen Faktor $x$ aus. Übrig bleibt ein quadratischer Term, dessen Nullstellen du mit den bekannten Formeln finden kannst.

7. **Biquadratische Funktion:** $q(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

**Tipp 5.33: Substitution**

Ersetze (substituiere) $x^2$ durch eine neue Variable, z.B. $z = x^2$. Dadurch erhältst du eine quadratische Gleichung in $z$. Löse diese nach $z$ und substituiere dann zurück ($x^2 = z_1$, $x^2 = z_2$), um die Nullstellen für $x$ zu finden. Achtung: Nicht jede Lösung für $z$ führt zu reellen Lösungen für $x$!

8. **Produkt aus Linearfaktoren (versteckt):** $r(x) = (x^2 - 4)(x^2 + x - 2)$

**Tipp 5.34: Satz vom Nullprodukt und Faktorisieren**

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Setze also jeden Klammerausdruck gleich Null. Der erste Faktor lässt sich mit der 3. binomischen Formel zerlegen. Für den zweiten Faktor kannst du die p-q-Formel verwenden.

9. **Funktion mit bekannter Nullstelle (Polynomdivision anwenden):** Gegeben ist die Funktion $s(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Es ist bekannt, dass $x_1 = 1$ eine Nullstelle ist. Finde die anderen Nullstellen mithilfe der Polynomdivision. *(Vergleiche auch den Tipp mit dem Koeffizientenvergleich aus der vorherigen Version dieser Aufgabe.)*

10. **Nullstellen und Parameter:** Für welche Werte des Parameters $k$ hat die Funktion $f_k(x) = x^2 - 2kx + (k + 2)$ genau eine, zwei oder keine reelle(n) Nullstelle(n)?

**Tipp 5.35: Diskriminante**

Untersuche die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ der quadratischen Gleichung $f_k(x) = 0$ in Abhängigkeit von $k$. Setze $D = 0$ für eine Nullstelle, $D > 0$ für zwei und $D < 0$ für keine.

11. **Anwendung des Satzes von Vieta (Kopfrechnen für Profis):** Versuche, die Nullstellen der folgenden quadratischen Funktionen (in Normalform $x^2 + px + q = 0$) durch 'scharfes Hinsehen' mit dem Satz von Vieta zu finden. Suche also zwei Zahlen $x_1, x_2$, für die gilt: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$.

    (a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

    (b) $g(x) = x^2 + 2x - 8$

    (c) $h(x) = x^2 - 7x + 10$

**Tipp 5.36: Satz von Vieta nutzen**

Für $f(x) = x^2 - 5x + 6$: Hier ist $p = -5$ und $q = 6$. Du suchst also zwei Zahlen, deren Summe $-p = -(-5) = 5$ ist und deren Produkt $q = 6$ ist. Welche Zahlen könnten das sein? (Denke an die Teiler von 6).

## 5.5 Kurvendiskussion von Polynomfunktionen – Das Gesamtpaket

Mit unserem Wissen über Ableitungen und Grenzwerte können wir nun eine vollständige Kurvendiskussion für Polynomfunktionen durchführen. Das Ziel ist es, ein umfassendes Bild vom Verlauf des Graphen zu erhalten, ohne jeden einzelnen Punkt berechnen zu müssen.

**ϟ *5.15 Checkliste für die Kurvendiskussion eines Polynoms***

Für eine Polynomfunktion $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ untersuchen wir typischerweise:

1. **Definitionsbereich ($D_f$):** Für Polynome immer $D_f = \mathbb{R}$.
2. **Symmetrie:**
   - **Achsensymmetrie zur y-Achse?**: Gilt $f(-x) = f(x)$? (Tritt auf, wenn $f(x)$ nur gerade Exponenten von $x$ enthält, z.B. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$).
   - **Punktsymmetrie zum Ursprung?**: Gilt $f(-x) = -f(x)$? (Tritt auf, wenn $f(x)$ nur ungerade Exponenten von $x$ enthält, z.B. $f(x) = x^3 - x$).
   - Ansonsten ist keine einfache Symmetrie zum Koordinatensystem vorhanden (aber ggf. zu einem anderen Punkt oder einer anderen Achse, was hier seltener untersucht wird).
3. **Verhalten im Unendlichen (Grenzwerte):** $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ (siehe Abschnitt 4.9).
4. **Schnittpunkt mit der y-Achse ($P_y$):** Berechne $f(0)$. Der Punkt ist $P_y(0|f(0))$. (Bei Polynomen ist $f(0) = a_0$, der konstante Term).
5. **Nullstellen ($N_i$):** Setze $f(x) = 0$ und löse die Gleichung.
   - Bei Grad $n = 2$: p-q-Formel oder Mitternachtsformel.
   - Bei Grad $n > 2$:
     - $x$ ausklammern, falls kein konstanter Term $a_0$ vorhanden ist ($a_0 = 0$).
     - Eine Nullstelle $x_1$ raten (oft $\pm 1, \pm 2, \ldots,$ Teiler von $a_0$) und dann Polynomdivision durch $(x - x_1)$ durchführen, um den Grad zu reduzieren. *Hinweis: Polynomdivision wird in diesem Skript nicht explizit behandelt. Aufgaben werden so gestellt, dass sie ohne lösbar sind, z.B. durch Ausklammern oder Substitution.*
     - Bei biquadratischen Gleichungen (z.B. $ax^4 + bx^2 + c = 0$): Substitution $z = x^2$ verwenden.
6. **Erste Ableitung $f'(x)$ bilden.**
7. **Extremstellen (Hoch-/Tiefpunkte):**
   - Notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0$. Lösungen sind potentielle Extremstellen $x_E$.
   - Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ an $x_E$ ODER $f''(x_E) \neq 0$.
     - $f'(x)$ VZW von $+$ nach $-$ ODER $f''(x_E) < 0 \implies$ Hochpunkt.
     - $f'(x)$ VZW von $-$ nach $+$ ODER $f''(x_E) > 0 \implies$ Tiefpunkt.
   - y-Koordinaten: $y_E = f(x_E)$. Punkte $H(x_E|y_E)$ oder $T(x_E|y_E)$.
8. **Monotonieverhalten:** Intervalle bestimmen, in denen $f'(x) > 0$ (steigend) oder $f'(x) < 0$ (fallend).
9. **Zweite Ableitung $f''(x)$ bilden.**
10. **Wendepunkte ($W$):**

- Notwendige Bedingung: $f''(x_W) = 0$. Lösungen sind potentielle Wendestellen $x_W$.
- Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel von $f''(x)$ an $x_W$ ODER $f'''(x_W) \neq 0$.
- y-Koordinaten: $y_W = f(x_W)$. Punkt $W(x_W|y_W)$.

11. **Krümmungsverhalten:** Intervalle bestimmen, in denen $f''(x) > 0$ (linksgekrümmt) oder $f''(x) < 0$ (rechtsgekrümmt).

12. **Wertetabelle (optional):** Für wichtige Punkte und zur Verfeinerung der Skizze.

13. **Skizze des Graphen:** Alle berechneten Punkte und Informationen verwenden.

**Beispiel 5.12 Untersuchung von $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$**

1. **Definitionsbereich:** $D_f = \mathbb{R}$.

2. **Symmetrie:** $f(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - (-x)^2 - 3(-x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x$. $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$. Keine einfache Symmetrie zum Koordinatensystem.

3. **Verhalten im Unendlichen:** Höchste Potenz ist $\frac{1}{3}x^3$ ($n = 3$ ungerade, $a_3 = \frac{1}{3} > 0$). $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. (Kommt von links unten, geht nach rechts oben).

4. **y-Achsenabschnitt:** $f(0) = \frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 - 3(0) = 0$. Also $P_y(0|0)$.

5. **Nullstellen:** $f(x) = 0 \implies \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x = 0$. Wir können $x$ ausklammern: $x(\frac{1}{3}x^2 - x - 3) = 0$. Eine Nullstelle ist $x_1 = 0$. Für die anderen lösen wir $\frac{1}{3}x^2 - x - 3 = 0$. Multiplizieren mit 3: $x^2 - 3x - 9 = 0$. p-q-Formel ($p = -3, q = -9$): $x_{2,3} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{(\frac{-3}{2})^2 - (-9)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{36}{4}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{45}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{9\cdot 5}}{2} = \frac{3\pm 3\sqrt{5}}{2}$. $x_2 = \frac{3+3\sqrt{5}}{2} \approx \frac{3+3\cdot 2.236}{2} \approx \frac{3+6.708}{2} \approx \frac{9.708}{2} \approx 4.85$. $x_3 = \frac{3-3\sqrt{5}}{2} \approx \frac{3-6.708}{2} \approx \frac{-3.708}{2} \approx -1.85$. Nullstellen: $N_1(0|0)$, $N_2(\frac{3+3\sqrt{5}}{2}|0)$, $N_3(\frac{3-3\sqrt{5}}{2}|0)$.

6. **Erste Ableitung:** $f'(x) = x^2 - 2x - 3$.

7. **Extremstellen:** $f'(x) = 0 \implies x^2 - 2x - 3 = 0$. p-q-Formel ($p = -2, q = -3$): $x_{E1,E2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{(\frac{-2}{2})^2 - (-3)} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2$. $x_{E1} = 1 + 2 = 3$. $x_{E2} = 1 - 2 = -1$. Potentielle Extremstellen bei $x_{E_1} = 3$ und $x_{E_2} = -1$.

8. **Zweite Ableitung:** $f''(x) = (x^2 - 2x - 3)' = 2x - 2$.

9. **Art der Extremstellen mit $f''$ prüfen:** $f''(3) = 2(3) - 2 = 6 - 2 = 4 > 0 \implies$ Tiefpunkt bei $x = 3$. $y_T = f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - (3)^2 - 3(3) = 9 - 9 - 9 = -9$. Tiefpunkt $T(3|-9)$. $f''(-1) = 2(-1) - 2 = -2 - 2 = -4 < 0 \implies$ Hochpunkt bei $x = -1$. $y_H = f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}$. Hochpunkt $H(-1|\frac{5}{3})$.

10. **Monotonie:** Bestimmt durch Vorzeichen von $f'(x) = (x - 3)(x + 1)$.
    - $x < -1$ (z.B. $x = -2$): $f'(-2) = (-)(-) = + \implies$ steigend.
    - $-1 < x < 3$ (z.B. $x = 0$): $f'(0) = (+)(-) = - \implies$ fallend.
    - $x > 3$ (z.B. $x = 4$): $f'(4) = (+)(+) = + \implies$ steigend.

11. **Wendepunkte:** $f''(x_W) = 0 \implies 2x_W - 2 = 0 \implies 2x_W = 2 \implies x_W = 1$. Dritte Ableitung: $f'''(x) = (2x - 2)' = 2$. $f'''(1) = 2 \neq 0 \implies$ Wendepunkt bei $x_W = 1$. $y_W = f(1) = \frac{1}{3}(1)^3 - (1)^2 - 3(1) = \frac{1}{3} - 1 - 3 = \frac{1}{3} - 4 = -\frac{11}{3}$. Wendepunkt $W(1|-\frac{11}{3})$.

12. **Krümmungsverhalten:** Bestimmt durch Vorzeichen von $f''(x) = 2x - 2$.

- $x < 1$: $f''(x) < 0 \implies$ rechtsgekrümmt.
- $x > 1$: $f''(x) > 0 \implies$ linksgekrümmt.

13. **Skizze:**

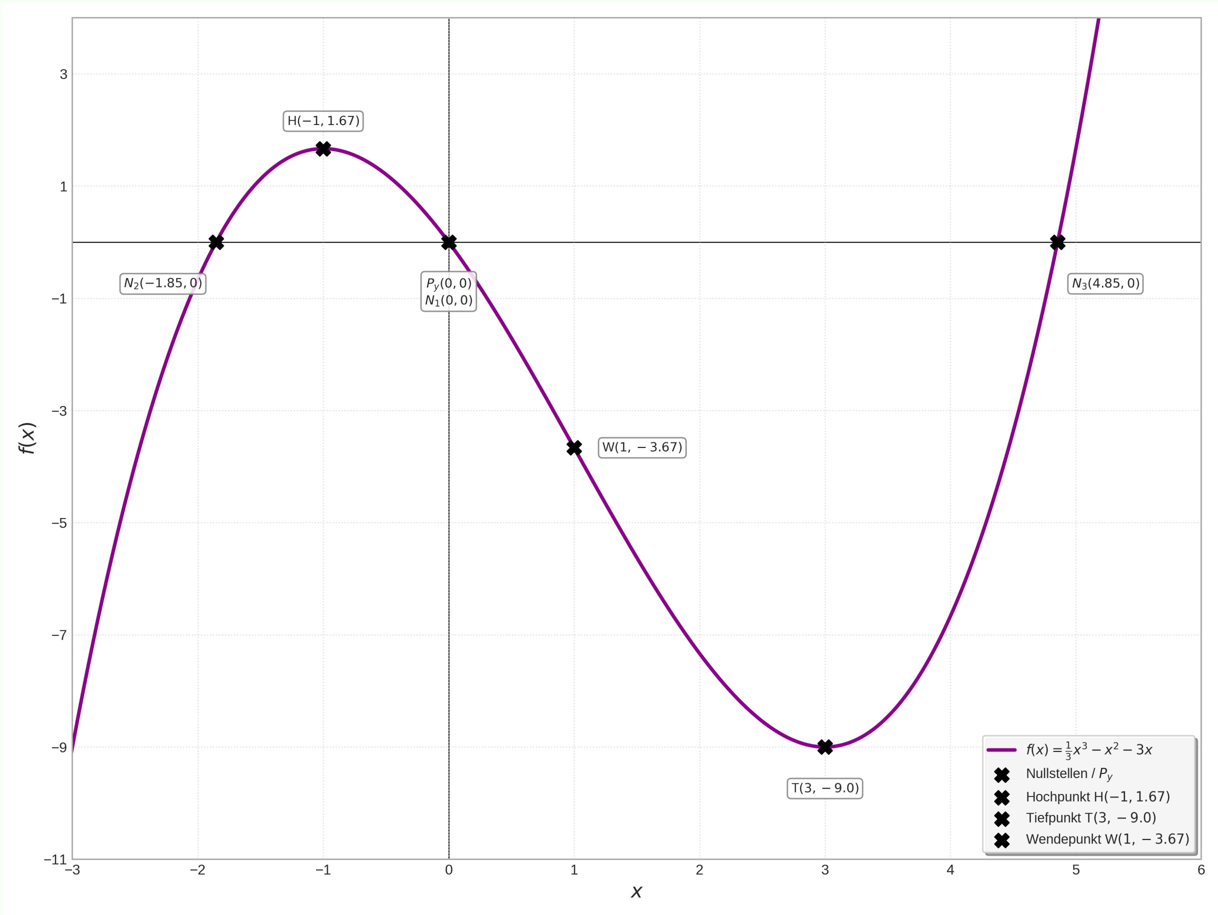


Abbildung 5.9: Graph von $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$

**Aufgabe 5.12 Kurvendiskussionen von Polynomen**

Führe eine vollständige Kurvendiskussion (alle Punkte der Checkliste) für die folgenden Funktionen durch und skizziere jeweils den Graphen.

1. **Quadratische Funktion als Wiederholung:** $f(x) = -x^2+4x-3$. Vergleiche den gefundenen Extrempunkt mit dem Scheitelpunkt, den du mit der Formel $x_S = -b/(2a)$ oder quadratischer Ergänzung bestimmen kannst.

2. **Kubische Funktion (einfache Nullstellen):** $g(x) = x^3 - 4x$. (Tipp: $x$ ausklammern für Nullstellen).

3. **Biquadratische Funktion:** $h(x) = x^4-5x^2+4$. (Tipp für Nullstellen: Substituiere $z = x^2$, löse die quadratische Gleichung für $z$ und substituiere dann zurück. Beachte, dass diese Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist!)

4. **Für Experten (Polynom 3. Grades mit Raten):** $k(x) = x^3 - 7x - 6$. (Tipp: Eine ganzzahlige Nullstelle ist ein Teiler des konstanten Gliedes -6. Probiere $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Wenn du eine Nullstelle $x_1$ gefunden hast, kannst du den Term $(x - x_1)$ durch Polynomdivision (hier nicht erklärt, aber in Schulbüchern zu finden) oder durch einen anderen Trick (Koeffizientenvergleich) abspalten, um eine quadratische Restgleichung zu erhalten. Alternativ: Wenn du später die Produktregel kennst, kannst du versuchen, die Funktion geschickt zu faktorisieren,

falls möglich, oder du nutzt einen Taschenrechner/Software, um die Nullstellen numerisch zu finden und konzentrierst dich auf die anderen Aspekte der Kurvendiskussion.)

5. **Bewegung eines Objekts (Anwendung):** Die Höhe $h$ (in Metern) eines senkrecht nach oben geworfenen Steins nach $t$ Sekunden wird durch die Funktion $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$ beschrieben (für $t \geq 0$ und solange $h(t) \geq 0$).

   (a) Bestimme die Geschwindigkeit $v(t) = h'(t)$ und die Beschleunigung $a(t) = h''(t)$ des Steins.

   (b) Zu welchen Zeiten ist die Geschwindigkeit positiv (Stein steigt), negativ (Stein fällt) oder Null? Interpretiere diese Ergebnisse im Kontext der Bewegung.

   (c) Wann erreicht der Stein seine maximale Höhe und wie hoch ist diese? (Tipp: Extrempunkt von $h(t)$)

   (d) Wann kehrt der Stein zum Boden zurück (Annahme $h(t) \geq 0$)? (Tipp: Nullstelle von $h(t)$)

   (e) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Stein auf dem Boden auf?

### 5.5.1 Nullstellen aus faktorisierter Form – Der Satz vom Nullprodukt

Manchmal liegen Polynomfunktionen bereits in einer **faktorisierten Form** vor, oder sie lassen sich leicht in eine solche überführen (z.B. durch Ausklammern). Diese Form ist besonders praktisch, um die Nullstellen direkt abzulesen. Das Zauberwort hierfür ist der **Satz vom Nullprodukt**.

***5.16 Satz vom Nullprodukt***

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer seiner Faktoren Null ist.

$$A \cdot B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0 \text{ oder } B = 0$$

Das gilt natürlich auch für Produkte mit mehr als zwei Faktoren: $A \cdot B \cdot C = 0 \Leftrightarrow A = 0$ oder $B = 0$ oder $C = 0$.

Wenn eine Polynomfunktion in der Form $f(x) = k \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ gegeben ist (wobei $k$ ein konstanter Faktor ist und $x_1, x_2, \dots, x_n$ die sogenannten Linearfaktoren sind), dann sind die Nullstellen der Funktion genau die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$. Denn wenn $x$ einen dieser Werte annimmt, wird einer der Klammerausdrücke Null, und damit das gesamte Produkt.

**Beispiel 5.13 Nullstellen aus faktorisierter Form ablesen**

1. $f(x) = 2(x - 1)(x + 3)(x - 5)$ Die Funktion wird Null, wenn:

   - $x - 1 = 0 \implies x_1 = 1$
   - $x + 3 = 0 \implies x_2 = -3$
   - $x - 5 = 0 \implies x_3 = 5$

   Die Nullstellen sind also $1, -3$ und $5$.

2. $g(x) = -0.5x(x - 2)^2(x + 1)$ Die Funktion wird Null, wenn:

   - $x = 0 \implies x_1 = 0$
   - $(x - 2)^2 = 0 \implies x - 2 = 0 \implies x_2 = 2$ (Dies ist eine **doppelte Nullstelle**, da der Faktor $(x - 2)$ zweimal vorkommt. An einer doppelten Nullstelle berührt der Graph die x-Achse, ohne sie zu schneiden.)
   - $x + 1 = 0 \implies x_3 = -1$

Die Nullstellen sind $0, 2$ (doppelt) und $-1$.

3. $h(x) = x^3 - 4x$ Hier müssen wir zuerst faktorisieren, indem wir $x$ ausklammern: $h(x) = x(x^2 - 4)$ Den Term $x^2 - 4$ können wir mit der dritten binomischen Formel weiter faktorisieren: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Also: $h(x) = x(x-2)(x+2)$. Die Nullstellen sind $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$.

**Aufgabe 5.13 Nullstellen aus faktorisierter Form bestimmen**

Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen. Gib auch an, ob es sich um einfache oder mehrfache Nullstellen handelt. Eine Kurvendiskussion zu diesen Funktionen kann natürlich auch nie schaden.

1. $f(x) = (x+4)(x-2.5)(x+1)$
2. $g(x) = -3x^2(x-1)(x+2)^3$
3. $h(x) = (x^2 - 9)(x+1)$ (Tipp: $x^2 - 9$ weiter faktorisieren!)
4. $k(x) = 2x^4 - 8x^2$ (Tipp: Erst ausklammern, dann weiter überlegen.)

***Warum ist das wichtig? 5.5: Faktorisierte Form und Nullstellen***

Die faktorisierte Form einer Polynomfunktion ist extrem nützlich, weil sie uns die Nullstellen quasi 'auf dem Silbertablett serviert'. Bei Kurvendiskussionen ist die Bestimmung der Nullstellen oft ein wichtiger Schritt. Wenn eine Funktion bereits faktorisiert ist oder sich leicht faktorisieren lässt, erspart uns das oft das aufwendige Raten von Nullstellen und die Polynomdivision. Außerdem gibt die Vielfachheit einer Nullstelle (einfach, doppelt, dreifach etc.) Auskunft über das Verhalten des Graphen an dieser Stelle (schneiden oder berühren der x-Achse).

**Anwendungen von Kurvendiskussionen**

Kurvendiskussionen sind nicht nur eine mathematische Übung. Sie sind entscheidend, um reale Prozesse zu verstehen und zu optimieren:

- **Wirtschaft:** Gewinnmaximierung, Kostenminimierung (Extremwertaufgaben).
- **Technik:** Optimale Formen für Bauteile, Stabilitätsanalysen.
- **Naturwissenschaften:** Modellierung von Wachstumsprozessen, Zerfallsprozessen, Bewegungen. Die Stellen, an denen sich Änderungsraten ändern (Wendepunkte), können wichtige Übergänge in Systemen markieren.

Das Verständnis, wie sich Funktionen verhalten, ist ein Kernstück angewandter Mathematik.

## 5.6 Exkurs: Grenzwerte von Funktionen mit negativen Exponenten

Bisher haben wir uns Polynomfunktionen angesehen, die für alle reellen Zahlen definiert sind ($D_f = \mathbb{R}$). Es gibt aber auch wichtige Funktionen, die nicht überall definiert sind, insbesondere solche, bei denen $x$ im Nenner steht. Das sind die einfachsten Formen von **gebrochen-rationalen Funktionen**. Ein typisches Beispiel ist $f(x) = \frac{1}{x}$ oder allgemeiner $f(x) = \frac{a}{x^n} = ax^{-n}$ mit $n > 0$.

Für diese Funktionen ist die Stelle $x = 0$ besonders interessant. Wenn wir $x = 0$ in den Nenner einsetzen würden, würde dieser Null werden, und **durch Null darf man nicht teilen**! Das bedeutet, die Funktion ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert. Man sagt, die Funktion hat an der Stelle $x = 0$ eine **Definitionslücke**. Der Definitionsbereich solcher Funktionen ist also $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (alle reellen Zahlen außer der Null). Wir untersuchen nun das Verhalten der Funktion, wenn sich $x$ dieser Lücke nähert.

### ϟ 5.17 Verhalten von $f(x) = \frac{a}{x^n}$ für $x \to 0$ (Polstellen)

Wir betrachten Funktionen der Form $f(x) = \frac{a}{x^n}$ (oder $ax^{-n}$), wobei $a \neq 0$ eine Konstante ist und $n$ eine positive ganze Zahl ($n = 1, 2, 3, \dots$). Wie bereits erwähnt, ist $x = 0$ nicht im Definitionsbereich dieser Funktionen. Diese spezielle Art von Definitionslücke, bei der die Funktionswerte gegen Unendlich ($+\infty$ oder $-\infty$) streben, wenn sich $x$ der Lücke nähert, nennt man eine **Polstelle** (oder kurz Pol). Der Graph der Funktion hat an einer Polstelle eine **senkrechte Asymptote**. Für $f(x) = \frac{a}{x^n}$ ist dies die y-Achse (mit der Gleichung $x = 0$). Eine Asymptote ist eine Gerade, der sich der Graph der Funktion beliebig annähert, sie aber nie erreicht oder schneidet.
Das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$, wenn $x$ sich der Polstelle $x = 0$ nähert, hängt davon ab, ob der Exponent $n$ im Nenner gerade oder ungerade ist und vom Vorzeichen des Zählers $a$:
**Fall 1:** $n$ **ist ungerade** (z.B. $f(x) = \frac{a}{x}$, $f(x) = \frac{a}{x^3}$) Die Potenz $x^n$ behält das Vorzeichen von $x$.

- Wenn $a > 0$:
  - $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ (nähert man sich der 0 von rechts (positive $x$-Werte), wird $x^n$ positiv und klein $\implies \frac{a}{x^n}$ wird sehr groß positiv)
  - $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ (nähert man sich der 0 von links (negative $x$-Werte), wird $x^n$ negativ und klein $\implies \frac{a}{x^n}$ wird sehr groß negativ)
- Wenn $a < 0$: (Die Vorzeichen der Grenzwerte kehren sich um)
  - $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
  - $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

Man spricht hier von einer **Polstelle mit Vorzeichenwechsel** (abgekürzt VZW). Der Graph 'springt' von $-\infty$ nach $+\infty$ (oder umgekehrt) an der Polstelle.
**Fall 2:** $n$ **ist gerade** (z.B. $f(x) = \frac{a}{x^2}$, $f(x) = \frac{a}{x^4}$) Die Potenz $x^n$ ist immer positiv (oder Null), egal ob $x$ positiv oder negativ ist.

- Wenn $a > 0$:
  - $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ (nähert man sich der 0 von rechts, wird $x^n$ positiv und klein $\implies \frac{a}{x^n}$ wird sehr groß positiv)
  - $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ (nähert man sich der 0 von links, wird $x^n$ ebenfalls positiv und klein $\implies \frac{a}{x^n}$ wird sehr groß positiv)
- Wenn $a < 0$: (Die Vorzeichen der Grenzwerte kehren sich um)
  - $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
  - $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

Man spricht hier von einer **Polstelle ohne Vorzeichenwechsel**. Der Graph geht auf beiden Seiten der Polstelle entweder nach $+\infty$ oder auf beiden Seiten nach $-\infty$.
Die Schreibweisen $x \to 0^+$ (lies: 'x geht von rechts gegen Null', d.h. $x$ nähert sich 0 mit Werten, die größer als 0 sind) und $x \to 0^-$ (lies: 'x geht von links gegen Null', d.h. $x$ nähert sich 0 mit Werten, die kleiner als 0 sind) bezeichnen die **einseitigen Grenzwerte**.

**Beispiel 5.14 Grenzwerte an Polstellen**

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ ($a = 1 > 0$, $n = 1$ ungerade). Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   - $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ (z.B. für $x = 0.001$ ist $1/x = 1000$)
   - $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ (z.B. für $x = -0.001$ ist $1/x = -1000$)

Polstelle bei $x = 0$ mit Vorzeichenwechsel. Symmetrie: $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x) \implies$ Punktsymmetrie zum Ursprung.

2. $g(x) = \frac{-2}{x^2}$ ($a = -2 < 0$, $n = 2$ gerade). Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   - $\lim_{x\to 0^+} \frac{-2}{x^2} = -\infty$ (z.B. für $x = 0.01$ ist $x^2 = 0.0001$, $\frac{-2}{0.0001} = -20000$)
   - $\lim_{x\to 0^-} \frac{-2}{x^2} = -\infty$ (z.B. für $x = -0.01$ ist $x^2 = 0.0001$, $\frac{-2}{0.0001} = -20000$)

   Polstelle bei $x = 0$ ohne Vorzeichenwechsel. Symmetrie: $g(-x) = \frac{-2}{(-x)^2} = \frac{-2}{x^2} = g(x) \implies$ Achsensymmetrie zur y-Achse.

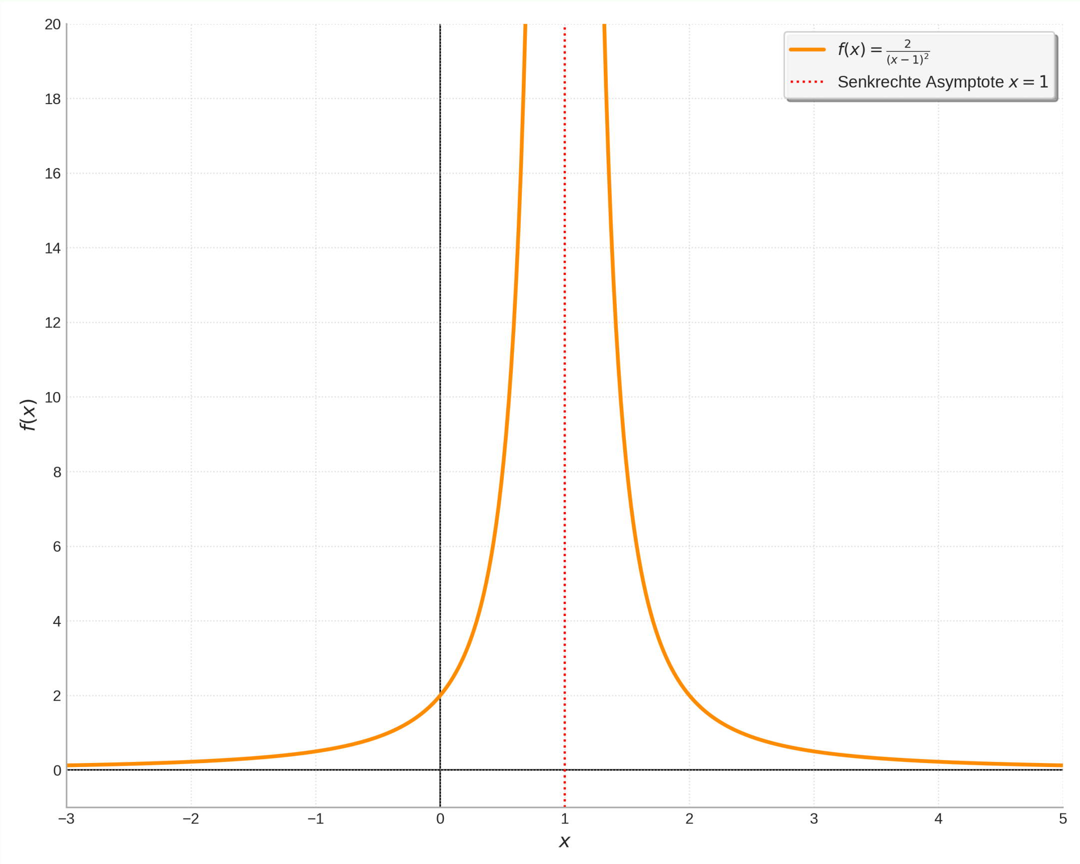


Abbildung 5.10: Graph von $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$

**Aufgabe 5.14 Grenzwerte und Symmetrie gebrochen-rationaler Grundfunktionen**

1. Bestimme den Definitionsbereich und das Verhalten für $x \to 0^+$ und $x \to 0^-$ für die folgenden Funktionen. Gib auch an, ob es sich um eine Polstelle mit oder ohne Vorzeichenwechsel handelt.

   - $f_1(x) = \frac{3}{x^3}$
   - $f_2(x) = -\frac{1}{x^4}$
   - $f_3(x) = \frac{10}{x}$

2. Untersuche die Symmetrie der Funktionen aus Teilaufgabe 1 (Achsensymmetrie zur y-Achse oder Punktsymmetrie zum Ursprung).

3. **Zuordnung Aufgabe:** Ordne den folgenden Funktionsgraphen $k_1(x) = \frac{1}{x^2}$, $k_2(x) = -\frac{1}{x}$, $k_3(x) = \frac{2}{x^3}$, $k_4(x) = \frac{1}{x^4}$ die passenden Funktionsgleichungen zu. Begründe deine Entscheidung anhand des Verhaltens an der Polstelle $x = 0$ und der Symmetrie.

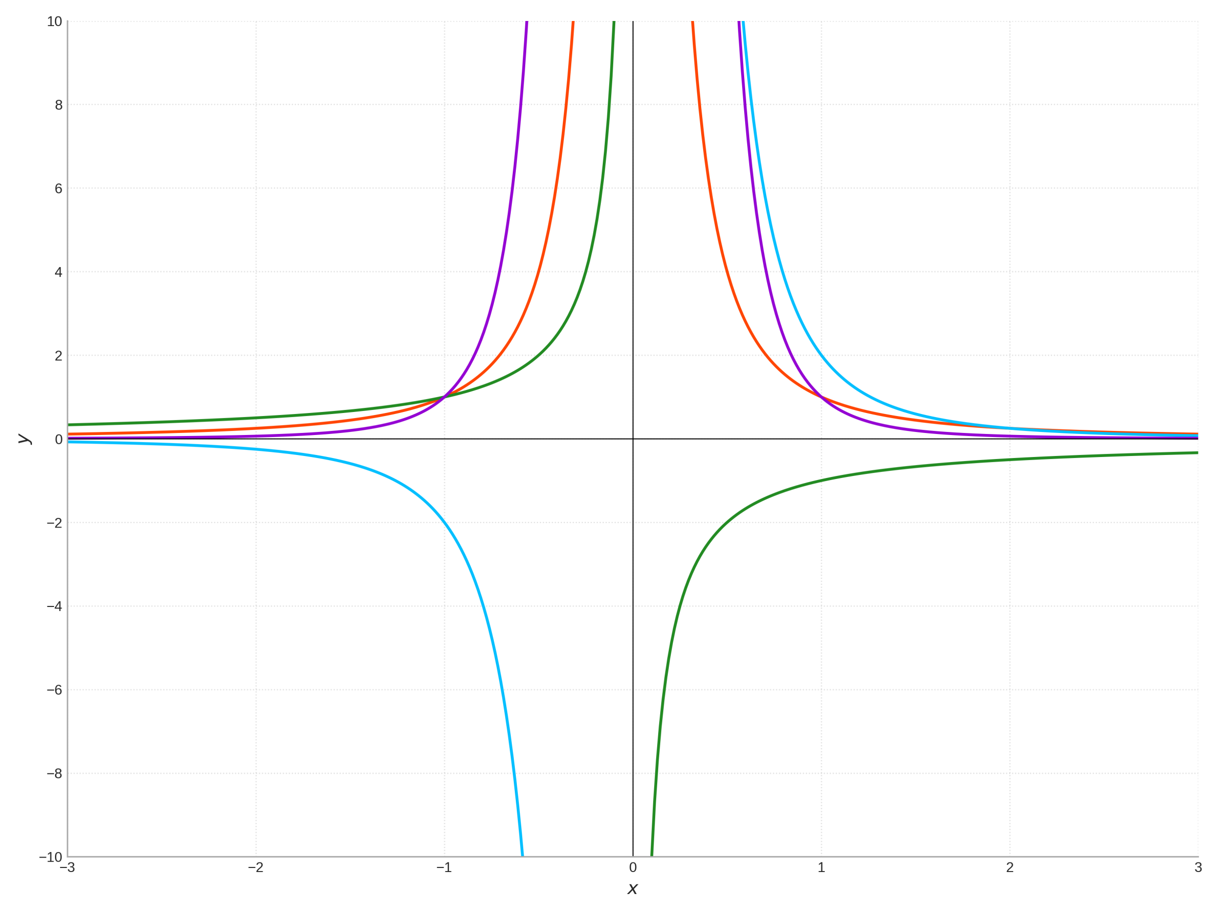


Abbildung 5.11: Graphen zur Zuordnung von Polstellenverhalten

Das Verständnis des Verhaltens von solchen Grundfunktionen an ihren Definitionslücken ist wichtig, da viele komplexere gebrochen-rationale Funktionen solche Terme enthalten.

***Kurz & Knapp 5.2: Verhalten an Polstellen ($f(x) = a/x^n$ bei $x = 0$)***

- **Definitionsbereich:** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Null ist nicht erlaubt, da man nicht durch Null teilen darf).
- **Polstelle:** Bei $x = 0$ liegt eine Polstelle mit senkrechter Asymptote (y-Achse) vor.
- **Verhalten für $x \to 0$:**
  - $n$ ungerade: Polstelle mit Vorzeichenwechsel (VZW). Die Funktionswerte gehen auf einer Seite gegen $+\infty$ und auf der anderen gegen $-\infty$. Das Vorzeichen von $a$ bestimmt, auf welcher Seite was passiert.
  - $n$ gerade: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Die Funktionswerte gehen auf beiden Seiten entweder gegen $+\infty$ (wenn $a > 0$) oder gegen $-\infty$ (wenn $a < 0$).
- **Einseitige Grenzwerte** ($x \to 0^+$ und $x \to 0^-$) sind wichtig, um das Verhalten genau zu beschreiben.

**Achtung Stolperstein! 5.2: Polstellen und Definitionsbereich**

- **Definitionsbereich vergessen:** Immer zuerst den Definitionsbereich bestimmen! Eine Funktion kann nur dort Eigenschaften haben, wo sie auch definiert ist. Bei $f(x) = a/x^n$ ist $x = 0$ **nicht** im Definitionsbereich.

- **Einseitige Grenzwerte verwechseln:** Achte genau darauf, ob du dich $x = 0$ von positiven Werten ($x \to 0^+$) oder von negativen Werten ($x \to 0^-$) näherst, besonders bei ungeraden Exponenten $n$.
- **Vorzeichen von $a$ übersehen:** Das Vorzeichen von $a$ im Zähler kehrt die Richtung der 'Unendlichkeiten' um. Ist $a$ negativ, geht es z.B. bei $1/x^2$ nicht nach $+\infty$, sondern nach $-\infty$.
- **Polstelle mit Nullstelle verwechseln:** Eine Polstelle ist eine Definitionslücke, an der die Funktion 'explodiert'. Eine Nullstelle ist ein Punkt, an dem der Graph die x-Achse schneidet ($f(x) = 0$). Funktionen wie $1/x$ haben keine Nullstellen.

### 5.6.1 Verhalten von $f(x) = \frac{a}{x^n}$ im Unendlichen und horizontale Asymptoten

Wir haben das Verhalten von $f(x) = \frac{a}{x^n}$ in der Nähe der Polstelle $x = 0$ untersucht. Aber was passiert, wenn $x$ sehr groß positiv ($x \to \infty$) oder sehr groß negativ ($x \to -\infty$) wird?

Wenn $n$ eine positive ganze Zahl ist ($n \geq 1$), dann wird der Nenner $x^n$ für betragsmäßig große $x$ sehr groß.

- Für $x \to \infty$ wird $x^n \to \infty$.
- Für $x \to -\infty$:
  - Wenn $n$ gerade ist, wird $x^n \to \infty$.
  - Wenn $n$ ungerade ist, wird $x^n \to -\infty$.

In allen diesen Fällen wird der Betrag von $x^n$ unendlich groß. Wenn wir nun eine feste Zahl $a$ durch eine unendlich große Zahl teilen, nähert sich das Ergebnis immer mehr der Null.

**ϟ *5.18 Grenzwert von $f(x) = \frac{a}{x^n}$ für $x \to \pm\infty$***

Für jede Funktion der Form $f(x) = \frac{a}{x^n}$ mit $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gilt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

Der Graph der Funktion nähert sich also für sehr große positive und sehr große negative $x$-Werte der x-Achse (der Geraden $y = 0$) an. Man sagt, die Funktion hat eine **waagerechte (horizontale) Asymptote** bei $y = 0$.

**Beispiel 5.15 Horizontale Asymptoten**

1. $f(x) = \frac{1}{x}$: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ und $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$. Die x-Achse ($y = 0$) ist eine waagerechte Asymptote. Zusammen mit der senkrechten Asymptote $x = 0$ (y-Achse) ergibt sich das typische Bild einer Hyperbel.
2. $g(x) = \frac{-2}{x^2}$: $\lim_{x \to \infty} \frac{-2}{x^2} = 0$ und $\lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{x^2} = 0$. Auch hier ist die x-Achse ($y = 0$) eine waagerechte Asymptote.

### 5.6.2 Substitution – Ein mächtiges Werkzeug zum Verständnis

Manchmal sehen Funktionen komplizierter aus, als sie sind. Die Idee der **Substitution** (Ersetzung) kann uns helfen, bekannte Muster in neuen Verkleidungen zu erkennen.

Stell dir vor, du kennst das Verhalten der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ sehr gut. Was ist dann mit der Funktion $g(x) = \frac{1}{x-5}$? Wenn wir $z = x - 5$ setzen (das ist unsere Substitution), dann ist $g(x)$ eigentlich $f(z) = \frac{1}{z}$. Die Funktion $g(x)$ verhält sich also genauso wie $f(x)$, nur dass alles um 5 Einheiten auf der x-Achse nach rechts verschoben ist!

- $f(x) = \frac{1}{x}$ hat eine Polstelle bei $x = 0$.
- $g(x) = \frac{1}{x-5}$ hat eine Polstelle dort, wo der Nenner Null wird, also bei $x - 5 = 0 \implies x = 5$.

Die senkrechte Asymptote verschiebt sich also von $x = 0$ nach $x = 5$. Das Verhalten um die Polstelle (mit Vorzeichenwechsel) bleibt aber qualitativ gleich. Auch das Verhalten im Unendlichen ($\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$) bleibt gleich.

### ϟ 5.19 *Substitution und Transformationen*

Wenn du eine Funktion $f(u)$ kennst und eine neue Funktion $g(x) = f(x - c)$ betrachtest, dann ist der Graph von $g(x)$ einfach der Graph von $f(u)$, der um $c$ Einheiten **entlang der x-Achse verschoben** ist:

- um $c$ nach rechts, wenn $c > 0$ (wie bei $x - c$, z.B. $x - 5$)
- um $|c|$ nach links, wenn $c < 0$ (wie bei $x - (-|c|) = x + |c|$, z.B. $x + 2$)

Ähnlich bewirkt $g(x) = f(x) + d$ eine Verschiebung um $d$ Einheiten entlang der y-Achse.
Dieses Prinzip kennst du schon von der **Scheitelpunktform** einer Parabel: $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$.
Das ist im Grunde die Normalparabel $u^2$, die:

1. mit $a$ gestreckt/gestaucht/gespiegelt wird ($au^2$)
2. um $x_S$ in x-Richtung verschoben wird (ersetze $u$ durch $x - x_S \implies a(x - x_S)^2$)
3. um $y_S$ in y-Richtung verschoben wird ($\implies a(x - x_S)^2 + y_S$)

Die Substitution hilft uns, die 'innere Struktur' von Funktionen zu erkennen und komplexe Funktionen auf einfachere, bekannte Grundfunktionen zurückzuführen. Dieses Denken wird später bei der Kettenregel der Ableitung und bei der Integration durch Substitution extrem wichtig!

### Beispiel 5.16 Verhalten von $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$

- **Grundfunktion:** Wir erkennen die Struktur von $\frac{a}{u^n}$ mit $a = 2$ und $n = 2$ (gerade). Die Grundfunktion wäre $h(u) = \frac{2}{u^2}$.
- **Substitution/Verschiebung:** Hier ist $u = x - 1$. Das bedeutet, der Graph von $h(u)$ ist um 1 Einheit nach rechts verschoben.
- **Definitionsbereich:** Der Nenner $(x - 1)^2$ wird Null, wenn $x - 1 = 0 \implies x = 1$. Also $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- **Polstelle:** Bei $x = 1$ liegt eine Polstelle mit senkrechter Asymptote $x = 1$.
- **Verhalten an der Polstelle $x = 1$:** Da $n = 2$ (gerade) und $a = 2$ (positiv) ist, haben wir eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, und die Funktion geht gegen $+\infty$: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.
- **Verhalten im Unendlichen:** $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{(x-1)^2} = 0$. Horizontale Asymptote $y = 0$.
- **Symmetrie:** Die Grundfunktion $h(u) = \frac{2}{u^2}$ ist achsensymmetrisch zur u-Achse ($u = 0$). Da unsere Funktion um $x = 1$ verschoben ist, ist $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$ achsensymmetrisch zur Geraden $x = 1$.

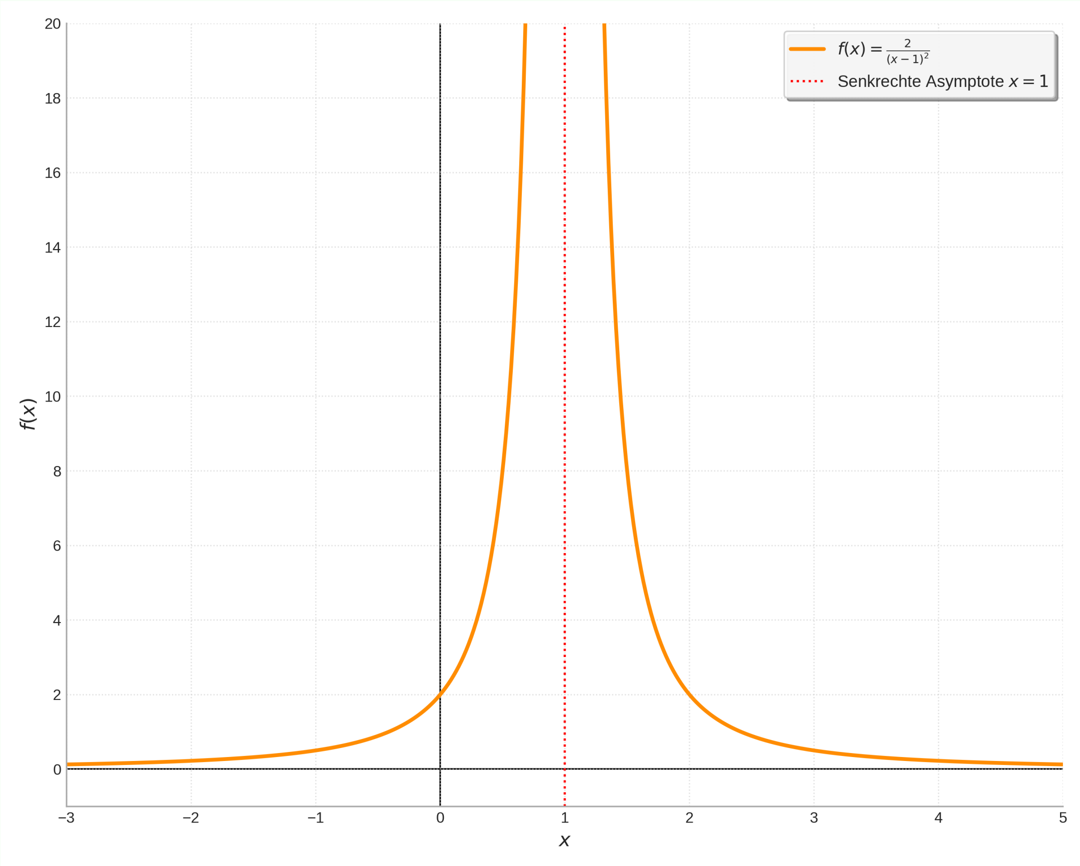


Abbildung 5.12: Graph von $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$

**Aufgabe 5.15 Funktionen mit negativen Exponenten und Substitution**

1. Bestimme für die folgenden Funktionen den Definitionsbereich, die Gleichung der senkrechten Asymptote(n) und das Verhalten der Funktion für $x$ gegen die Polstelle(n) (einseitige Grenzwerte) sowie für $x \to \pm\infty$. Untersuche auch das Symmetrieverhalten bezüglich der senkrechten Asymptote oder eines Punktes.
   - $f_1(x) = \frac{-1}{x+2}$
   - $f_2(x) = \frac{3}{(x-3)^2}$
   - $f_3(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ (Tipp: Was ist hier die horizontale Asymptote?)
2. Skizziere die Graphen der Funktionen aus Teilaufgabe 1.
3. **Transformationskette verstehen:** Beschreibe, wie der Graph der Funktion $g(x) = \frac{-2}{(x+3)^2} - 4$ aus dem Graphen der Grundfunktion $h(u) = \frac{1}{u^2}$ durch Streckung/Stauchung, Spiegelung und Verschiebungen hervorgeht. Gib den Definitionsbereich und die Gleichungen der Asymptoten von $g(x)$ an.

***Kurz & Knapp 5.3: Funktionen $f(x) = \frac{a}{(x-c)^n} + d$***

- **Definitionsbereich:** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{c\}$.
- **Senkrechte Asymptote (Polstelle):** Bei $x = c$. Verhalten wie bei $\frac{a}{u^n}$ für $u \to 0$.
- **Waagerechte Asymptote:** Bei $y = d$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = d$. (Wenn $d = 0$, ist es die x-Achse).
- **Symmetrie:** Wenn die Grundfunktion $\frac{a}{u^n}$ symmetrisch zum Ursprung (n ungerade) oder zur

y-Achse (n gerade) ist, dann ist $f(x)$ symmetrisch zum Punkt $(c|d)$ bzw. zur Achse $x = c$.

**Achtung Stolperstein! 5.3: Grenzwerte und Asymptoten**

- **Verschiebung nicht erkannt:** Bei Termen wie $\frac{1}{x-c}$ liegt die Polstelle bei $x = c$, nicht bei $x = 0$.
- **Horizontale Asymptote bei Summen/Differenzen:** Bei $f(x) = \frac{a}{x^n} + d$ ist die horizontale Asymptote $y = d$, nicht $y = 0$ (außer $d = 0$). Der Term $\frac{a}{x^n}$ geht gegen Null, aber das $d$ bleibt!
- **Definitionsbereich und Polstellen:** Eine Polstelle ist immer außerhalb des Definitionsbereichs.

Wir werden diese Ideen zu Grenzwerten und Asymptoten später bei der Diskussion komplexerer gebrochen-rationaler Funktionen wieder aufgreifen. Jetzt, da wir ein solides Fundament für Polynome und einfache gebrochen-rationale Funktionen gelegt haben, können wir unseren Werkzeugkasten der Ableitungsregeln erweitern.

## 5.7 Anwendung und Vertiefung der bisherigen Differentialrechnung

Wir haben nun die Grundlagen der Differentialrechnung kennengelernt: die Idee der Ableitung als momentane Änderungsrate und Tangentensteigung, die h-Methode zur Herleitung von Ableitungen sowie die ersten wichtigen Ableitungsregeln (Konstanten-, Potenz-, Faktor- und Summenregel). Wir haben auch gesehen, wie uns die erste und zweite Ableitung helfen, das Verhalten von Funktionen (Monotonie, Extrempunkte, Krümmung, Wendepunkte) zu analysieren und wie Grenzwerte das Verhalten im Unendlichen und an Polstellen beschreiben.

Bevor wir uns weiteren, komplexeren Ableitungsregeln zuwenden, wollen wir dieses Wissen festigen und in anspruchsvolleren Aufgaben anwenden.

***Kurz & Knapp 5.4: Differentialrechnung – Die Grundlagen im Überblick***

- **Ableitung** $f'(x)$**:** Momentane Änderungsrate von $f(x)$; Steigung der Tangente an den Graphen von $f(x)$.
- **h-Methode:** Grundlegendes Verfahren zur Bestimmung der Ableitung über den Grenzwert des Differenzenquotienten: $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
- **Wichtige Ableitungsregeln (bisher):**
  - Konstantenregel: $(c)' = 0$.
  - Potenzregel: $(x^n)' = nx^{n-1}$. (Gilt auch für negative/gebrochene Exponenten!)
  - Faktorregel: $(c \cdot g(x))' = c \cdot g'(x)$.
  - Summenregel: $(g(x) \pm h(x))' = g'(x) \pm h'(x)$.
- **Bedeutung von** $f'(x)$**:**
  - $f'(x) > 0 \implies f(x)$ ist streng monoton steigend.
  - $f'(x) < 0 \implies f(x)$ ist streng monoton fallend.
  - $f'(x_E) = 0$: Notwendige Bedingung für eine Extremstelle bei $x_E$.
  - VZW von $f'$ an $x_E$: Hinreichende Bedingung für Extremstellen (Hoch-/Tiefpunkt).
- **Bedeutung von** $f''(x)$ **(zweite Ableitung):**
  - $f''(x) > 0 \implies$ Graph von $f(x)$ ist linksgekrümmt (konvex).

- $f''(x) < 0 \implies$ Graph von $f(x)$ ist rechtsgekrümmt (konkav).
- $f''(x_W) = 0$: Notwendige Bedingung für eine Wendestelle bei $x_W$.
- VZW von $f''$ an $x_W$ (oder $f'''(x_W) \neq 0$): Hinreichende Bedingung für Wendestelle.
- $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) > 0 \implies$ Tiefpunkt; $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) < 0 \implies$ Hochpunkt.

- **Grenzwerte (lim):** Untersuchen das Verhalten von Funktionen für $x \to \pm\infty$ oder an Definitionslücken (z.B. Polstellen bei $f(x) = a/x^n$).
- **Kurvendiskussion:** Systematische Untersuchung einer Funktion auf ihre Eigenschaften (Definitionsbereich, Symmetrie, Grenzwerte, Achsenschnittpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte, Monotonie, Krümmung) zur Erstellung einer Graphenskizze.
- **Substitution als Denkwerkzeug:** Erkennen von Grundfunktionen in transformierter Form (z.B. $g(x) = \frac{a}{(x-c)^n} + d$ als Transformation von $f(u) = \frac{a}{u^n}$).

***Warum ist das wichtig? 5.6: Was du jetzt können solltest***

Nachdem du diesen ersten Teil des Kapitels Differentialrechnung durchgearbeitet hast, solltest du in der Lage sein:

- Den Begriff der Ableitung als momentane Änderungsrate und Tangentensteigung zu erklären.
- Die grundlegenden Ableitungsregeln (Konstanten-, Potenz-, Faktor-, Summenregel) sicher anzuwenden, auch auf Terme mit Wurzeln oder $x$ im Nenner (nach Umformung in Potenzschreibweise).
- Höhere Ableitungen zu bilden.
- Die Bedeutung der ersten und zweiten Ableitung für Monotonie, Extrempunkte, Krümmungsverhalten und Wendepunkte zu verstehen und anzuwenden.
- Das Grenzwertverhalten von Polynomfunktionen und einfachen gebrochen-rationalen Funktionen (wie $a/x^n$ und deren Verschiebungen) für $x \to \pm\infty$ und an Polstellen zu bestimmen.
- Eine vollständige Kurvendiskussion für Polynomfunktionen bis zum Grad 4 (mit lösbaren Nullstellenproblemen) und für einfache transformierte gebrochen-rationale Funktionen durchzuführen.
- Die Idee der Substitution zu nutzen, um das Verhalten transformierter Funktionen zu verstehen.
- Einfache Anwendungsaufgaben zu lösen, bei denen Änderungsraten oder Optimierungsprobleme eine Rolle spielen.

Das ist schon eine ganze Menge! Sei stolz auf das, was du gelernt hast. Die folgenden Aufgaben helfen dir, dein Wissen zu festigen und zu vertiefen.

**Aufgabe 5.16 Übergreifende Übungsaufgaben zum bisherigen Kapitel Differentialrechnung**

1. **Polynom-Analyse (Grad 3):** Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - \frac{7}{3}$.
   (a) Führe eine vollständige Kurvendiskussion für $f(x)$ durch (Definitionsbereich, Symmetrie, Verhalten im Unendlichen, Achsenschnittpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte, Monotonie, Krümmung).

**Tipp 5.37: Nullstellen**

Eine Nullstelle dieser Funktion ist $x_1 = 1$. Nutze diese Information, um die weiteren Nullstellen zu finden (z.B. durch Faktorisieren, nachdem du $(x-1)$ als Faktor erkannt hast, oder indem du die verbleibende quadratische Gleichung löst).

(b) Zeichne den Graphen von $f(x)$ im Intervall $[-4, 6]$ unter Verwendung deiner Ergebnisse.

(c) Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen von $f(x)$ im Punkt $P(0|f(0))$.

(d) In welchem Punkt hat die Tangente an den Graphen von $f(x)$ die Steigung $m = -5$?

2. **Optimierungsproblem – Die optimale Dose:** Eine zylinderförmige Konservendose soll ein Volumen von $V = 500 \text{ cm}^3$ haben. Die Materialkosten sollen minimiert werden, d.h. die Oberfläche $O$ der Dose soll minimal werden. Die Formeln für einen Zylinder mit Radius $r$ und Höhe $h$ sind: Volumen: $V = \pi r^2 h$ Oberfläche (Mantel + 2 Deckel): $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

   (a) **Zielfunktion aufstellen:** Drücke die Oberfläche $O$ als Funktion nur einer Variablen (z.B. des Radius $r$) aus. Nutze dazu die Nebenbedingung für das Volumen $V = 500 \text{ cm}^3$, um $h$ durch $r$ auszudrücken und in die Oberflächenformel einzusetzen. Du erhältst $O(r)$.

   **Tipp 5.38: Umgang mit $\pi$**

   Behandle $\pi$ wie eine Konstante.

   (b) **Ableitung bilden:** Bilde die erste Ableitung $O'(r)$. (Hinweis: $O(r)$ wird einen Term der Form $\frac{k}{r}$ enthalten, was du als $kr^{-1}$ schreiben kannst.)

   (c) **Extremstelle finden:** Setze $O'(r) = 0$ und löse nach $r$ auf, um den Radius zu finden, der die Oberfläche minimiert.

   (d) **Überprüfung (optional für Experten):** Überprüfe mit der zweiten Ableitung $O''(r)$, ob es sich tatsächlich um ein Minimum handelt.

   (e) **Optimale Abmessungen:** Berechne die zugehörige Höhe $h$ und das minimale Oberflächenmaterial. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $r$ und $h$ bei minimaler Oberfläche?

3. **Analyse einer biquadratischen Funktion:** Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$.

   (a) Untersuche die Funktion auf Symmetrie.

   (b) Bestimme die Nullstellen der Funktion. (Tipp: Substitution $z = x^2$).

   (c) Bestimme die lokalen Extrempunkte von $f(x)$.

   (d) Bestimme die Wendepunkte von $f(x)$.

   (e) Skizziere den Graphen von $f(x)$ basierend auf deinen Ergebnissen.

4. **Transformationen und Grenzwerte verstehen:** Betrachte die Funktion $g(x) = \frac{-2}{(x+1)^3} + 1$.

   (a) **Grundfunktion:** Von welcher einfachen Grundfunktion $h(u) = \frac{a}{u^n}$ lässt sich $g(x)$ ableiten?

   (b) **Transformationsschritte:** Beschreibe, durch welche Verschiebungen, Streckungen oder Spiegelungen der Graph von $g(x)$ aus dem Graphen von $h(u)$ entsteht.

   (c) **Definitionsbereich und Asymptoten:** Bestimme den Definitionsbereich von $g(x)$ sowie die Gleichungen der senkrechten und waagerechten Asymptoten.

(d) **Grenzwerte an der Polstelle:** Untersuche $\lim_{x\to-1^+} g(x)$ und $\lim_{x\to-1^-} g(x)$. Handelt es sich um eine Polstelle mit oder ohne Vorzeichenwechsel?

(e) **Skizze:** Skizziere den Graphen von $g(x)$ mit seinen Asymptoten.

5. **Bewegung eines Objekts (Anwendung):** Die Höhe $h$ (in Metern) eines senkrecht nach oben geworfenen Steins nach $t$ Sekunden wird durch die Funktion $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$ beschrieben (für $t \geq 0$ und solange $h(t) \geq 0$).

   (a) Bestimme die Funktion $v(t)$, die die Geschwindigkeit des Autos zum Zeitpunkt $t$ angibt.

   (b) Bestimme die Funktion $a(t)$, die die Beschleunigung des Autos zum Zeitpunkt $t$ angibt.

   (c) Zu welchen Zeitpunkten $t$ ist das Auto in Ruhe (Geschwindigkeit gleich Null)?

   (d) In welchen Zeitintervallen fährt das Auto vorwärts ($v(t) > 0$) und in welchen rückwärts ($v(t) < 0$)?

   (e) Wann ist die Beschleunigung Null? Was bedeutet das für die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt?

   (f) (Für Experten): Wann ist die Geschwindigkeit des Autos am größten im Intervall $[0, 2]$? Wann ist sie am geringsten (d.h. am stärksten negativ) im Intervall $[0, 4]$?

**Ein kleiner Exkurs: Was ist eigentlich Polynomdivision?**

Du hast in einigen Aufgaben den Hinweis auf 'Polynomdivision' gesehen, wenn es darum ging, Nullstellen von Polynomen höheren Grades (Grad $> 2$) zu finden, nachdem eine Nullstelle $x_1$ bereits bekannt war (z.B. durch Raten). Aber was steckt dahinter?
Stell dir vor, du hast ein Polynom $f(x)$ und kennst eine Nullstelle $x_1$. Das bedeutet, $(x - x_1)$ ist ein Faktor von $f(x)$ (genau wie wenn 12 durch 3 teilbar ist, weil 3 ein Faktor von 12 ist). Die Polynomdivision ist nun ein Verfahren, ähnlich der schriftlichen Division von Zahlen, mit dem du $f(x)$ durch den Linearfaktor $(x - x_1)$ teilen kannst.

$$f(x) : (x - x_1) = \text{Restpolynom}$$

Das Ergebnis ist ein 'Restpolynom', dessen Grad um 1 niedriger ist als der von $f(x)$. Wenn $f(x)$ also z.B. vom Grad 3 war, ist das Restpolynom vom Grad 2. Und die Nullstellen eines quadratischen Polynoms können wir ja mit der p-q-Formel oder Mitternachtsformel finden!
**Beispiel-Idee:** Wenn $f(x) = x^3 - 7x - 6$ und wir wissen (durch Raten), dass $x_1 = -1$ eine Nullstelle ist (denn $f(-1) = (-1)^3 - 7(-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$), dann können wir $f(x)$ durch $(x - (-1)) = (x + 1)$ teilen.

$$\begin{array}{l}
\big(\; x^3 \qquad - 7x - 6\big) : \big(x + 1\big) = x^2 - x - 6 \\
\underline{-x^3 - x^2} \\
\qquad -x^2 - 7x \\
\qquad \underline{\;\; x^2 + x} \\
\qquad\qquad -6x - 6 \\
\qquad\qquad \underline{\;\; 6x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

(Die $0x^2$ wird für das schriftliche Verfahren oft ergänzt.) Das Restpolynom $x^2 - x - 6$ können wir nun mit der p-q-Formel lösen, um die weiteren Nullstellen $x_2 = 3$ und $x_3 = -2$ zu finden.
Die Polynomdivision ist also ein nützliches Werkzeug, um Polynome höheren Grades in Faktoren zu zerlegen und so alle Nullstellen zu finden. Das genaue Verfahren der schriftlichen Polynomdivision findest du in vielen Schulbüchern oder Online-Quellen, falls es dich genauer interessiert!

**Noch ein faszinierender Grenzwert: Die Eulersche Zahl $e$**

Wir haben den Grenzwertbegriff im Zusammenhang mit der Ableitung ($h \to 0$) und dem Verhalten von Funktionen im Unendlichen ($x \to \pm\infty$) kennengelernt. Es gibt noch viele andere wichtige Grenzwerte in der Mathematik. Einer davon führt zu einer ganz besonderen Zahl, der **Eulerschen Zahl** $e \approx 2,71828\ldots$.
Stell dir vor, du legst 1 Euro zu 100% Zinsen pro Jahr an.

- Bei jährlicher Verzinsung hast du nach einem Jahr: $1 \cdot (1 + \frac{1}{1})^1 = 2$ Euro.
- Bei halbjährlicher Verzinsung (also $2 \times 50\%$ Zinsen): $1 \cdot (1 + \frac{1}{2})^2 = (1.5)^2 = 2,25$ Euro.
- Bei vierteljährlicher Verzinsung ($4 \times 25\%$ Zinsen): $1 \cdot (1 + \frac{1}{4})^4 \approx 2,44$ Euro.
- Bei monatlicher Verzinsung ($12 \times \frac{100}{12}\%$ Zinsen): $1 \cdot (1 + \frac{1}{12})^{12} \approx 2,61$ Euro.

Was passiert, wenn man die Zinsperioden immer kürzer macht und $n$-mal pro Jahr verzinst (also mit $\frac{100}{n}\%$ Zinsen pro Periode)? Man betrachtet den Ausdruck:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Wenn $n$ nun unendlich groß wird ($n \to \infty$), also die Verzinsung quasi kontinuierlich (in jedem unendlich kleinen Augenblick) erfolgt, dann nähert sich dieser Ausdruck einem festen Wert:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Die Zahl $e$ ist die Basis des **natürlichen Logarithmus** (ln) und spielt eine fundamentale Rolle bei Exponentialfunktionen, die natürliches Wachstum oder Zerfall beschreiben (z.B. $f(x) = e^x$). Diese Funktionen werden wir in einem späteren Kapitel genauer untersuchen.

**Ausblick auf weitere Ableitungsregeln**

Mit den bisher gelernten Regeln (Konstanten-, Potenz-, Faktor-, Summenregel) können wir schon viele Funktionen, insbesondere alle Polynomfunktionen, ableiten und analysieren. Für komplexere Funktionen, die durch Multiplikation, Division oder Verkettung anderer Funktionen entstehen (wie z.B. $f(x) = x^2 \cdot e^x$, $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ oder $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$), benötigen wir weitere Werkzeuge: die Produktregel, die Quotientenregel und die Kettenregel. Diese werden wir im nächsten Abschnitt kennenlernen.

## 5.8 Ableitungsregeln - Fortsetzung

### 5.8.1 Die Produktregel – Ableiten von $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

Bisher haben wir Funktionen betrachtet, die Summen, Differenzen oder Vielfache von Potenzfunktionen waren. Was aber, wenn eine Funktion selbst ein Produkt aus zwei Funktionen ist, die beide die Variable $x$ enthalten? Ein Beispiel hierfür wäre $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2x)$.

Man könnte nun denken, man leitet einfach jeden Faktor einzeln ab und multipliziert die Ergebnisse. **Aber Vorsicht, das ist im Allgemeinen falsch!** Also: $(u(x) \cdot v(x))' \neq u'(x) \cdot v'(x)$.

Um solche Produkte korrekt ableiten zu können, benötigen wir die **Produktregel**.

***ϟ 5.20 Produktregel***

Ist eine Funktion $f(x)$ als Produkt zweier differenzierbarer Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ gegeben, also

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$, dann lautet ihre Ableitung:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

In Kurzschreibweise: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

***Tipp 5.39: Merkspruch für die Produktregel***

Ein gängiger Merkspruch, um sich die Produktregel einzuprägen, lautet: 'Ableitung des ersten Faktors mal den zweiten Faktor (stehen lassen), plus den ersten Faktor (stehen lassen) mal die Ableitung des zweiten Faktors.' Oder noch kürzer: 'Erste ableiten, Zweite stehen lassen, plus Erste stehen lassen, Zweite ableiten.'

Schauen wir uns an, wie das funktioniert und warum es so wichtig ist, diese Regel zu verwenden.

**Beispiel 5.17 Anwendung der Produktregel bei Polynomen**

Wir wollen die Funktion $f(x) = (x^2 + 3x) \cdot (2x - 1)$ ableiten.
**Methode 1: Mit der Produktregel**
**Schritt 1: Identifiziere $u(x)$ und $v(x)$.** $u(x) = x^2 + 3x$ $v(x) = 2x - 1$
**Schritt 2: Bilde die Ableitungen $u'(x)$ und $v'(x)$.** Mit den uns bekannten Regeln (Potenz-, Faktor-, Summenregel): $u'(x) = (x^2)' + (3x)' = 2x + 3$ $v'(x) = (2x)' - (1)' = 2 - 0 = 2$
**Schritt 3: Setze in die Produktregel $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ ein.** $f'(x) = (2x + 3) \cdot (2x - 1) + (x^2 + 3x) \cdot (2)$
**Schritt 4: Vereinfache den Term (ausmultiplizieren und zusammenfassen).** $f'(x) = (2x \cdot 2x + 2x \cdot (-1) + 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-1)) + (2 \cdot x^2 + 2 \cdot 3x)$ $f'(x) = (4x^2 - 2x + 6x - 3) + (2x^2 + 6x)$ $f'(x) = 4x^2 + 4x - 3 + 2x^2 + 6x$ $f'(x) = (4x^2 + 2x^2) + (4x + 6x) - 3$

$$f'(x) = 6x^2 + 10x - 3$$

**Methode 2: Probe durch vorheriges Ausmultiplizieren (ohne Produktregel)** Wir können die Funktion $f(x)$ auch zuerst ausmultiplizieren und dann die Summen- und Potenzregel anwenden: $f(x) = (x^2 + 3x)(2x - 1)$ $f(x) = x^2 \cdot 2x + x^2 \cdot (-1) + 3x \cdot 2x + 3x \cdot (-1)$ $f(x) = 2x^3 - x^2 + 6x^2 - 3x$ $f(x) = 2x^3 + (-x^2 + 6x^2) - 3x$ $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x$
Nun leiten wir diese Summe ab: $f'(x) = (2x^3)' + (5x^2)' - (3x)'$ $f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 2x - 3 \cdot 1$

$$f'(x) = 6x^2 + 10x - 3$$

Beide Methoden führen zum selben Ergebnis! Das zeigt, dass die Produktregel korrekt ist und uns bei komplizierteren Produkten, die sich nicht so leicht ausmultiplizieren lassen (z.B. wenn $e$-Funktionen oder trigonometrische Funktionen beteiligt sind), eine große Hilfe sein wird.

*Selbst-Check:* Warum ist es bei $f(x) = 5x^3$ nicht notwendig, die Produktregel anzuwenden, obwohl man es als $u(x) = 5$ und $v(x) = x^3$ auffassen könnte? (Antwort: Weil $u(x) = 5$ eine Konstante ist. Die Faktorregel ist ein Spezialfall der Produktregel, wenn einer der Faktoren eine Konstante ist: $(c \cdot v(x))' = c' \cdot v(x) + c \cdot v'(x) = 0 \cdot v(x) + c \cdot v'(x) = c \cdot v'(x)$.)

**Aufgabe 5.17 Produktregel trainieren**

Leite die folgenden Funktionen mit der Produktregel ab und vereinfache die Ergebnisse so weit wie möglich. Kontrolliere deine Ergebnisse für die ersten beiden Aufgaben, indem du die Terme zuerst ausmultiplizierst und dann ableitest.

1. $f(x) = (x + 2)(3x - 4)$
2. $g(x) = x^2(x^3 + 5x)$

3. $h(t) = (t^2 - 1)(t^2 + 1)$ (Erkennst du hier eine binomische Formel, die das Ausmultiplizieren erleichtert?)
4. $k(x) = (2x^3 - x)(x^2 + x + 1)$
5. $m(a) = (a^2 + 1)(a - 1)$ (Leite nach $a$ ab.)

***Warum ist das wichtig? 5.7: Die Produktregel***

Die Produktregel ist unerlässlich, sobald Funktionen multiplikativ verknüpft sind und beide Faktoren von der Variablen abhängen. Viele reale Modelle entstehen durch Produkte von Funktionen (z.B. Umsatz = Preis × Menge, wobei Preis und Menge von einer anderen Größe abhängen können). Ohne die Produktregel könnten wir solche Modelle nicht korrekt analysieren. Sie ist ein Grundpfeiler der Differentialrechnung.

**Aufgabe 5.18 Anwendung der Produktregel in einer Kurvendiskussion (vereinfacht)**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x \cdot (x - 3)^2$.

1. **Definitionsbereich und Verhalten im Unendlichen:** Bestimme $D_f$ und untersuche $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.
2. **Nullstellen:** Bestimme die Nullstellen von $f(x)$ direkt aus der faktorisierten Form. Welche Vielfachheit haben sie? Was bedeutet das für den Graphen?
3. **Erste Ableitung mit Produktregel:** Identifiziere $u(x) = x$ und $v(x) = (x - 3)^2$.

   ***Tipp 5.40: Ableitung von $v(x) = (x - 3)^2$***

   Um $v(x) = (x-3)^2$ abzuleiten, kannst du es entweder ausmultiplizieren zu $x^2-6x+9$ und dann die Summen-/Potenzregel anwenden, oder du erkennst hier schon eine verkettete Funktion (die Kettenregel lernen wir später noch genauer kennen). Für jetzt: $(x - c)^2$ abgeleitet ist $2(x - c) \cdot 1 = 2(x - c)$. Also ist $v'(x) = 2(x - 3)$.

   Bilde $f'(x)$ mit der Produktregel. Vereinfache $f'(x)$ so weit wie möglich (Tipp: $(x - 3)$ ausklammern).
4. **Extremstellen:** Bestimme die Nullstellen von $f'(x)$. Untersuche das Vorzeichen von $f'(x)$ (Monotonieintervalle), um die Art der Extremstellen zu bestimmen. Berechne die y-Koordinaten der Extrempunkte.
5. **Skizze:** Skizziere den Graphen von $f(x)$ unter Verwendung deiner Ergebnisse.

Diese Aufgabe zeigt, wie die Produktregel auch bei der Analyse von Polynomfunktionen nützlich sein kann, besonders wenn sie in faktorisierter Form vorliegen oder entstehen.

### 5.8.2 Die Quotientenregel – Ableiten von $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

Nachdem wir Produkte ableiten können, stellt sich natürlich die Frage: Wie leitet man einen Bruch (Quotienten) von zwei Funktionen ab, bei dem die Variable $x$ sowohl im Zähler als auch im Nenner vorkommt? Ein Beispiel wäre $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$.

Auch hier gilt: Man darf **nicht** einfach den Zähler und den Nenner getrennt ableiten und die Ergebnisse dividieren! Also: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' \neq \frac{u'(x)}{v'(x)}$.

Für Quotienten benötigen wir die **Quotientenregel**.

### ϟ 5.21 *Quotientenregel*

Ist eine Funktion $f(x)$ als Quotient zweier differenzierbarer Funktionen $u(x)$ (Zähler) und $v(x)$ (Nenner) gegeben, also $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ (wobei $v(x) \neq 0$), dann lautet ihre Ableitung:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

In Kurzschreibweise: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

**Herleitung der Quotientenregel (für Interessierte):** Wir können die Quotientenregel tatsächlich aus der Produktregel und der (später noch genauer behandelten) Kettenregel herleiten. Eine einfachere Herleitung für Polynome und Potenzfunktionen gelingt, wenn wir den Quotienten als Produkt umschreiben: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot (v(x))^{-1}$. Jetzt wenden wir die Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ an, wobei $g(x) = (v(x))^{-1}$. Die Ableitung von $g(x) = (v(x))^{-1}$ ist nach der (verallgemeinerten) Potenzregel und Kettenregel $g'(x) = -1 \cdot (v(x))^{-2} \cdot v'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$. (Die Kettenregel besagt grob: äußere Ableitung mal innere Ableitung. Die äußere Funktion ist hier $(\dots)^{-1}$, ihre Ableitung ist $-1(\dots)^{-2}$. Die innere Funktion ist $v(x)$, ihre Ableitung ist $v'(x)$.)

Setzen wir dies in die Produktregel ein: $f'(x) = u'(x) \cdot (v(x))^{-1} + u(x) \cdot (-1 \cdot (v(x))^{-2} \cdot v'(x))$ $f'(x) = \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$ Um dies auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen, erweitern wir den ersten Bruch mit $v(x)$: $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x)}{v(x) \cdot v(x)} - \frac{u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$ $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$ Und das ist genau die Quotientenregel! Es ist schön zu sehen, wie die Regeln in der Mathematik zusammenhängen.

### *Tipp 5.41: Merkspruch für die Quotientenregel*

Ein gängiger Merkspruch, der die Reihenfolge der Terme im Zähler betont (da hier ein Minuszeichen steht, ist die Reihenfolge wichtig!), lautet: 'Ableitung des Zählers mal Nenner (stehen lassen) **minus** Zähler (stehen lassen) mal Ableitung des Nenners, das Ganze geteilt durch den Nenner zum Quadrat.' Oft abgekürzt als: **NAZ - ZAN** durch Nenner-Quadrat (Nenner mal Ableitung Zähler minus Zähler mal Ableitung Nenner). **Achtung:** Der Merkspruch ist 'NAZ - ZAN', aber die Formel ist $u'v - uv'$. $u$ ist der Zähler, $v$ der Nenner. Also: $u'v - uv'$. Ein anderer, vielleicht besserer Merkspruch ist: **'Nenner mal Ableitung Zähler minus Zähler mal Ableitung Nenner, durch Nenner hoch zwei.'** (N·AZ - Z·AN / N²) Oder: 'Ableitung oben mal unten minus oben mal Ableitung unten, durch unten ins Quadrat.'

Die Quotientenregel sieht auf den ersten Blick etwas komplizierter aus, aber mit Übung wird sie dir vertraut.

### Beispiel 5.18 Anwendung der Quotientenregel

Wir wollen die Funktion $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$ ableiten. (Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$)
**Schritt 1: Identifiziere $u(x)$ (Zähler) und $v(x)$ (Nenner).** $u(x) = x^2 + 1$ $v(x) = x - 2$
**Schritt 2: Bilde die Ableitungen $u'(x)$ und $v'(x)$.** $u'(x) = (x^2 + 1)' = 2x$ $v'(x) = (x - 2)' = 1$
**Schritt 3: Setze in die Quotientenregel** $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ **ein.** $f'(x) = \frac{(2x) \cdot (x-2) - (x^2+1) \cdot (1)}{(x-2)^2}$
**Schritt 4: Vereinfache den Zähler.** $f'(x) = \frac{2x^2 - 4x - (x^2+1)}{(x-2)^2}$ $f'(x) = \frac{2x^2 - 4x - x^2 - 1}{(x-2)^2}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x - 2)^2}$$

Den Nenner $(x - 2)^2$ lässt man oft in dieser Form stehen und multipliziert ihn nicht aus, da er für die Bestimmung von Nullstellen der Ableitung (wenn der Zähler Null ist) oder für das Verhalten an der Polstelle ($x = 2$) in dieser Form nützlicher ist.

**Achtung Stolperstein! 5.4: Häufige Fehler bei der Quotientenregel**

- **Reihenfolge im Zähler vertauscht:** Das Minuszeichen macht die Reihenfolge $u'v - uv'$ entscheidend! Ein Vertauschen führt zum falschen Vorzeichen.
- **Nenner nicht quadriert:** Der Nenner der Ableitung ist immer $[v(x)]^2$.
- **Klammern vergessen:** Besonders wenn $u(x)$ oder $v(x)$ Summen oder Differenzen sind, müssen beim Einsetzen in die Formel Klammern gesetzt werden, z.B. $u(x)v'(x)$ ist $(x^2 + 1) \cdot (1)$ und nicht $x^2 + 1 \cdot 1$.
- **Fehler beim Vereinfachen des Zählers:** Achte auf Vorzeichen, wenn du Klammern auflöst.

**Aufgabe 5.19 Quotientenregel trainieren**

Leite die folgenden Funktionen mit der Quotientenregel ab und vereinfache die Zähler der Ergebnisse so weit wie möglich. Gib auch den Definitionsbereich der ursprünglichen Funktion an.

1. $f(x) = \frac{x}{x+1}$
2. $g(x) = \frac{3x-2}{x^2}$ (Tipp: Dies könnte man auch als $g(x) = (3x - 2)x^{-2}$ mit der Produktregel oder nach Aufteilen des Bruchs $\frac{3x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$ mit Potenz-/Faktorregeln ableiten. Vergleiche die Ergebnisse!)
3. $h(t) = \frac{t^2+2t}{t-1}$
4. $k(x) = \frac{5}{2x+3}$ (Hier ist $u(x) = 5$, also $u'(x) = 0$. Was bedeutet das für die Formel?)

***Warum ist das wichtig? 5.8: Die Quotientenregel***

Die Quotientenregel ist notwendig, um gebrochen-rationale Funktionen korrekt ableiten zu können. Diese Funktionen spielen eine wichtige Rolle bei der Modellierung von Phänomenen, bei denen Verhältnisse oder Raten auftreten, die sich ändern, oder bei denen es Asymptoten gibt (z.B. Konzentrationen, Durchschnittskosten, bestimmte physikalische Gesetze). Ohne die Quotientenregel wären Kurvendiskussionen solcher Funktionen nicht möglich.

***Kurz & Knapp 5.5: Produkt- und Quotientenregel***

- **Produktregel** $(u \cdot v)' = u'v + uv'$: Anwenden, wenn zwei von $x$ abhängige Terme multipliziert werden.
- **Quotientenregel** $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$: Anwenden, wenn zwei von $x$ abhängige Terme dividiert werden (Bruch). Achte auf die Reihenfolge im Zähler!
- **Alternative bei Polynomen/einfachen Brüchen:** Manchmal ist Ausmultiplizieren (Produkt) oder Aufteilen des Bruchs (Quotient) und anschließendes Ableiten mit Summen-/Potenzregel einfacher oder eine gute Kontrollmöglichkeit.

**Aufgabe 5.20 Anwendung der neuen Regeln in Kontexten**

1. **Umsatzfunktion:** Ein Unternehmen verkauft ein Produkt. Die Preis-Absatz-Funktion (Nachfragefunktion) sei $p(x) = 100 - 0.5x$, wobei $x$ die verkaufte Menge und $p(x)$ der Preis pro Stück ist. Der Umsatz $U(x)$ ist Preis mal Menge, also $U(x) = p(x) \cdot x = (100 - 0.5x)x$.
   - Bestimme die Umsatzfunktion $U(x)$.
   - Bilde die erste Ableitung $U'(x)$ (Grenzerlös). Du kannst dies tun, indem du $U(x)$ zuerst ausmultiplizierst oder indem du die Produktregel auf $p(x) \cdot x$ anwendest. Vergleiche beide

Wege.

- Bei welcher Verkaufsmenge $x$ wird der Grenzerlös Null? Was könnte das für den Gesamtumsatz bedeuten?

2. **Durchschnittskosten:** Die Kostenfunktion eines Unternehmens sei $K(x) = 0.1x^3 - 2x^2 + 50x + 100$. Die Durchschnittskosten (Stückkosten) sind $k(x) = \frac{K(x)}{x}$.

    - Schreibe die Funktion für die Durchschnittskosten $k(x)$ auf.
    - Bilde die erste Ableitung $k'(x)$ mit der Quotientenregel.
    - (Für Experten): Versuche, die Stelle zu finden, an der die Durchschnittskosten minimal sind (also $k'(x) = 0$ setzen und nach $x$ auflösen – das kann hier schwierig werden, aber der Ansatz ist wichtig).

### 5.8.3 Die Kettenregel – Ableiten von verketteten Funktionen $f(x) = g(h(x))$

Wir haben gelernt, wie man Summen, Produkte und Quotienten von Funktionen ableitet. Aber was ist, wenn Funktionen ineinander 'verschachtelt' oder 'verkettet' sind? Stell dir eine Funktion vor wie eine Maschine: Du gibst $x$ hinein, die 'innere' Maschine $h$ macht etwas damit ($h(x)$), und dieses Ergebnis wird dann in eine 'äußere' Maschine $g$ gesteckt, die $g(h(x))$ produziert. Ein Beispiel wäre $f(x) = (2x+5)^3$. Hier ist die innere Funktion $h(x) = 2x + 5$ und die äußere Funktion $g(u) = u^3$.

Solche **verketteten Funktionen** (auch zusammengesetzte Funktionen genannt) können wir nicht einfach mit den bisherigen Regeln ableiten. Wir brauchen ein neues, sehr mächtiges Werkzeug: die **Kettenregel**.

**ϟ *5.22 Kettenregel***

Ist eine Funktion $f(x)$ als Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen $g(u)$ (äußere Funktion) und $u = h(x)$ (innere Funktion) gegeben, also $f(x) = g(h(x))$, dann lautet ihre Ableitung:

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

**In Worten:** 'Die Ableitung der äußeren Funktion (wobei die innere Funktion als Argument eingesetzt bleibt) multipliziert mit der Ableitung der inneren Funktion.' Oder kurz: **Äußere Ableitung mal innere Ableitung.**

**Die Kettenregel verstehen – Wie eine Zwiebel oder Matrjoschka-Puppen**

Stell dir eine verkettete Funktion wie eine Zwiebel oder eine russische Matrjoschka-Puppe vor. Um zum Kern zu gelangen, musst du Schicht für Schicht 'ableiten':

1. **Äußerste Schicht (äußere Funktion $g$):** Leite sie ab, aber behalte das, was 'innen' ist ($h(x)$), einfach bei. Das ist $g'(h(x))$.
2. **Nächste Schicht (innere Funktion $h$):** Leite sie ab. Das ist $h'(x)$.
3. **Multipliziere die Ergebnisse:** $g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

Wenn es mehrere Verschachtelungen gibt, z.B. $f(x) = a(b(c(x)))$, dann gilt die Regel entsprechend erweitert: $f'(x) = a'(b(c(x))) \cdot b'(c(x)) \cdot c'(x)$. Man leitet von außen nach innen ab und multipliziert die einzelnen Ableitungen.

Schauen wir uns das an einem Beispiel an, das wir auch ohne Kettenregel (mit viel Mühe) lösen könnten.

**Beispiel 5.19 Anwendung der Kettenregel bei einer potenzierten Klammer**

Wir wollen die Funktion $f(x) = (2x+5)^3$ ableiten.
**Schritt 1: Identifiziere die äußere und innere Funktion.**

- Die **innere Funktion** ist das, was in der Klammer potenziert wird: $h(x) = 2x + 5$.
- Die **äußere Funktion** ist das Potenzieren mit 3: Wenn wir $u = h(x)$ setzen, ist $g(u) = u^3$.

Also $f(x) = g(h(x))$ mit $g(u) = u^3$ und $h(x) = 2x + 5$.
**Schritt 2: Bilde die Ableitungen der inneren und äußeren Funktion.**

- Ableitung der inneren Funktion: $h'(x) = (2x + 5)' = 2$.
- Ableitung der äußeren Funktion (nach ihrer Variablen $u$): $g'(u) = (u^3)' = 3u^2$.

**Schritt 3: Setze in die Kettenregel $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ ein.**

- $g'(h(x))$ bedeutet: Nimm die äußere Ableitung $g'(u) = 3u^2$ und setze für $u$ wieder die innere Funktion $h(x) = 2x + 5$ ein. Also: $g'(h(x)) = 3(2x + 5)^2$.
- $h'(x)$ hatten wir schon: $h'(x) = 2$.

Zusammengesetzt: $f'(x) = \underbrace{3(2x+5)^2}_{g'(h(x))} \cdot \underbrace{2}_{h'(x)}$

$$f'(x) = 6(2x + 5)^2$$

**Probe durch Ausmultiplizieren (optional und hier aufwendig):** $(2x + 5)^3 = (2x + 5)(2x + 5)(2x+5) = (4x^2+20x+25)(2x+5) = 8x^3+20x^2+40x^2+100x+50x+125 = 8x^3+60x^2+150x+125$. Ableiten mit Summen-/Potenzregel: $f'(x) = (8x^3)'+(60x^2)'+(150x)'+(125)'$ $f'(x) = 24x^2+120x+150$.
Ist das dasselbe wie $6(2x + 5)^2$? $6(2x + 5)^2 = 6((2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2) = 6(4x^2 + 20x + 25) = 24x^2+120x+150$. Ja, es stimmt! Die Kettenregel war hier deutlich schneller als das Ausmultiplizieren.

***Tipp 5.42: Spezialfall der Kettenregel: Lineare innere Funktion***

Wenn die innere Funktion linear ist, also $h(x) = mx + b$, dann ist $h'(x) = m$. Die Kettenregel für $f(x) = g(mx + b)$ lautet dann: $f'(x) = g'(mx + b) \cdot m$. Beispiel: $f(x) = (4x - 7)^5$. Äußere Funktion $g(u) = u^5 \implies g'(u) = 5u^4$. Innere Funktion $h(x) = 4x - 7 \implies h'(x) = 4$. $f'(x) = 5(4x - 7)^4 \cdot 4 = 20(4x - 7)^4$.

**Aufgabe 5.21 Kettenregel trainieren**

Leite die folgenden Funktionen mit der Kettenregel ab. Identifiziere zuerst sorgfältig die äußere und die innere Funktion.

1. $f(x) = (x^2 + 1)^4$
2. $g(x) = (5 - 3x)^7$
3. $h(t) = \sqrt{t^2 + 3t}$ (Tipp: $\sqrt{u} = u^{1/2}$)
4. $k(x) = \frac{1}{(x^3-2x)^2}$ (Tipp: $k(x) = (x^3 - 2x)^{-2}$)
5. $m(x) = (ax^2 + b)^n$ (wobei $a, b, n$ Konstanten sind. Was ist die Ableitung?)

**Achtung Stolperstein! 5.5: Häufige Fehler bei der Kettenregel**

- **Die innere Ableitung $h'(x)$ wird vergessen!** Das ist der häufigste Fehler. Man leitet die äußere Funktion ab und vergisst, mit der Ableitung der inneren Funktion zu multiplizieren.
- **Falsche Identifikation von äußerer und innerer Funktion:** Überlege dir genau, welche Operation 'zuerst' auf $x$ wirkt (innere Funktion) und welche 'danach' auf das Ergebnis (äußere Funktion).
- **Äußere Funktion nicht korrekt abgeleitet:** Wenn $g(u) = u^n$, dann ist $g'(u) = nu^{n-1}$. In $g'(h(x))$ muss dann für $u$ der gesamte innere Term $h(x)$ eingesetzt werden, bevor mit $h'(x)$ multipliziert wird.

***Warum ist das wichtig? 5.9: Die Kettenregel***

Die Kettenregel ist eine der wichtigsten und am häufigsten angewendeten Ableitungsregeln. Sehr viele Funktionen, denen wir begegnen, sind Verkettungen. Ohne die Kettenregel könnten wir Funktionen wie $e^{x^2}$, $\sin(3x)$, $\ln(x^2+1)$ oder $\sqrt{4-x^2}$ nicht ableiten. Sie ist der Schlüssel zur Analyse einer riesigen Klasse von Funktionen und deren Verhalten.

***Kurz & Knapp 5.6: Kettenregel***

- **Anwendung:** Für verkettete Funktionen $f(x) = g(h(x))$ ('Funktion in Funktion').
- **Formel:** $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ ('Äußere Ableitung mal innere Ableitung').
- **Vorgehen:**
  1. Innere Funktion $h(x)$ und äußere Funktion $g(u)$ identifizieren.
  2. Beide getrennt ableiten: $h'(x)$ und $g'(u)$.
  3. In $g'(u)$ für $u$ wieder $h(x)$ einsetzen, um $g'(h(x))$ zu erhalten.
  4. $g'(h(x))$ mit $h'(x)$ multiplizieren.

### 5.8.4 Zusammenfassung und kombinierte Anwendung aller Ableitungsregeln

Jetzt, da wir die Konstanten-, Potenz-, Faktor-, Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel kennen, haben wir einen mächtigen Werkzeugkasten, um eine sehr große Vielfalt von Funktionen zu differenzieren. Oft müssen wir mehrere dieser Regeln in einer einzigen Aufgabe geschickt kombinieren.

***Kurz & Knapp 5.7: Alle bisherigen Ableitungsregeln im Überblick***

- **Konstantenregel:** $(c)' = 0$
- **Potenzregel:** $(x^n)' = nx^{n-1}$
- **Faktorregel:** $(c \cdot g(x))' = c \cdot g'(x)$
- **Summenregel:** $(g(x) \pm h(x))' = g'(x) \pm h'(x)$
- **Produktregel:** $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
- **Quotientenregel:** $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$
- **Kettenregel:** $(g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Das Erkennen, welche Regel(n) in welcher Reihenfolge anzuwenden sind, ist eine Frage der Übung und des genauen Hinsehens auf die Struktur der Funktion.

**Aufgabe 5.22 Kombinierte Anwendung der Ableitungsregeln**

Leite die folgenden Funktionen ab. Gib an, welche Regeln du in welcher Reihenfolge anwendest.

1. $f(x) = x^2 \cdot (2x+1)^3$ (Produkt- und Kettenregel)
2. $g(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x}$ (Quotienten- und Kettenregel, oder erst Zähler ausmultiplizieren)
3. $h(t) = t \cdot \sqrt{1-t^2}$ (Produkt- und Kettenregel)
4. **Für Tüftler:** Untersuche die Funktion $f(x) = x \cdot (x-4)^3$ auf Nullstellen, Monotonie und Extrempunkte. Skizziere den Graphen. (Diese Funktion ähnelt der Aufgabe 5.18, erfordert aber nun die Kettenregel für $v'(x)$.)

***Tipp 5.43: Struktur beim Ableiten komplexer Funktionen***

Wenn du eine komplizierte Funktion ableiten musst:

1. **Analysiere die Gesamtstruktur:** Ist es eine Summe, ein Produkt, ein Quotient oder eine Verkettung als 'oberste' Operation?
2. **Wende die entsprechende Hauptregel an.** Die Teile $u(x), v(x), g(u), h(x)$ können selbst wieder komplex sein.
3. **Leite die Teilfunktionen ab:** Hierfür musst du eventuell erneut Ableitungsregeln anwenden. Arbeite dich 'von außen nach innen' oder 'von oben nach unten' durch die Struktur.
4. **Setze alles zusammen und vereinfache (wenn nötig und sinnvoll).**

Mit etwas Übung entwickelst du einen Blick dafür!

### 5.8.5 Weitere herausfordernde Anwendungsaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind etwas komplexer und erfordern die sorgfältige Anwendung und Kombination der bisher gelernten Konzepte der Differentialrechnung. Sie sind eine gute Vorbereitung auf typische Problemstellungen, wie sie auch im Abitur vorkommen können.

**Aufgabe 5.23 Optimierungsproblem – Die optimale Schachtel**

Aus einem quadratischen Stück Pappe der Seitenlänge $L = 30\,\text{cm}$ soll durch Ausschneiden von Quadraten an den Ecken und anschließendes Hochbiegen der entstehenden Seitenlaschen eine offene Schachtel (ohne Deckel) mit maximalem Volumen hergestellt werden.

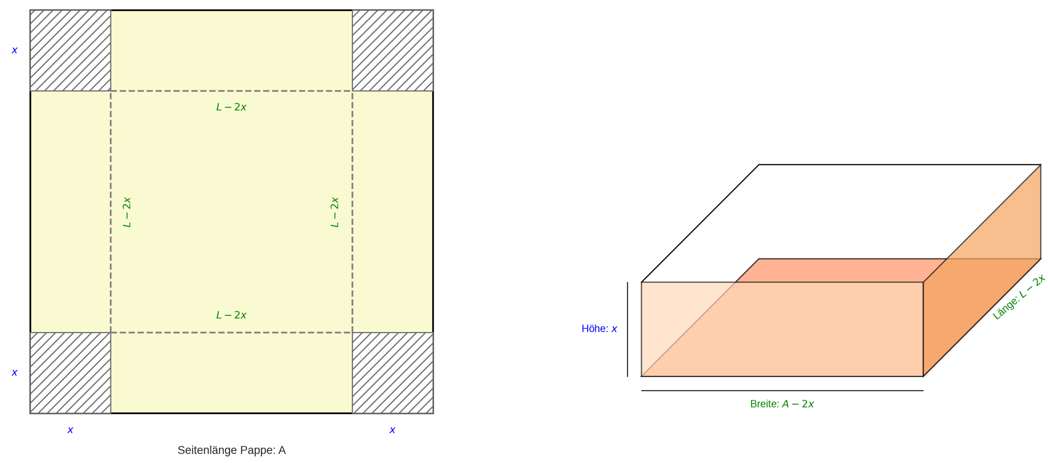


Abbildung 5.13: Von der Pappe zur Schachtel

1. **Variable festlegen:** Sei $x$ die Seitenlänge der Quadrate, die an den Ecken ausgeschnitten werden.
2. **Maße der Schachtel:** Drücke die Länge $l$, die Breite $b$ und die Höhe $h$ der entstehenden Schachtel in Abhängigkeit von $x$ aus. Bedenke, dass von jeder Seite der Pappe $2x$ weggeschnitten wird.
3. **Definitionsbereich für $x$:** Welche Werte für $x$ sind in diesem Sachzusammenhang sinnvoll? (Die Seitenlängen müssen positiv sein, und man kann nicht mehr wegschneiden, als Pappe da ist).
4. **Zielfunktion für das Volumen:** Stelle die Funktion $V(x)$ auf, die das Volumen der Schachtel in Abhängigkeit von $x$ beschreibt ($V = l \cdot b \cdot h$).
5. **Extremwertsuche:**
   - Bilde die erste Ableitung $V'(x)$.
   - Setze $V'(x) = 0$ und löse nach $x$, um die kritischen Stellen zu finden.
   - Überprüfe mit der zweiten Ableitung $V''(x)$ (oder dem Vorzeichenwechselkriterium von $V'(x)$), ob an den kritischen Stellen ein Maximum oder Minimum vorliegt.
   - Berücksichtige den Definitionsbereich von $x$: Liegen die gefundenen Extremstellen im sinnvollen Bereich?
6. **Antwort:** Gib die Seitenlänge $x$ der auszuschneidenden Quadrate an, für die das Volumen der Schachtel maximal wird, sowie das maximale Volumen selbst.

**Aufgabe 5.24 Rekonstruktion einer Polynomfunktion**

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ hat die folgenden Eigenschaften:

- Der Graph der Funktion geht durch den Ursprung $P(0|0)$.
- Der Ursprung ist gleichzeitig ein Wendepunkt der Funktion.
- Die Tangente im Wendepunkt (die Wendetangente) hat die Gleichung $y_W(x) = -3x$.

- Der Graph der Funktion hat eine Nullstelle bei $x_N = 1$.

Bestimme die Funktionsgleichung $f(x)$.

**_Tipp 5.44: Bedingungen übersetzen_**

Übersetze jede der gegebenen Eigenschaften in eine mathematische Gleichung für die Funktion $f(x)$ oder ihre Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$:

- 'Graph geht durch $P(x_0|y_0)$' $\implies$ $f(x_0) = y_0$.
- 'Wendepunkt bei $x_W$' $\implies$ $f''(x_W) = 0$.
- 'Tangentensteigung im Punkt $P(x_P|f(x_P))$ ist $m$' $\implies$ $f'(x_P) = m$. Die Wendetangente gibt dir also die Steigung im Wendepunkt.
- 'Nullstelle bei $x_N$' $\implies$ $f(x_N) = 0$.

Du erhältst ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten $a, b, c, d$. Löse dieses System.

**Lineare Gleichungssysteme (LGS) lösen – Ein kurzer Überblick**

Wenn du die Bedingungen aus der Aufgabe oben in Gleichungen übersetzt, wirst du ein System von mehreren linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten ($a, b, c, d$) erhalten. So ein System nennt man **Lineares Gleichungssystem (LGS)**. Zum Beispiel könnte ein einfaches LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten $x, y$ so aussehen:

$$\begin{aligned} I: &\quad 2x + 3y = 7 \\ II: &\quad x - y = 1 \end{aligned}$$

Es gibt verschiedene Methoden, solche Systeme zu lösen:

- **Einsetzungsverfahren:** Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen und diesen Term in die andere(n) Gleichung(en) einsetzen.
- **Gleichsetzungsverfahren:** Zwei Gleichungen nach derselben Variablen auflösen und die entstehenden Terme gleichsetzen.
- **Additions-/Subtraktionsverfahren:** Gleichungen (oder Vielfache davon) so addieren oder subtrahieren, dass eine Variable wegfällt.

Für größere Systeme mit mehr Variablen (wie hier mit $a, b, c, d$) werden diese Verfahren schnell unübersichtlich. Es gibt aber systematischere Methoden, wie das **Gaußsche Eliminationsverfahren** (oft auch mit Matrizen dargestellt), die in der Schule meist ausführlich behandelt werden.
**Für diese Aufgabe:** Versuche, die vier Gleichungen, die du aus den Bedingungen erhältst, geschickt zu nutzen. Oft sind einige Gleichungen sehr einfach (z.B. wenn $f(0) = 0$ direkt $d = 0$ liefert). Setze bekannte Werte direkt in die anderen Gleichungen ein, um das System zu vereinfachen.
*Hinweis zum Selbstlernen:* Das Lösen von LGS ist ein eigenes wichtiges Thema. Wenn du hier Schwierigkeiten hast, ist das nicht schlimm! Du kannst diesen Teil der Aufgabe überspringen oder dich auf das Aufstellen der Gleichungen konzentrieren. Das Lösen von LGS ist aber eine sehr nützliche Fähigkeit für viele Bereiche der Mathematik und darüber hinaus – es lohnt sich, das bei Gelegenheit zu üben! Diese Aufgabe ist eine gute Herausforderung, um dein mathematisches Denken zu schulen.

**Aufgabe 5.25 Bewegungsanalyse – Zwei Läufer auf der Bahn**

Zwei Läufer, A und B, bewegen sich auf einer geraden Bahn. Läufer A startet zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ am Punkt $s_A(0) = 0\,\mathrm{m}$. Seine Position (in Metern) zum Zeitpunkt $t$ (in Sekunden) wird durch die Funktion $s_A(t) = t^2$ beschrieben. Läufer B startet gleichzeitig am Punkt $s_B(0) = 10\,\mathrm{m}$. Seine Position wird durch $s_B(t) = -0.5t^2 + 7t + 10$ beschrieben. Wir betrachten das Zeitintervall $[0, 5]$ Sekunden.

1. **Geschwindigkeiten:** Bestimme die Geschwindigkeitsfunktionen $v_A(t) = s'_A(t)$ und $v_B(t) = s'_B(t)$ der beiden Läufer.
2. **Gleiche Geschwindigkeit:** Zu welchem Zeitpunkt $t$ haben beide Läufer die gleiche Geschwindigkeit? Wie groß ist diese Geschwindigkeit?
3. **Gleiche Position:** Haben die Läufer jemals die gleiche Position im betrachteten Zeitintervall $[0, 5]$? Wenn ja, zu welchem Zeitpunkt/welchen Zeitpunkten?

   ***Tipp 5.45: Gleichung lösen***

   Um herauszufinden, wann sie die gleiche Position haben, musst du die Gleichung $s_A(t) = s_B(t)$ lösen. Das wird auf eine quadratische Gleichung führen.

4. **Abstand der Läufer:**
   - Stelle eine Funktion $d(t)$ auf, die den Abstand zwischen den beiden Läufern zum Zeitpunkt $t$ beschreibt. *Hinweis:* Überlege zuerst, welcher Läufer im Intervall $[0, 5]$ vorne liegt, um das Betragszeichen bei der Differenz $d(t) = |s_B(t) - s_A(t)|$ auflösen zu können. Du hast in Teil c) untersucht, ob sie sich treffen.
   - Zu welchem Zeitpunkt im Intervall $[0, 5]$ ist der Abstand zwischen den Läufern minimal? Wie groß ist dieser minimale Abstand?
   - Zu welchem Zeitpunkt im Intervall $[0, 5]$ ist der Abstand zwischen den Läufern maximal? Wie groß ist dieser maximale Abstand?

     ***Tipp 5.46: Extremwerte im Intervall***

     Um Extremwerte einer Funktion in einem abgeschlossenen Intervall $[t_1, t_2]$ zu finden, musst du die Funktionswerte an den kritischen Stellen (wo $d'(t) = 0$) **und** an den Rändern des Intervalls ($t_1$ und $t_2$) untersuchen und vergleichen.

**Aufgabe 5.26 Tangentenprobleme an einer kubischen Funktion**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3x$.

1. **Parallele Tangenten:**
   - Bestimme die Steigung der Geraden $g(x) = 9x - 5$.
   - Gibt es Punkte auf dem Graphen von $f(x)$, an denen die Tangente parallel zur Geraden $g(x)$ ist? Wenn ja, bestimme die Koordinaten dieser Punkte.
   - Gib die Gleichungen der Tangenten an den Graphen von $f(x)$ in diesen Punkten an.
2. **Tangente von einem externen Punkt:** Von welchem Punkt $P_y(0|y_P)$ auf der y-Achse aus kann man eine Tangente an den Graphen von $f(x)$ legen, die den Graphen an der Stelle $x_B = 2$ berührt?

**Tipp 5.47: Schrittweise Lösung**

(a) Bestimme die y-Koordinate des Berührpunkts $B(2|f(2))$.

(b) Bestimme die Steigung $m_T$ der Tangente an den Graphen von $f(x)$ an der Stelle $x_B = 2$.

(c) Stelle die Gleichung der Tangente $t_B(x)$ im Punkt $B$ auf.

(d) Der gesuchte Punkt $P_y(0|y_P)$ muss auf dieser Tangente $t_B(x)$ liegen. Setze $x = 0$ in die Tangentengleichung ein, um $y_P$ zu finden.

**Ausblick auf weitere Ableitungsregeln und Funktionen**

Wir haben nun die wichtigsten Ableitungsregeln (Konstanten-, Potenz-, Faktor-, Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel) kennengelernt. Mit diesem Werkzeugkasten kannst du schon eine riesige Bandbreite an Funktionen ableiten!
In den folgenden Kapiteln (oder in weiterführenden Kursen) wirst du lernen, wie man auch andere wichtige Funktionstypen ableitet, wie zum Beispiel:

- **Exponentialfunktionen** (z.B. $f(x) = e^x$ oder $f(x) = 2^x$)
- **Logarithmusfunktionen** (z.B. $f(x) = \ln(x)$ oder $f(x) = \log_{10}(x)$)
- **Trigonometrische Funktionen** (z.B. $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \tan(x)$)

Die hier gelernten Regeln, insbesondere die Produkt-, Quotienten- und Kettenregel, werden auch für diese Funktionstypen von zentraler Bedeutung sein, wenn sie in Kombinationen auftreten (z.B. $f(x) = x \cdot e^x$ oder $f(x) = \sin(x^2)$). Das Fundament, das du dir hier erarbeitet hast, ist also sehr wertvoll für alles, was noch kommt!

# Abschluss des Kapitels zur Differentialrechnung

Herzlichen Glückwunsch! Du hast dich nun intensiv mit den Grundlagen der Differentialrechnung auseinandergesetzt. Von der intuitiven Idee der Tangentensteigung über die formale Definition der Ableitung bis hin zu den wichtigen Ableitungsregeln und ihrer Anwendung in Kurvendiskussionen und Optimierungsproblemen hast du einen weiten Weg zurückgelegt.

***ϟ 5.23 Kernkompetenzen dieses Kapitels***

- Du verstehst die **Ableitung** als Maß für die momentane Veränderung einer Funktion und als Steigung ihrer Tangente.
- Du kannst die **grundlegenden Ableitungsregeln** (Konstanten-, Potenz-, Faktor-, Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel) sicher anwenden, um die Ableitungsfunktionen verschiedener Funktionstypen zu bestimmen.
- Du kannst die **erste und zweite Ableitung** nutzen, um das Verhalten von Funktionen detailliert zu untersuchen: Monotonie, Art und Lage von Extrempunkten, Krümmungsverhalten und Wendepunkte.
- Du kannst das **Grenzwertverhalten** von Polynomen und einfachen gebrochen-rationalen Funktionen analysieren.

- Du bist in der Lage, eine **vollständige Kurvendiskussion** für Polynomfunktionen und einfache gebrochen-rationale Funktionen durchzuführen und deren Graphen zu skizzieren.
- Du hast erste Einblicke gewonnen, wie die Differentialrechnung zur Lösung von **Anwendungsproblemen** (z.B. Optimierung, Bewegungsanalyse) eingesetzt werden kann.

Diese Fähigkeiten sind nicht nur für die Mathematik selbst von großer Bedeutung, sondern bilden auch die Grundlage für viele Anwendungen in den Naturwissenschaften, der Technik und den Wirtschaftswissenschaften.

**Der Weg geht weiter...**

Die Differentialrechnung ist nur ein Teil der Analysis. Ein ebenso wichtiges und eng damit verbundenes Gebiet ist die **Integralrechnung**, mit der wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen werden. Dort geht es darum, den umgekehrten Prozess zur Ableitung zu finden (das 'Aufleiten' oder Integrieren) und damit zum Beispiel Flächen unter Kurven oder Volumina von Rotationskörpern zu berechnen. Du wirst sehen, dass viele der hier gelernten Konzepte auch dort wieder eine Rolle spielen werden.
Bleib neugierig und übe fleißig weiter – die Welt der Mathematik hat noch viele spannende Entdeckungen für dich bereit!

**Aufgabe 5.27 Checkliste: Von kubischen Funktionen zu linearen Ableitungen**

Diese Aufgabe zeigt dir, wie dein Wissen über lineare Funktionen dir hilft, das Verhalten von Polynomen 3. Grades zu verstehen. Betrachte die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 3$.

(a) **Ableitungen bilden:** Berechne die erste Ableitung $f'(x)$ und die zweite Ableitung $f''(x)$ der Funktion $f(x)$.

(b) **Analyse der zweiten Ableitung:**

- Welchen Funktionstyp erkennst du in $f''(x)$? Gib die Steigung $m_{f''}$ und den y-Achsenabschnitt $c_{f''}$ dieser Funktion an.
- Berechne die Nullstelle $x_W$ von $f''(x)$. Welche besondere Bedeutung hat diese Stelle $x_W$ für den Graphen der ursprünglichen Funktion $f(x)$? (Erinnere dich an die Definition von Wendepunkten).

(c) **Krümmungsverhalten von $f(x)$ bestimmen:** Nutze dein Wissen über lineare Funktionen, um das Vorzeichen von $f''(x)$ zu bestimmen:

- Für welche $x$-Werte ist $f''(x) > 0$? (Tipp: Wann sind die Werte einer steigenden/fallenden linearen Funktion positiv?)
- Für welche $x$-Werte ist $f''(x) < 0$?
- Welche Schlussfolgerungen ziehst du daraus für das Krümmungsverhalten (links- oder rechtsgekrümmt) des Graphen von $f(x)$? Gib die Intervalle an.

(d) **Reflexion:** Erkläre in eigenen Worten, warum das Verständnis der Eigenschaften einer linearen Funktion (insbesondere ihrer Nullstelle und des Vorzeichenverlaufs in Abhängigkeit von der Steigung) nützlich ist, um das Krümmungsverhalten einer kubischen Funktion zu analysieren.

**Aufgabe 5.28 Checkliste: Von Polynomen 4. Grades zu quadratischen Ableitungen**

Diese Aufgabe zeigt dir, wie dein Wissen über quadratische Funktionen dir hilft, das Verhalten von Polynomen 4. Grades zu verstehen. Betrachte die Funktion $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + 1$.

(a) **Ableitungen bilden:** Berechne die erste Ableitung $g'(x)$ und die zweite Ableitung $g''(x)$ der Funktion $g(x)$.

(b) **Analyse der zweiten Ableitung:**

- Welchen Funktionstyp erkennst du in $g''(x)$? Gib die Parameter dieser Funktion an (z.B. Öffnungsfaktor, etc.). Ist der Graph von $g''(x)$ nach oben oder unten geöffnet?
- Berechne die Nullstellen $x_{W1}, x_{W2}$ von $g''(x)$ (falls vorhanden). Welche Bedeutung haben diese Stellen für den Graphen von $g(x)$?

(c) **Krümmungsverhalten von $g(x)$ bestimmen:** Nutze dein Wissen über quadratische Funktionen, um das Vorzeichen von $g''(x)$ zu bestimmen:

- Skizziere (oder stelle dir vor) den Graphen von $g''(x)$ basierend auf Öffnungsrichtung und Nullstellen.
- Für welche $x$-Werte ist $g''(x) > 0$?
- Für welche $x$-Werte ist $g''(x) < 0$?
- Welche Schlussfolgerungen ziehst du daraus für das Krümmungsverhalten des Graphen von $g(x)$? Gib die Intervalle an. Wie viele Wendepunkte hat $g(x)$?

(d) **Reflexion:** Erkläre, wie das Verständnis der Eigenschaften einer quadratischen Funktion (Öffnung, Nullstellen, Vorzeichenverlauf) hilft, das Krümmungsverhalten eines Polynoms 4. Grades zu analysieren.

**Aufgabe 5.29 Checkliste: Die maximale Steigung finden (Anwendung)**

Oft ist nicht nur interessant, wo eine Funktion ihren höchsten oder tiefsten Wert hat, sondern auch, wo sie am stärksten steigt oder fällt. Das führt uns zur Untersuchung der Ableitung selbst. Ein Unternehmen stellt fest, dass seine Produktionskosten $K(x)$ (in Euro) bei der Herstellung von $x$ Einheiten eines Produkts durch die Funktion $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 10x^2 + 150x + 500$ für $x \in [0, 25]$ beschrieben werden können. Die *Grenzkosten* geben an, um wie viel die Kosten ungefähr steigen, wenn eine Einheit mehr produziert wird. Mathematisch sind die Grenzkosten die Ableitung der Kostenfunktion, also $K'(x)$. Das Unternehmen möchte wissen, bei welcher Produktionsmenge $x$ die Grenzkosten $K'(x)$ **minimal** sind (d.h., wann die Kosten pro zusätzlich produzierter Einheit am geringsten ansteigen).

(a) **Grenzkostenfunktion bestimmen:** Bilde die erste Ableitung $K'(x)$ der Kostenfunktion $K(x)$. Diese Funktion $K'(x)$ beschreibt die Steigung der Kostenfunktion.

(b) **Ziel verstehen:** Wir suchen das Minimum der Funktion $K'(x)$. Wie findet man normalerweise Minima einer Funktion? (Tipp: Denke an die Ableitung der zu untersuchenden Funktion!)

(c) **Ableitung der Grenzkostenfunktion bilden:** Bilde die Ableitung von $K'(x)$, also die zweite Ableitung der ursprünglichen Kostenfunktion, $K''(x)$.

(d) **Kritische Stelle für $K'(x)$ finden:** Setze $K''(x) = 0$ und löse nach $x$. Dies ist die potenzielle Stelle $x_W$, an der die Grenzkosten $K'(x)$ minimal (oder maximal) sein könnten.

(e) **Art des Extremums von $K'(x)$ prüfen:** Überprüfe mit der nächsten Ableitung, also $K'''(x)$, ob bei $x_W$ tatsächlich ein Minimum für $K'(x)$ vorliegt. (Wenn $K'''(x_W) \neq 0$ und $K''(x_W) = 0$, dann ist $x_W$ ein Wendepunkt von $K(x)$ und ein Extremum von $K'(x)$). Alternativ: Untersuche den Vorzeichenwechsel von $K''(x)$ bei $x_W$.

(f) **Antwort formulieren:** Bei welcher Produktionsmenge $x$ sind die Grenzkosten minimal? Wie hoch sind die minimalen Grenzkosten $K'(x_W)$?

(g) **Reflexion:** Was für ein besonderer Punkt ist $x_W$ für die ursprüngliche Kostenfunktion $K(x)$? Warum ist es plausibel, dass die Steigung einer Funktion (hier $K(x)$) an einem Wendepunkt maximal oder minimal wird?

# 6 Einführung in die Integralrechnung

Willkommen zum nächsten großen Abenteuer in der Analysis: der **Integralrechnung**! Nachdem wir uns im vorherigen Kapitel intensiv damit beschäftigt haben, wie sich Funktionen verändern (Steigung, Ableitung), wollen wir uns nun oft dem umgekehrten Problem zuwenden oder eine ganz neue Frage stellen: Wie groß ist eigentlich die Fläche unter einer Kurve?

**Was du in diesem Kapitel lernen wirst:**

Nachdem du dieses Kapitel durchgearbeitet hast, wirst du in der Lage sein:

- das Konzept des **bestimmten Integrals** als Grenzwert von Riemannsummen (Ober- und Untersummen) zu verstehen und es als (orientierten) **Flächeninhalt** unter einem Funktionsgraphen zu interpretieren.
- den Begriff der **Stammfunktion** $F(x)$ als Umkehrung der Ableitung zu definieren und die Menge aller Stammfunktionen als **unbestimmtes Integral** $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ zu verstehen.
- die grundlegenden **Integrationsregeln** für Polynomfunktionen und einfache Potenzfunktionen (Potenz-, Faktor-, Summenregel, Integral einer Konstanten) sicher anzuwenden, um Stammfunktionen zu bilden.
- den **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)** zu verstehen und anzuwenden, um bestimmte Integrale mithilfe von Stammfunktionen $(F(b) - F(a))$ exakt zu berechnen.
- geometrische **Flächeninhalte** mit bestimmten Integralen zu ermitteln, auch wenn Teile des Graphen unterhalb der x-Achse liegen oder die Fläche zwischen zwei Kurven eingeschlossen ist.
- **Symmetrieeigenschaften** von Funktionen zu nutzen, um die Berechnung bestimmter Integrale zu vereinfachen.
- den **Mittelwert einer Funktion** über einem Intervall mithilfe des bestimmten Integrals zu berechnen und zu interpretieren.
- die Integralrechnung als Werkzeug zur Rekonstruktion von Gesamtgrößen aus gegebenen **Änderungsraten** in einfachen Anwendungsbeispielen zu verstehen.

Du wirst somit die fundamentalen Ideen und Techniken der Integralrechnung für Polynomfunktionen beherrschen und ihre Bedeutung für Flächenberechnungen und andere Anwendungen erkennen.

Stell dir vor, du hast den Graphen der Geschwindigkeit eines Autos über die Zeit aufgezeichnet. Die Fläche unter diesem Graphen entspricht der zurückgelegten Strecke. Oder denke an einen Stausee: Wenn du weißt, wie viel Wasser pro Sekunde zufließt (eine Zuflussrate, also eine Änderungsrate), wie kannst du die Gesamtmenge an Wasser im See nach einer bestimmten Zeit berechnen? Für solche und viele andere Probleme liefert die Integralrechnung die passenden Werkzeuge.

**Wozu Integralrechnung? Ein Universalschlüssel!**

Die Integralrechnung ist nicht nur 'das Gegenteil vom Ableiten'. Sie ist ein unglaublich mächtiges und vielseitiges Konzept, das uns hilft:

- **Flächeninhalte zu berechnen:** Flächen unter Kurven, zwischen Kurven oder von komplexeren Formen.
- **Volumina zu bestimmen:** Volumen von Rotationskörpern oder anderen dreidimensionalen Objekten.
- **Aus Änderungsraten Gesamtgrößen zu rekonstruieren:**
  - Aus der Geschwindigkeit die zurückgelegte Strecke.
  - Aus der Zuflussrate die Gesamtmenge an Wasser.

- Aus den Grenzkosten die Gesamtkostenfunktion (bis auf eine Konstante).

- **Viele weitere Anwendungen** in Physik (Arbeit, Ladung), Wirtschaft, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Biologie zu erschließen.

Du siehst, die Integralrechnung ist ein echter Universalschlüssel in vielen wissenschaftlichen und technischen Disziplinen!

***Schon gewusst? Der kleine Gauß und die blitzschnelle Summe***

Carl Friedrich Gauß (1777–1855) gilt als einer der größten Mathematiker aller Zeiten. Schon als kleiner Junge zeigte sich seine außergewöhnliche Begabung. Eine berühmte Geschichte erzählt, wie sein Lehrer der Klasse die Aufgabe gab, alle Zahlen von 1 bis 100 zu addieren, vermutlich um die Schüler eine Weile zu beschäftigen. Doch der junge Carl Friedrich hatte die Lösung nach kürzester Zeit!
Wie hat er das gemacht? Statt mühsam $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ zu rechnen, bemerkte er ein Muster:

- Die erste Zahl (1) und die letzte Zahl (100) ergeben zusammen $1 + 100 = 101$.
- Die zweite Zahl (2) und die vorletzte Zahl (99) ergeben zusammen $2 + 99 = 101$.
- Die dritte Zahl (3) und die drittletzte Zahl (98) ergeben zusammen $3 + 98 = 101$.

Er erkannte, dass es genau 50 solcher Paare gibt, die jeweils die Summe 101 ergeben. Also rechnete er blitzschnell: $50 \cdot 101 = 5050$.
Diese Überlegung führt zur allgemeinen Formel für die Summe der ersten $n$ natürlichen Zahlen (die 'Gaußsche Summenformel'):

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Für $n = 100$ ist das $\frac{100\cdot(100+1)}{2} = \frac{100\cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$.
**Das Summenzeichen $\Sigma$:** Um solch lange Summen nicht immer ausschreiben zu müssen, gibt es in der Mathematik ein praktisches Symbol: das griechische große Sigma $\Sigma$. Es bedeutet 'Bilde die Summe von...'. Die Summe $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ können wir damit kurz schreiben als:

$$\sum_{i=1}^{100} i$$

Das liest sich so: 'Summe aller $i$, wobei $i$ von 1 bis 100 läuft.'

- $\Sigma$: Das Summenzeichen selbst.
- $i$: Der **Laufindex** (oft auch $k$ oder $j$ genannt). Er nimmt nacheinander die Werte vom Startwert bis zum Endwert an.
- $i = 1$: Der **Startwert** des Laufindexes (unter dem $\Sigma$).
- 100: Der **Endwert** des Laufindexes (über dem $\Sigma$).
- $i$: Der Term, der für jeden Wert des Laufindexes gebildet und dann aufsummiert wird.

Allgemein schreibt man: $\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n$. Diese Schreibweise wird uns im nächsten Abschnitt sehr nützlich sein, wenn wir Flächen unter Kurven durch viele kleine Rechtecke annähern wollen!

Ein fundamentaler Zugang, um das Konzept der Fläche unter einer Kurve zu verstehen, ist die Annäherung durch einfache geometrische Figuren.

## 6.1 Der Weg zur Fläche – Riemannsummen

Wie können wir den Flächeninhalt $A$ unter dem Graphen einer Funktion $f(x)$ über einem Intervall $[a, b]$ bestimmen, wenn der Graph krumm ist und wir keine einfache geometrische Formel dafür haben? Die Idee des Mathematikers Bernhard Riemann (1826–1866) war, diese Fläche durch eine Summe von schmalen Rechtecksflächen anzunähern.

***ϟ 6.1 Die Idee der Riemannsummen (Untersumme und Obersumme)***

Um den Flächeninhalt unter dem Graphen einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ anzunähern (wir nehmen zunächst an, dass $f(x) \geq 0$ im Intervall ist), gehen wir wie folgt vor:

1. **Unterteilung des Intervalls:** Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in $n$ gleich breite Teilintervalle. Die Breite jedes Teilintervalls ist dann $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Die Teilungspunkte seien $x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \dots, x_i = a + i\Delta x, \dots, x_n = a + n\Delta x = b$.

2. **Rechtecke konstruieren:** Über jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ (für $i = 1, \dots, n$) errichten wir ein Rechteck. Die Höhe dieses Rechtecks können wir auf verschiedene Weisen wählen:

   - **Untersumme ($U_n$):** Wir wählen als Höhe des $i$-ten Rechtecks den *kleinsten* Funktionswert $m_i = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$ in diesem Teilintervall. Die Summe der Flächen dieser Rechtecke, $U_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x$, nennt man die Untersumme. Sie ist eine untere Schranke für den gesuchten Flächeninhalt (d.h. $U_n \leq A$).
   - **Obersumme ($O_n$):** Wir wählen als Höhe des $i$-ten Rechtecks den *größten* Funktionswert $M_i = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$ in diesem Teilintervall. Die Summe der Flächen dieser Rechtecke, $O_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x$, nennt man die Obersumme. Sie ist eine obere Schranke für den gesuchten Flächeninhalt (d.h. $A \leq O_n$).
   - **Riemannsumme mit linken/rechten Randpunkten oder Mittelpunkten:** Man kann als Höhe des $i$-ten Rechtecks auch einfach den Funktionswert am linken Rand $f(x_{i-1})$, am rechten Rand $f(x_i)$ oder in der Mitte des Teilintervalls $f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})$ wählen. Diese Summen nennt man dann allgemein Riemannsummen.

3. **Summe der Rechtecksflächen:** Die Fläche jedes einzelnen Rechtecks ist Breite · Höhe = $\Delta x \cdot f(x_i^*)$ (wobei $x_i^*$ die Stelle ist, an der die Höhe im $i$-ten Intervall genommen wird). Die Riemannsumme ist die Summe all dieser kleinen Rechtecksflächen.

**Die Kernidee:** Je größer wir die Anzahl $n$ der Teilintervalle wählen (und damit je schmaler die einzelnen Rechtecke werden, d.h. $\Delta x \to 0$), desto besser nähert die Riemannsumme (egal ob Unter-, Obersumme oder eine andere Wahl für $x_i^*$) den tatsächlichen Flächeninhalt unter der Kurve an. Der exakte Flächeninhalt $A$ ist dann der **Grenzwert** dieser Summen für $n \to \infty$.

$$A = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x$$

Diesen Grenzwert nennen wir das **bestimmte Integral** von $f(x)$ über $[a, b]$ und schreiben $\int_a^b f(x)dx$.

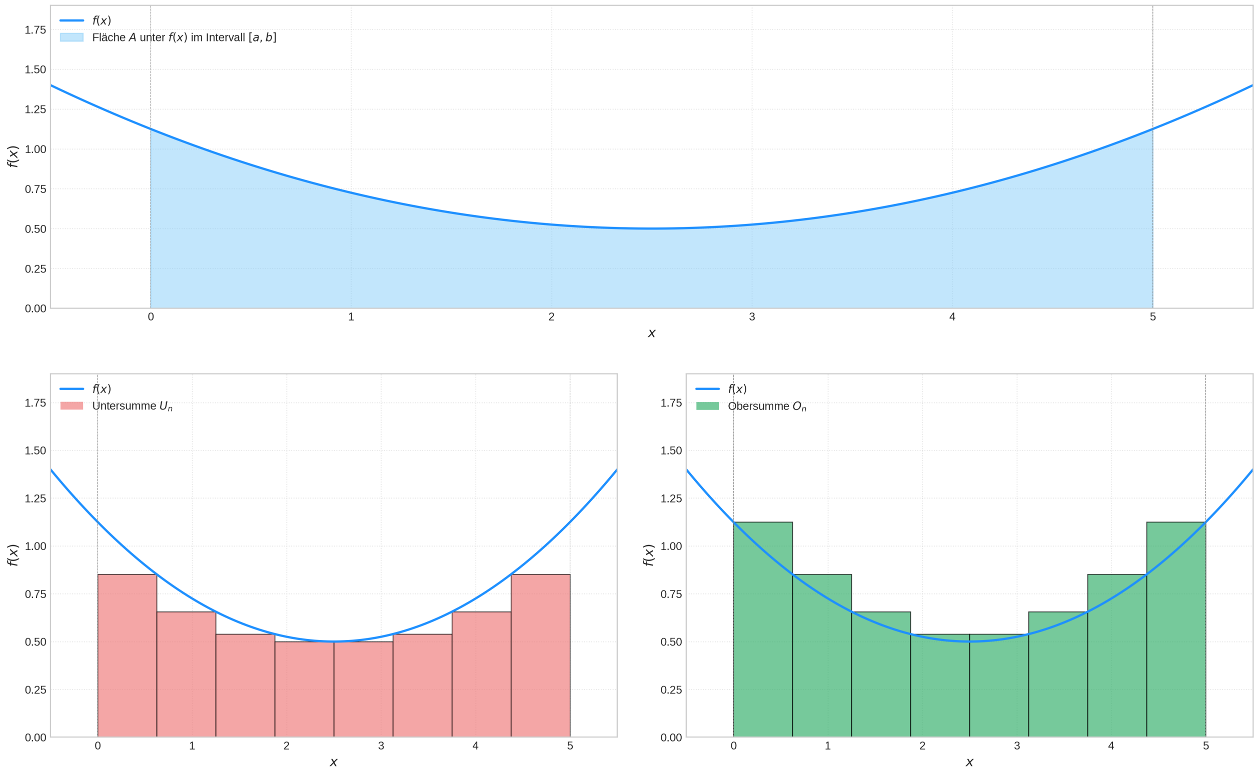


Abbildung 6.1: Illustration von Untersumme und Obersumme (Riemannsummen)

Schauen wir uns ein konkretes Beispiel an, wie man eine Untersumme und eine Obersumme berechnet. Für einfache, monotone Funktionen ist die Bestimmung des Minimums/Maximums in einem Teilintervall einfach der Funktionswert am entsprechenden Rand.

**Beispiel 6.1 Untersumme und Obersumme für $f(x) = x^2$**

Wir wollen den Flächeninhalt unter der Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $[0, 2]$ mit $n = 4$ Teilintervallen durch Untersumme $U_4$ und Obersumme $O_4$ annähern.
**Schritt 1: Intervallbreite $\Delta x$ und Teilungspunkte $x_i$ bestimmen.** Das Intervall ist $[a, b] = [0, 2]$. Die Anzahl der Teilintervalle ist $n = 4$. Die Breite jedes Teilintervalls ist $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$. Die Teilungspunkte sind: $x_0 = a = 0$ $x_1 = x_0 + \Delta x = 0 + 0.5 = 0.5$ $x_2 = x_1 + \Delta x = 0.5 + 0.5 = 1$ $x_3 = x_2 + \Delta x = 1 + 0.5 = 1.5$ $x_4 = x_3 + \Delta x = 1.5 + 0.5 = 2 (= b)$.
**Schritt 2: Untersumme $U_4$ berechnen.** Die Funktion $f(x) = x^2$ ist im Intervall $[0, 2]$ streng monoton steigend. Das bedeutet, der kleinste Funktionswert (Minimum) in jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ befindet sich am **linken Rand** $x_{i-1}$. Die Höhe des $i$-ten Rechtecks ist also $f(x_{i-1})$.

- 1. Rechteck (Intervall $[x_0, x_1] = [0, 0.5]$): Höhe $f(x_0) = f(0) = 0^2 = 0$. Fläche $\Delta x \cdot f(0) = 0.5 \cdot 0 = 0$.
- 2. Rechteck (Intervall $[x_1, x_2] = [0.5, 1]$): Höhe $f(x_1) = f(0.5) = (0.5)^2 = 0.25$. Fläche $\Delta x \cdot f(0.5) = 0.5 \cdot 0.25 = 0.125$.
- 3. Rechteck (Intervall $[x_2, x_3] = [1, 1.5]$): Höhe $f(x_2) = f(1) = 1^2 = 1$. Fläche $\Delta x \cdot f(1) = 0.5 \cdot 1 = 0.5$.
- 4. Rechteck (Intervall $[x_3, x_4] = [1.5, 2]$): Höhe $f(x_3) = f(1.5) = (1.5)^2 = 2.25$. Fläche $\Delta x \cdot f(1.5) = 0.5 \cdot 2.25 = 1.125$.

Die Untersumme ist die Summe dieser Flächen: $U_4 = 0 + 0.125 + 0.5 + 1.125 = 1.75$.
**Schritt 3: Obersumme $O_4$ berechnen.** Da $f(x) = x^2$ im Intervall $[0, 2]$ streng monoton steigend ist, liegt der größte Funktionswert (Maximum) in jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ am **rechten Rand** $x_i$. Die Höhe des $i$-ten Rechtecks ist also $f(x_i)$.

- 1. Rechteck (Intervall $[x_0, x_1] = [0, 0.5]$): Höhe $f(x_1) = f(0.5) = (0.5)^2 = 0.25$. Fläche $\Delta x \cdot f(0.5) = 0.5 \cdot 0.25 = 0.125$.
- 2. Rechteck (Intervall $[x_1, x_2] = [0.5, 1]$): Höhe $f(x_2) = f(1) = 1^2 = 1$. Fläche $\Delta x \cdot f(1) = 0.5 \cdot 1 = 0.5$.
- 3. Rechteck (Intervall $[x_2, x_3] = [1, 1.5]$): Höhe $f(x_3) = f(1.5) = (1.5)^2 = 2.25$. Fläche $\Delta x \cdot f(1.5) = 0.5 \cdot 2.25 = 1.125$.
- 4. Rechteck (Intervall $[x_3, x_4] = [1.5, 2]$): Höhe $f(x_4) = f(2) = 2^2 = 4$. Fläche $\Delta x \cdot f(2) = 0.5 \cdot 4 = 2$.

Die Obersumme ist die Summe dieser Flächen: $O_4 = 0.125 + 0.5 + 1.125 + 2 = 3.75$.
Der wahre Flächeninhalt $A$ unter $f(x) = x^2$ im Intervall $[0, 2]$ liegt also zwischen 1.75 und 3.75: $1.75 \leq A \leq 3.75$. Wenn wir $n$ erhöhen, wird diese 'Schere' zwischen Unter- und Obersumme immer kleiner. Der exakte Wert ist übrigens $A = \frac{8}{3} \approx 2.667$. Unsere Näherungen sind also noch recht grob, aber sie zeigen das Prinzip.

***Tipp 6.1: Summenformel für Riemannsummen***

Allgemein lässt sich die Untersumme $U_n$ und Obersumme $O_n$ mit dem Summenzeichen $\sum$ schreiben: Sei $m_i$ das Minimum von $f(x)$ im $i$-ten Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ und $M_i$ das Maximum. Dann ist:

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x$$

$$O_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x$$

Wenn $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ monoton steigend ist, dann ist $m_i = f(x_{i-1})$ (linker Rand) und $M_i = f(x_i)$ (rechter Rand). Wenn $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ monoton fallend ist, dann ist $m_i = f(x_i)$ (rechter Rand) und $M_i = f(x_{i-1})$ (linker Rand).

**Aufgabe 6.1 Riemannsummen berechnen**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x + 1$.

1. Berechne die Untersumme $U_5$ und die Obersumme $O_5$ für das Intervall $[0, 5]$ mit $n = 5$ Teilintervallen.

   ***Tipp 6.2: Monotonie***

   Ist $f(x) = x + 1$ monoton steigend oder fallend? Wo liegt also das Minimum bzw. Maximum in jedem Teilintervall?

2. Der Graph von $f(x) = x+1$ ist eine Gerade. Der Bereich unter dem Graphen im Intervall $[0, 5]$ bildet ein Trapez. Berechne den exakten Flächeninhalt dieses Trapezes mit der geometrischen Formel $A_{Trapez} = \frac{(a+c)}{2} \cdot h$ (wobei $a$ und $c$ die parallelen Seiten sind und $h$ die Höhe).
3. Vergleiche deine Ergebnisse für $U_5$ und $O_5$ mit dem exakten Flächeninhalt.
4. Was würde passieren, wenn du $n = 10$ oder $n = 100$ Teilintervalle wählen würdest? Wie würden sich $U_n$ und $O_n$ verändern?

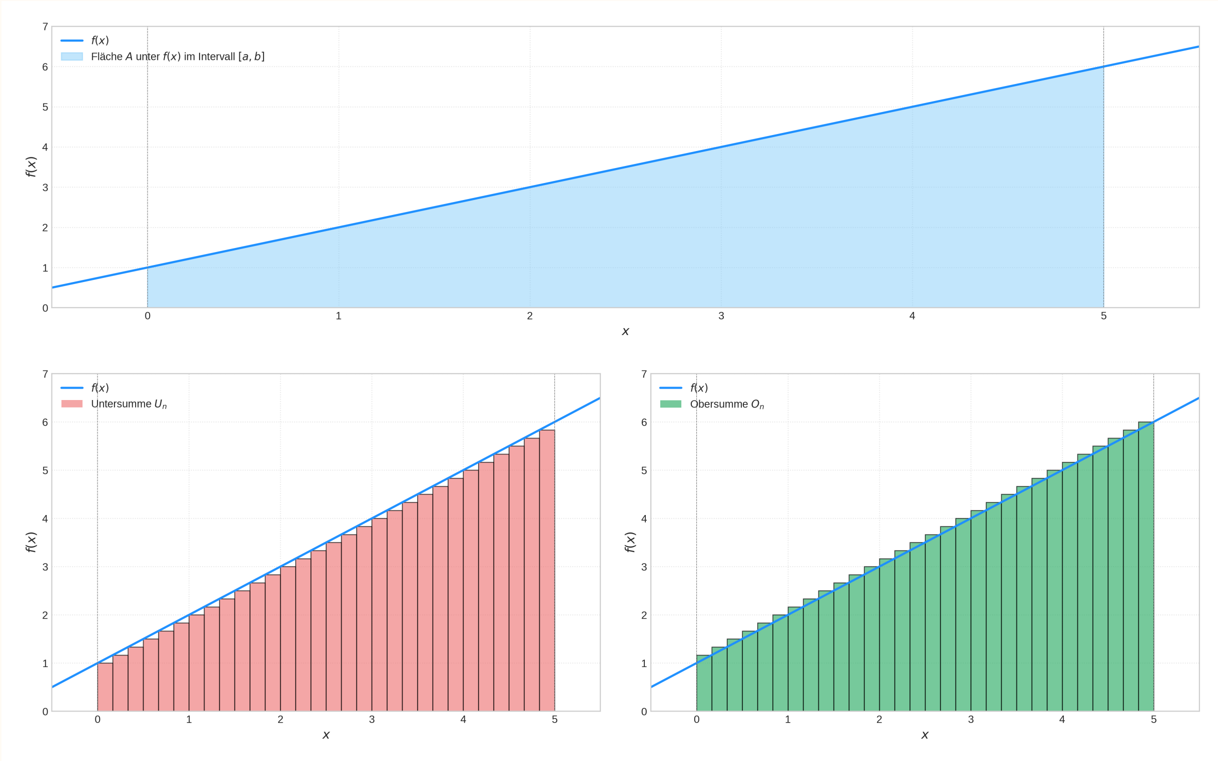


Abbildung 6.2: Fläche unter $f(x) = x + 1$ im Intervall $[0, 5]$

Die Idee der Riemannsummen führt uns direkt zum Begriff des **bestimmten Integrals**.

## 6.2 Das bestimmte Integral – Der exakte Flächeninhalt

Wir haben gesehen, dass wir den Flächeninhalt unter einer Kurve durch Riemannsummen (z.B. Unter- und Obersummen) annähern können. Je mehr Rechtecke wir verwenden (je größer $n$ wird und damit je kleiner $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ wird), desto genauer wird unsere Näherung.

Wenn wir diesen Prozess ins Unendliche treiben, also $n \to \infty$ (und damit $\Delta x \to 0$), dann konvergieren die Untersumme und die Obersumme (für 'nette', d.h. integrierbare Funktionen) gegen denselben Wert. Dieser gemeinsame Grenzwert ist der exakte Flächeninhalt unter der Kurve und wird als das **bestimmte Integral** der Funktion $f(x)$ von $a$ bis $b$ bezeichnet.

***ϟ 6.2 Das bestimmte Integral***

Das **bestimmte Integral** einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ ist der Grenzwert der Riemannsummen, wenn die Anzahl der Teilintervalle $n$ gegen unendlich geht (und die Breite $\Delta x$ der Teilintervalle gegen Null geht):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x$$

Dabei ist:

- $\int$ das **Integrationszeichen** (ein stilisiertes S für 'Summe').
- $a$ die **untere Integrationsgrenze**.
- $b$ die **obere Integrationsgrenze**.
- $f(x)$ der **Integrand** (die zu integrierende Funktion).
- $dx$ das **Differential**, das anzeigt, nach welcher Variablen integriert wird (hier $x$) und symbolisiert die unendlich kleine Breite der Rechtecke.

Wenn $f(x) \geq 0$ im Intervall $[a, b]$ ist, dann gibt $\int_a^b f(x)\,dx$ den **Flächeninhalt** der Fläche an, die vom Graphen von $f(x)$, der x-Achse und den senkrechten Geraden $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird.

**Was passiert, wenn $f(x)$ unterhalb der x-Achse liegt?**

Wenn der Graph von $f(x)$ in einem Intervall unterhalb der x-Achse verläuft (also $f(x) < 0$), dann liefert das bestimmte Integral in diesem Bereich einen **negativen Wert**. Dieser negative Wert entspricht dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse, aber eben mit negativem Vorzeichen. Man spricht dann von einer **orientierten Fläche**. Flächenanteile oberhalb der x-Achse zählen positiv, Flächenanteile unterhalb der x-Achse zählen negativ. Um den 'echten' geometrischen Flächeninhalt zu bekommen, wenn Teile unterhalb liegen, muss man die Beträge der entsprechenden Integrale addieren oder die Funktion an den entsprechenden Stellen spiegeln (also $|f(x)|$ integrieren).

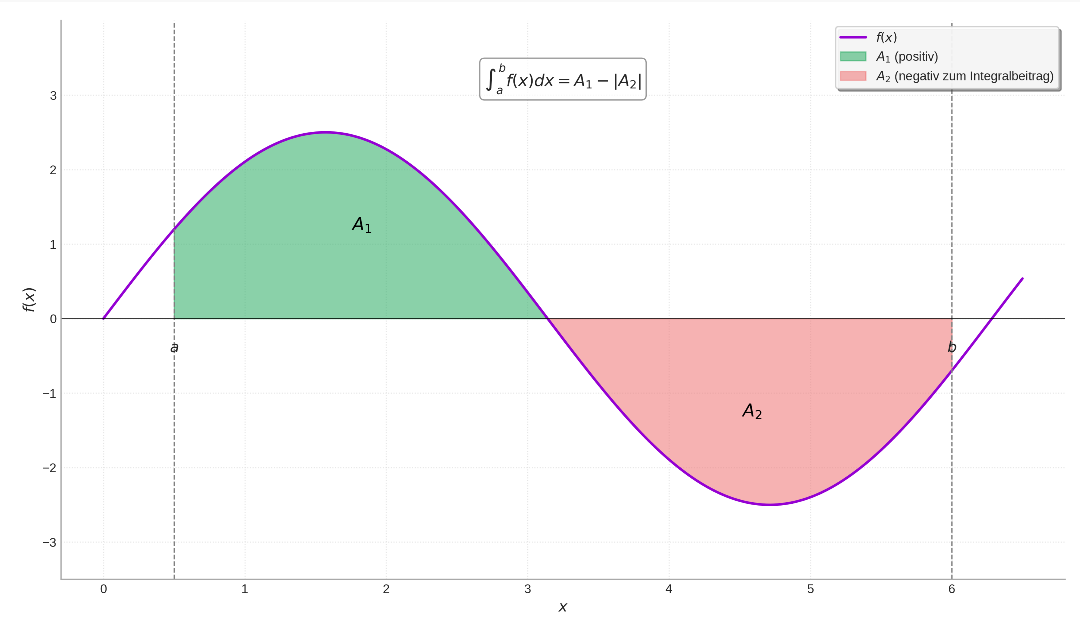


Abbildung 6.3: Orientierter Flächeninhalt beim bestimmten Integral

**Achtung Stolperstein! 6.1: Orientierte vs. geometrische Fläche – Genau hinschauen!**

Das bestimmte Integral liefert die Flächenbilanz, nicht immer den rein geometrischen Flächeninhalt!

- **Orientierte Fläche:** Das Ergebnis von $\int_a^b f(x)dx$ ist die **Summe der vorzeichenbehafteten Flächenstücke**. Flächen über der x-Achse gehen positiv ein, Flächen darunter negativ.
- **Geometrischer Gesamtflächeninhalt gesucht?** Wenn die Aufgabe nach dem tatsächlichen, sichtbaren Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse fragt, musst du aufpassen:
  - **Nullstellen prüfen:** Bestimme immer zuerst die Nullstellen von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$. Diese teilen das Gesamtintervall eventuell in Teilintervalle auf.
  - **Teilintervalle betrachten:** Untersuche das Vorzeichen von $f(x)$ in jedem Teilintervall.
  - **Beträge addieren:** Für Teilintervalle, in denen $f(x) < 0$ (Graph unter der x-Achse), ist das Integral negativ. Für den geometrischen Flächeninhalt musst du den **Betrag** dieses negativen Wertes nehmen und zu den positiven Flächenanteilen addieren.
- **Negatives Integral $\neq$ Rechenfehler:** Ein negatives Ergebnis für ein bestimmtes Integral ist oft korrekt und bedeutet lediglich, dass der Flächenanteil unterhalb der x-Achse im betrachteten Intervall überwiegt (oder die gesamte Fläche unterhalb liegt).

Die Berechnung von Integralen über den Grenzwert von Riemannsummen ist sehr aufwendig. Glücklicherweise gibt es einen viel eleganteren Weg, der die Integralrechnung mit der Differentialrechnung verbindet: den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Dafür benötigen wir aber zuerst das Konzept der Stammfunktion.

## 6.3 Die Stammfunktion – Das 'Gegenteil' vom Ableiten (Aufleiten)

In der Differentialrechnung haben wir gelernt, zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ ihre Ableitungsfunktion $f'(x)$ zu finden, die uns die Steigung von $f(x)$ an jeder Stelle liefert. Die Integralrechnung stellt nun oft die umgekehrte Frage: *Wenn wir eine Funktion $f(x)$ gegeben haben (die wir uns jetzt als Ableitung einer anderen Funktion vorstellen können), welche Funktion $F(x)$ müssen wir ableiten, um genau dieses $f(x)$ als Ergebnis zu erhalten?* Eine solche Funktion $F(x)$ nennen wir eine **Stammfunktion** von $f(x)$.

**ϟ *6.3 Stammfunktion***

Eine Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** einer Funktion $f(x)$, wenn für alle $x$ im Definitionsbereich gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Das bedeutet, die Ableitung der Stammfunktion $F(x)$ ergibt die ursprüngliche Funktion $f(x)$. Den Vorgang des Findens einer Stammfunktion nennt man auch **Integrieren** oder umgangssprachlich (und sehr anschaulich) **Aufleiten**.

Das Finden von Stammfunktionen ist also wie ein Rätsel: 'Welche Funktion wurde hier abgeleitet?'

**Beispiel 6.2 Stammfunktionen finden durch 'Rückwärts-Ableiten'**

1. **Gegeben: $f(x) = 2x$.** Wir fragen uns: Welche Funktion $F(x)$ hat als Ableitung $2x$? Aus der Potenzregel der Ableitung wissen wir: $(x^2)' = 2x^1 = 2x$. Also ist $F(x) = x^2$ eine Stammfunktion von $f(x) = 2x$.

   *Aber Moment mal!* Was ist mit $F_1(x) = x^2 + 5$? $F_1'(x) = (x^2)' + (5)' = 2x + 0 = 2x$. Auch $F_1(x) = x^2 + 5$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 2x$.

   Und was ist mit $F_2(x) = x^2 - 17$? $F_2'(x) = (x^2)' - (17)' = 2x - 0 = 2x$. Ebenfalls eine Stammfunktion!

   Es scheint unendlich viele Stammfunktionen zu geben, die sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden.

2. **Gegeben: $f(x) = x^2$.** Welche Funktion $F(x)$ ergibt abgeleitet $x^2$? Wir wissen, beim Ableiten wird der Exponent um 1 kleiner. Also muss der Exponent der Stammfunktion um 1 größer sein, also $x^3$. Probieren wir $G(x) = x^3$. Die Ableitung ist $G'(x) = 3x^2$. Das ist noch nicht ganz $x^2$, sondern das Dreifache. Um das auszugleichen, müssen wir $x^3$ durch 3 teilen: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Machen wir die Probe: $F'(x) = (\frac{1}{3}x^3)' = \frac{1}{3} \cdot (3x^2) = x^2$. Perfekt! Also ist $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$. Und natürlich sind auch $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 7$ oder $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \pi$ Stammfunktionen.

Das erste Beispiel hat uns eine wichtige Eigenschaft gezeigt:

**ϟ *6.4 Die Menge aller Stammfunktionen (Das unbestimmte Integral)***

Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ ist (d.h. $F'(x) = f(x)$), dann ist auch jede Funktion der Form $F(x) + C$, wobei $C$ eine beliebige reelle Konstante ist, eine Stammfunktion von $f(x)$. Denn $(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x)$.
Die Menge aller dieser Stammfunktionen wird als das **unbestimmte Integral** von $f(x)$ bezeichnet

und man schreibt dafür:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Dabei ist:

- $\int$ das **Integrationszeichen** (ein stilisiertes S, das an 'Summe' erinnert – ein Hinweis auf die Riemannsummen, die wir später kennenlernen).
- $f(x)$ der **Integrand** (die Funktion, die integriert/aufgeleitet wird).
- $dx$ das **Differential**, das anzeigt, nach welcher Variablen integriert wird (hier $x$). Es ist ein wichtiger Bestandteil der Notation.
- $F(x)$ irgendeine spezielle Stammfunktion von $f(x)$.
- $C$ die **Integrationskonstante** (eine beliebige reelle Zahl).

Das unbestimmte Integral liefert uns also nicht nur eine einzelne Funktion, sondern eine ganze **Schar von Funktionen**, die sich alle nur durch eine Verschiebung entlang der y-Achse unterscheiden.

*Selbst-Check:* Warum ist es wichtig, die Integrationskonstante $C$ beim unbestimmten Integral anzugeben? (Antwort: Weil es unendlich viele Funktionen gibt, deren Ableitung $f(x)$ ist, und $C$ repräsentiert all diese Möglichkeiten.)

### 6.3.1 Grundlegende Integrationsregeln (Umkehrung der Ableitungsregeln)

Ähnlich wie beim Ableiten gibt es auch beim Integrieren Regeln, die uns helfen, Stammfunktionen systematisch zu finden. Viele davon ergeben sich direkt durch Umkehrung der uns bekannten Ableitungsregeln. Wir konzentrieren uns hier zunächst auf Regeln für Polynomfunktionen.

**ϟ 6.5 *Grundlegende Integrationsregeln für Polynome***

- **Potenzregel der Integration:** Für $f(x) = x^n$ (mit $n \in \mathbb{R}, n \neq -1$) gilt:

  $$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

  *Regel in Worten:* 'Erhöhe den Exponenten um 1 und teile dann durch diesen neuen Exponenten.' *Beachte:* Diese Regel gilt nicht für $n = -1$, also für $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$. Die Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ ist $\ln|x| + C$. Dies werden wir später bei den Logarithmusfunktionen genauer betrachten. Für Polynome tritt dieser Fall aber nicht auf.

- **Faktorregel der Integration:** Ein konstanter Faktor $k$ kann vor das Integral gezogen werden:

  $$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$

  Das bedeutet, wir können erst die Stammfunktion von $f(x)$ finden und diese dann mit $k$ multiplizieren.

- **Summenregel der Integration:** Das Integral einer Summe (oder Differenz) von Funktionen ist die Summe (oder Differenz) ihrer Integrale:

  $$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

  *Regel in Worten:* 'Jeder Summand wird für sich integriert/aufgeleitet, und die Ergebnisse werden dann addiert bzw. subtrahiert.'

- **Integral einer Konstanten:** Für $f(x) = k$ (eine Konstante) gilt:

$$\int k\,dx = kx + C$$

(Denn die Ableitung von $kx + C$ ist $k$.)

**Beispiel 6.3 Stammfunktionen mit Regeln bilden**

1. **Bestimme $\int x^4\,dx$.** Hier ist $n = 4$. Nach der Potenzregel der Integration: $\int x^4\,dx = \frac{1}{4+1}x^{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$. *Probe durch Ableiten:* $(\frac{1}{5}x^5 + C)' = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 + 0 = x^4$. Stimmt.
2. **Bestimme $\int 6x^2\,dx$.** Nach Faktor- und Potenzregel: $\int 6x^2\,dx = 6 \cdot \int x^2\,dx = 6 \cdot \left(\frac{1}{2+1}x^{2+1}\right) + C = 6 \cdot \frac{1}{3}x^3 + C = 2x^3 + C$. *Probe:* $(2x^3 + C)' = 2 \cdot 3x^2 + 0 = 6x^2$. Stimmt.
3. **Bestimme $\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx$.** Nach Summen-, Faktor- und Potenzregel: $\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx = \int 3x^2\,dx - \int 4x\,dx + \int 5\,dx = 3 \cdot \int x^2\,dx - 4 \cdot \int x^1\,dx + \int 5x^0\,dx = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3\right) - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{1}x^1\right) + C$ $= x^3 - 2x^2 + 5x + C$. *Probe:* $(x^3 - 2x^2 + 5x + C)' = 3x^2 - 4x + 5$. Stimmt.

**Aufgabe 6.2 Stammfunktionen bilden üben**

Bestimme jeweils die Menge aller Stammfunktionen (das unbestimmte Integral) für die folgenden Funktionen:

1. $f(x) = x^5$
2. $g(x) = 12x^3$
3. $h(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 1$
4. $k(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^3}$ (Tipp: Erst in Potenzschreibweise $x^n$ umwandeln! $\sqrt{x} = x^{1/2}$ und $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$)
5. $m(t) = at + b$ (wobei $a, b$ Konstanten sind; integriere nach $t$)
6. $p(x) = (x + 1)(x - 2)$ (Tipp: Erst ausmultiplizieren!)

Mache bei mindestens zwei Aufgaben die Probe durch Ableiten deiner Stammfunktion.

**Achtung Stolperstein! 6.2: Integrationskonstante $C$ nicht vergessen!**

Ein sehr häufiger Fehler beim unbestimmten Integrieren ist das Vergessen der Integrationskonstante $+C$. Da die Ableitung einer Konstanten immer Null ist, gibt es zu jeder Funktion unendlich viele Stammfunktionen, die sich alle nur durch diese Konstante unterscheiden. Bei bestimmten Integralen (mit Grenzen) fällt diese Konstante später heraus, aber beim unbestimmten Integral ist sie wichtig! Stell dir vor, jede Stammfunktion ist wie ein Mitglied einer großen Familie von Kurven, die alle parallel zueinander verlaufen.

***Warum ist das wichtig? 6.1: Stammfunktionen und das unbestimmte Integral***

Das Konzept der Stammfunktion ist der Schlüssel, um den fundamentalen Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung zu verstehen. Es erlaubt uns, von einer gegebenen Änderungsrate auf die ursprüngliche Größe zurückzuschließen. Das unbestimmte Integral gibt uns die Gesamtheit aller möglichen Funktionen an, deren Ableitung die gegebene Funktion ist. Diese 'Familie' von Stammfunktionen wird entscheidend sein, wenn wir uns gleich dem bestimmten Integral und dem Hauptsatz zuwenden.

Als Nächstes werden wir sehen, wie die Stammfunktion uns auf elegante Weise hilft, bestimmte Integrale und damit Flächeninhalte zu berechnen, ohne den mühsamen Weg über Riemannsummen gehen zu müssen. Das ist die Kernaussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

## 6.4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Wir haben gesehen, dass das Berechnen von Flächeninhalten über den Grenzwert von Riemannsummen ziemlich mühsam sein kann. Gibt es einen einfacheren Weg, um das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ exakt zu berechnen, ohne unendlich viele Rechtecke addieren zu müssen? Die Antwort ist ein klares Ja, und sie liegt in einem der wichtigsten Sätze der gesamten Mathematik: dem **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** (oft abgekürzt als HDI).

Dieser Satz stellt eine fundamentale Verbindung zwischen der Differentialrechnung (dem Ableiten) und der Integralrechnung (dem Aufleiten bzw. Flächenberechnen) her. Er ist so etwas wie die 'magische Brücke' zwischen diesen beiden großen Gebieten der Analysis.

**ϟ *6.6 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)***

Sei $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion und $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$ (d.h. $F'(x) = f(x)$). Dann gilt für das bestimmte Integral von $f(x)$ über dem Intervall $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

**In Worten:** Um das bestimmte Integral von $f(x)$ in den Grenzen von $a$ bis $b$ zu berechnen, bilde eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, setze die obere Grenze $b$ in $F(x)$ ein, setze die untere Grenze $a$ in $F(x)$ ein und subtrahiere den zweiten Wert vom ersten.
Die Schreibweise $[F(x)]_a^b$ ist eine Kurzform für $F(b) - F(a)$.

***Warum ist das wichtig? 6.2: Die Bedeutung des HDI***

Der Hauptsatz ist revolutionär, weil er uns sagt: Statt komplizierte Grenzwerte von Summen zu berechnen, um eine Fläche zu finden, können wir einfach eine Stammfunktion suchen (was oft viel einfacher ist) und deren Werte an den Rändern des Intervalls auswerten! Das Ableiten und Integrieren sind also tatsächlich Umkehroperationen zueinander.

Schauen wir uns an, wie man den HDI anwendet.

**Beispiel 6.4 Bestimmtes Integral mit dem HDI berechnen**

1. **Fläche unter $f(x) = x^2$ im Intervall** $[0, 2]$ (Vergleiche mit dem Riemannsummen-Beispiel!) Wir wollen $\int_0^2 x^2\,dx$ berechnen.

   - **Schritt 1: Stammfunktion $F(x)$ von $f(x) = x^2$ finden.** Mit der Potenzregel der Integration: $F(x) = \frac{1}{2+1}x^{2+1} = \frac{1}{3}x^3$. (Die Integrationskonstante $C$ können wir hier weglassen, da sie sich bei der Differenz $F(b)-F(a)$ ohnehin aufheben würde: $(F(b)+C)-(F(a)+C) = F(b) - F(a)$.)
   - **Schritt 2: Grenzen einsetzen $F(b) - F(a)$.** Hier ist $a = 0$ und $b = 2$. $\int_0^2 x^2\,dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^2 = F(2) - F(0) = \left(\frac{1}{3}(2)^3\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3\right) = \frac{1}{3}\cdot 8 - \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$.

   Der exakte Flächeninhalt ist $\frac{8}{3} \approx 2.667$. Das passt viel besser zu unseren Riemannsummen-Näherungen ($U_4 = 1.75, O_4 = 3.75$) und war viel einfacher zu berechnen!

2. **Berechne $\int_1^3 (3x^2 - 4x + 5)\,dx$.** Der Integrand ist $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$.

   - **Schritt 1: Stammfunktion $F(x)$ finden.** $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$. (Wir lassen $C$ weg.)

- **Schritt 2: Grenzen einsetzen.** $\int_1^3 (3x^2 - 4x + 5)\,dx = [x^3 - 2x^2 + 5x]_1^3 = F(3) - F(1)$ $= ((3)^3 - 2(3)^2 + 5(3)) - ((1)^3 - 2(1)^2 + 5(1)) = (27 - 2 \cdot 9 + 15) - (1 - 2 \cdot 1 + 5)$ $= (27 - 18 + 15) - (1 - 2 + 5) = (9 + 15) - (4) = 24 - 4 = 20.$

Der Wert des bestimmten Integrals ist 20.

**Achtung Stolperstein! 6.3: Hauptsatz-Anwendung – Typische Stolpersteine**

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) ist mächtig, aber bei der Anwendung lauern ein paar typische Fehlerquellen:

- **Grenzen vertauscht ($F(a) - F(b)$ statt $F(b) - F(a)$):** Achte penibel auf die Reihenfolge: Immer 'Stammfunktion an der oberen Grenze' minus 'Stammfunktion an der unteren Grenze', also $F(b) - F(a)$. Ein Vertauschen führt zum Vorzeichenfehler im Ergebnis!
- **Rechenfehler beim Einsetzen der Grenzen:** Das ist eine der häufigsten Fehlerquellen!
  - Besonders bei negativen Zahlen als Grenzen oder in der Stammfunktion: Setze sorgfältig Klammern, z.B. $F(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - (-2) = -\frac{8}{3} + 2$.
  - Brüche und Potenzen korrekt berechnen. Nimm dir Zeit für diesen Schritt.
- **Stammfunktion $F(x)$ falsch gebildet:** Der HDI funktioniert nur, wenn $F(x)$ auch wirklich eine korrekte Stammfunktion von $f(x)$ ist. Überprüfe deine Integrationsregeln (Potenzregel, Faktorregel, Summenregel etc.) sorgfältig. Im Zweifel: Leite deine gefundene Stammfunktion $F(x)$ zur Probe ab – es muss wieder $f(x)$ herauskommen!
- **Integrationskonstante $C$ beim bestimmten Integral:** Für die Berechnung des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ kannst du die Integrationskonstante $C$ weglassen (oder $C = 0$ setzen), da sie sich ohnehin herauskürzen würde: $(F(b)+C)-(F(a)+C) = F(b)-F(a)$. Wenn du sie mitschleppst, achte darauf, dass sie sich korrekt aufhebt.

Sorgfältiges und schrittweises Rechnen hilft, diese Fehler zu vermeiden!

**Aufgabe 6.3 Bestimmte Integrale mit dem HDI berechnen**

Berechne die folgenden bestimmten Integrale mit dem Hauptsatz.

1. $\int_1^2 (4x^3 - 6x)\,dx$
2. $\int_{-1}^1 (x^2 + 2)\,dx$
3. $\int_0^4 (\sqrt{x} + 1)\,dx$ (Tipp: $\sqrt{x} = x^{1/2}$)
4. **Fläche visualisieren:** Die Funktion $f(x) = -x^2 + 4x$ hast du vielleicht schon in früheren Aufgaben skizziert (eine nach unten geöffnete Parabel).
   - Berechne die Nullstellen von $f(x)$.
   - Berechne das bestimmte Integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$, wobei $x_1$ und $x_2$ die Nullstellen sind ($x_1 < x_2$).
   - Was stellt dieser Wert geometrisch dar? Markiere die entsprechende Fläche in einer Skizze des Graphen von $f(x)$.

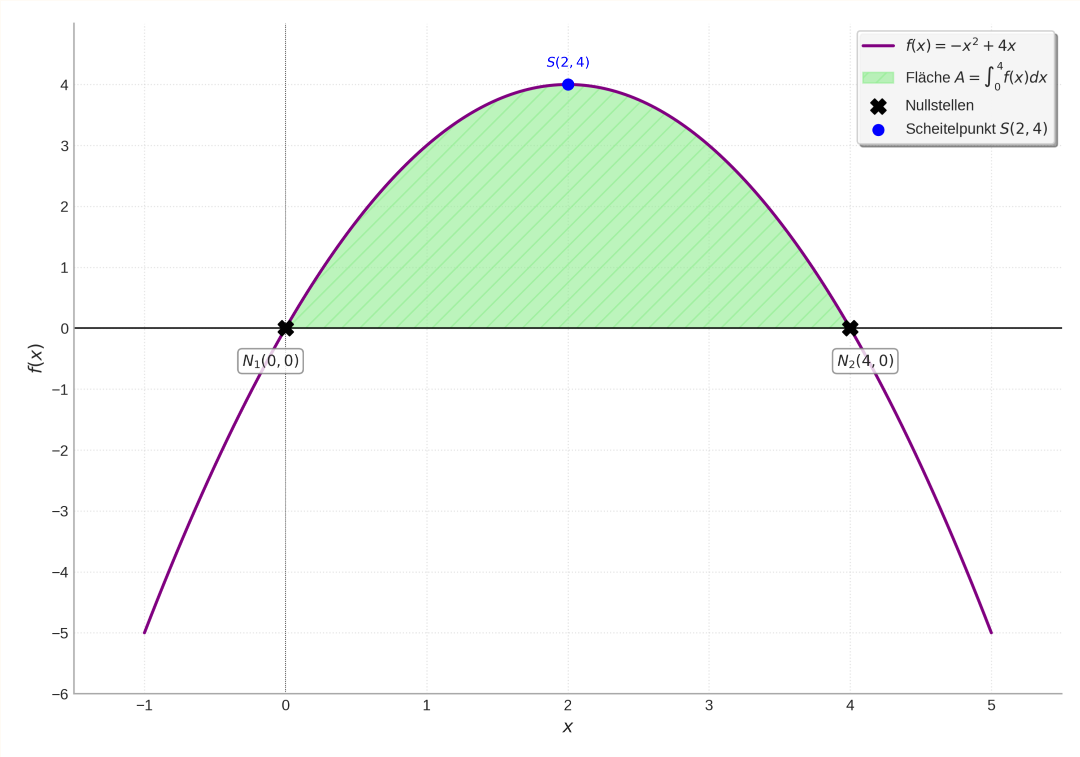


Abbildung 6.4: Fläche unter $f(x) = -x^2 + 4x$ zwischen den Nullstellen

***Schon gewusst? Newton, unendliche Reihen und die Quadratur des Kreises (fast!)***

Die Zahl $\pi$ fasziniert Mathematiker seit Jahrtausenden. Die alten Methoden zur Annäherung von $\pi$ waren oft geometrisch und extrem aufwendig. Isaac Newton fand um 1666 einen revolutionär neuen Weg, der die gerade erst entwickelte Analysis nutzte.

Seine Idee war, die Fläche eines Viertel-Einheitskreises zu berechnen, denn diese Fläche ist genau $\frac{\pi}{4}$. Die Gleichung eines Kreises mit Radius 1 ist $x^2 + y^2 = 1$, also ist die obere Hälfte $y = \sqrt{1-x^2}$. Die Fläche des Viertelkreises im ersten Quadranten ist dann das bestimmte Integral:

$$\text{Fläche} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

Das Problem: Wie integriert man $\sqrt{1-x^2}$? Newton hatte dafür einen Trick! Er nutzte seine verallgemeinerte Form des **Binomialtheorems**, um $\sqrt{1-x^2}$ als eine **unendliche Summe (Reihe)** von Potenzen von $x$ darzustellen. Für $|x| < 1$ lauten die ersten Terme dieser Reihe:

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots$$

(Die genaue Herleitung dieser Koeffizienten ist etwas für Fortgeschrittene, aber die Idee ist, dass man den Ausdruck in eine 'unendlich langes Polynom' umwandelt.)

Das Geniale: Diese unendliche Summe konnte Newton nun Glied für Glied integrieren, ganz ähnlich wie du es bei Polynomen gelernt hast (Potenzregel der Integration: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$)!

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \dots\right) dx \\ &= \left[x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 - \frac{1}{8\cdot 5}x^5 - \frac{1}{16\cdot 7}x^7 - \dots\right]_0^1 \\ &= \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \dots\right) - (0)\end{aligned}$$

Also erhielt Newton für $\pi/4$ die unendliche Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \dots$$

Durch Aufsummieren von nur wenigen Termen dieser Reihe konnte Newton $\pi$ wesentlich genauer und schneller berechnen, als es mit den alten geometrischen Methoden möglich war. Er nutzte später sogar eine geschicktere Wahl der Integrationsgrenzen (von 0 bis 1/2), um eine Reihe zu erhalten, die noch schneller den Wert von $\pi$ liefert.
Dieser Ansatz zeigt eindrucksvoll, wie die Verbindung von unendlichen Reihen (oft aus der Differentialrechnung über Taylorreihen gewonnen) und der Integralrechnung völlig neue Wege zur Lösung alter Probleme eröffnete!

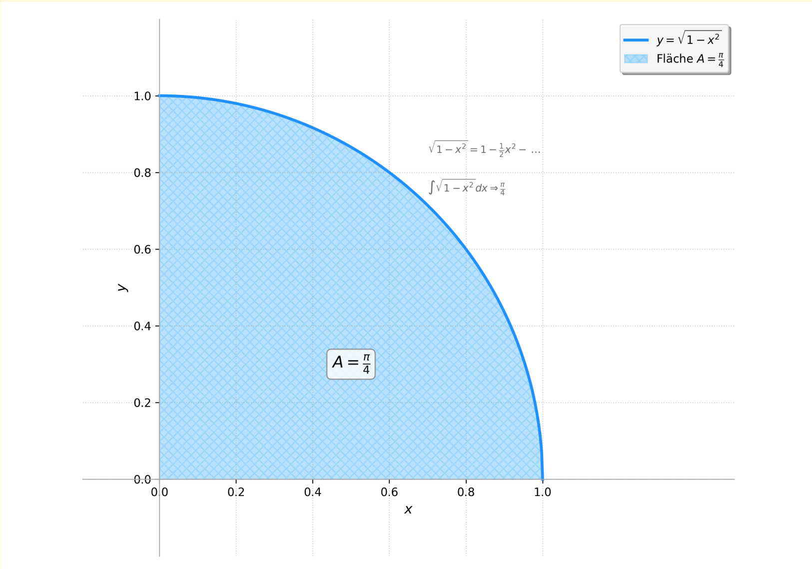


Abbildung 6.5: Konzept der $\pi$-Berechnung durch Integration der Binomialreihe für den Viertelkreis

### 6.4.1 Anwendungen und Interpretationen des bestimmten Integrals

Die wichtigste geometrische Interpretation des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)dx$ ist, wie erwähnt, der orientierte Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a, b]$.

**Flächenberechnung bei Nullstellen und unterhalb der x-Achse**

Wenn eine Funktion $f(x)$ im Integrationsintervall $[a, b]$ Nullstellen besitzt und somit Teile des Graphen unterhalb der x-Achse liegen, liefert das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ die **Flächenbilanz**. Das bedeutet, Flächenstücke oberhalb der x-Achse werden positiv gewertet, Flächenstücke unterhalb der x-Achse negativ.
Um den **tatsächlichen geometrischen Flächeninhalt** zu berechnen, der zwischen dem Graphen und der x-Achse eingeschlossen wird, musst du:

1. Die Nullstellen $x_N$ der Funktion im Intervall $[a, b]$ finden.
2. Das Integral über die Teilintervalle berechnen, die durch die Nullstellen entstehen.
3. Die **Beträge** der Integralteile addieren, bei denen der Graph unterhalb der x-Achse verläuft (also wo das Integral negativ wäre).

Mathematisch entspricht das der Berechnung von $\int_a^b |f(x)|\, dx$. In der Praxis ist es oft einfacher, die Teilintegrale zu berechnen und dann die Beträge zu addieren.

Beispiel: Wenn $f(x)$ eine Nullstelle $x_N$ zwischen $a$ und $b$ hat und $f(x) \geq 0$ für $x \in [a, x_N]$ und $f(x) \leq 0$ für $x \in [x_N, b]$, dann ist der Gesamtflächeninhalt $A_{ges}$:

$$A_{ges} = \int_a^{x_N} f(x)\,dx + \left|\int_{x_N}^b f(x)\,dx\right| = \int_a^{x_N} f(x)\,dx - \int_{x_N}^b f(x)\,dx$$

(Da $\int_{x_N}^b f(x)\,dx$ negativ wäre, wird durch das Minuszeichen der Betrag addiert).

**Beispiel 6.5 Fläche mit Anteilen unter der x-Achse**

Berechne den Flächeninhalt, den der Graph der Funktion $f(x) = x^2 - 1$ mit der x-Achse im Intervall $[-2, 2]$ einschließt.

**Schritt 1: Nullstellen von $f(x)$ finden.** $x^2 - 1 = 0 \implies x^2 = 1 \implies x_{N1} = -1, x_{N2} = 1$. Beide Nullstellen liegen im Intervall $[-2, 2]$.

**Schritt 2: Vorzeichen von $f(x)$ in den Teilintervallen bestimmen.** Die Parabel $f(x) = x^2 - 1$ ist nach oben geöffnet.

- Intervall $[-2, -1]$: z.B. $f(-1.5) = (-1.5)^2 - 1 = 2.25 - 1 = 1.25 > 0$. (Graph oberhalb)
- Intervall $[-1, 1]$: z.B. $f(0) = 0^2 - 1 = -1 < 0$. (Graph unterhalb)
- Intervall $[1, 2]$: z.B. $f(1.5) = (1.5)^2 - 1 = 2.25 - 1 = 1.25 > 0$. (Graph oberhalb)

**Schritt 3: Teilintegrale berechnen.** Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$. $A_1 = \int_{-2}^{-1}(x^2 - 1)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x]_{-2}^{-1} = (\frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)) - (\frac{1}{3}(-2)^3 - (-2)) = (-\frac{1}{3} + 1) - (-\frac{8}{3} + 2) = \frac{2}{3} - (-\frac{8}{3} + \frac{6}{3}) = \frac{2}{3} - (-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.
$A_2 = \int_{-1}^{1}(x^2 - 1)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x]_{-1}^{1} = (\frac{1}{3}(1)^3 - 1) - (\frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)) = (\frac{1}{3} - 1) - (-\frac{1}{3} + 1) = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$. (Das Integral ist negativ, da die Fläche unter der x-Achse liegt. Der Flächen*inhalt* ist $|-\frac{4}{3}| = \frac{4}{3}$).
$A_3 = \int_{1}^{2}(x^2 - 1)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x]_{1}^{2} = (\frac{1}{3}(2)^3 - 2) - (\frac{1}{3}(1)^3 - 1) = (\frac{8}{3} - 2) - (\frac{1}{3} - 1) = (\frac{8}{3} - \frac{6}{3}) - (-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

**Schritt 4: Gesamtflächeninhalt.** $A_{ges} = A_1 + |A_2| + A_3 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$. Der Gesamtflächeninhalt beträgt 4 Flächeneinheiten.

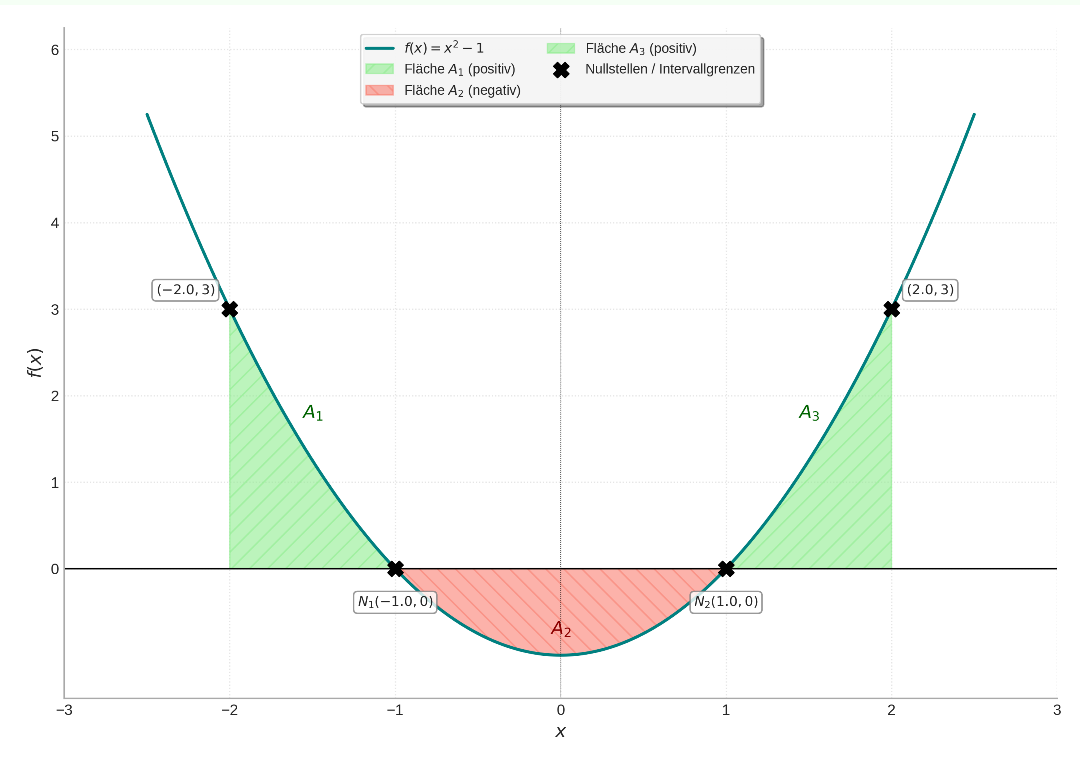

Abbildung 6.6: Fläche zwischen $f(x) = x^2 - 1$ und der x-Achse von -2 bis 2

**Aufgabe 6.4 Flächenberechnung mit Nullstellen im Intervall**

Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - x$ und der x-Achse im Intervall $[-2, 2]$ eingeschlossen wird.

***Tipp 6.3: Vorgehen***

1. Skizziere den Graphen (oder überlege dir den Verlauf anhand von Symmetrie und Nullstellen).
2. Finde alle Nullstellen von $f(x)$.
3. Bestimme, in welchen Teilintervallen $f(x) \geq 0$ und in welchen $f(x) \leq 0$ ist.
4. Berechne die bestimmten Integrale über die Teilintervalle und addiere deren Beträge.

**Symmetrie und bestimmte Integrale – Rechnungen vereinfachen!**

Die Symmetrieeigenschaften von Funktionen können uns die Berechnung bestimmter Integrale oft erheblich erleichtern, besonders wenn das Integrationsintervall symmetrisch zum Ursprung ist (also von der Form $[-a, a]$).

- **Punktsymmetrie zum Ursprung:** Wenn eine Funktion $f(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist (d.h. $f(-x) = -f(x)$, wie z.B. bei $x, x^3, x^5, \sin(x)$), dann gilt für jedes $a > 0$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

*Warum?* Die Fläche links vom Ursprung (unterhalb der x-Achse, wenn $f(x)$ für $x > 0$ oberhalb ist) ist genauso groß wie die Fläche rechts vom Ursprung (oberhalb der x-Achse), aber mit entgegengesetztem Vorzeichen. Sie heben sich also gegenseitig auf.

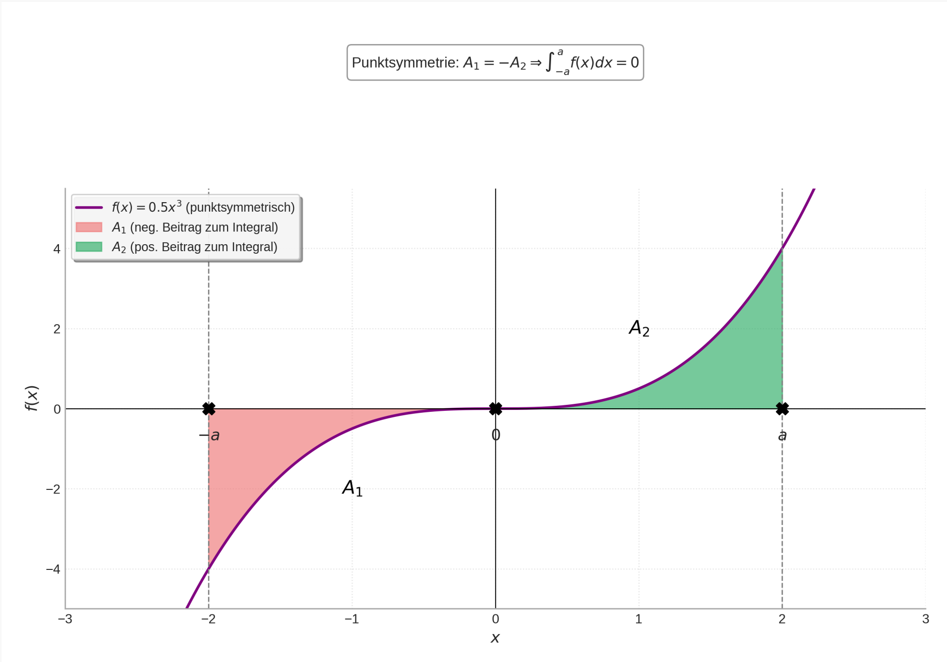


Abbildung 6.7: Integral einer punktsymmetrischen Funktion über $[-a, a]$

- **Achsensymmetrie zur y-Achse:** Wenn eine Funktion $f(x)$ achsensymmetrisch zur y-Achse ist (d.h. $f(-x) = f(x)$, wie z.B. bei $x^2, x^4, |x|, \cos(x)$), dann gilt für jedes $a > 0$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

*Warum?* Die Fläche links von der y-Achse (von $-a$ bis 0) ist genauso groß wie die Fläche rechts von der y-Achse (von 0 bis $a$). Man kann also die Rechnung vereinfachen, indem man nur eine Hälfte berechnet und das Ergebnis verdoppelt.

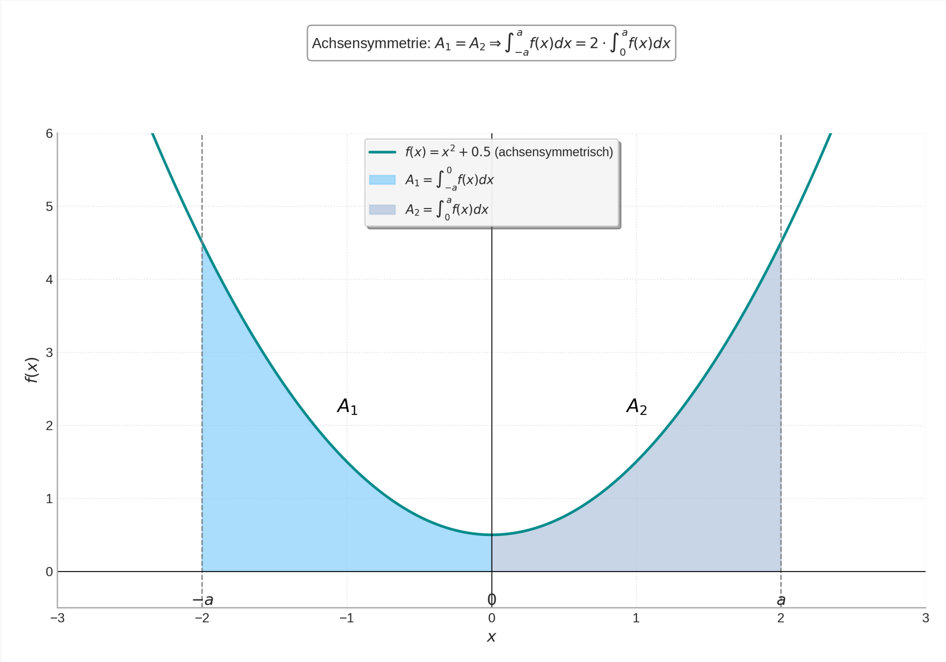


Abbildung 6.8: Integral einer achsensymmetrischen Funktion über $[-a, a]$

Diese Symmetrieüberlegungen können dir viel Rechenarbeit ersparen!

**Beispiel 6.6 Symmetrie beim Integrieren nutzen**

1. Berechne $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$. Die Funktion $f(x) = x^3$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Das Integrationsintervall $[-1, 1]$ ist symmetrisch zum Ursprung. Daher gilt: $\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$. *Probe (mit HDI):* $F(x) = \frac{1}{4}x^4$. $[\frac{1}{4}x^4]_{-1}^{1} = (\frac{1}{4}(1)^4) - (\frac{1}{4}(-1)^4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$. Stimmt!

2. Berechne $\int_{-2}^{2}(3x^2-5)\,dx$. Die Funktion $f(x) = 3x^2-5$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da sie nur gerade Potenzen von $x$ enthält (und eine Konstante): $f(-x) = 3(-x)^2-5 = 3x^2-5 = f(x)$. Das Intervall $[-2, 2]$ ist symmetrisch. Daher: $\int_{-2}^{2}(3x^2-5)\,dx = 2\cdot\int_0^2(3x^2-5)\,dx$. Stammfunktion $F(x) = x^3-5x$. $2\cdot[x^3-5x]_0^2 = 2\cdot(((2)^3-5(2))-((0)^3-5(0))) = 2\cdot((8-10)-(0)) = 2\cdot(-2) = -4$.

**Aufgabe 6.5 Symmetrie beim Integrieren anwenden**

Berechne die folgenden bestimmten Integrale. Nutze Symmetrieeigenschaften, wenn möglich, um die Rechnung zu vereinfachen.

1. $\int_{-5}^{5}(x^5 - 2x^3 + x)\,dx$

2. $\int_{-1}^{1}(x^4 + 3x^2 - 1)\,dx$

3. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\, dx$ (Du weißt vielleicht schon, dass $\sin(x)$ punktsymmetrisch ist. Die Stammfunktion von $\sin(x)$ ist $-\cos(x)$.)

## Aufgabe 6.6 Fläche zwischen zwei Kurven

Die Graphen der Funktionen $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ und $g(x) = x^2 - 2x + 1$ schließen eine Fläche ein.

1. **Schnittpunkte bestimmen:** Berechne die x-Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Graphen, indem du $f(x) = g(x)$ setzt und die entstehende Gleichung löst. Diese Schnittpunkte sind deine Integrationsgrenzen $a$ und $b$.

2. **Welche Funktion liegt oben?** Bestimme, welche der beiden Funktionen im Intervall $[a, b]$ die größeren Funktionswerte hat (also 'oben' liegt). Du kannst dies tun, indem du einen Testwert aus dem Intervall $(a, b)$ in beide Funktionen einsetzt oder die Graphen skizzierst.

3. **Differenzfunktion bilden:** Bilde die Differenzfunktion $d(x) = \text{obere Funktion} - \text{untere Funktion}$.

4. **Flächeninhalt berechnen:** Berechne den Flächeninhalt $A = \int_a^b d(x)\, dx$.

5. **Skizze:** Skizziere beide Parabeln und die eingeschlossene Fläche in ein Koordinatensystem.

### ϟ 6.7 Fläche zwischen zwei Graphen

Den Flächeninhalt $A$ zwischen den Graphen zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[a, b]$, wobei $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt (d.h. $f(x)$ ist die obere Funktion), berechnet man mit:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Wenn nicht klar ist, welche Funktion oben liegt, oder wenn sich die obere Funktion ändert, muss man das Intervall entsprechend aufteilen und/oder den Betrag der Differenz integrieren: $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$.

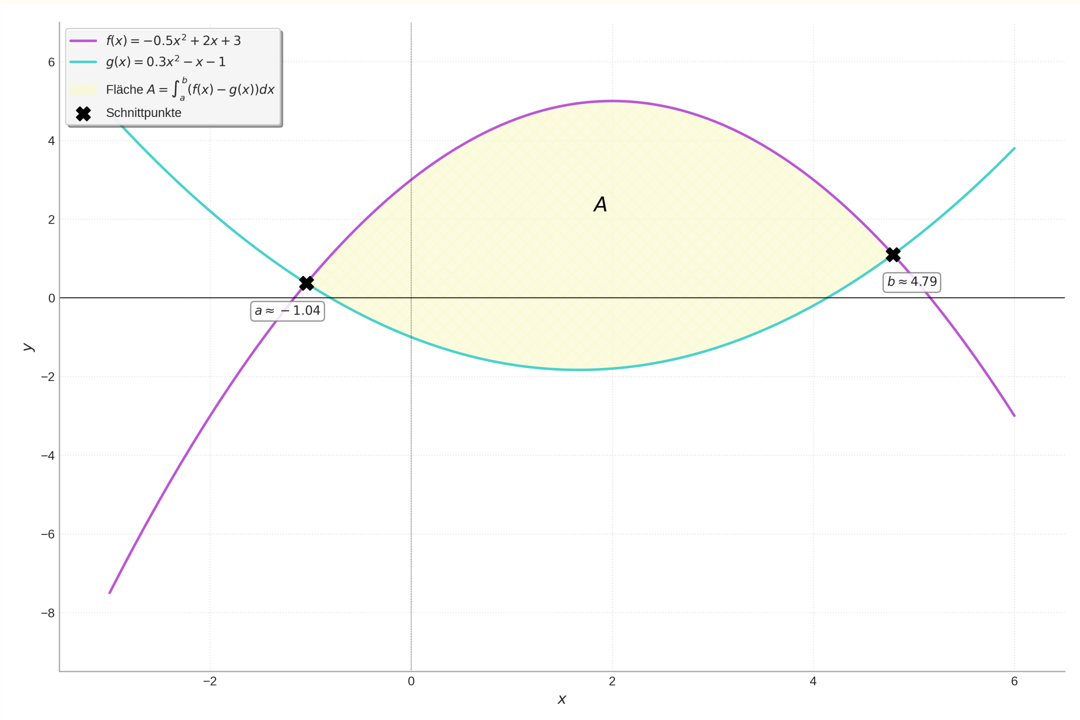


Abbildung 6.9: Fläche zwischen den Graphen von $f(x)$ und $g(x)$

### Aufgabe 6.7 Der Mittelwert einer Funktion

Manchmal möchte man nicht den Gesamtwert (wie die Gesamtfläche oder den Gesamtweg), sondern einen Durchschnittswert einer Größe über ein Intervall bestimmen. Die Integralrechnung hilft auch hier!

#### ϟ *6.8 Mittelwert einer Funktion*

Der **Mittelwert** $\mu$ einer stetigen Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ (mit $a < b$) ist definiert als:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

*Anschauliche Deutung:* Der Mittelwert $\mu$ ist die Höhe eines Rechtecks mit der Breite $(b-a)$, dessen Flächeninhalt gleich dem Flächeninhalt unter dem Graphen von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ ist. Also: $\mu \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

**Aufgabe:** Ein Tag hat vereinfacht 12 Stunden Helligkeit (von $t = 0$ bis $t = 12$). Die Temperatur $T$ (in °C) an diesem Tag kann durch die Funktion $T(t) = -0.5t^2 + 6t + 5$ modelliert werden.

1. Skizziere den Graphen der Temperaturfunktion im Intervall $[0, 12]$.
2. Berechne die Durchschnittstemperatur während dieser 12 Stunden mit der Formel für den Mittelwert einer Funktion.
3. Zeichne in deine Skizze ein Rechteck mit der Breite des Intervalls (12 Stunden) und der Höhe der Durchschnittstemperatur. Vergleiche die Fläche dieses Rechtecks mit der Fläche unter dem Temperatur-Graphen (visuell).

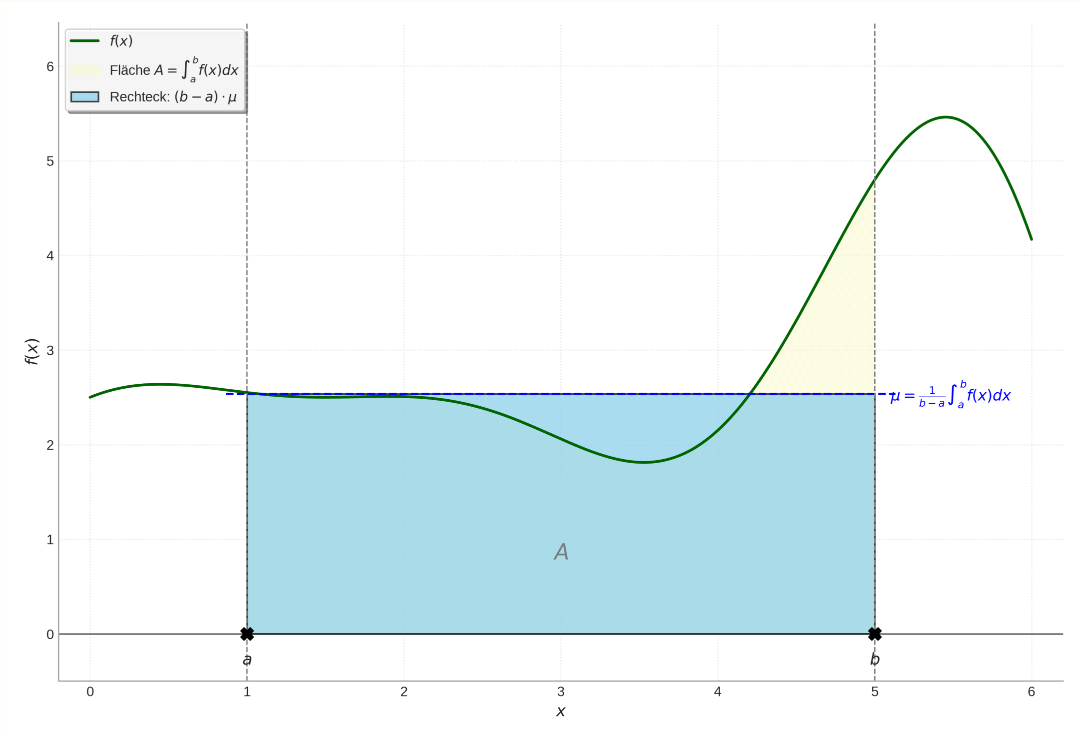


Abbildung 6.10: Geometrische Deutung des Mittelwerts einer Funktion

***Kurz & Knapp 6.1: Bestimmtes Integral und Hauptsatz***

- **Bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)dx$:** Grenzwert der Riemannsummen; gibt den orientierten Flächeninhalt zwischen Graph von $f(x)$ und x-Achse im Intervall $[a, b]$ an.
- **Stammfunktion $F(x)$:** Eine Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ist ($F'(x) = f(x)$). Es gibt unendlich viele, die sich durch eine Konstante $C$ unterscheiden: $\int f(x)dx = F(x) + C$ (unbestimmtes Integral).
- **Hauptsatz (HDI):** $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Ermöglicht einfache Berechnung bestimmter Integrale über Stammfunktionen.
- **Flächenberechnung:** Bei Nullstellen im Intervall müssen Teilintegrale gebildet und Beträge addiert werden für den geometrischen Flächeninhalt.
- **Symmetrie nutzen:** Bei punktsymmetrischen Funktionen über $[-a, a]$ ist $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$. Bei achsensymmetrischen ist $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$.
- **Fläche zwischen Kurven $f(x)$ und $g(x)$ (mit $f(x) \geq g(x)$):** $A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.
- **Mittelwert $\mu$ von $f(x)$ auf $[a, b]$:** $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

## 6.5 Zusammenfassung und Ausblick zur Integralrechnung

Wir haben nun die fundamentalen Ideen der Integralrechnung kennengelernt: von der anschaulichen Flächenapproximation durch Riemannsummen über das Konzept der Stammfunktion als 'Gegenstück' zur Ableitung bis hin zum mächtigen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Mit diesen Werkzeugen können wir bereits viele wichtige Probleme lösen, insbesondere Flächeninhalte unter und zwischen Kurven von Polynomfunktionen berechnen sowie Mittelwerte von Funktionen bestimmen.

***Kurz & Knapp 6.2: Integralrechnung – Das Wichtigste auf einen Blick***

- **Riemannsummen (Unter-/Obersumme):** Annäherung von Flächen unter Kurven durch Summen von Rechtecksflächen.
- **Bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)dx$:** Grenzwert der Riemannsummen; gibt den orientierten Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ an.
- **Stammfunktion $F(x)$:** Eine Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ist ($F'(x) = f(x)$). Es gibt unendlich viele Stammfunktionen, die sich durch eine additive Konstante $C$ unterscheiden: $\int f(x)dx = F(x) + C$ (unbestimmtes Integral).
- **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI):** Die Brücke zwischen Ableiten und Integrieren!
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$
Er ermöglicht die exakte Berechnung bestimmter Integrale über Stammfunktionen.
- **Flächenberechnung:**
  - Liegt $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ nicht unterhalb der x-Achse, ist $A = \int_a^b f(x)dx$.
  - Bei Nullstellen im Intervall müssen Teilintegrale gebildet und deren Beträge addiert werden, um den geometrischen Gesamtflächeninhalt zu erhalten ($A = \int_a^b |f(x)|dx$).
  - Fläche zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$ (mit $f(x) \geq g(x)$ auf $[a, b]$): $A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

- **Symmetrie nutzen:** Bei punktsymmetrischen Funktionen über $[-a, a]$ ist $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$. Bei achsensymmetrischen ist $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)dx$.
- **Mittelwert $\mu$ von $f(x)$ auf $[a, b]$:** $\mu = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(x)dx$.

**Ausblick: Was kommt noch in der Integralrechnung?**

Die bisher gelernten Integrationsregeln (Potenz-, Faktor-, Summenregel als Umkehrung der Ableitungsregeln) reichen für Polynomfunktionen und einfache gebrochen-rationale Funktionen gut aus. Aber was ist mit komplexeren Funktionen, die wir bereits beim Ableiten kennengelernt haben?

- Wie integriert man Produkte von Funktionen, z.B. $f(x) = x^2 \cdot e^x$?
- Wie integriert man Quotienten, z.B. $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$?
- Wie integriert man verkettete Funktionen, z.B. $h(x) = (3x + 5)^4$ oder $k(x) = e^{x^2+x+1} \cdot (2x + 1)$ oder $m(x) = x \cdot \sin(x^2)$?

Für solche Fälle gibt es weiterführende **Integrationstechniken**, die oft auf der Umkehrung der komplexeren Ableitungsregeln basieren:

- Die **partielle Integration** (Umkehrung der Produktregel).
- Die **Integration durch Substitution** (Umkehrung der Kettenregel).

Diese Techniken erweitern unseren 'Integrations-Werkzeugkasten' erheblich und ermöglichen die Behandlung einer viel größeren Klasse von Funktionen. Sie sind oft Gegenstand weiterführender Kurse oder Vertiefungen in der Oberstufe.
Auch das Integrieren von Exponentialfunktionen (wie $e^x$), Logarithmusfunktionen (wie $\ln x$) und trigonometrischen Funktionen (wie $\sin x, \cos x$) erfordert eigene Stammfunktionen, die du noch kennenlernen wirst. Die Welt der Integrale ist groß und mächtig! Das Fundament, das du hier gelegt hast, ist aber entscheidend für alles Weitere.

**Aufgabe 6.8 Checkliste: Das bestimmte Integral – Von der Summe zur Fläche**

Das bestimmte Integral ist ein zentrales Konzept der Analysis. Diese Fragen helfen dir, die Idee dahinter besser zu greifen:

(a) **Riemannsummen als Annäherung:**
- Erkläre mit eigenen Worten, warum die Unter- und Obersumme sich dem tatsächlichen Flächeninhalt unter einer Kurve annähern, wenn man die Anzahl $n$ der Rechtecke immer weiter erhöht. Was passiert dabei mit der Breite $\Delta x$ der einzelnen Rechtecke?
- Skizziere eine Funktion, die in einem Intervall $[a, b]$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt. Wie würdest du die Riemannsumme (z.B. mit linken Rändern) interpretieren? Was passiert mit den Rechtecksflächen, die unterhalb der x-Achse liegen?

(b) **Das bestimmte Integral $\int_{a}^{b} f(x)dx$:**
- Was bedeuten die einzelnen Bestandteile der Notation: $\int$, $a$, $b$, $f(x)$ und $dx$? Welche Rolle spielt das $dx$ in Erinnerung an die Riemannsummen?
- Wenn $f(x)$ die Änderungsrate einer Größe beschreibt (z.B. die Geschwindigkeit $v(t)$ in m/s), welche Bedeutung und welche Einheit hat dann das bestimmte Integral $\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$ (bzw. $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$)?

(c) **Orientierte Fläche vs. Geometrische Fläche:**

- Angenommen, $\int_0^2 f(x)dx = 5$ und $\int_2^3 f(x)dx = -2$. Was ist der Wert von $\int_0^3 f(x)dx$? Welchen geometrischen Gesamtflächeninhalt schließt der Graph von $f(x)$ mit der x-Achse im Intervall $[0, 3]$ ein? Erkläre den Unterschied.
- Wie würdest du vorgehen, um den *geometrischen* Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $f(x) = x^3 - x$ und der x-Achse im Intervall $[-1, 1]$ zu berechnen? Warum reicht hier nicht einfach $\int_{-1}^1 (x^3 - x)dx$? (Tipp: Symmetrie und Nullstellen beachten).

(d) **Eigenschaften des bestimmten Integrals:**

- Was ist der Wert von $\int_a^a f(x)dx$ und warum?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\int_a^b f(x)dx$ und $\int_b^a f(x)dx$? Wie lässt sich das mit $F(b) - F(a)$ erklären?

**Aufgabe 6.9 Checkliste: Stammfunktion und Hauptsatz – Die große Verbindung**

Die Entdeckung des Zusammenhangs zwischen Ableitung und Integral durch den Hauptsatz ist revolutionär. Teste dein Verständnis:

(a) **Stammfunktion und unbestimmtes Integral:**

- Erkläre den Unterschied zwischen 'einer Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$' und 'dem unbestimmten Integral $\int f(x)dx$'. Warum ist die Integrationskonstante $C$ beim unbestimmten Integral so wichtig?
- Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist und $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ ist: Ist $F(x) \cdot G(x)$ dann automatisch eine Stammfunktion von $f(x) \cdot g(x)$? Überprüfe deine Vermutung mit einem einfachen Beispiel (z.B. $f(x) = 1, g(x) = 2x$). Was schließt du daraus für Integrationsregeln für Produkte?

(b) **Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI):**

- Formuliere den HDI mit eigenen Worten. Was ist die 'Brücke', die er zwischen der Differential- und Integralrechnung schlägt?
- Warum ist der HDI so praktisch für die Berechnung von bestimmten Integralen im Vergleich zur Methode mit den Riemannsummen?
- Angenommen, jemand behauptet, eine Stammfunktion von $f(x) = 2x$ sei $F(x) = x^2 + 1000$, und eine andere Person sagt, es sei $G(x) = x^2 - 5$. Wer hat Recht? Und wie wirkt sich die Wahl von $F(x)$ oder $G(x)$ auf das Ergebnis von $\int_1^2 2x\,dx$ aus? Begründe.

(c) **Anwendungen und Interpretationen:**

- Wenn $\int_a^b f(x)dx = 0$ ist, bedeutet das zwangsläufig, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt? Erkläre anhand einer Skizze oder eines Beispiels (nutze Symmetrie!).
- Erkläre die geometrische Bedeutung des Mittelwerts $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ mithilfe eines flächengleichen Rechtecks.

# 7 Exponentialfunktionen – Die Funktionen des Wachstums und Zerfalls

Bisher haben wir uns hauptsächlich mit Polynomfunktionen beschäftigt. Nun betreten wir die Welt der **Exponentialfunktionen**. Diese Funktionen haben eine ganz besondere Eigenschaft: Die Variable $x$ steht im **Exponenten**, z.B. $f(x) = 2^x$ oder $f(x) = 10^{0.5x}$.

**Was du in diesem Kapitel lernen wirst:**

Nachdem du dieses Kapitel durchgearbeitet hast, wirst du in der Lage sein:

- die **natürliche Exponentialfunktion** $f(x) = e^x$, die Bedeutung der **Eulerschen Zahl** $e$ sowie die allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ zu definieren und ihre fundamentalen Eigenschaften (Graph, Definitions- und Wertebereich, Asymptoten, Monotonie, Krümmung) zu verstehen und zu beschreiben.
- die **Ableitungen** der Exponentialfunktionen $e^x$, $e^{kx}$ und $b^x$ sicher zu bilden und die bereits bekannten Ableitungsregeln (Produkt-, Quotienten- und insbesondere die Kettenregel) auf komplexere Funktionen anzuwenden, die Exponentialterme enthalten.
- grundlegende **Stammfunktionen** von $e^x$, $e^{kx}$ und $b^x$ zu bestimmen und erweiterte Integrationstechniken wie die **partielle Integration** und die **Integration durch Substitution** zu nutzen, um Integrale mit Exponentialfunktionen zu lösen.
- eine vollständige **Kurvendiskussion** für Funktionen durchzuführen, die Exponentialterme beinhalten (oft in Kombination mit Polynomen), inklusive der Bestimmung von Nullstellen (unter Beachtung, dass $e^x \neq 0$), Extrem- und Wendepunkten.
- Exponentialfunktionen zur mathematischen Modellierung von realen **Wachstums- und Zerfallsprozessen** (z.B. radioaktiver Zerfall, Medikamentenkonzentration) zu verwenden und damit verbundene Fragestellungen (z.B. Halbwertszeit, maximale Werte) zu beantworten.
- **Flächeninhalte**, die von Graphen von Exponentialfunktionen begrenzt werden, mittels bestimmter Integrale zu berechnen und das Konzept von **uneigentlichen Integralen** (z.B. Flächenberechnung bis ins Unendliche) zu verstehen und anzuwenden.
- die Umrechnung $b^x = e^{x\ln(b)}$ zu verstehen und zu nutzen, um allgemeine Exponentialfunktionen auf die natürliche Exponentialfunktion zurückzuführen und deren Eigenschaften abzuleiten.
- komplexere **Anwendungs- und Optimierungsaufgaben** zu analysieren und zu lösen, bei denen Exponentialfunktionen sowie deren Differential- und Integralrechnung eine zentrale Rolle spielen.

Du wirst damit eine weitere extrem wichtige und vielseitige Funktionsklasse meistern, die für das Verständnis und die Beschreibung dynamischer Prozesse in Natur, Technik und Wirtschaft unerlässlich ist!

Exponentialfunktionen sind die mathematische Sprache für viele natürliche und wirtschaftliche Prozesse:

- **Wachstumsprozesse:** Vermehrung von Bakterien, Zinseszins bei Geldanlagen, Bevölkerungswachstum (unter idealen Bedingungen).
- **Zerfallsprozesse:** Radioaktiver Zerfall, Abkühlung eines heißen Gegenstandes, Abbau eines Medikaments im Körper.

Die charakteristische Eigenschaft dieser Prozesse ist, dass die Änderungsrate oft proportional zum aktuellen Bestand ist – je mehr da ist, desto schneller wächst (oder zerfällt) es.

***Schon gewusst? Der schnelle Zinseszins-Trick: Die 72er-Regel!***

Hast du dich schon einmal gefragt, wie lange es dauert, bis sich dein gespartes Geld bei einem bestimmten Zinssatz verdoppelt? Es gibt eine verblüffend einfache Faustformel dafür: die **72er-Regel**!

**So geht's:** Teile die Zahl 72 durch den jährlichen Zinssatz (als Prozentzahl, nicht als Dezimalzahl). Das Ergebnis ist ungefähr die Anzahl der Jahre, die es dauert, bis sich dein Kapital verdoppelt hat.
**Beispiele:**

- Bei einem Zinssatz von 3 % pro Jahr: $72/3 = 24$ Jahre.
- Bei einem Zinssatz von 6 % pro Jahr: $72/6 = 12$ Jahre.
- Bei einem Zinssatz von 8 % pro Jahr: $72/8 = 9$ Jahre.

Diese Regel ist eine gute Näherung für Zinssätze im üblichen Bereich (etwa 2 % bis 10 %). Je kleiner der Zinssatz, desto genauer ist sie.
**Der mathematische Hintergrund (ein kleiner Ausblick):** Die exakte Berechnung der Verdopplungszeit erfordert das Auflösen einer Exponentialgleichung, z.B. $K_0 \cdot (1+p)^t = 2K_0$, wobei $p$ der Zinssatz als Dezimalzahl ist. Um diese Gleichung nach der Zeit $t$ aufzulösen, braucht man den **Logarithmus** – die 'Partnerfunktion' der Exponentialfunktion, die du im nächsten Kapitel kennenlernen wirst! Die 72er-Regel ist eine clevere Vereinfachung, die aus der Analyse mit dem natürlichen Logarithmus ($\ln 2 \approx 0,693$) und einigen Annahmen entsteht. Manchmal wird auch die 70er- oder 69er-Regel verwendet, die etwas genauer sein können, aber die 72 ist durch viele kleine ganze Zahlen teilbar und daher leicht im Kopf zu rechnen!

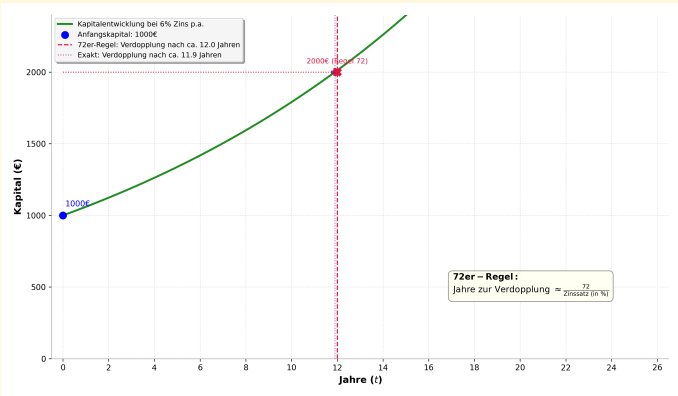


Abbildung 7.1: Die 72er-Regel: Eine Faustformel zur Verdopplungszeit.

## 7.1 Die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ und die Eulersche Zahl $e$

Unter allen Exponentialfunktionen gibt es eine mit einer ganz besonderen Basis, die in der Mathematik eine herausragende Rolle spielt: die **natürliche Exponentialfunktion** $f(x) = e^x$. Die Basis dieser Funktion ist die **Eulersche Zahl** $e$.

**ϟ *7.1 Die Eulersche Zahl* $e$**

Die Eulersche Zahl $e$ ist eine irrationale (nicht als Bruch ganzer Zahlen darstellbare) und transzendente Zahl mit dem ungefähren Wert:

$$e \approx 2,718281828459...$$

Sie ist eine der wichtigsten Konstanten in der Mathematik, ähnlich wie $\pi$. Eine Möglichkeit, $e$ zu definieren, ist über den Grenzwert (siehe Infobox im vorherigen Kapitel):

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Diese Definition stammt aus der Zinseszinsrechnung bei kontinuierlicher Verzinsung.

**Warum ist $e$ so 'natürlich'?**

Die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ hat eine einzigartige und bemerkenswerte Eigenschaft, die sie so 'natürlich' und fundamental für die Differentialrechnung macht: **Sie ist ihre eigene Ableitung!**

$$(e^x)' = e^x$$

Das bedeutet, die Steigung der Tangente an den Graphen von $f(x) = e^x$ an jeder Stelle $x$ ist genau gleich dem Funktionswert $e^x$ an dieser Stelle. An der Stelle $x = 0$ ist $f(0) = e^0 = 1$, und die Steigung der Tangente ist ebenfalls $f'(0) = e^0 = 1$. Diese Eigenschaft macht das Rechnen mit $e^x$ besonders elegant.

### 7.1.1 Graph und Eigenschaften von $f(x) = e^x$

**ϟ *7.2 Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion* $f(x) = e^x$**

- **Definitionsbereich:** $D_f = \mathbb{R}$ (man kann jede reelle Zahl für $x$ einsetzen).
- **Wertebereich:** $W_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ (die Funktionswerte sind immer positiv und werden niemals Null oder negativ).
- **Nullstellen:** Die Funktion $f(x) = e^x$ hat **keine Nullstellen**, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph schneidet die x-Achse nie.
- **Schnittpunkt mit der y-Achse:** $f(0) = e^0 = 1$. Der Punkt ist $P_y(0|1)$.
- **Monotonie:** Da die Ableitung $f'(x) = e^x$ immer positiv ist ($e^x > 0$ für alle $x$), ist die Funktion $f(x) = e^x$ **streng monoton steigend** für alle $x \in \mathbb{R}$.
- **Krümmung:** Die zweite Ableitung ist $f''(x) = (e^x)' = e^x$. Da $f''(x) = e^x$ immer positiv ist, ist der Graph von $f(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ **linksgekrümmt** (konvex).
- **Grenzwerte (Verhalten im Unendlichen):**
  - $\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$ (für große positive $x$ werden die Werte beliebig groß).
  - $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ (für große negative $x$ nähern sich die Werte der Null an; die x-Achse ist eine **waagerechte Asymptote** für $x \to -\infty$).

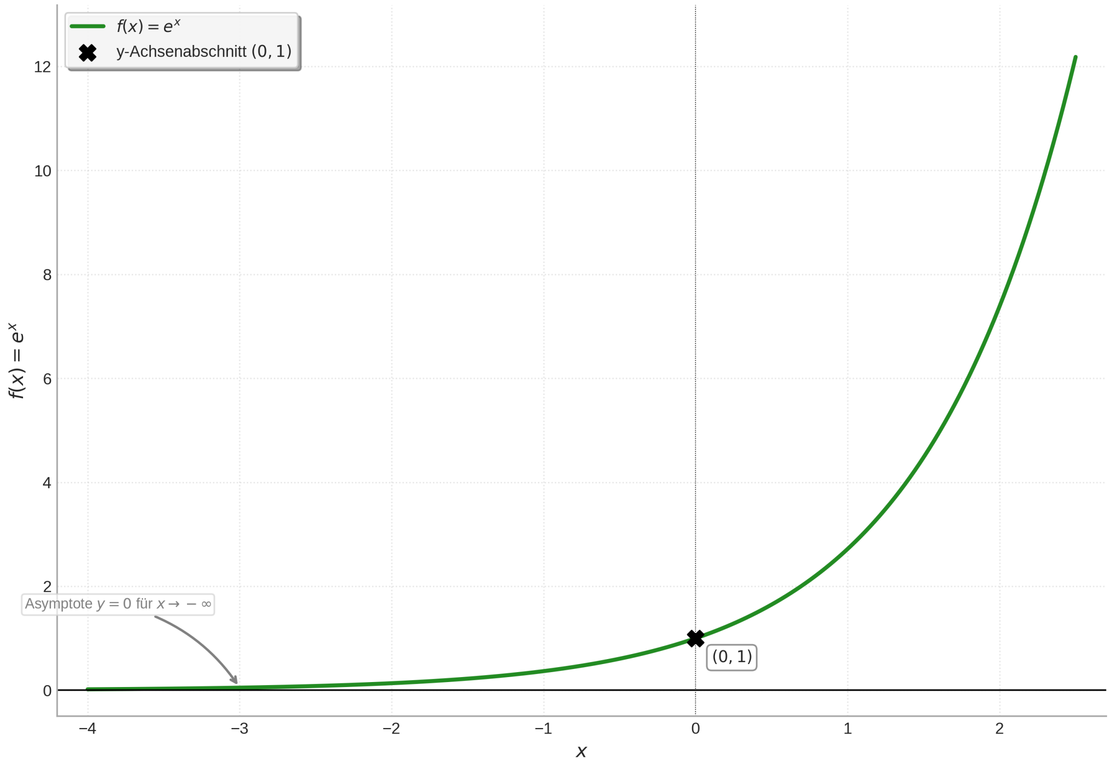


Abbildung 7.2: Graph der natürlichen Exponentialfunktion $f(x) = e^x$

### 7.1.2 Ableitung und Stammfunktion von $e^x$

Wie bereits erwähnt, ist das Ableiten von $e^x$ besonders einfach.

**ϟ *7.3 Ableitung und Stammfunktion von $f(x) = e^x$***

- **Ableitung:** Die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist die Funktion selbst:

$$(e^x)' = e^x$$

- **Stammfunktion (unbestimmtes Integral):** Da die Ableitung von $e^x$ wieder $e^x$ ist, ist $e^x$ auch eine Stammfunktion von sich selbst. Die Menge aller Stammfunktionen ist:

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

wobei $C$ die Integrationskonstante ist.

**Beispiel 7.1 Ableiten und Integrieren von $e^x$**

1. Leite $f(x) = 5e^x - 3x^2$ ab. $f'(x) = (5e^x)' - (3x^2)' = 5(e^x)' - 3(2x) = 5e^x - 6x$.
2. Bestimme das unbestimmte Integral von $g(x) = 2e^x + 4x$. $\int (2e^x + 4x)\, dx = \int 2e^x \, dx + \int 4x \, dx = 2 \int e^x \, dx + 4 \int x^1 \, dx = 2e^x + 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C = 2e^x + 2x^2 + C$.

**Aufgabe 7.1 Erste Übungen mit $e^x$**

1. Bilde die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen:
   - $f_1(x) = 3e^x - x^3 + 2x - 7$
   - $f_2(x) = -0.5e^x + \frac{1}{x}$ (Tipp: $\frac{1}{x} = x^{-1}$)

2. Bestimme die Menge aller Stammfunktionen:

   - $g_1(x) = 4e^x + 6x^2 - 1$
   - $g_2(x) = \frac{e^x}{2} - \sqrt{x}$ (Tipp: $\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}e^x$)

3. Berechne das bestimmte Integral $\int_0^1 e^x \, dx$. Was stellt dieser Wert geometrisch dar?

## 7.2 Allgemeinere Exponentialfunktionen und ihre Transformationen

Die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist die Basis, aber oft begegnen uns Exponentialfunktionen in allgemeinerer Form, z.B. $f(x) = a \cdot e^{kx} + d$ oder $f(x) = a \cdot b^x$. Diese entstehen durch Transformationen (Streckung, Stauchung, Spiegelung, Verschiebung) der Grundfunktion $e^x$ oder einer anderen Basis $b$.

### 7.2.1 Transformationen der natürlichen Exponentialfunktion: $f(x) = a \cdot e^{k(x-c)} + d$

Ähnlich wie bei Polynomfunktionen können wir die Parameter interpretieren:

- $a$: Streckung/Stauchung in y-Richtung. Wenn $a < 0$, zusätzlich Spiegelung an der x-Achse.
- $k$: Streckung/Stauchung in x-Richtung. Wenn $k < 0$, zusätzlich Spiegelung an der y-Achse. Beeinflusst die 'Schnelligkeit' des Wachstums/Zerfalls.
- $c$: Verschiebung in x-Richtung (um $c$ nach rechts, wenn $x - c$; um $c$ nach links, wenn $x + c$).
- $d$: Verschiebung in y-Richtung. Die Gerade $y = d$ wird zur neuen **waagerechten Asymptote**.

**Ableitung von $f(x) = e^{kx}$ (mit Kettenregel):** Hier ist die äußere Funktion $g(u) = e^u$ mit $g'(u) = e^u$. Die innere Funktion ist $h(x) = kx$ mit $h'(x) = k$. Nach der Kettenregel: $(e^{kx})' = g'(h(x)) \cdot h'(x) = e^{kx} \cdot k = ke^{kx}$.

***ϟ 7.4 Ableitung und Stammfunktion von $e^{kx}$***

- **Ableitung:** $(e^{kx})' = k \cdot e^{kx}$ (Kettenregel: 'äußere Ableitung $e^{kx}$ mal innere Ableitung $k$')
- **Stammfunktion:** $\int e^{kx} \, dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$ (für $k \neq 0$)

**Beispiel 7.2 Ableiten und Integrieren von $a \cdot e^{kx}$**

1. $f(x) = 3e^{2x}$. Hier ist $a = 3, k = 2$. $f'(x) = 3 \cdot (e^{2x})' = 3 \cdot (2e^{2x}) = 6e^{2x}$.
2. $g(x) = -4e^{-0.5x} + 7$. $g'(x) = -4 \cdot (e^{-0.5x})' + (7)' = -4 \cdot (-0.5e^{-0.5x}) + 0 = 2e^{-0.5x}$.
3. $\int 5e^{3x} \, dx = 5 \int e^{3x} \, dx = 5 \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{5}{3}e^{3x} + C$.
4. $\int (e^{-x} + 2) \, dx = \int e^{-1x} \, dx + \int 2 \, dx = \frac{1}{-1}e^{-x} + 2x + C = -e^{-x} + 2x + C$.

**Aufgabe 7.2 Transformationen und Ableitungen/Stammfunktionen**

1. Beschreibe, wie der Graph der Funktion $f(x) = 2e^{-0.5(x-1)}+3$ aus dem Graphen der natürlichen Exponentialfunktion $y = e^x$ hervorgeht. Gib den Definitionsbereich, Wertebereich und die Gleichung der Asymptote an. Skizziere den Graphen.

2. Bilde die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

   - $f_1(x) = 7e^{4x}$
   - $f_2(x) = e^{-x} + 3x$

- $f_3(t) = A \cdot e^{-kt}$ ($A, k$ sind positive Konstanten; oft Modell für Zerfall)

3. Bestimme die Menge aller Stammfunktionen:

   - $g_1(x) = 10e^{0.2x}$
   - $g_2(x) = e^{-3x} - e^{2x}$

### 7.2.2 Die allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ und ihre Beziehung zu $e^x$

Neben der natürlichen Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ gibt es natürlich auch Exponentialfunktionen zu jeder beliebigen positiven Basis $b$ (wobei $b \neq 1$), wie zum Beispiel $f(x) = 2^x$, $f(x) = 10^x$ oder $f(x) = (0.5)^x$.

**7.5 *Die allgemeine Exponentialfunktion* $f(x) = b^x$**

Eine Funktion der Form

$$f(x) = b^x$$

mit einer festen Basis $b > 0$ und $b \neq 1$ heißt allgemeine Exponentialfunktion zur Basis $b$.

- Wenn $b > 1$: Die Funktion ist streng monoton steigend (Wachstum).
- Wenn $0 < b < 1$: Die Funktion ist streng monoton fallend (Zerfall).

Alle diese Funktionen gehen durch den Punkt $(0|1)$, denn $b^0 = 1$. Ihre waagerechte Asymptote ist die x-Achse ($y = 0$) für $x \to -\infty$ (wenn $b > 1$) oder für $x \to \infty$ (wenn $0 < b < 1$).

**Warum reicht es oft, $e^x$ zu betrachten? Der Trick mit dem Logarithmus!**

Jede Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ (mit $b > 0$) lässt sich mit Hilfe des natürlichen Logarithmus (ln) und der $e$-Funktion umschreiben. Es gilt nämlich:

$$b = e^{\ln(b)}$$

(Da $e^x$ und $\ln(x)$ Umkehrfunktionen voneinander sind, heben sie sich sozusagen gegenseitig auf). Damit können wir schreiben:

$$b^x = (e^{\ln(b)})^x$$

Nach den Potenzgesetzen ($(a^m)^n = a^{m \cdot n}$) gilt:

$$b^x = e^{\ln(b) \cdot x} = e^{x \ln(b)}$$

Der Term $\ln(b)$ ist dabei einfach eine Konstante für eine feste Basis $b$. Wenn wir also $k = \ln(b)$ setzen, haben wir die Form $e^{kx}$, die wir schon kennen! Das bedeutet: **Jede Exponentialfunktion $b^x$ kann als natürliche Exponentialfunktion $e^{kx}$ mit $k = \ln(b)$ dargestellt werden.** Deshalb ist die $e$-Funktion so fundamental: Verstehen wir sie und ihre Transformationen, verstehen wir im Grunde alle Exponentialfunktionen.

**Beispiele für die Umrechnung:**

- $2^x = e^{\ln(2) \cdot x} \approx e^{0.693x}$
- $10^x = e^{\ln(10) \cdot x} \approx e^{2.303x}$
- $(0.5)^x = e^{\ln(0.5) \cdot x} \approx e^{-0.693x}$ (Hier ist $\ln(0.5) = \ln(1/2) = \ln(1) - \ln(2) = 0 - \ln(2) = -\ln(2) < 0$, was zum erwarteten Zerfall führt).

**Ableitung von $f(x) = b^x$:** Mit dem Trick $b^x = e^{x \ln(b)}$ und der Kettenregel können wir $b^x$ leicht ableiten: Sei $f(x) = b^x = e^{x\ln(b)}$. Die äußere Funktion ist $g(u) = e^u \implies g'(u) = e^u$. Die innere Funktion ist $h(x) = x\ln(b) \implies h'(x) = \ln(b)$ (da $\ln(b)$ eine Konstante ist und die Ableitung von $kx$ gleich $k$ ist). Also nach der Kettenregel: $(b^x)' = (e^{x\ln(b)})' = e^{x\ln(b)} \cdot \ln(b) = b^x \cdot \ln(b)$.

### ϟ *7.6 Ableitung und Stammfunktion von $f(x) = b^x$*

- **Ableitung:** Die Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ ist:

$$(b^x)' = b^x \cdot \ln(b)$$

  (Beachte: Für $b = e$ ist $\ln(e) = 1$, also $(e^x)' = e^x \cdot 1 = e^x$, was wir schon wussten!)

- **Stammfunktion:** Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x) = b^x$ ist:

$$\int b^x \, dx = \frac{1}{\ln(b)} b^x + C \quad (\text{für } b > 0, b \neq 1)$$

  (Probe: $(\frac{1}{\ln(b)} b^x)' = \frac{1}{\ln(b)}(b^x \cdot \ln(b)) = b^x$. Passt!)

### Beispiel 7.3 Ableiten und Integrieren von $b^x$

1. $f(x) = 2^x$. $f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$.
2. $g(x) = 5 \cdot 10^x$. $g'(x) = 5 \cdot (10^x \cdot \ln(10)) = 5\ln(10) \cdot 10^x$.
3. $\int 3^x \, dx = \frac{1}{\ln(3)} 3^x + C$.

### Aufgabe 7.3 Umgang mit allgemeinen Exponentialfunktionen

1. Schreibe die folgenden Funktionen mit der Basis $e$ (d.h. in der Form $a \cdot e^{kx}$):
   - $f_1(x) = 3^x$
   - $f_2(x) = 10 \cdot (0.8)^x$
2. Bilde die erste Ableitung der folgenden Funktionen:
   - $g_1(x) = 4^x + x^4$
   - $g_2(x) = 7 \cdot (1.5)^x - e^x$
   - $g_3(t) = P_0 \cdot a^t$ ($P_0$ und $a$ sind positive Konstanten. Dies ist ein typisches Modell für exponentielles Wachstum oder Zerfall, je nachdem ob $a > 1$ oder $0 < a < 1$.)
3. Bestimme die Menge aller Stammfunktionen:
   - $h_1(x) = 5^x$
   - $h_2(x) = 3 \cdot (0.2)^x + e^{2x}$
4. **Vergleich $2^x$ und $e^x$:**
   - Skizziere die Graphen von $f(x) = 2^x$ und $g(x) = e^x$ in ein gemeinsames Koordinatensystem (z.B. für $x \in [-2, 3]$). Nutze dazu eine Wertetabelle.
   - Vergleiche die Steigungen der beiden Funktionen an der Stelle $x = 0$. Welche Funktion wächst dort schneller?
   - Berechne $(2^x)'$ und $(e^x)'$.

**Achtung Stolperstein! 7.1: Ableiten von $e^{g(x)}$ und $b^x$**

Beim Ableiten von Exponentialfunktionen schleichen sich leicht Fehler ein. Achte besonders auf:

- **Innere Ableitung bei $e^{g(x)}$ vergessen:** Die häufigste Fehlerquelle! Bei Funktionen wie $f(x) = e^{kx}$ oder allgemeiner $f(x) = e^{g(x)}$ musst du immer die Kettenregel anwenden: $(e^{g(x)})' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$. Die Ableitung des Exponenten (innere Ableitung $g'(x)$) darf nicht fehlen! *Beispiel Falsch:* $(e^{3x})' = e^{3x}$. *Richtig:* $(e^{3x})' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$.

- **Faktor $\ln(b)$ bei $(b^x)'$ vergessen:** Die Ableitung von $f(x) = b^x$ ist $f'(x) = b^x \cdot \ln(b)$. Der Faktor $\ln(b)$ ist entscheidend (außer für $b = e$, da $\ln(e) = 1$). *Beispiel Falsch:* $(2^x)' = 2^x$. *Richtig:* $(2^x)' = 2^x \cdot \ln(2)$.

- **Potenzregel falsch auf Basis $e$ oder $b$ angewendet:** Die Regel $(x^n)' = nx^{n-1}$ gilt, wenn die *Basis* die Variable ist und der *Exponent* eine Konstante. Bei $e^x$ oder $b^x$ ist die Basis eine Konstante und der Exponent die Variable. *Beispiel Falsch:* $(e^x)' = xe^{x-1}$. *Richtig:* $(e^x)' = e^x$.

Präge dir diese Unterschiede gut ein, um Fehler zu vermeiden!

***Tipp 7.1: Taschenrechner für*** $\ln(b)$

Den Wert von $\ln(b)$ (natürlicher Logarithmus von $b$) findest du auf deinem Taschenrechner (oft als 'ln'-Taste). Für viele theoretische Überlegungen und Ableitungen lässt man $\ln(b)$ aber einfach als exakten Ausdruck stehen.

Die Fähigkeit, zwischen $b^x$ und $e^{kx}$ wechseln zu können, ist sehr nützlich, da viele Formeln und Regeln in der Analysis primär für die Basis $e$ formuliert sind.

### 7.2.3 Anwendung der Ableitungsregeln auf Funktionen mit $e^x$

Jetzt, da wir die Grundfunktionen $e^x$ und $e^{kx}$ sowie deren Ableitungen und Stammfunktionen kennen, wollen wir sehen, wie wir Funktionen ableiten, bei denen diese mit Polynomen durch Produkt, Quotient oder Verkettung verbunden sind. Hier kommen unsere bekannten Ableitungsregeln voll zum Einsatz!

**Produktregel mit $e^x$:** Erinnerung: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

**Beispiel 7.4 Produktregel mit $e^x$**

Leite $f(x) = x^2 \cdot e^x$ ab.

- $u(x) = x^2 \implies u'(x) = 2x$
- $v(x) = e^x \implies v'(x) = e^x$

$f'(x) = (2x) \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$ Hier kann man $e^x$ ausklammern: $f'(x) = e^x(2x + x^2) = e^x(x^2 + 2x)$.

**Aufgabe 7.4 Produktregel mit $e^x$ üben**

Bilde die erste Ableitung der folgenden Funktionen und vereinfache so weit wie möglich:

1. $f_1(x) = (3x - 1)e^x$
2. $f_2(x) = (x^2 + 2x - 5)e^x$
3. $f_3(t) = t \cdot e^{2t}$ (Hier ist die Kettenregel für $e^{2t}$ zusätzlich nötig!)

**Quotientenregel mit $e^x$:** Erinnerung: $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

**Beispiel 7.5 Quotientenregel mit $e^x$**

Leite $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ ab. (Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$)

- $u(x) = e^x \implies u'(x) = e^x$
- $v(x) = x^2 + 1 \implies v'(x) = 2x$

$f'(x) = \frac{e^x \cdot (x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$ Auch hier kann man $e^x$ im Zähler ausklammern: $f'(x) = \frac{e^x(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.

**Aufgabe 7.5 Quotientenregel mit $e^x$ üben**

Bilde die erste Ableitung der folgenden Funktionen und vereinfache so weit wie möglich. Gib auch den Definitionsbereich an.

1. $f_1(x) = \frac{x+2}{e^x}$
2. $f_2(x) = \frac{e^{3x}}{2x-1}$ (Kettenregel für $e^{3x}$ nötig!)

**Kettenregel mit $e^x$ (Vertiefung):** Erinnerung: $(g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$. Die Exponentialfunktion tritt sehr oft als äußere Funktion auf, wobei der Exponent die innere Funktion ist.

**Beispiel 7.6 Kettenregel mit $e^x$ vertieft**

Leite $f(x) = e^{x^2-3x}$ ab.

- Äußere Funktion: $g(u) = e^u \implies g'(u) = e^u$.
- Innere Funktion: $h(x) = x^2 - 3x \implies h'(x) = 2x - 3$.

$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = e^{x^2-3x} \cdot (2x - 3) = (2x - 3)e^{x^2-3x}$.

**Aufgabe 7.6 Kettenregel mit $e^x$ weiter üben**

Bilde die erste Ableitung:

1. $f_1(x) = e^{-x^2}$
2. $f_2(x) = 5e^{2x^3-4x+1}$
3. $f_3(x) = (e^x + 1)^3$ (Hier ist $e^x + 1$ die innere Funktion und $(\dots)^3$ die äußere.)

**Aufgabe 7.7 Kombinierte Anwendung: Produkt- und Kettenregel bei e-Funktionen**

Bilde die erste Ableitung der folgenden Funktionen. Vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich, indem du z.B. gemeinsame Faktoren (insbesondere den $e$-Term) ausklammerst.

1. $f(x) = (2x^2 - 3x + 1) \cdot e^{x^2-4}$

   ***Tipp 7.2: Struktur erkennen***

   Diese Funktion ist ein Produkt $u(x) \cdot v(x)$. Für die Ableitung des Faktors $v(x) = e^{x^2-4}$ benötigst du die Kettenregel.

2. $g(x) = (x + 1)^2 \cdot e^{-2x}$

**Tipp 7.3: Zweimal Kettenregel?**

Auch dies ist ein Produkt. Ein Faktor ist $(x+1)^2$, dessen Ableitung die Kettenregel (oder Ausmultiplizieren) erfordert. Der andere Faktor $e^{-2x}$ benötigt ebenfalls die Kettenregel.

## 7.3 Kurvendiskussion von Funktionen mit $e^x$

Jetzt, da wir wissen, wie man Funktionen mit $e^x$ ableitet, können wir auch für sie eine vollständige Kurvendiskussion durchführen. Ein wichtiger Punkt bei der Nullstellensuche ist die Eigenschaft der $e$-Funktion.

**Nullstellen von Produkten mit $e^x$ – Eine wichtige Erkenntnis**

Wir wissen, dass $e^x > 0$ für alle reellen Zahlen $x$ gilt. Die natürliche Exponentialfunktion hat also **keine Nullstellen**. Das hat eine wichtige Konsequenz für Produkte der Form $f(x) = \text{Polynom}(x) \cdot e^x$ oder allgemeiner $f(x) = h(x) \cdot e^{g(x)}$: Nach dem Satz vom Nullprodukt ist ein Produkt genau dann Null, wenn mindestens einer seiner Faktoren Null ist. Da $e^x$ (oder $e^{g(x)}$) niemals Null werden kann, hängen die Nullstellen von $f(x)$ **ausschließlich von den Nullstellen des Faktors Polynom**$(x)$ **(bzw. $h(x)$) ab**.
Um die Nullstellen von $f(x) = \text{Polynom}(x) \cdot e^x$ zu finden, reicht es also, die Gleichung $\text{Polynom}(x) = 0$ zu lösen.

**Beispiel 7.7 Untersuchung von $f(x) = (x-1)e^x$**

1. **Definitionsbereich:** $D_f = \mathbb{R}$ (sowohl $x-1$ als auch $e^x$ sind für alle $x$ definiert).
2. **Symmetrie:** $f(-x) = (-x-1)e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$. Keine einfache Symmetrie zum Koordinatensystem erkennbar.
3. **Verhalten im Unendlichen:**
   - Für $x \to \infty$: $(x-1) \to \infty$ und $e^x \to \infty$. Also $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \cdot \infty = +\infty$.
   - Für $x \to -\infty$: $(x-1) \to -\infty$. Aber $e^x \to 0$. Hier haben wir einen Konflikt '$-\infty \cdot 0$'. Es ist bekannt, dass die $e$-Funktion 'stärker' gegen Null geht als jedes Polynom gegen Unendlich. Man kann auch schreiben $f(x) = \frac{x-1}{e^{-x}}$. Für $x \to -\infty$ geht der Zähler gegen $-\infty$ und der Nenner $e^{-x}$ gegen $e^{\infty} = \infty$. Auch hier ist es nicht sofort klar. Ein wichtiger Grenzwert ist $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Daher: $\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x = 0$. Die x-Achse ($y = 0$) ist eine waagerechte Asymptote für $x \to -\infty$.
4. **y-Achsenabschnitt:** $f(0) = (0-1)e^0 = (-1) \cdot 1 = -1$. Also $P_y(0|-1)$.
5. **Nullstellen:** $f(x) = 0 \implies (x-1)e^x = 0$. Da $e^x \neq 0$ für alle $x$, muss $x - 1 = 0$ sein. Also $x_N = 1$. Einzige Nullstelle bei $N(1|0)$.
6. **Erste Ableitung $f'(x)$:** Mit Produktregel $u(x) = x-1, u'(x) = 1, v(x) = e^x, v'(x) = e^x$. $f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-1) \cdot e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$.
7. **Extremstellen:** $f'(x) = 0 \implies xe^x = 0$. Da $e^x \neq 0$, muss $x = 0$ sein. Potentielle Extremstelle bei $x_E = 0$.
8. **Zweite Ableitung $f''(x)$:** Mit Produktregel für $f'(x) = xe^x$: $u(x) = x, u'(x) = 1, v(x) = e^x, v'(x) = e^x$. $f''(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x) = (x+1)e^x$.
9. **Art der Extremstelle bei $x_E = 0$ mit $f''$ prüfen:** $f''(0) = (0+1)e^0 = 1 \cdot 1 = 1$. Da $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 1 > 0 \implies$ Lokaler Tiefpunkt bei $x_E = 0$. $y_T = f(0) = -1$. Tiefpunkt $T(0|-1)$. (Das ist auch unser y-Achsenabschnitt).

10. **Monotonie:** Nullstelle von $f'(x) = xe^x$ ist $x = 0$.

   - $x < 0$ (z.B. $x = -1$): $f'(-1) = (-1)e^{-1} = -1/e < 0 \implies$ fallend.
   - $x > 0$ (z.B. $x = 1$): $f'(1) = (1)e^1 = e > 0 \implies$ steigend.

   Fallend für $x \in (-\infty, 0]$, steigend für $x \in [0, \infty)$.

11. **Wendepunkte:** $f''(x_W) = 0 \implies (x_W + 1)e^{x_W} = 0$. Da $e^{x_W} \neq 0$, muss $x_W + 1 = 0 \implies x_W = -1$. Dritte Ableitung $f'''(x)$: Produktregel für $f''(x) = (x+1)e^x$. $u(x) = x+1, u'(x) = 1, v(x) = e^x, v'(x) = e^x$. $f'''(x) = 1 \cdot e^x + (x+1)e^x = e^x(1 + x + 1) = (x+2)e^x$. $f'''(-1) = (-1+2)e^{-1} = 1 \cdot e^{-1} = 1/e \neq 0$. Also Wendepunkt bei $x_W = -1$. $y_W = f(-1) = (-1-1)e^{-1} = -2e^{-1} = -2/e \approx -0.736$. Wendepunkt $W(-1|-2/e)$.

12. **Krümmungsverhalten:** Nullstelle von $f''(x) = (x+1)e^x$ ist $x = -1$.

   - $x < -1$ (z.B. $x = -2$): $f''(-2) = (-2+1)e^{-2} = -e^{-2} < 0 \implies$ rechtsgekrümmt.
   - $x > -1$ (z.B. $x = 0$): $f''(0) = (0+1)e^0 = 1 > 0 \implies$ linksgekrümmt.

13. **Skizze:**

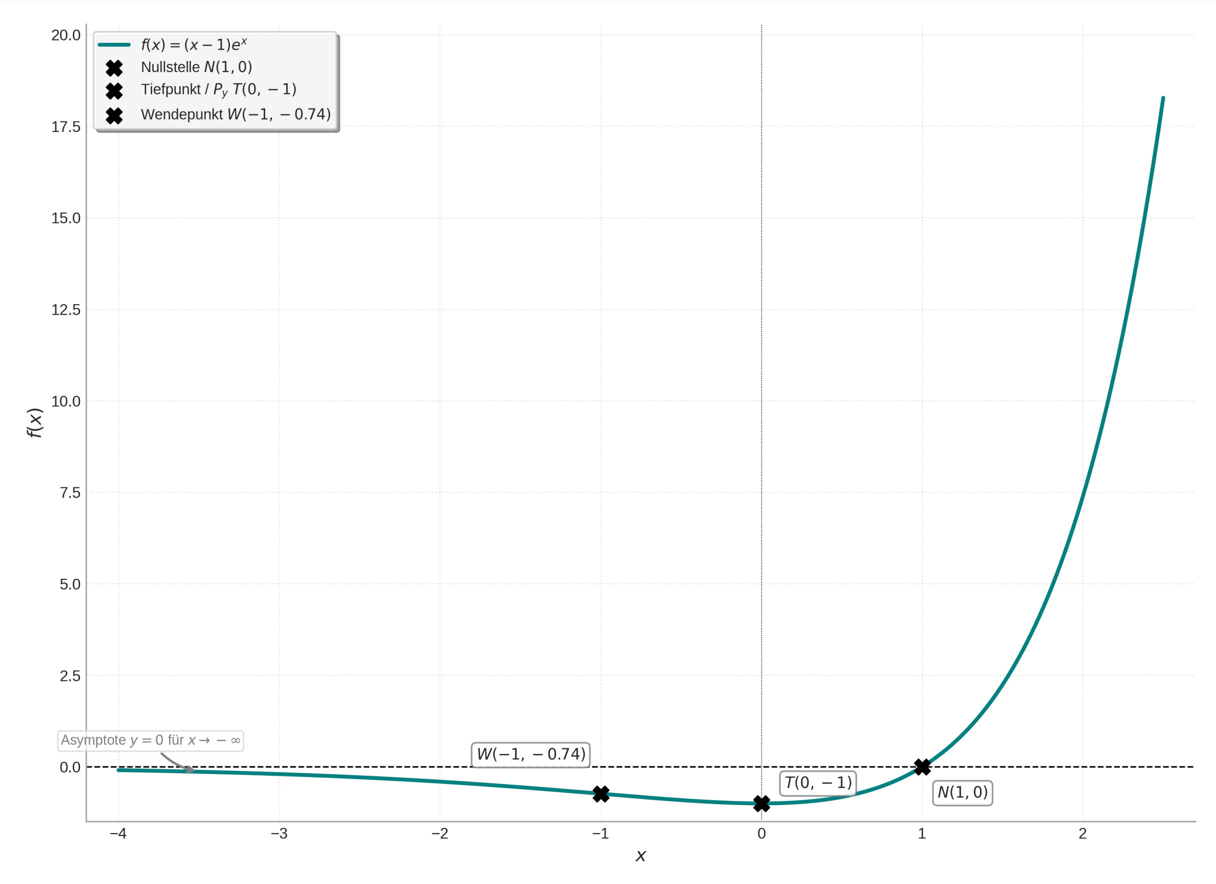


Abbildung 7.3: Graph von $f(x) = (x-1)e^x$

### Die Regel von L'Hôpital – Grenzwerte bei '$\frac{0}{0}$' oder '$\frac{\infty}{\infty}$'

Manchmal stoßen wir bei der Berechnung von Grenzwerten auf unbestimmte Ausdrücke wie '$\frac{0}{0}$' oder '$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$'. Eine direkte Einsetzung des Grenzwertes ist dann nicht möglich. Für solche Fälle gibt es eine elegante Methode, die nach dem französischen Mathematiker Guillaume de L'Hôpital (1661-1704) benannt ist.

**Die Regel von L'Hôpital:** Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei differenzierbare Funktionen. Wenn der Grenzwert des Quotienten $\frac{f(x)}{g(x)}$ für $x \to a$ (wobei $a$ eine Zahl, $\infty$ oder $-\infty$ sein kann) einen der folgenden unbestimmten Ausdrücke ergibt:

- $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ (Fall '$\frac{0}{0}$')
- $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ und $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ (Fall '$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$')

Dann gilt, vorausgesetzt der Grenzwert auf der rechten Seite existiert (oder ist $\pm\infty$):

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Wichtig:** Man leitet Zähler und Nenner **getrennt** voneinander ab, nicht mit der Quotientenregel! Die Regel kann bei Bedarf auch mehrfach hintereinander angewendet werden, solange die Voraussetzungen erfüllt sind.

**Was ist mit dem Fall '$0\cdot\infty$'?** Auch diesen unbestimmten Ausdruck kann man oft auf die Form '$\frac{0}{0}$' oder '$\frac{\infty}{\infty}$' bringen, um L'Hôpital anwenden zu können. Zum Beispiel kann man $f(x)\cdot g(x)$ umschreiben zu $\frac{f(x)}{1/g(x)}$ oder $\frac{g(x)}{1/f(x)}$.

**Beispiele (mit $e^x$ und Polynomen):**

1. **Fall '$\frac{0}{0}$':** $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$
   - Für $x \to 0$: Zähler $e^0 - 1 - 0 = 1 - 1 - 0 = 0$. Nenner $0^2 = 0$. (Fall '$\frac{0}{0}$')
   - Ableitungen: $f(x) = e^x - 1 - x \implies f'(x) = e^x - 1$. $g(x) = x^2 \implies g'(x) = 2x$.
   - $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x}$. Für $x \to 0$: Zähler $e^0 - 1 = 0$. Nenner $2 \cdot 0 = 0$. (Wieder '$\frac{0}{0}$')
   - Erneute Anwendung von L'Hôpital: Ableitungen: $(e^x - 1)' = e^x$. $(2x)' = 2$.
   - $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$.

2. **Fall '$\frac{\infty}{\infty}$' und die 'Stärke' von $e^x$:** $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$
   - Für $x \to \infty$: Zähler $x^2 \to \infty$. Nenner $e^x \to \infty$. (Fall '$\frac{\infty}{\infty}$')
   - Ableitungen: $(x^2)' = 2x$. $(e^x)' = e^x$.
   - $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x}$. Für $x \to \infty$: Zähler $2x \to \infty$. Nenner $e^x \to \infty$. (Wieder '$\frac{\infty}{\infty}$')
   - Erneute Anwendung von L'Hôpital: Ableitungen: $(2x)' = 2$. $(e^x)' = e^x$.
   - $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x}$. Da $e^x \to \infty$, geht der Bruch gegen 0. Also: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$.

   *Erklärung zur Dominanz von $e^x$:* Dieses Beispiel zeigt, warum $e^x$ (für $x \to \infty$) 'stärker wächst' als jedes Polynom $x^n$. Bei jeder Anwendung der Regel von L'Hôpital wird der Grad des Polynoms im Zähler um 1 reduziert, bis schließlich eine Konstante übrig bleibt. Die $e^x$-Funktion im Nenner bleibt jedoch bei jeder Ableitung (bis auf eventuelle konstante Faktoren bei $e^{kx}$) im Wesentlichen erhalten und strebt weiterhin gegen $\infty$. Daher wird der Grenzwert des Bruchs letztendlich Null.

3. **Fall '$0 \cdot \infty$':** $\lim_{x\to-\infty} xe^x$ (aus Beispiel 7.7)
   - Für $x \to -\infty$: $x \to -\infty$ und $e^x \to 0$. (Fall '$-\infty \cdot 0$')
   - Umformen zu '$\frac{-\infty}{\infty}$': $xe^x = \frac{x}{e^{-x}}$. Für $x \to -\infty$: Zähler $x \to -\infty$. Nenner $e^{-x} \to e^{\infty} \to \infty$.
   - Ableitungen: $(x)' = 1$. $(e^{-x})' = -e^{-x}$ (Kettenregel).
   - $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}}$. Für $x \to -\infty$: Nenner $-e^{-x} \to -e^{\infty} \to -\infty$.
   - Der Bruch $\frac{1}{-\infty}$ geht gegen 0. Also: $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

**Achtung:** Die Regel von L'Hôpital darf nur angewendet werden, wenn tatsächlich einer der unbestimmten Ausdrücke '$\frac{0}{0}$' oder '$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$' vorliegt! Eine falsche Anwendung führt zu falschen Ergebnissen.

**Aufgabe 7.8 Kurvendiskussionen mit Exponentialfunktionen**

Führe eine vollständige Kurvendiskussion für die folgenden Funktionen durch.

1. $f(x) = xe^{-x}$
2. $g(x) = (x^2 - 2)e^x$
3. **Für Experten:** $h(x) = e^{x^2-2x}$. (Hier wird die Kettenregel komplexer, aber die Struktur der Kurvendiskussion bleibt gleich.)

***Tipp 7.4: Anwendungsaufgaben mit Exponentialfunktionen***

Exponentialfunktionen sind ideal, um Prozesse zu beschreiben, bei denen die Änderungsrate vom Bestand abhängt.

- **Wachstum:** $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$ mit $k > 0$ (z.B. Bakterienkultur, Zinseszins bei stetiger Verzinsung). $N_0$ ist der Anfangsbestand.
- **Zerfall:** $N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}$ mit $k > 0$ (z.B. radioaktiver Zerfall, Abklingvorgänge). $N_0$ ist der Anfangsbestand. Die Konstante $k$ wird oft als Zerfallskonstante bezeichnet.
- **Logistisches Wachstum (Ausblick):** Für begrenztes Wachstum gibt es komplexere Modelle wie $N(t) = \frac{G}{1+e^{-kG(t-t_0)}}$, die eine Sättigungsgrenze $G$ haben.

Bei solchen Aufgaben geht es oft darum, die Parameter $(N_0, k)$ aus gegebenen Bedingungen zu bestimmen oder Vorhersagen zu treffen.

**Aufgabe 7.9 Anwendung: Radioaktiver Zerfall**

Eine radioaktive Substanz zerfällt so, dass die noch vorhandene Menge $M(t)$ (in Gramm) nach $t$ Jahren durch die Funktion $M(t) = 100 \cdot e^{-0.05t}$ beschrieben wird.

1. Wie groß ist die Anfangsmenge der Substanz?
2. Wie viel Gramm sind nach 10 Jahren noch vorhanden?
3. Mit welcher Rate zerfällt die Substanz zum Zeitpunkt $t = 0$ und zum Zeitpunkt $t = 10$ Jahre (in Gramm pro Jahr)? (Tipp: Ableitung $M'(t)$).
4. **Halbwertszeit:** Nach welcher Zeit $T_H$ ist nur noch die Hälfte der ursprünglichen Menge vorhanden? (Setze $M(T_H) = \frac{1}{2}M(0)$ und löse nach $T_H$. Hierfür benötigst du den natürlichen Logarithmus ln, die Umkehrfunktion von $e^x$.)

### 7.3.1 Weitere anspruchsvolle Aufgaben mit Exponentialfunktionen

Die folgenden Aufgaben kombinieren die Ableitung von Exponentialfunktionen mit den Konzepten der Kurvendiskussion und Anwendungen. Sie erfordern oft mehrere Ableitungsregeln und ein gutes Verständnis der Zusammenhänge.

**Aufgabe 7.10 Optimierung im biologischen Kontext – Wachstum und Hemmung**

Eine Bakterienpopulation wächst zunächst, wird aber durch einen hemmenden Faktor (z.B. begrenzte Nährstoffe) beeinflusst. Die Anzahl der Bakterien $N$ (in Tausend) nach $t$ Stunden kann modelliert werden durch die Funktion:

$$N(t) = 5t \cdot e^{-0.1t} \quad (\text{für } t \geq 0)$$

1. **Anfangsbestand:** Wie viele Bakterien sind zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhanden? Interpretiere

das Ergebnis im Kontext.

2. **Wachstumsrate:** Bestimme die Funktion $N'(t)$, welche die Wachstumsrate der Bakterienpopulation zum Zeitpunkt $t$ angibt. (Produkt- und Kettenregel sind hier gefragt!)

3. **Maximale Population:**

   - Zu welchem Zeitpunkt $t_{max}$ erreicht die Bakterienpopulation ihr Maximum? (Tipp: Notwendige Bedingung für Extremstellen $N'(t) = 0$. Da $e^{-0.1t}$ nie Null wird, musst du nur den anderen Faktor betrachten.)
   - Überprüfe mit der zweiten Ableitung $N''(t)$ oder dem Vorzeichenwechselkriterium von $N'(t)$, ob es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.
   - Wie groß ist die maximale Bakterienpopulation $N(t_{max})$?

4. **Verhalten für $t \to \infty$:** Was passiert mit der Bakterienpopulation für sehr große Zeiten? (Untersuche $\lim_{t\to\infty} N(t)$). Ist das biologisch sinnvoll?

5. **Stärkste Zunahme/Abnahme der Wachstumsrate (für Experten):** Die Änderungsrate der Wachstumsrate wird durch $N''(t)$ beschrieben. Wann ist die Zunahme der Wachstumsrate maximal (d.h. wann wächst die Population am schnellsten schneller)? Wann ist die Abnahme der Wachstumsrate maximal (d.h. wann verlangsamt sich das Wachstum am stärksten)? (Tipp: Untersuche $N''(t)$ auf Extremstellen, d.h. bilde $N'''(t)$).

6. **Skizze:** Skizziere den Graphen von $N(t)$ für $t \geq 0$ und markiere den maximalen Bestand.

**Aufgabe 7.11 Tangenten an Exponentialfunktionen**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x-2)e^x$.

1. Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen von $f$ im Punkt $P(2|f(2))$.

2. In welchem Punkt schneidet diese Tangente die y-Achse?

3. Gibt es eine Stelle $x_0$, an der die Tangente an den Graphen von $f$ parallel zur x-Achse verläuft? Wenn ja, bestimme $x_0$ und die Art des Extrempunktes an dieser Stelle.

4. (Für Experten): Gibt es eine Tangente an den Graphen von $f$, die durch den Ursprung $(0|0)$ verläuft, aber nicht im Ursprung berührt?

   ***Tipp 7.5: Tangente durch externen Punkt***

   Sei $B(x_B|f(x_B))$ der unbekannte Berührpunkt der Tangente am Graphen. Die Steigung der Tangente ist $m_T = f'(x_B)$. Die Tangente geht auch durch den Ursprung $O(0|0)$. Die Steigung der Geraden durch $O$ und $B$ ist auch $\frac{f(x_B)-0}{x_B-0}$. Setze diese beiden Ausdrücke für die Steigung gleich: $f'(x_B) = \frac{f(x_B)}{x_B}$. Löse diese Gleichung nach $x_B$.

**Aufgabe 7.12 Kurvendiskussion einer komplexeren e-Funktion**

Führe eine vollständige Kurvendiskussion für die Funktion $f(x) = (x^2-3)e^{-x}$ durch. Untersuche dabei insbesondere:

- Definitionsbereich, Symmetrie
- Verhalten im Unendlichen (Grenzwerte, Asymptoten)

- Nullstellen
- Extrempunkte (Lage und Art)
- Wendepunkte (Lage)
- Skizziere den Graphen von $f(x)$.

***Tipp 7.6: Ableitungen***

Du wirst hier die Produkt- und Kettenregel mehrfach anwenden müssen. Achte auf sorgfältiges Rechnen und Vereinfachen. Das Ausklammern von $e^{-x}$ (oder $e^{\text{irgendwas}}$) ist oft hilfreich!

## 7.4 Weitere Integrationstechniken – Mehr als nur Polynome aufleiten

Bisher haben wir uns hauptsächlich mit der Integration (dem Aufleiten) von Polynomfunktionen und einfachen Potenzfunktionen beschäftigt, bei denen die Umkehrung der Potenz-, Faktor- und Summenregel der Ableitung ausreichte. Doch was machen wir, wenn wir komplexere Funktionen integrieren wollen, zum Beispiel Produkte von Funktionen oder verkettete Funktionen, wie sie uns oft bei Exponentialfunktionen begegnen?

Für solche Fälle benötigen wir erweiterte Integrationstechniken. Zwei der wichtigsten sind die **partielle Integration** (die Umkehrung der Produktregel der Ableitung) und die **Integration durch Substitution** (die Umkehrung der Kettenregel der Ableitung).

### 7.4.1 Partielle Integration – Die 'Produktregel rückwärts'

Die Produktregel der Ableitung lautet: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Wenn wir diese Gleichung auf beiden Seiten integrieren und umstellen, erhalten wir die Formel für die partielle Integration. Sie ist besonders nützlich, wenn der Integrand ein Produkt aus zwei Funktionen ist, von denen eine beim Ableiten 'einfacher' wird und die andere leicht zu integrieren ist.

***ϟ 7.7 Partielle Integration***

Wenn $u(x)$ und $v(x)$ differenzierbare Funktionen sind, dann gilt:

$$\int u'(x) \cdot v(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\, dx$$

Oder, wenn man $f(x) = u(x)$ und $g'(x) = v'(x)$ setzt, also $g(x) = v(x)$:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Die Kunst besteht darin, den Integranden geschickt in einen Faktor $u'(x)$ (der leicht zu $u(x)$ integriert werden kann) und einen Faktor $v(x)$ (dessen Ableitung $v'(x)$ das neue Integral vereinfacht) zu zerlegen.

***Tipp 7.7: Wahl von $u'(x)$ und $v(x)$ bei partieller Integration***

Eine Faustregel (die nicht immer gilt, aber oft hilft):

- Wähle $v(x)$ so, dass seine Ableitung $v'(x)$ 'einfacher' wird als $v(x)$ selbst (z.B. Polynome, deren Grad sich beim Ableiten verringert).
- Wähle $u'(x)$ so, dass du es leicht zu $u(x)$ integrieren (aufleiten) kannst.

Manchmal muss man die partielle Integration auch mehrfach hintereinander anwenden.

**Beispiel 7.8 Partielle Integration mit $e^x$**

Wir wollen das Integral $\int x \cdot e^x \, dx$ berechnen. Dies ist ein Produkt aus $x$ und $e^x$.
**Schritt 1: Wähle $u'(x)$ und $v(x)$.** Eine gute Wahl ist oft, den Polynomterm als $v(x)$ zu wählen, da er beim Ableiten einfacher wird. Sei $v(x) = x \implies v'(x) = 1$. Dann muss $u'(x) = e^x \implies u(x) = \int e^x \, dx = e^x$. (Wir können die Integrationskonstante hier weglassen, da sie am Ende sowieso als Gesamtkonstante $C$ erscheint).
**Schritt 2: Setze in die Formel $\int u'(x)v(x) \, dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) \, dx$ ein.** (Beachte: Unsere Wahl war $v(x)$ und $u'(x)$, die Formel ist aber oft mit $u(x)$ und $v'(x)$ notiert. Wir passen uns hier der ersten Formel im Merksatz an, indem wir $u'(x)$ und $v(x)$ identifizieren. Alternativ könnten wir $f(x) = x$ und $g'(x) = e^x$ setzen.)
Nehmen wir die zweite Formel im Merksatz: $\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$. Wähle: $f(x) = x \implies f'(x) = 1$. $g'(x) = e^x \implies g(x) = e^x$.
Dann ist $\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx$.
**Schritt 3: Löse das verbleibende Integral.** $\int 1 \cdot e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x$.
**Schritt 4: Setze alles zusammen und füge die Integrationskonstante $C$ hinzu.** $\int x \cdot e^x \, dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$.
*Probe durch Ableiten des Ergebnisses $F(x) = e^x(x-1) + C$:* $F'(x) = (e^x(x-1))' + (C)'$. Für den ersten Term nutzen wir die Produktregel: $u(x) = e^x \implies u'(x) = e^x$ $v(x) = x - 1 \implies v'(x) = 1$ $(e^x(x-1))' = e^x(x-1) + e^x(1) = xe^x - e^x + e^x = xe^x$. Also $F'(x) = xe^x + 0 = xe^x$. Das ist unser ursprünglicher Integrand!

**Achtung Stolperstein! 7.2: Partielle Integration – Häufige Fehlerquellen**

Die partielle Integration ist ein sehr nützliches Werkzeug, aber achte auf diese typischen Stolpersteine:

- **Ungünstige Wahl von $f(x)$ und $g'(x)$ (bzw. $v(x)$ und $u'(x)$):** Wenn das neue Integral $\int f'(x)g(x) \, dx$ komplizierter oder zumindest nicht einfacher als das Ausgangsintegral wird, war die Wahl der zu differenzierenden und zu integrierenden Teile oft nicht optimal. Orientiere dich an der Faustregel aus der Tipp-Box (Polynomanteile werden durch Ableiten meist einfacher). Manchmal muss man auch einfach eine Wahl ausprobieren.

- **Fehler beim Ableiten von $f(x)$ oder Integrieren von $g'(x)$:** Eine falsche Ableitung $f'(x)$ oder eine falsch gebildete Stammfunktion $g(x)$ führt unweigerlich zu einem falschen Endergebnis. Überprüfe diese Teilschritte sorgfältig!

- **Vorzeichenfehler in der Hauptformel:** Die Formel lautet $\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$. Das **Minuszeichen** vor dem zweiten Integral ist entscheidend und wird leicht vergessen oder durch ein Plus ersetzt.

- **Das Integralzeichen beim zweiten Term vergessen:** Es ist wichtig, dass der zweite Term auf der rechten Seite immer noch ein Integral ist: $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$. Ein häufiger Fehler ist, das Integralzeichen hier wegzulassen und nur $f(x)g(x) - f'(x)g(x)$ zu rechnen.

- **Verwechslung der Terme in der Formel:** Achte genau darauf, welche Funktion abgeleitet ($f'(x)$) und welche als Stammfunktion ($g(x)$) in den jeweiligen Teilen der Formel eingesetzt wird. Eine sorgfältige Notation hilft hier.

- **Integrationskonstante $C$ am Ende vergessen:** Auch wenn man die Integrationskonstante bei der Bildung der Stammfunktion $g(x)$ im Zwischenschritt meist weglässt, darf sie beim Endergebnis des unbestimmten Integrals nicht fehlen: $\dots + C$.

- **Fehler bei mehrfacher partieller Integration:** Muss die partielle Integration mehrmals angewendet werden (z.B. bei $\int x^2e^x\,dx$), ist es besonders wichtig, Klammern korrekt zu setzen und Vorzeichenfehler zu vermeiden, da sich Fehler leicht fortpflanzen.

Gehe bei der partiellen Integration immer sehr systematisch und konzentriert vor!

**Aufgabe 7.13 Partielle Integration üben – Mehr Vielfalt**

Berechne die folgenden unbestimmten Integrale mit partieller Integration:

1. $\int (2x+1)e^x\,dx$
2. $\int x^2e^x\,dx$ (Tipp: Hier musst du die partielle Integration zweimal anwenden!)
3. $\int \ln(x)\,dx$

   ***Tipp 7.8: Umgang mit $\ln(x)$***

   Wähle für die partielle Integration $f(x) = \ln(x)$ und $g'(x) = 1$. Du benötigst die Ableitung von $\ln(x)$, die $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ist. (Der natürliche Logarithmus $\ln(x)$ ist die Umkehrfunktion zur $e$-Funktion, mehr dazu im nächsten Kapitel!)

4. $\int x\cos(x)\,dx$

   ***Tipp 7.9: Sinus und Kosinus – Ableiten und Aufleiten***

   Auch wenn wir trigonometrische Funktionen erst später ausführlich behandeln, hier die benötigten Informationen:

   - Ableitungen: $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$.
   - Stammfunktionen: $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ und $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

   Wähle $f(x) = x$ und $g'(x) = \cos x$.

5. $\int (x^2+1)\ln(x)\,dx$

   ***Tipp 7.10: Polynom mal Logarithmus***

   Wähle wieder $f(x) = \ln(x)$ und $g'(x) = x^2+1$. (Nutze $(\ln x)' = \frac{1}{x}$).

6. **Herausforderung (das 'Trick-Integral'):** $\int e^x\sin(x)\,dx$

*Tipp 7.11: Zweimal partiell integrieren und umstellen*

(a) Wende die partielle Integration einmal an (z.B. mit $f(x) = \sin x$ und $g'(x) = e^x$). Das neue Integral wird $e^x \cos(x)$ (oder ähnlich) enthalten.

(b) Wende auf dieses neue Integral *noch einmal* die partielle Integration an (wähle deine Faktoren konsistent, z.B. wieder den trigonometrischen Teil zum Ableiten).

(c) Du solltest nun eine Gleichung erhalten, in der das ursprüngliche Integral $\int e^x \sin(x)\,dx$ auf beiden Seiten vorkommt. Stelle diese Gleichung nach dem gesuchten Integral um! Nutze die Ableitungen/Stammfunktionen für Sinus und Kosinus aus dem vorherigen Tipp.

Dieser Typ von Integral ist ein Klassiker!

### 7.4.2 Integration durch Substitution – Die 'Kettenregel rückwärts'

Die Integration durch Substitution ist eine mächtige Technik, die besonders dann hilfreich ist, wenn der Integrand eine verkettete Funktion enthält und gleichzeitig die Ableitung der inneren Funktion als Faktor auftaucht (oder leicht dorthin gebracht werden kann). Sie ist die Umkehrung der Kettenregel der Ableitung: $(g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

**ϟ *7.8 Integration durch Substitution***

Wenn wir ein Integral der Form $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$ haben, können wir substituieren (ersetzen):

1. Setze $u = g(x)$ (die innere Funktion).
2. Bilde die Ableitung von $u$ nach $x$: $\frac{du}{dx} = g'(x)$.
3. Stelle dies nach $dx$ um (formal): $du = g'(x)dx$.
4. Ersetze $g(x)$ durch $u$ und $g'(x)dx$ durch $du$ im Integral.
5. Integriere den neuen Ausdruck nach $u$: $\int f(u)\,du = F(u) + C$.
6. **Rücksubstituiere**: Ersetze $u$ wieder durch $g(x)$, um das Ergebnis in Abhängigkeit von $x$ zu erhalten: $F(g(x)) + C$.

Kurz: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$.

***Tipp 7.12: Wann Substitution anwenden?***

Suche im Integranden nach einer 'inneren Funktion' $g(x)$, deren Ableitung $g'(x)$ (oder ein Vielfaches davon) ebenfalls als Faktor im Integranden vorkommt.

**Beispiel 7.9 Integration durch Substitution mit $e^x$**

1. **Integral** $\int e^{3x+2}\,dx$ Hier ist die innere Funktion $g(x) = 3x + 2$.
   - Substitution: $u = 3x + 2$.
   - Ableiten von $u$: $\frac{du}{dx} = 3$.
   - Nach $dx$ umstellen: $du = 3dx \implies dx = \frac{1}{3}du$.
   - Einsetzen ins Integral: $\int e^u \cdot \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int e^u\,du$.

- Integrieren nach $u$: $\frac{1}{3}e^u + C$.
- Rücksubstituieren ($u = 3x + 2$): $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$.

Das bestätigt unsere frühere Regel $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$ für $k = 3$.

2. **Integral** $\int 2x \cdot e^{x^2-1}\,dx$ Hier ist die innere Funktion im Exponenten $g(x) = x^2 - 1$. Ihre Ableitung ist $g'(x) = 2x$. Dieser Faktor $2x$ steht praktischerweise schon vor dem $e$-Term!
   - Substitution: $u = x^2 - 1$.
   - Ableiten von $u$: $\frac{du}{dx} = 2x$.
   - Umstellen: $du = 2x\,dx$.
   - Einsetzen: Der Term $e^{x^2-1}$ wird zu $e^u$, und der Term $2x\,dx$ wird zu $du$. Das Integral wird zu $\int e^u\,du$.
   - Integrieren nach $u$: $e^u + C$.
   - Rücksubstituieren ($u = x^2 - 1$): $e^{x^2-1} + C$.

   *Probe durch Ableiten:* $(e^{x^2-1} + C)'$. Äußere Fkt: $e^u$, innere Fkt: $u = x^2 - 1$. Ableitung: $e^{x^2-1} \cdot (2x) = 2xe^{x^2-1}$. Stimmt!

**Achtung Stolperstein! 7.3: Integrieren von $e^{kx}$ und $b^x$**

Auch beim Aufleiten (Integrieren) von Exponentialfunktionen gibt es typische Stolpersteine:

- **Faktor $\frac{1}{k}$ beim Integrieren von $e^{kx}$ vergessen:** Die Stammfunktion von $f(x) = e^{kx}$ ist $F(x) = \frac{1}{k}e^{kx} + C$. Der Faktor $\frac{1}{k}$ (Kehrwert der inneren Ableitung) ist wichtig! *Beispiel Falsch:* $\int e^{2x}\,dx = e^{2x} + C$. *Richtig:* $\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$.
- **Faktor $\frac{1}{\ln(b)}$ beim Integrieren von $b^x$ vergessen:** Die Stammfunktion von $f(x) = b^x$ ist $F(x) = \frac{1}{\ln(b)}b^x + C$. *Beispiel Falsch:* $\int 2^x\,dx = 2^x + C$. *Richtig:* $\int 2^x\,dx = \frac{1}{\ln(2)}2^x + C$.
- **Vorzeichenfehler bei negativem $k$ oder $0 < b < 1$:** Wenn $k$ negativ ist (z.B. $e^{-3x}$), wird $\frac{1}{k}$ ebenfalls negativ. Wenn $0 < b < 1$, ist $\ln(b)$ negativ. Achte hier sorgfältig auf die Vorzeichen.

Überprüfe deine Stammfunktionen immer durch Ableiten!

**Aufgabe 7.14 Integration durch Substitution – Vielfältige Übungen**

Berechne die folgenden unbestimmten Integrale mit der Substitutionsmethode:

1. $\int (2x + 1)^4\,dx$ (Tipp: $u = 2x + 1$)
2. $\int x \cdot e^{x^2}\,dx$ (Tipp: $u = x^2$. Was ist $du$? Du musst eventuell einen Faktor anpassen.)
3. $\int \frac{1}{(3x-5)^2}\,dx$ (Tipp: Schreibe als $(3x - 5)^{-2}$ und substituiere $u = 3x - 5$)
4. $\int \cos(2x)\,dx$ (Stammfunktion von $\cos(u)$ ist $\sin(u)$. Substituiere $u = 2x$.)
5. $\int 3x^2 \cdot (x^3 + 7)^5\,dx$

   ***Tipp 7.13: Innere Funktion und ihre Ableitung***

   Wähle $u = x^3 + 7$. Was ist die Ableitung $u' = \frac{du}{dx}$? Kommt dieser Term (oder ein Vielfaches) im Integranden vor?

6. $\int \sqrt{4x-3}\,dx$

**Tipp 7.14: Wurzel als Potenz**

Schreibe $\sqrt{4x-3}$ als $(4x-3)^{\frac{1}{2}}$ und substituiere $u = 4x - 3$.

7. $\int \frac{5x}{(x^2-1)^3}\,dx$

**Tipp 7.15: Konstanter Faktor**

Wähle $u = x^2 - 1$. Dann ist $du = 2x\,dx$. Der Faktor $x$ ist also Teil von $du$. Den konstanten Faktor 5 kannst du vor das Integral ziehen und den Faktor 2 (von $2x$) durch einen Faktor $\frac{1}{2}$ ausgleichen.

8. $\int (x+2) \cdot e^{x^2+4x-1}\,dx$

**Tipp 7.16: Exponent als innere Funktion**

Substituiere den gesamten Exponenten $u = x^2 + 4x - 1$. Prüfe, ob die Ableitung $u'$ (oder ein Vielfaches davon) als Faktor im Integranden vorhanden ist.

9. **Herausforderung:** $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$

**Tipp 7.17: Substitution unter der Wurzel**

Substituiere $u = 1 + x^4$. Beachte, dass $du = 4x^3\,dx$ ist. Du musst also den Faktor $\frac{1}{4}$ ergänzen. Der Term wird dann zu $\int \frac{1}{4} \cdot u^{-\frac{1}{2}}\,du$.

**Achtung Stolperstein! 7.4: Häufige Fehler bei der Substitution**

- **$dx$ nicht korrekt ersetzt:** Es reicht nicht, nur $g(x)$ durch $u$ zu ersetzen. Das Differential $dx$ muss auch durch einen Ausdruck mit $du$ ersetzt werden ($dx = \frac{1}{g'(x)}du$).
- **Innere Ableitung $g'(x)$ fehlt oder passt nicht:** Die Methode funktioniert am einfachsten, wenn $g'(x)$ (oder ein Vielfaches davon) bereits als Faktor im Integranden vorhanden ist. Manchmal muss man das Integral geschickt um einen konstanten Faktor erweitern und kürzen.
- **Rücksubstitution vergessen:** Das Endergebnis muss wieder von $x$ abhängen, nicht von $u$!

***Kurz & Knapp 7.1: Integrationstechniken für Produkte und Verkettungen***

- **Partielle Integration $\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$:** Gut für Produkte, bei denen ein Faktor beim Ableiten einfacher wird (z.B. $x^n$) und der andere leicht zu integrieren ist (z.B. $e^x, \sin x, \cos x$).
- **Integration durch Substitution $\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$:** Gut für verkettete Funktionen, wenn die Ableitung der inneren Funktion $g'(x)$ als Faktor im Integranden auftaucht.

Diese Techniken erweitern unsere Möglichkeiten, Stammfunktionen zu finden, erheblich!

**Aufgabe 7.15 Anwendungsaufgabe: Fläche unter $xe^{-x}$**

Die Funktion $f(x) = xe^{-x}$ spielt in einigen Anwendungsbereichen eine Rolle.

1. Bestimme die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ mithilfe partieller Integration.

2. Berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph von $f(x)$ mit der x-Achse im Intervall $[0, 2]$ einschließt. (Hinweis: Untersuche, ob $f(x)$ im Intervall positiv ist. $e^{-x}$ ist immer positiv).

3. (Für Experten): Untersuche das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \infty$. (Tipp: $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$). Was bedeutet das für die Fläche unter dem Graphen von $x = 0$ bis 'unendlich'? Solche Integrale nennt man *uneigentliche Integrale*.

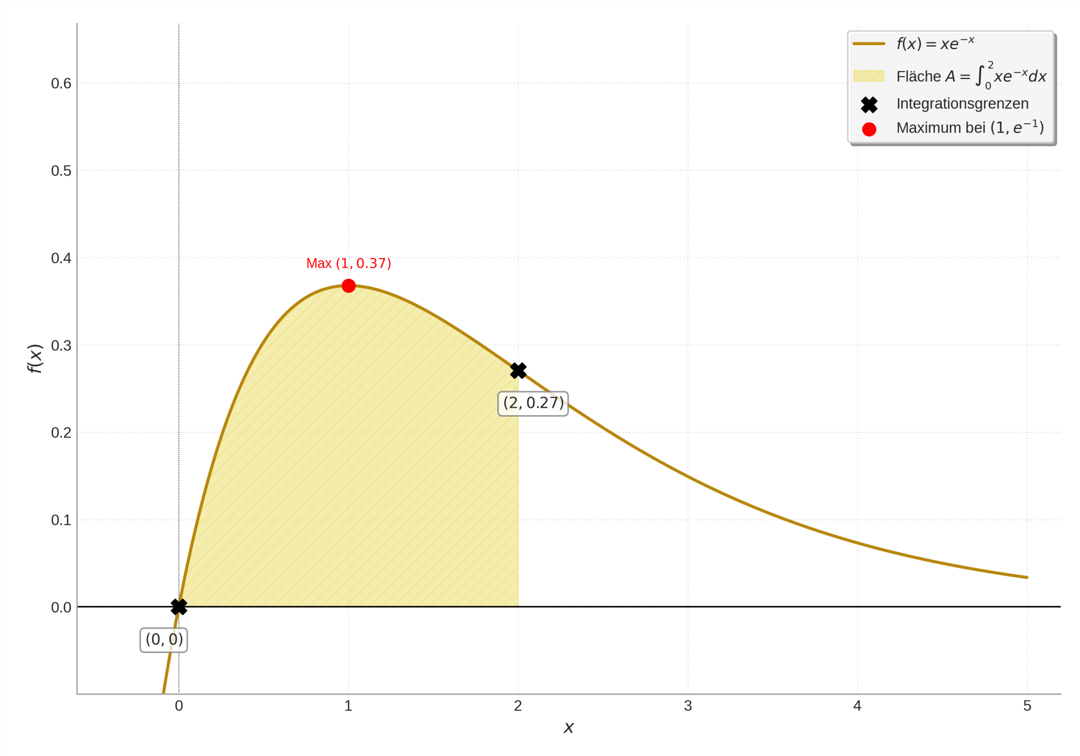


Abbildung 7.4: Fläche unter $f(x) = xe^{-x}$

### 7.4.3 Weitere anspruchsvolle Aufgaben mit Exponentialfunktionen

Die folgenden Aufgaben kombinieren die Ableitung von Exponentialfunktionen mit den Konzepten der Kurvendiskussion und Anwendungen. Sie erfordern oft mehrere Ableitungsregeln und ein gutes Verständnis der Zusammenhänge.

**Aufgabe 7.16 Optimierung im biologischen Kontext – Wachstum und Hemmung**

Eine Bakterienpopulation wächst zunächst, wird aber durch einen hemmenden Faktor (z.B. begrenzte Nährstoffe) beeinflusst. Die Anzahl der Bakterien $N$ (in Tausend) nach $t$ Stunden kann modelliert werden durch die Funktion:

$$N(t) = 5t \cdot e^{-0.1t} \quad (\text{für } t \geq 0)$$

1. **Anfangsbestand:** Wie viele Bakterien sind zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhanden? Interpretiere das Ergebnis im Kontext.

2. **Wachstumsrate:** Bestimme die Funktion $N'(t)$, welche die Wachstumsrate der Bakterienpopulation zum Zeitpunkt $t$ angibt. (Produkt- und Kettenregel sind hier gefragt!)

3. **Maximale Population:**

   - Zu welchem Zeitpunkt $t_{max}$ erreicht die Bakterienpopulation ihr Maximum? (Tipp: Notwendige Bedingung für Extremstellen $N'(t) = 0$. Da $e^{-0.1t}$ nie Null wird, musst du nur den anderen Faktor betrachten.)

- Überprüfe mit der zweiten Ableitung $N''(t)$ oder dem Vorzeichenwechselkriterium von $N'(t)$, ob es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.
- Wie groß ist die maximale Bakterienpopulation $N(t_{max})$?

4. **Verhalten für $t \to \infty$:** Was passiert mit der Bakterienpopulation für sehr große Zeiten? (Untersuche $\lim_{t\to\infty} N(t)$). Ist das biologisch sinnvoll?

5. **Stärkste Zunahme/Abnahme der Wachstumsrate (für Experten):** Die Änderungsrate der Wachstumsrate wird durch $N''(t)$ beschrieben. Wann ist die Zunahme der Wachstumsrate maximal (d.h. wann wächst die Population am schnellsten schneller)? Wann ist die Abnahme der Wachstumsrate maximal (d.h. wann verlangsamt sich das Wachstum am stärksten)? (Tipp: Untersuche $N''(t)$ auf Extremstellen, d.h. bilde $N'''(t)$).

6. **Skizze:** Skizziere den Graphen von $N(t)$ für $t \geq 0$ und markiere den maximalen Bestand.

### 7.4.4 Anwendungen der Integralrechnung auf Exponentialfunktionen

Nachdem wir gelernt haben, wie man Exponentialfunktionen ableitet und ihre Graphen analysiert, wollen wir nun unser Wissen über die Integralrechnung anwenden. Insbesondere die Berechnung von Flächeninhalten, die von Exponentialfunktionen begrenzt werden, oder die Rekonstruktion von Gesamtbeständen aus exponentiellen Änderungsraten sind wichtige Anwendungen.

Erinnerung an die Stammfunktionen:

- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int e^{kx} \, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$ (für $k \neq 0$)
- Für Produkte wie $x \cdot e^x$ oder $x^2 \cdot e^x$ benötigen wir die partielle Integration.
- Für verkettete Funktionen im Exponenten, wie $e^{x^2}$, benötigen wir oft die Substitution (wenn der Faktor $g'(x)$ vorhanden ist).

**Aufgabe 7.17 Flächenberechnung mit Exponentialfunktionen**

1. **Fläche unter $e^x$:** Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = e^x$, der x-Achse und den Geraden $x = 0$ und $x = 2$ eingeschlossen wird. Fertige eine Skizze an und markiere die Fläche.

2. **Fläche unter $e^{-x}$:** Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $g(x) = 2e^{-0.5x}$, der x-Achse und den Geraden $x = 0$ und $x = 4$ eingeschlossen wird. Skizziere auch hier den Graphen und die Fläche.

3. **Fläche zwischen $e^x$ und einer Geraden (für Experten):** Die Graphen der Funktionen $f(x) = e^x$ und $h(x) = e \cdot x + 1$ schließen eine Fläche ein.
   - Zeige, dass sich die Graphen an der Stelle $x = 0$ und $x = 1$ schneiden.
   - Bestimme, welche Funktion im Intervall $[0, 1]$ oben bzw. unten liegt.
   - Berechne den Inhalt der eingeschlossenen Fläche.

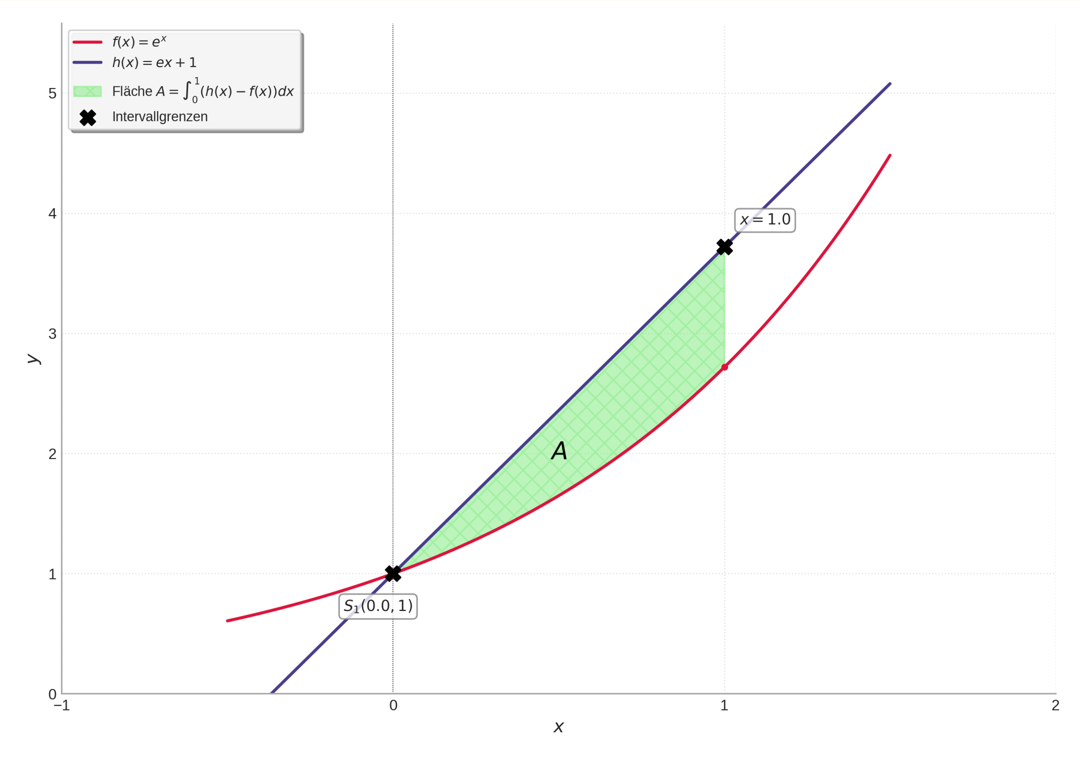


Abbildung 7.5: Fläche zwischen $f(x) = e^x$ und $h(x) = ex + 1$

**Aufgabe 7.18 Anwendung: Medikamentenabbau im Körper**

Die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten (in mg/Liter) kann nach der Einnahme durch die Funktion $K(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-0.2t}$ beschrieben werden, wobei $t$ die Zeit in Stunden nach der Einnahme ist ($t \geq 0$).

1. Zu welchem Zeitpunkt ist die Konzentration des Medikaments maximal? Wie hoch ist diese maximale Konzentration? (Nutze die Differentialrechnung).

2. Die 'Gesamtwirkung' eines Medikaments über einen bestimmten Zeitraum kann manchmal durch das Integral der Konzentrationsfunktion über diesen Zeitraum angenähert werden (dies ist eine Vereinfachung, aber das Integral gibt eine Art 'kumulierte Dosis' an). Berechne $\int_0^{10} K(t)\,dt$. (Tipp: Partielle Integration ist hier notwendig! Wähle $u'(t) = e^{-0.2t}$ und $v(t) = 10t$). Was könnte dieser Wert im Kontext bedeuten?

3. (Für Experten): Was ist $\lim_{t\to\infty} K(t)$? Was bedeutet das für die Konzentration des Medikaments nach sehr langer Zeit?

**Aufgabe 7.19 Uneigentliches Integral – Fläche bis ins Unendliche?**

Wir betrachten die Funktion $f(x) = e^{-x}$ für $x \geq 0$.

1. Skizziere den Graphen von $f(x)$.

2. Berechne den Flächeninhalt $A_b = \int_0^b e^{-x}\,dx$ für eine beliebige obere Grenze $b > 0$.

3. Was passiert mit diesem Flächeninhalt $A_b$, wenn $b$ unendlich groß wird? Berechne also den Grenzwert $\lim_{b\to\infty} A_b$.

**Tipp 7.18: Uneigentliches Integral**

Ein Integral der Form $\int_a^\infty f(x)\,dx$ nennt man ein **uneigentliches Integral**. Man berechnet es als Grenzwert:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Wenn dieser Grenzwert existiert (also eine endliche Zahl ist), sagt man, das uneigentliche Integral **konvergiert**. Ansonsten **divergiert** es.

4. Kann eine Fläche, die sich ins Unendliche erstreckt, einen endlichen Inhalt haben? Diskutiere dein Ergebnis aus c).

**Aufgabe 7.20 Exponentialfunktionen – Übergreifende und anspruchsvolle Aufgaben**

Die folgenden Aufgaben sollen dein Verständnis für Exponentialfunktionen, ihre Ableitungen, Stammfunktionen und Anwendungen umfassend prüfen. Versuche, die Aufgaben sorgfältig und schrittweise zu lösen.

1. **Kurvendiskussion einer e-Funktion mit Polynomfaktor:** Führe eine vollständige Kurvendiskussion für die Funktion $f(x) = (4 - x^2)e^{-0.5x}$ durch. Untersuche dabei insbesondere:
   - Definitionsbereich und Symmetrie.
   - Verhalten im Unendlichen und Asymptoten. (Tipp: $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-kx} = 0$ für $k > 0$).
   - Nullstellen.
   - Extrempunkte (Lage und Art).
   - Wendepunkte (Lage und Krümmungsverhalten).
   - Skizziere den Graphen von $f(x)$.

2. **Optimierung: Maximale Konzentration eines Medikaments** Die Konzentration $K(t)$ eines Medikaments im Blut eines Patienten (in mg/l) zum Zeitpunkt $t$ (in Stunden nach Einnahme) wird durch die Funktion $K(t) = 20t \cdot e^{-0.25t}$ für $t \geq 0$ beschrieben.
   - Zu welchem Zeitpunkt $t_{max}$ erreicht die Konzentration des Medikaments ihr Maximum?
   - Wie hoch ist diese maximale Konzentration?
   - Bestimme die Funktion $K'(t)$, die die Änderungsrate der Konzentration angibt. Wann nimmt die Konzentration am stärksten zu? (Suche nach dem Maximum von $K'(t)$, also einem Wendepunkt von $K(t)$ mit bestimmten Eigenschaften).

3. **Flächenberechnung und uneigentliches Integral:** Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x + 1)e^{-x}$.
   - Bestimme die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ mithilfe partieller Integration.
   - Berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph von $f(x)$ mit der x-Achse und der y-Achse im ersten Quadranten einschließt. (Finde dazu die Nullstelle von $f(x)$ für $x \geq 0$).
   - (Für Experten): Untersuche, ob die Fläche, die der Graph von $f(x)$ mit der x-Achse für $x \geq 0$ einschließt, einen endlichen Inhalt hat. Berechne dazu das uneigentliche Integral $\int_0^\infty (x+1)e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b (x+1)e^{-x}\,dx$.

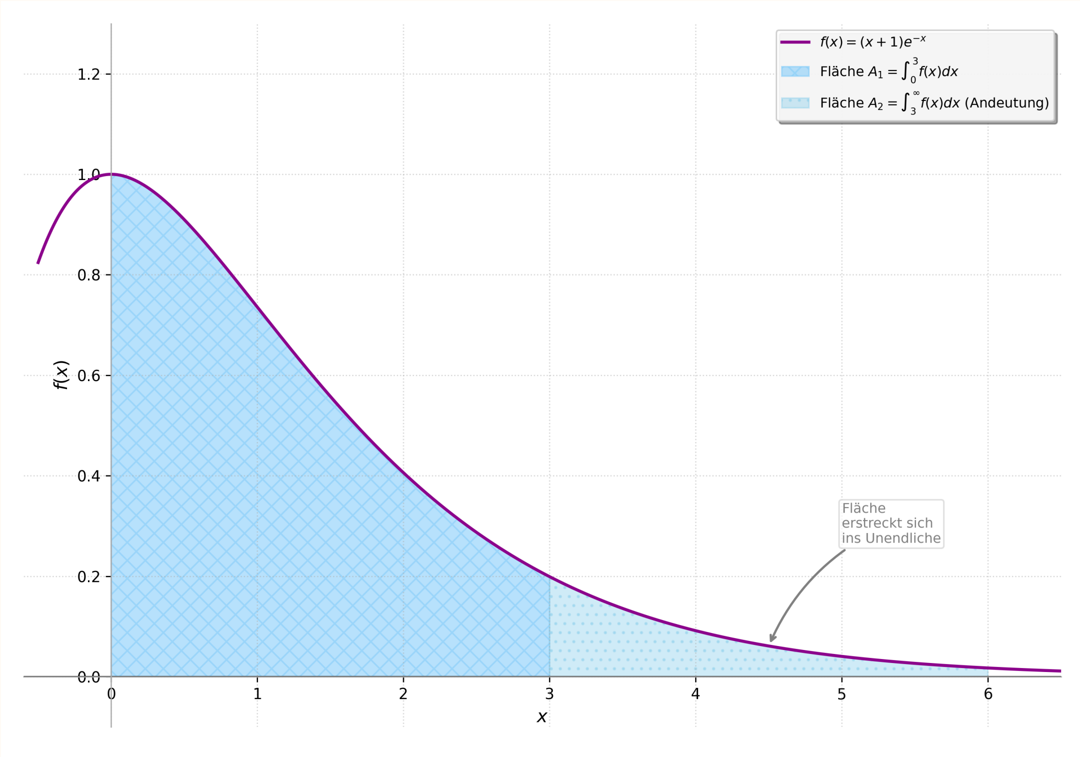


Abbildung 7.6: Fläche unter $f(x) = (x + 1)e^{-x}$

4. **Rekonstruktion einer Exponentialfunktion und Tangente:** Eine Funktion $f$ ist gegeben durch $f(x) = (ax + b)e^{-x}$. Der Graph von $f$ hat im Punkt $P(0|2)$ eine Tangente, die parallel zur Geraden $y = 3x - 5$ ist.

   - Bestimme die Werte der Parameter $a$ und $b$.

   ***Tipp 7.19: Bedingungen aufstellen***

   'Graph geht durch $P(0|2)$' $\implies$ $f(0) = 2$. 'Tangente in $P(0|2)$ parallel zu $y = 3x-5$' $\implies$ $f'(0) = 3$. Bilde $f'(x)$ mit der Produkt- und Kettenregel.

   - Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen von $f$ im Punkt $P(0|2)$.
   - Untersuche die Funktion $f(x)$ mit den gefundenen Parametern auf Nullstellen und Extrempunkte.

5. **Schar von Exponentialfunktionen (Schwer):** Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^2e^{kx}$ mit dem Scharparameter $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

   - Bestimme die Nullstellen von $f_k(x)$.
   - Bestimme die erste Ableitung $f_k'(x)$. Für welche Werte von $x$ (in Abhängigkeit von $k$) ist $f_k'(x) = 0$?
   - Untersuche die Art der Extremstellen in Abhängigkeit von $k$. (Tipp: Betrachte die Fälle $k > 0$ und $k < 0$ getrennt für das Verhalten der zweiten Ableitung oder den Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung).
   - Gibt es Werte für $k$, sodass die Funktion keine Extrempunkte besitzt?

**Kurz & Knapp 7.2: Exponentialfunktionen – Das Wichtigste im Überblick**

- **Die natürliche Exponentialfunktion** $f(x) = e^x$**:**
  - Basis $e \approx 2,71828\dots$ (Eulersche Zahl).
  - Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$, Wertebereich $W_f = (0, \infty)$.
  - Keine Nullstellen, y-Achsenabschnitt bei $(0|1)$.
  - Streng monoton steigend, linksgekrümmt.
  - $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ (horizontale Asymptote $y = 0$), $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.
  - Besondere Eigenschaft: $(e^x)' = e^x$ und $\int e^x\,dx = e^x + C$.
- **Transformierte Exponentialfunktion** $f(x) = a \cdot e^{k(x-c)} + d$**:**
  - Parameter $a, k, c, d$ bewirken Streckung/Stauchung, Spiegelung, Verschiebung.
  - Ableitung $(e^{kx})' = k \cdot e^{kx}$. Stammfunktion $\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$.
- **Allgemeine Exponentialfunktion** $f(x) = b^x$ **(**$b > 0, b \neq 1$**):**
  - Umwandelbar zu $b^x = e^{x\ln(b)}$.
  - Ableitung $(b^x)' = b^x \cdot \ln(b)$.
  - Stammfunktion $\int b^x\,dx = \frac{1}{\ln(b)}b^x + C$.
- **Anwendung der Ableitungsregeln:** Produkt-, Quotienten- und Kettenregel sind essentiell für Kombinationen von $e^x$ mit Polynomen oder anderen Funktionen (z.B. $f(x) = P(x) \cdot e^{g(x)}$).
- **Nullstellen von** $P(x) \cdot e^{g(x)}$**:** Da $e^{g(x)}$ immer positiv ist, hängen die Nullstellen nur von den Nullstellen des Faktors $P(x)$ ab.
- **Grenzwerte:** Die $e$-Funktion 'dominiert' oft Polynome im Unendlichen (z.B. $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-kx} = 0$ für $k > 0$).
- **Kurvendiskussion:** Folgt den bekannten Schritten, wobei die speziellen Eigenschaften von $e^x$ (keine Nullstellen, immer positiv, Grenzwertverhalten) und die Ableitungsregeln berücksichtigt werden.
- **Integrationstechniken mit** $e^x$**:**
  - Partielle Integration für Produkte wie $\int xe^x\,dx$.
  - Integration durch Substitution für verkettete Funktionen wie $\int 2xe^{x^2}\,dx$.
- **Anwendungen:** Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsprozessen, Flächenberechnungen, Mittelwerte, uneigentliche Integrale.

**Ausblick: Logarithmusfunktionen – Die andere Seite der Medaille**

Mit den Exponentialfunktionen hast du eine unglaublich mächtige Funktionsklasse kennengelernt, die in unzähligen Bereichen der Wissenschaft und des Alltags Anwendung findet. Sie beschreiben Prozesse, bei denen sich etwas proportional zu seinem aktuellen Bestand ändert – das klassische Merkmal von Wachstum und Zerfall.

Doch was, wenn wir die umgekehrte Frage stellen? Wenn wir wissen, wie groß ein Bestand ist, und wissen wollen, wie viel Zeit vergangen ist? Oder wenn wir eine Gleichung wie $e^x = 100$ nach $x$ auflösen wollen? Hier kommt die **Logarithmusfunktion** ins Spiel, insbesondere der **natürliche Logarithmus (**$\ln x$**)**, der die direkte Umkehrfunktion zur natürlichen Exponentialfunktion $e^x$ ist.

Im nächsten Kapitel werden wir uns genau diese Logarithmusfunktionen ansehen:

- Wie sind sie definiert und welche Eigenschaften haben sie?
- Wie sehen ihre Graphen aus (Tipp: Spiegelung von $e^x$ an $y = x$)?
- Wie leitet man Logarithmusfunktionen ab und wie bildet man ihre Stammfunktionen?
- Wie können wir sie in Kurvendiskussionen und Anwendungsaufgaben nutzen?

Du wirst sehen, dass Exponential- und Logarithmusfunktionen wie zwei Seiten derselben Medaille sind und zusammen ein unschlagbares Team bilden, um eine riesige Bandbreite an Problemen zu lösen. Die Werkzeuge der Differential- und Integralrechnung werden uns auch hier treue Dienste leisten.

**Aufgabe 7.21 Checkliste: Die Exponentialfunktion im Kern verstehen**

Die Exponentialfunktion ist in vielerlei Hinsicht besonders. Diese Fragen helfen dir, dein Verständnis zu vertiefen:

(a) **Die Eulersche Zahl $e$ und die natürliche Exponentialfunktion:**

- Warum wird $f(x) = e^x$ als die 'natürliche' Exponentialfunktion bezeichnet? Welche einzigartige Eigenschaft hat ihre Ableitung, und was bedeutet das für die Steigung ihres Graphen an jeder Stelle $x$?
- Vergleiche die Graphen von $y = 2^x$, $y = e^x$ und $y = 3^x$ in einer Skizze. Wo schneiden sie die y-Achse? Welche Funktion wächst für $x > 0$ am schnellsten, welche am langsamsten? Wie verhält es sich mit ihren Steigungen an der Stelle $x = 0$?

(b) **Transformationen und Asymptoten:** Betrachte die Funktion $g(x) = A \cdot e^{k(x-B)} + C$.

- Erkläre, wie sich die Parameter $A, k, B, C$ jeweils auf den Graphen der Grundfunktion $y = e^x$ auswirken (Streckung, Stauchung, Spiegelung, Verschiebung).
- Welche Gleichung hat die waagerechte Asymptote von $g(x)$? Wie hängt diese vom Parameter $C$ ab? Warum kann der Graph diese Asymptote nie schneiden, wenn $A \neq 0$?
- Wenn $A > 0$ und $k > 0$: Ist die Funktion streng monoton steigend oder fallend? Was passiert, wenn $k < 0$ ist?

(c) **Von $b^x$ zu $e^{kx}$:**

- Erkläre mit eigenen Worten, warum jede Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ (mit $b > 0, b \neq 1$) auch in der Form $f(x) = e^{kx}$ geschrieben werden kann. Welchen Wert hat $k$ in diesem Fall?
- Nutze diese Umschreibung, um die Ableitungsregel $(b^x)' = b^x \ln(b)$ aus der Regel $(e^{kx})' = ke^{kx}$ herzuleiten.

(d) **Grenzwertverhalten und Dominanz:**

- Warum ist $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, aber $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$?
- Betrachte eine Funktion $h(x) = x^n \cdot e^{-x}$ (mit $n \in \mathbb{N}$). Warum ist $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$, obwohl $x^n$ gegen $\infty$ geht? Welche Funktion 'dominiert' hier das Verhalten für große $x$?

**Aufgabe 7.22 Checkliste: Exponentialfunktionen in der Analysis anwenden**

Die Analyse von Funktionen mit Exponentialtermen erfordert oft eine Kombination verschiedener Werkzeuge.

(a) **Nullstellen von $f(x) = P(x) \cdot e^{g(x)}$:** Wenn du die Nullstellen einer Funktion suchen sollest, die ein Produkt aus einem Polynom $P(x)$ und einem Exponentialterm $e^{g(x)}$ ist:

- Warum kannst du dich bei der Nullstellensuche ausschließlich auf den Faktor $P(x)$ konzentrieren?
- Gilt eine ähnliche Regel auch für die Nullstellensuche der Ableitung $f'(x)$ solcher Funktionen? (Tipp: Leite $P(x)e^{g(x)}$ allgemein mit Produkt- und Kettenregel ab und schaue, ob du $e^{g(x)}$ ausklammern kannst).

(b) **Extremwertbestimmung bei $e$-Funktionen:** Betrachte die Funktion $f(x) = x^2e^{-x}$.

- Welche Ableitungsregeln benötigst du, um $f'(x)$ und $f''(x)$ zu bilden?
- Wie gehst du vor, um die lokalen Extrempunkte zu finden? Erkläre die notwendige und die hinreichende Bedingung.
- Was erwartest du für das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$? Wie hilft dir das, deine gefundenen Extrema einzuordnen (lokal vs. global)?

(c) **Integrationstechniken im Kontext von $e$-Funktionen:**

- Für das Integral $\int (2x)e^{x^2}dx$: Welche Integrationstechnik bietet sich hier an und warum? Identifiziere die 'innere Funktion' und ihre Ableitung.
- Für das Integral $\int (x+1)e^x dx$: Welche Integrationstechnik ist hier typischerweise erfolgreich und warum? Wie würdest du die Faktoren für diese Technik wählen?
- Kannst du $\int e^{x^2}dx$ mit den in diesem Kapitel gelernten Methoden als elementare Funktion darstellen? (Tipp: Nicht jede Funktion hat eine einfach darstellbare Stammfunktion.)

(d) **Interpretation im Anwendungskontext (Wachstum/Zerfall):** Ein Medikament wird im Körper exponentiell abgebaut, z.B. nach $M(t) = M_0e^{-kt}$.

- Was bedeutet $M_0$ und was bedeutet ein größeres $k$ für den Abbauprozess?
- Die Ableitung $M'(t)$ gibt die momentane Abbaurate an. Ist $M'(t)$ positiv oder negativ? Warum ist das sinnvoll? Was passiert mit der Abbaurate für große $t$?
- Das bestimmte Integral $\int_{t_1}^{t_2} M(t)dt$ könnte als eine Art 'kumulierte Medikamentenbelastung' im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ interpretiert werden. Welche Einheit hätte dieses Integral, wenn $M(t)$ in mg und $t$ in Stunden gemessen wird?

**Achtung Stolperstein! 7.5: Interpretation von Grenzwerten und Asymptoten bei e-Funktionen**

Das Verhalten von Exponentialfunktionen im Unendlichen oder in Kombination mit Polynomen birgt einige Tücken:

- **Asymptote bei $e^{kx}$ falsch bestimmt:** Die Funktion $f(x) = e^{kx}$ hat für $x \to -\infty$ die Asymptote $y = 0$, wenn $k > 0$ ist. Wenn aber $k < 0$ (z.B. $f(x) = e^{-2x}$), dann gilt $\lim_{x\to\infty} e^{-2x} = 0$. Die Richtung, in der die x-Achse Asymptote ist, hängt vom Vorzeichen von $k$ ab! Bei $f(x) = Ae^{k(x-B)} + C$ ist die Asymptote immer $y = C$.
- **Dominanz falsch eingeschätzt bei $P(x) \cdot e^{kx}$:** Für $x \to \infty$:
  - Wenn $k > 0$, 'gewinnt' der $e^{kx}$-Term gegen jedes Polynom $P(x)$, d.h. $P(x)e^{kx} \to \pm\infty$

(abhängig vom Vorzeichen von $P(x)$ für große $x$).

- Wenn $k < 0$ (also $e^{-|k|x}$), 'gewinnt' der $e^{-|k|x}$-Term und geht schneller gegen 0, als $P(x)$ gegen $\infty$ geht. Also $P(x)e^{-|k|x} \to 0$.

Merke dir: Die Exponentialfunktion ist sehr 'stark' in ihrem Verhalten im Unendlichen.

- **Nullstellen von $P(x)e^{kx}$:** Die Nullstellen werden *nur* durch $P(x) = 0$ bestimmt, da $e^{kx}$ niemals Null wird. Manchmal wird fälschlicherweise versucht, $e^{kx} = 0$ zu lösen.

Eine Skizze und die Betrachtung der Vorzeichen der beteiligten Faktoren helfen oft, Fehler zu vermeiden.

# 8 Logarithmusfunktionen – Die Welt des 'Zurückrechnens'

Nachdem wir die Exponentialfunktionen, insbesondere die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$, kennengelernt haben, die uns exponentielles Wachstum und Zerfall beschreiben, wenden wir uns nun ihrer direkten 'Partnerin' zu: der **Logarithmusfunktion**.

**Was du in diesem Kapitel lernen wirst:**

Nachdem du dieses Kapitel durchgearbeitet hast, wirst du in der Lage sein:

- den **Logarithmus** allgemein als Antwort auf die Frage nach dem Exponenten zu verstehen und den **natürlichen Logarithmus (**$\ln x$**)** als Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion $e^x$ zu definieren und seine grundlegenden Eigenschaften (Graph, Definitions-/Wertebereich, Nullstelle, senkrechte Asymptote, Monotonie, Krümmung) zu beschreiben.
- die wichtigen **Logarithmengesetze** (für Produkte, Quotienten und Potenzen) sicher anzuwenden, um logarithmische Terme zu vereinfachen und Exponentialgleichungen nach der gesuchten Variablen aufzulösen.
- die **Ableitung** des natürlichen Logarithmus ($(\ln x)' = 1/x$) zu kennen und die Kettenregel zur Ableitung verketteter Logarithmusfunktionen ($(\ln(h(x)))' = \frac{h'(x)}{h(x)}$) sowie Produkt- und Quotientenregel auf Funktionen mit $\ln(x)$ anzuwenden.
- die **Stammfunktionen** $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ und $\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + C$ (letztere mithilfe partieller Integration) zu kennen und für Berechnungen zu nutzen.
- Integrale der wichtigen Form $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C$ zu erkennen und zu lösen (Integration durch Substitution).
- eine vollständige **Kurvendiskussion** für Funktionen durchzuführen, die den natürlichen Logarithmus enthalten (oft in Produkt- oder Quotientenform mit Polynomen), unter besonderer Berücksichtigung des Definitionsbereichs und relevanter Grenzwerte (z.B. $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x$).
- die Bedeutung und Anwendung des Logarithmus in verschiedenen Kontexten zu verstehen, beispielsweise beim Lösen von Exponentialgleichungen, die bei Wachstums- und Zerfallsprozessen auftreten, oder beim Verständnis logarithmischer Skalen.

Du wirst damit die wichtige 'Partnerfunktion' der Exponentialfunktion meistern und dein analytisches Repertoire zur Untersuchung und Beschreibung von Funktionen und realen Phänomenen entscheidend erweitern!

Stell dir vor, du hast eine Exponentialgleichung wie $e^x = 10$. Wie findest du heraus, welchen Wert $x$ haben muss, damit diese Gleichung stimmt? Du suchst also den Exponenten, mit dem die Basis $e$ potenziert werden muss, um 10 zu erhalten. Genau diese Frage beantwortet uns der Logarithmus.

**Was ist ein Logarithmus? Die Frage nach dem Exponenten!**

Der Logarithmus einer Zahl $y$ zu einer bestimmten Basis $b$ ist derjenige Exponent $x$, mit dem man die Basis $b$ potenzieren muss, um $y$ zu erhalten. Man schreibt: $\log_b(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad b^x = y$.

**Beispiele:**

- $\log_2(8) = 3$, denn $2^3 = 8$. (Der Logarithmus von 8 zur Basis 2 ist 3).
- $\log_{10}(100) = 2$, denn $10^2 = 100$. (Der Logarithmus von 100 zur Basis 10 ist 2).
- $\log_5(25) = 2$, denn $5^2 = 25$.

Der Logarithmus 'holt den Exponenten herunter'.

In diesem Kapitel konzentrieren wir uns hauptsächlich auf den **natürlichen Logarithmus**, der die Basis $e$ (die Eulersche Zahl) hat. Er ist die direkte Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion $f(x) = e^x$.

## 8.1 Der natürliche Logarithmus $\ln(x)$ – Die Umkehrung von $e^x$

Die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist streng monoton steigend und bildet alle reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auf die positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}^+$ ab. Daher besitzt sie eine eindeutige Umkehrfunktion, die wir als **natürlichen Logarithmus** bezeichnen und mit $\ln(x)$ (manchmal auch $\log_e(x)$) schreiben.

***ϟ 8.1 Definition des natürlichen Logarithmus ($\ln x$)***

Der **natürliche Logarithmus** $\ln(x)$ ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion $e^x$. Für $x > 0$ ist $\ln(x)$ diejenige Zahl $y$, für die gilt: $e^y = x$. Also:

$$y = \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$$

Wichtige Beziehungen, die sich direkt aus der Umkehreigenschaft ergeben:

- $e^{\ln(x)} = x$ für alle $x > 0$.
- $\ln(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die $e$-Funktion und die ln-Funktion 'neutralisieren' sich gegenseitig.

***Warum ist das wichtig? 8.1: Der natürliche Logarithmus***

Der natürliche Logarithmus ist in vielen Bereichen der Mathematik und Naturwissenschaften von fundamentaler Bedeutung:

- **Lösen von Exponentialgleichungen:** Immer wenn die Unbekannte im Exponenten steht (z.B. $e^{0.5t} = 100$), brauchen wir den Logarithmus, um sie 'herunterzuholen'.
- **Modellierung von Prozessen:** Viele natürliche Prozesse, bei denen relative Änderungen eine Rolle spielen, werden mit Logarithmen beschrieben (z.B. pH-Wert, Lautstärkepegel in Dezibel, Richterskala für Erdbeben).
- **Integration:** Die Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ ist $\ln|x|$.
- **Theoretische Mathematik:** Er taucht in vielen wichtigen Formeln und Grenzwerten auf.

### 8.1.1 Graph und Eigenschaften von $f(x) = \ln(x)$

Der Graph der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$ ergibt sich durch Spiegelung des Graphen der Exponentialfunktion $g(x) = e^x$ an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten (der Geraden $y = x$).

***ϟ 8.2 Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$***

- **Definitionsbereich:** $D_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Man kann nur von **positiven Zahlen** den Logarithmus bilden! $\ln(0)$ und $\ln(\text{negative Zahl})$ sind nicht definiert im Reellen.
- **Wertebereich:** $W_f = \mathbb{R}$ (der Logarithmus kann jeden reellen Wert annehmen).
- **Nullstelle:** $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow e^0 = x \Leftrightarrow x = 1$. Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ hat eine Nullstelle bei $x = 1$. Der Graph schneidet die x-Achse bei $N(1|0)$.
- **Schnittpunkt mit der y-Achse:** Gibt es nicht, da $x = 0$ nicht im Definitionsbereich liegt.
- **Monotonie:** Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist für alle $x > 0$ **streng monoton steigend**.
- **Krümmung:** Der Graph von $f(x) = \ln(x)$ ist für alle $x > 0$ **rechtsgekrümmt** (konkav). (Die zweite Ableitung wird $f''(x) = -1/x^2$ sein, was für $x > 0$ immer negativ ist).

- **Grenzwerte (Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs):**
  - $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty$ (für große positive $x$ werden die Werte beliebig groß, aber sehr langsam).
  - $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ (nähert sich $x$ von rechts der Null, gehen die Funktionswerte gegen $-\infty$). Die y-Achse (Gerade $x = 0$) ist eine **senkrechte Asymptote**.

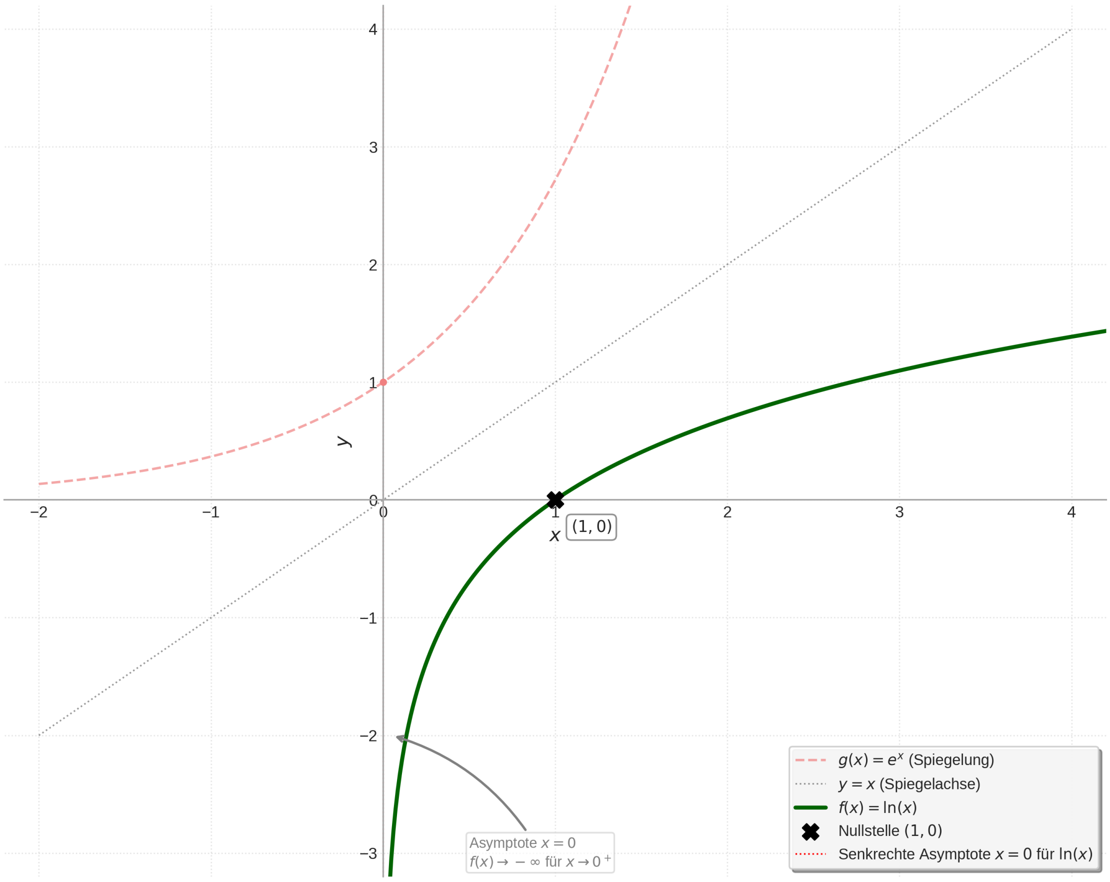


Abbildung 8.1: Graph der natürlichen Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$

*Selbst-Check:* Warum ist $\ln(1) = 0$? Warum ist $\ln(e) = 1$? (Antworten: Weil $e^0 = 1$ und $e^1 = e$.)

### 8.1.2 Wichtige Rechenregeln für Logarithmen (Logarithmengesetze)

Für das Rechnen mit Logarithmen (egal zu welcher Basis) gibt es wichtige Gesetze, die sich aus den Potenzgesetzen ableiten lassen. Für den natürlichen Logarithmus lauten sie:

**ϟ *8.3 Logarithmengesetze für* $\ln(x)$**

Für $u, v > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt:

1) **Produktregel:** $\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v)$ (Der Logarithmus eines Produkts ist die Summe der Logarithmen der Faktoren.)

2) **Quotientenregel:** $\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$ (Der Logarithmus eines Quotienten ist die Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner.)

3) **Potenzregel:** $\ln(u^r) = r \cdot \ln(u)$ (Der Logarithmus einer Potenz ist das Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis.)

Spezialfälle:

- $\ln(e) = 1$
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e^x) = x$
- $e^{\ln(x)} = x$

**Achtung Stolperstein! 8.1: Logarithmengesetze richtig anwenden**

Die Logarithmengesetze sind mächtig, aber nur, wenn sie korrekt angewendet werden!

- **Falsch:** $\ln(u + v) = \ln(u) + \ln(v)$. Der Logarithmus einer Summe ist NICHT die Summe der Logarithmen. Es gibt keine einfache Regel für $\ln(u + v)$.
- **Falsch:** $\ln(u - v) = \ln(u) - \ln(v)$. Analog zur Summe.
- **Falsch:** $\frac{\ln(u)}{\ln(v)} = \ln(u) - \ln(v)$ oder $\ln(\frac{u}{v})$. Die Division von Logarithmen ist NICHT dasselbe wie der Logarithmus eines Quotienten.
- **Falsch:** $(\ln(u))^r = r\ln(u)$. Die Potenzregel $\ln(u^r) = r\ln(u)$ gilt für den Logarithmus einer Potenz, nicht für eine Potenz des Logarithmus.

Überprüfe immer genau, ob du die Produkt-, Quotienten- oder Potenzregel korrekt anwendest!

**Beispiel 8.1 Anwendung der Logarithmengesetze**

1. Vereinfache $\ln(2a) + \ln(3b) - \ln(6ab^2)$ für $a, b > 0$. $\ln(2a) + \ln(3b) - \ln(6ab^2) = \ln(2 \cdot a \cdot 3 \cdot b) - \ln(6ab^2)$ (Produktregel) $= \ln(6ab) - \ln(6ab^2) = \ln\left(\frac{6ab}{6ab^2}\right)$ (Quotientenregel) $= \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(b^{-1})$ $= -1 \cdot \ln(b) = -\ln(b)$ (Potenzregel).
2. Löse die Gleichung $e^{2x} = 5$ nach $x$. Wir wenden auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus an: $\ln(e^{2x}) = \ln(5)$ Mit $\ln(e^A) = A$ folgt: $2x = \ln(5)$ $x = \frac{\ln(5)}{2}$. Mit dem Taschenrechner: $\ln(5) \approx 1.609$, also $x \approx \frac{1.609}{2} \approx 0.8045$.

**Aufgabe 8.1 Rechnen mit Logarithmen**

1. Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich (alle Variablen seien positiv):
   - $\ln(x^3) + \ln(x^2)$
   - $\ln(a^5) - \ln(a^2)$
   - $2\ln(u) - 3\ln(v)$
   - $\frac{1}{2}\ln(16x^4)$
2. Löse die folgenden Exponentialgleichungen nach $x$. Gib das Ergebnis sowohl exakt als auch als Dezimalzahl (auf 3 Nachkommastellen gerundet) an.
   - $e^x = 20$
   - $2e^{3x} = 18$
   - $e^{-0.5x+1} = 5$
   - $100 \cdot (0.7)^x = 10$ (Tipp: Erst isolieren, dann logarithmieren. Du kannst hier ln verwenden, obwohl die Basis 0.7 ist.)

### 8.1.3 Ableitung und Stammfunktion des natürlichen Logarithmus

Nachdem wir die grundlegenden Eigenschaften und Rechenregeln des natürlichen Logarithmus kennengelernt haben, wollen wir uns nun seiner Ableitung und seiner Rolle als Stammfunktion widmen.

**ϟ *8.4 Ableitung von* $f(x) = \ln(x)$**

Die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$ für $x > 0$ ist:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

*Bemerkung:* Diese einfache und elegante Ableitung ist ein weiterer Grund, warum der natürliche Logarithmus in der Analysis so wichtig ist. Die Herleitung dieser Regel erfordert fortgeschrittenere Methoden (z.B. die Ableitung der Umkehrfunktion oder die Definition des Logarithmus über ein Integral), daher nehmen wir sie hier als gegeben hin.

**Beispiel 8.2 Ableitung von $\ln(x)$ anwenden**

1. $f(x) = 5\ln(x) \implies f'(x) = 5 \cdot (\ln(x))' = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$ (Faktorregel)
2. $g(x) = x^2 + \ln(x) \implies g'(x) = (x^2)' + (\ln(x))' = 2x + \frac{1}{x}$ (Summenregel)

Da die Ableitung von $\ln(x)$ gleich $\frac{1}{x}$ ist, ergibt sich direkt die Stammfunktion für $\frac{1}{x}$.

**ϟ *8.5 Stammfunktion von* $f(x) = \frac{1}{x}$**

Die Menge aller Stammfunktionen (das unbestimmte Integral) von $f(x) = \frac{1}{x}$ ist:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

**Wichtig:** Da der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert ist, der Term $\frac{1}{x}$ aber auch für negative $x$ existiert, schreiben wir $\ln|x|$ (Logarithmus des Betrags von $x$), um den Definitionsbereich der Stammfunktion ($x \neq 0$) abzudecken.

- Für $x > 0$ ist $|x| = x$, also $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C$.
- Für $x < 0$ ist $|x| = -x$. Die Ableitung von $\ln(-x)$ ist nach der Kettenregel $\frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Also ist auch hier $\ln(-x) + C$ eine Stammfunktion.

Die Schreibweise $\ln|x| + C$ fasst beide Fälle zusammen.

**Beispiel 8.3 Integrieren von $\frac{k}{x}$**

Bestimme $\int \frac{7}{x}\,dx$.

$$\int \frac{7}{x}\,dx = 7\int \frac{1}{x}\,dx = 7\ln|x| + C$$

**Achtung Stolperstein! 8.2: Stammfunktion von $1/x$ – Den Betrag nicht vergessen!**

Die Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ ist $F(x) = \ln|x| + C$. Warum der Betrag?

- Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist für alle $x \neq 0$ definiert (also für positive und negative $x$).
- Die Funktion $\ln(x)$ ist aber nur für $x > 0$ definiert.
- Für $x < 0$ ist die Funktion $\ln(-x)$ definiert, und ihre Ableitung ist $\frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

- $\ln|x|$ fasst beide Fälle ($\ln(x)$ für $x > 0$ und $\ln(-x)$ für $x < 0$) korrekt zusammen.

Bei bestimmten Integralen über Intervalle, die nur positive oder nur negative $x$-Werte enthalten, kannst du den Betrag entsprechend auflösen. Bei unbestimmten Integralen ist $\ln|x|+C$ die präziseste Angabe.

**Aufgabe 8.2 Ableiten und Integrieren mit $\ln(x)$**

1. Bilde die erste Ableitung der folgenden Funktionen:
   - $f_1(x) = -2\ln(x) + e^x$
   - $f_2(x) = x^3 \ln(x)$ (Produktregel!)
   - $f_3(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ (Quotientenregel!)
2. Bestimme die Menge aller Stammfunktionen:
   - $g_1(x) = \frac{3}{x} - 2x + 1$
   - $g_2(x) = \frac{x^2+x-1}{x}$ (Tipp: Den Bruch zuerst aufteilen!)

### 8.1.4 Ableitung von verketteten Logarithmusfunktionen: $f(x) = \ln(h(x))$

Sehr oft tritt der Logarithmus als äußere Funktion einer Verkettung auf. Hier benötigen wir die Kettenregel: $(g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

Wenn $f(x) = \ln(h(x))$, dann ist:

- Äußere Funktion: $g(u) = \ln(u) \implies g'(u) = \frac{1}{u}$.
- Innere Funktion: $h(x)$. Ihre Ableitung ist $h'(x)$.

Somit ist die Ableitung von $f(x) = \ln(h(x))$:

$$(\ln(h(x)))' = \frac{1}{h(x)} \cdot h'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$$

***ϟ 8.6 Ableitung von $\ln(h(x))$ (Spezialfall der Kettenregel)***

Für eine differenzierbare Funktion $h(x)$ mit $h(x) > 0$ gilt:

$$(\ln(h(x)))' = \frac{h'(x)}{h(x)}$$

'Ableitung der inneren Funktion geteilt durch die innere Funktion.'

**Achtung Stolperstein! 8.3: Ableitung von $\ln(h(x))$ – Die Kettenregel beachten!**

Die Formel $(\ln(h(x)))' = \frac{h'(x)}{h(x)}$ ist eine direkte Anwendung der Kettenregel. Häufige Fehler sind:

- **Innere Ableitung $h'(x)$ im Zähler vergessen:** Man schreibt nur $\frac{1}{h(x)}$.
- **Kehrwert falsch gebildet:** Man schreibt $h(x) \cdot h'(x)$ oder Ähnliches.
- **Definitionsbereich von $\ln(h(x))$ nicht beachtet:** Die Ableitung existiert nur dort, wo $h(x) > 0$ ist und $h(x)$ differenzierbar ist.

Identifiziere immer klar die innere Funktion $h(x)$ und bilde ihre Ableitung $h'(x)$ korrekt.

**Beispiel 8.4 Kettenregel mit $\ln(h(x))$**

1. $f(x) = \ln(x^2+1)$. (Hier ist $x^2+1$ immer positiv, also $D_f = \mathbb{R}$) Innere Funktion: $h(x) = x^2+1 \implies h'(x) = 2x$. $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.
2. $g(x) = \ln(3x-5)$. (Definiert für $3x-5>0 \implies 3x>5 \implies x>5/3$) Innere Funktion: $h(x) = 3x-5 \implies h'(x) = 3$. $g'(x) = \frac{3}{3x-5}$.
3. $k(x) = (\ln(x))^3$. (Definiert für $x>0$) Hier ist die **äußere Funktion** $g(u) = u^3$ und die **innere Funktion** $h(x) = \ln(x)$. $g'(u) = 3u^2$. $h'(x) = \frac{1}{x}$. $k'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 3(\ln(x))^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3(\ln x)^2}{x}$.

**Aufgabe 8.3 Kettenregel mit $\ln(h(x))$ üben**

Bilde die erste Ableitung der folgenden Funktionen. Gib auch den maximalen Definitionsbereich an.

1. $f_1(x) = \ln(5x)$
2. $f_2(x) = \ln(x^3+x)$ (für $x>0$)
3. $f_3(x) = x \cdot \ln(2x+1)$ (Produkt- und Kettenregel!)
4. $f_4(x) = e^{\ln(x^2)}$ (Tipp: Vereinfache zuerst mit den Logarithmus-/Exponentialgesetzen! Was ist $e^{\ln A}$?)

## 8.2 Kurvendiskussion von Funktionen mit $\ln(x)$

Funktionen, die den natürlichen Logarithmus enthalten (oft in Kombination mit Polynomen), können interessante Verläufe aufweisen. Die Schritte der Kurvendiskussion bleiben dieselben, aber wir müssen die speziellen Eigenschaften des Logarithmus (Definitionsbereich, Grenzwerte) beachten.

**Wichtige Grenzwerte mit $\ln(x)$**

Für das Verhalten von Funktionen mit $\ln(x)$ im Unendlichen sind folgende Grenzwerte oft nützlich:

- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ für jedes $n>0$. (Jede noch so kleine positive Potenz von $x$ wächst schneller als $\ln(x)$.)
- $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0$ für jedes $n>0$. (Für $x \to 0^+$ geht $\ln(x) \to -\infty$, aber $x^n$ geht 'schneller' gegen 0.)

Diese Regeln helfen zu verstehen, welcher Teil einer Funktion (z.B. in einem Produkt $x \cdot \ln x$) das Verhalten für $x\to\infty$ oder $x \to 0^+$ dominiert.

**Beispiel 8.5 Kurvendiskussion mit $\ln x$ – Untersuchung von $f(x) = x\ln(x)$**

1. **Definitionsbereich:** Wegen $\ln(x)$ muss $x>0$ sein. Also $D_f = (0,\infty) = \mathbb{R}^+$.
2. **Symmetrie:** Da $D_f$ nicht symmetrisch zum Ursprung ist, kann keine einfache Symmetrie vorliegen.
3. **Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs:**
   - Für $x\to\infty$: $x\to\infty$ und $\ln(x)\to\infty$. Also $\lim_{x\to\infty} x\ln(x) = +\infty$.
   - Für $x\to 0^+$: $x \to 0$ und $\ln(x)\to-\infty$. Wir haben einen Typ '$0\cdot(-\infty)$'. Mit dem oben genannten Grenzwert $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0$ (hier für $n=1$) gilt: $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$. Der Graph nähert sich also dem Ursprung $(0|0)$ für $x\to 0^+$.

4. **y-Achsenabschnitt:** Gibt es nicht, da $x = 0$ nicht im Definitionsbereich ist.

5. **Nullstellen:** $f(x) = 0 \implies x\ln(x) = 0$. Da $x > 0$ im Definitionsbereich, kann $x$ nicht Null sein. Also muss $\ln(x) = 0$ sein. $\ln(x) = 0 \implies x = e^0 = 1$. Einzige Nullstelle bei $N(1|0)$.

6. **Erste Ableitung $f'(x)$:** Mit Produktregel $u(x) = x, u'(x) = 1, v(x) = \ln(x), v'(x) = 1/x$. $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

7. **Extremstellen:** $f'(x) = 0 \implies \ln(x) + 1 = 0 \implies \ln(x) = -1$. $x_E = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.368$.

8. **Zweite Ableitung $f''(x)$:** $f''(x) = (\ln(x) + 1)' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$.

9. **Art der Extremstelle bei $x_E = 1/e$ mit $f''$ prüfen:** $f''(1/e) = \frac{1}{1/e} = e$. Da $f'(1/e) = 0$ und $f''(1/e) = e > 0 \implies$ Lokaler Tiefpunkt bei $x_E = 1/e$. $y_T = f(1/e) = \frac{1}{e}\ln(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}\ln(e^{-1}) = \frac{1}{e} \cdot (-1) = -\frac{1}{e} \approx -0.368$. Tiefpunkt $T(1/e| - 1/e)$.

10. **Monotonie:** Nullstelle von $f'(x) = \ln(x) + 1$ ist $x = 1/e$.

    - $0 < x < 1/e$ (z.B. $x = 0.1 \approx 1/(2e)$): $\ln(0.1) \approx -2.3$. $f'(0.1) = -2.3 + 1 = -1.3 < 0 \implies$ fallend.
    - $x > 1/e$ (z.B. $x = 1$): $f'(1) = \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1 > 0 \implies$ steigend.

    Fallend für $x \in (0, 1/e]$, steigend für $x \in [1/e, \infty)$.

11. **Wendepunkte:** $f''(x_W) = 0 \implies \frac{1}{x_W} = 0$. Diese Gleichung hat keine Lösung, da ein Bruch nur Null ist, wenn der Zähler Null ist (hier ist der Zähler 1). Also keine Nullstellen von $f''(x)$.

12. **Krümmungsverhalten:** Da $D_f = (0, \infty)$, ist $x$ immer positiv. Somit ist $f''(x) = \frac{1}{x}$ immer positiv für alle $x \in D_f$. Der Graph ist also im gesamten Definitionsbereich linksgekrümmt (konvex). Es gibt keine Wendepunkte.

13. **Skizze:**

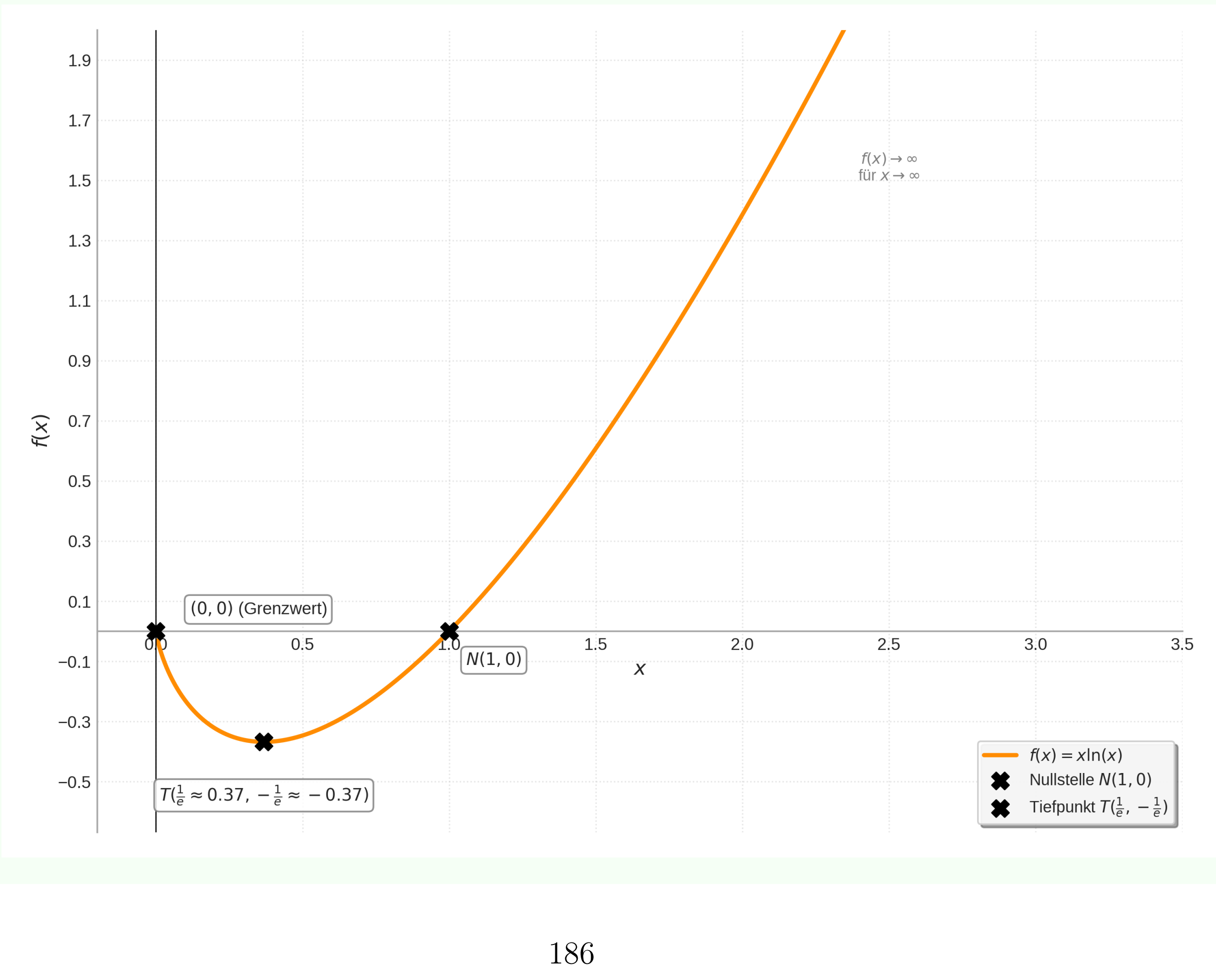

Abbildung 8.2: Graph von $f(x) = x\ln(x)$

**Aufgabe 8.4 Kurvendiskussionen mit Logarithmusfunktionen**

Führe eine vollständige Kurvendiskussion für die folgenden Funktionen durch.

1. $f(x) = \ln(x^2 + 2)$ (Beachte den Definitionsbereich!)
2. $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ (für $x > 0$)
3. **Für Experten:** $h(x) = x^2 \ln(x)$ (für $x > 0$)

***Tipp 8.1: Anwendungen von Logarithmusfunktionen***

Logarithmusfunktionen sind oft die 'Antwort', wenn es um die Umkehrung exponentieller Prozesse geht oder wenn Größen über viele Zehnerpotenzen variieren.

- **Halbwertszeiten/Verdopplungszeiten:** Berechnung der Zeit, bis sich eine Menge halbiert oder verdoppelt (siehe Aufgabe zum radioaktiven Zerfall im Exponentialfunktionskapitel).
- **Skalen:** pH-Wert (misst Säuregrad), Dezibel (Lautstärke), Richterskala (Erdbebenstärke) sind logarithmische Skalen. Eine Erhöhung um 1 auf der Skala bedeutet oft eine Verzehnfachung der eigentlichen physikalischen Größe.
- **Wachstumsmodelle:** Manchmal ist es einfacher, das logarithmierte Wachstum zu analysieren.

### 8.2.1 Integration mit Logarithmusfunktionen – Partielle Integration und ein wichtiger Spezialfall der Substitution

Wir wissen bereits, dass die Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ die Funktion $F(x) = \ln|x| + C$ ist. Aber wie integriert man die Logarithmusfunktion $\ln(x)$ selbst? Und gibt es spezielle Strukturen bei Integralen, die auf Logarithmen führen?

**1. Die Stammfunktion von $\ln(x)$ – Ein Fall für die partielle Integration**

Um $\int \ln(x)\,dx$ zu berechnen, verwenden wir einen kleinen Trick und die partielle Integration. Erinnerung Partielle Integration: $\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$.

Wir schreiben $\ln(x)$ als Produkt: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$. Nun wählen wir geschickt:

- $u'(x) = 1 \implies u(x) = \int 1\,dx = x$
- $v(x) = \ln(x) \implies v'(x) = \frac{1}{x}$

Einsetzen in die Formel der partiellen Integration:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v(x)}\,dx &= \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v(x)} - \int \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\,dx \\ &= x\ln(x) - \int 1\,dx \\ &= x\ln(x) - x + C\end{aligned}$$

### ϟ 8.7 *Stammfunktion von* $\ln(x)$

Die Menge aller Stammfunktionen (das unbestimmte Integral) von $f(x) = \ln(x)$ für $x > 0$ ist:

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + C$$

Oder ausgeklammert: $\int \ln(x)\,dx = x(\ln(x) - 1) + C$. Diese wichtige Stammfunktion solltest du dir merken!

**Beispiel 8.6 Bestimmtes Integral von** $\ln(x)$

Berechne $\int_1^e \ln(x)\,dx$. Wir verwenden die Stammfunktion $F(x) = x\ln(x) - x$:

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln(x)\,dx &= [x\ln(x) - x]_1^e \\
&= (e \cdot \ln(e) - e) - (1 \cdot \ln(1) - 1) \\
&= (e \cdot 1 - e) - (1 \cdot 0 - 1) && (\text{da } \ln(e) = 1 \text{ und } \ln(1) = 0) \\
&= (e - e) - (0 - 1) \\
&= 0 - (-1) = 1
\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt unter dem Graphen von $\ln(x)$ zwischen $x = 1$ und $x = e$ beträgt also genau 1.

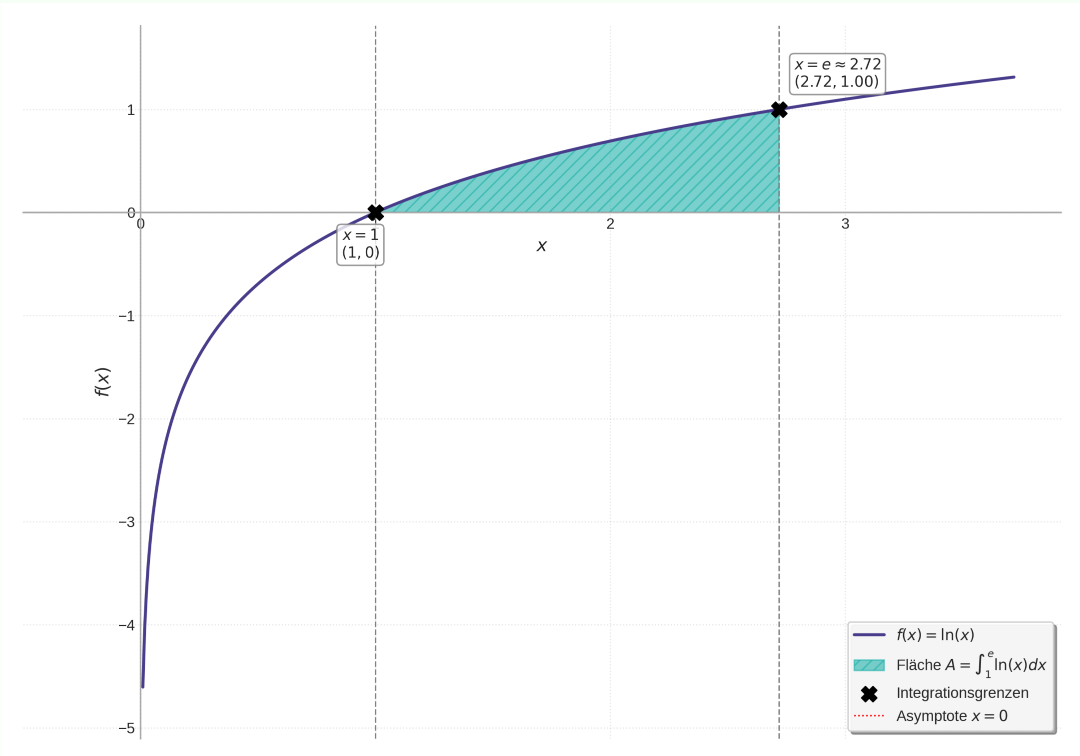


Abbildung 8.3: Fläche unter $f(x) = \ln(x)$ von $x = 1$ bis $x = e$

**2. Ein wichtiger Spezialfall der Substitution:** $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$

Betrachten wir Integrale, bei denen der Zähler die Ableitung des Nenners ist (oder ein Vielfaches davon). Also Integrale der Form $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$.

Hier hilft die Substitution $u = g(x)$. Dann ist $\frac{du}{dx} = g'(x)$, also $du = g'(x)dx$. Setzen wir das ins Integral ein:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)dx = \int \frac{1}{u}\,du$$

Das Integral von $\frac{1}{u}$ ist $\ln|u| + C$. Rücksubstituieren wir $u = g(x)$, erhalten wir:

**ϟ 8.8 Integration von $\frac{\text{Ableitung}}{\text{Funktion}}$**

Für eine differenzierbare Funktion $g(x)$ mit $g(x) \neq 0$ gilt:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C$$

Diese Regel ist sehr nützlich und erspart oft die explizite Durchführung der Substitution.

**Beispiel 8.7 Anwendung der Regel $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$**

1. **Integral $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$** Sei $g(x) = x^2 + 1$. Dann ist $g'(x) = 2x$. Der Integrand hat genau die Form $\frac{g'(x)}{g(x)}$. Also: $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x^2+1|+C$. Da $x^2+1$ immer positiv ist, können wir die Betragsstriche weglassen: $\ln(x^2 + 1) + C$.

2. **Integral $\int \frac{x}{x^2-4}\,dx$** Sei $g(x) = x^2 - 4$. Dann ist $g'(x) = 2x$. Im Zähler steht $x$, wir bräuchten aber $2x$. Wir können den Integranden mit $\frac{2}{2}$ erweitern: $\int \frac{x}{x^2-4}\,dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-4}\,dx$. Jetzt hat der Bruch die Form $\frac{g'(x)}{g(x)}$. Also: $\frac{1}{2}\ln|x^2 - 4| + C$.

**Aufgabe 8.5 Integration mit Logarithmusfunktionen üben**

1. Berechne die folgenden unbestimmten Integrale:
   - $\int (3\ln(x) - 2x)\,dx$
   - $\int \frac{5x^4}{x^5+1}\,dx$
   - $\int \frac{e^x}{e^x+3}\,dx$
   - $\int \frac{1}{2x+7}\,dx$ (Tipp: Erweitere so, dass der Zähler die Ableitung des Nenners ist.)

2. **Flächenberechnung:** Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist im ersten Quadranten gegeben.
   - Berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph von $f(x)$ mit der x-Achse im Intervall $[1, e]$ einschließt.
   - Berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph von $f(x)$ mit der x-Achse im Intervall $[1, b]$ für ein beliebiges $b > 1$ einschließt. Was passiert mit dieser Fläche, wenn $b \to \infty$? (Uneigentliches Integral)

3. **Anwendung partielle Integration (anspruchsvoller):** Berechne $\int x^2 \ln(x)\,dx$. (Tipp: Wähle $v(x) = \ln(x)$ und $u'(x) = x^2$).

***Kurz & Knapp 8.1: Logarithmusfunktionen – Analysis im Überblick***

- **Natürlicher Logarithmus $\ln(x)$:** Umkehrfunktion von $e^x$. $D_f = (0, \infty)$, $W_f = \mathbb{R}$. Nullstelle bei $x = 1$. Senkrechte Asymptote $x = 0$.
- **Logarithmengesetze:** Helfen beim Umformen von Termen mit Logarithmen.
- **Ableitung:** $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Für verkettete Funktionen: $(\ln(h(x)))' = \frac{h'(x)}{h(x)}$.
- **Stammfunktion:** $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$. $\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + C$.
- **Wichtiger Spezialfall der Substitution:** $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C$.

- **Kurvendiskussion:** Beachte Definitionsbereich und Grenzwerte an den Rändern.

**Ausblick: Die Reise geht weiter – Trigonometrische Funktionen**

Mit den Exponential- und Logarithmusfunktionen hast du zwei sehr wichtige nicht-polynomielle Funktionsklassen kennengelernt, die in unzähligen Bereichen der Wissenschaft und des Alltags Anwendung finden.
Als Nächstes auf unserer mathematischen Entdeckungsreise stehen die **trigonometrischen Funktionen** ($\sin x, \cos x, \tan x$) auf dem Programm. Diese periodischen Funktionen sind unerlässlich, um Schwingungen, Wellen und zyklische Vorgänge zu beschreiben – von den Gezeiten über Schallwellen bis hin zu den Bewegungen von Planeten.
Auch für diese neuen Funktionstypen werden wir lernen, wie man sie ableitet und integriert, und wie wir sie in Kurvendiskussionen und Anwendungsaufgaben nutzen können. Die Werkzeuge der Differential- und Integralrechnung, die du bisher erworben hast, werden dabei immer wieder von zentraler Bedeutung sein. Die Mathematik baut aufeinander auf – und das ist das Schöne daran!

**Aufgabe 8.6 Checkliste: Das Wesen des Logarithmus und der ln-Funktion verstehen**

Der Logarithmus, insbesondere der natürliche Logarithmus $\ln(x)$, ist ein Schlüsselkonzept mit vielen Facetten. Diese Fragen helfen dir, die Grundlagen zu festigen:

(a) **Definition und Umkehrbeziehung:**

- Erkläre mit eigenen Worten, was $\log_b(y) = x$ bedeutet. Was ist die spezielle Basis beim natürlichen Logarithmus $\ln(x)$?
- Warum muss gelten: $e^{\ln(x)} = x$ (für $x > 0$) und $\ln(e^x) = x$ (für alle $x \in \mathbb{R}$)? Erläutere dies am Konzept der Umkehrfunktion.
- Begründe, warum $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$ sein muss.

(b) **Definitionsbereich und Graph:**

- Warum ist der Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \ln(x)$ auf positive reelle Zahlen ($x > 0$) beschränkt? Wie hängt das mit dem Wertebereich der $e$-Funktion zusammen?
- Beschreibe die wesentlichen Unterschiede im Graphenverlauf zwischen $g(x) = e^x$ und $f(x) = \ln(x)$ bezüglich Monotonie, Krümmung und Asymptoten. Wie kommt die geometrische Beziehung (Spiegelung an $y = x$) zustande?

(c) **Logarithmengesetze anwenden und verstehen:**

- Die Regel $\ln(u^r) = r \cdot \ln(u)$ ist besonders nützlich beim Lösen von Exponentialgleichungen. Erkläre, warum diese Regel das 'Herunterholen' des Exponenten ermöglicht.
- Ist die Aussage $\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$ korrekt? Überprüfe mit einem Zahlenbeispiel und vergleiche mit der Produktregel $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.

**Aufgabe 8.7 Checkliste: Analysis mit der ln-Funktion – Ableiten, Integrieren, Anwenden**

Die ln-Funktion und ihre Ableitung $1/x$ tauchen in vielen analytischen Zusammenhängen auf.

(a) **Ableiten mit** $\ln(x)$**:**

- Die Ableitung von $\ln(x)$ ist $1/x$. Was sagt dir das über die Steigung des Graphen von $\ln(x)$ für $x$-Werte nahe Null (aber $x > 0$) im Vergleich zu sehr großen $x$-Werten?
- Bei der Ableitung von $\ln(h(x))$ lautet die Regel $\frac{h'(x)}{h(x)}$. Erkläre, wie die Kettenregel hier

zur Anwendung kommt ($g(u) = \ln u \implies g'(u) = 1/u$).

(b) **Integrieren mit** $\ln(x)$**:**

- Warum schreiben wir $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$ mit Betragsstrichen, obwohl der Definitionsbereich von $\ln(x)$ selbst $x > 0$ ist?
- Für die Berechnung von $\int \ln(x)\, dx$ wurde die partielle Integration mit $u'(x) = 1$ und $v(x) = \ln(x)$ genutzt. Warum wäre die Wahl $u'(x) = \ln(x)$ und $v(x) = 1$ nicht zielführend, wenn du $\int \ln(x)\, dx$ noch nicht kennst?
- Erkläre, warum das Integral $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx$ auf $\ln|g(x)| + C$ führt. Welche Substitution steckt dahinter?

(c) **Kurvendiskussion und Grenzwerte:**

- Wenn du eine Funktion wie $f(x) = x^2 \ln(x)$ untersuchst: Welcher der beiden Faktoren ($x^2$ oder $\ln(x)$) 'dominiert' das Verhalten für $x \to \infty$? Und für $x \to 0^+$? (Denke an die bekannten Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ und $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$).
- Welche Schritte sind bei einer Kurvendiskussion einer Funktion mit $\ln(x)$ besonders wichtig im Hinblick auf den Definitionsbereich?

# 9 Trigonometrische Funktionen – Die Mathematik der Schwingungen und Wellen

Nachdem wir uns mit Polynomen, Exponential- und Logarithmusfunktionen beschäftigt haben, wenden wir uns nun einer weiteren wichtigen Funktionsklasse zu: den **trigonometrischen Funktionen**. Die bekanntesten Vertreter sind **Sinus** ($\sin x$), **Kosinus** ($\cos x$) und **Tangens** ($\tan x$).

**Was du in diesem Kapitel lernen wirst:**

Nachdem du dieses Kapitel durchgearbeitet hast, wirst du in der Lage sein:

- die Bedeutung des **Bogenmaßes** für Winkel zu verstehen und es sicher im Zusammenhang mit trigonometrischen Funktionen anzuwenden sowie zwischen Grad- und Bogenmaß umzurechnen.
- die Funktionen **Sinus** ($\sin x$) und **Kosinus** ($\cos x$) am Einheitskreis zu definieren und ihre grundlegenden Eigenschaften (Definitions- und Wertebereich, Periode $2\pi$, Nullstellen, Extremstellen, Symmetrie) sowie den trigonometrischen Pythagoras ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) zu kennen und zu nutzen.
- die **Tangensfunktion** ($\tan x$) als Quotient aus Sinus und Kosinus zu definieren und ihre wesentlichen Eigenschaften (Definitionsbereich mit Polstellen, Wertebereich, Periode $\pi$, Nullstellen, Symmetrie) zu beschreiben.
- die **Ableitungen** der Grundfunktionen $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ und $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ zu kennen und anzuwenden.
- die grundlegenden **Stammfunktionen** $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ und $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ zu bilden und für einfache bestimmte Integrale zu nutzen.
- **transformierte Sinus- und Kosinusfunktionen** der Form $f(x) = A \sin(B(x - C)) + D$ zu analysieren, indem du die Bedeutung der Parameter für Amplitude, Periode, Phasen- und y-Verschiebung interpretierst, und solche Funktionen zu skizzieren oder aus Graphen abzuleiten.
- die allgemeinen **Ableitungsregeln** (Produkt-, Quotienten- und Kettenregel) sicher auf Funktionen anzuwenden, die trigonometrische Terme enthalten (oft in Kombination mit Polynomen oder Exponentialfunktionen).
- eine vollständige **Kurvendiskussion** für Funktionen mit trigonometrischen Anteilen durchzuführen, um deren Graphen und charakteristische Merkmale zu analysieren.
- die fundamentale Rolle trigonometrischer Funktionen bei der Modellierung **periodischer Vorgänge** und Schwingungen zu verstehen.

Du wirst somit die Mathematik der Wellen und Zyklen meistern und dein Repertoire an analysierbaren Funktionen entscheidend erweitern!

Diese Funktionen sind unerlässlich, um **periodische Vorgänge** zu beschreiben – also Phänomene, die sich in regelmäßigen Abständen wiederholen. Denk zum Beispiel an:

- Schwingungen eines Pendels oder einer Gitarrensaite.
- Wellenbewegungen wie Wasserwellen oder Schallwellen.
- Kreisbewegungen, z.B. die Position eines Punktes auf einem sich drehenden Rad.
- Jahreszeitliche Schwankungen von Temperaturen oder Tageslängen.
- Wechselstrom in der Elektrotechnik.

Die trigonometrischen Funktionen sind die mathematische Sprache, um diese periodischen Muster präzise zu erfassen und zu analysieren.

**Winkel im Bogenmaß – Die 'natürliche' Einheit für Winkel**

In der höheren Mathematik und besonders bei der Analysis von trigonometrischen Funktionen werden Winkel fast ausschließlich im **Bogenmaß** (Radiant, abgekürzt rad) angegeben, nicht im Gradmaß (z.B. $30°, 90°, 360°$). **Was ist das Bogenmaß?** Stell dir einen Kreis mit Radius $r = 1$ vor (den Einheitskreis). Das Bogenmaß eines Winkels $\alpha$ ist die Länge des Kreisbogens, den dieser Winkel auf dem Einheitskreis 'ausschneidet'.

- Ein Vollkreis hat 360°. Der Umfang des Einheitskreises ist $U = 2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$. Also entspricht 360° einem Bogenmaß von $2\pi$.
- Daraus folgt: $180° \widehat{=} \pi$ rad
- $90° \widehat{=} \frac{\pi}{2}$ rad
- $60° \widehat{=} \frac{\pi}{3}$ rad
- $45° \widehat{=} \frac{\pi}{4}$ rad
- $30° \widehat{=} \frac{\pi}{6}$ rad

**Umrechnung:**

- Gradmaß in Bogenmaß: Bogenmaß = Gradmaß $\cdot \frac{\pi}{180°}$
- Bogenmaß in Gradmaß: Gradmaß = Bogenmaß $\cdot \frac{180°}{\pi}$

Wenn bei trigonometrischen Funktionen keine Einheit angegeben ist (z.B. $\sin(2)$), ist immer das Bogenmaß gemeint! Die Ableitungsregeln, die wir kennenlernen werden, gelten nur, wenn der Winkel im Bogenmaß gegeben ist.

## 9.1 Sinus ($\sin x$) und Kosinus ($\cos x$) – Die Grundpfeiler

Die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ sind die fundamentalsten trigonometrischen Funktionen.

### 9.1.1 Geometrische Bedeutung am Einheitskreis

Eine anschauliche Definition von Sinus und Kosinus erhält man am **Einheitskreis** (Kreis mit Radius $r = 1$ um den Ursprung eines Koordinatensystems). Betrachtet man einen Winkel $\alpha$ (im Bogenmaß), der von der positiven x-Achse gegen den Uhrzeigersinn gemessen wird, so schneidet der freie Schenkel des Winkels den Einheitskreis in einem Punkt $P(x_P|y_P)$. Dann gilt:

- $\cos(\alpha) = x_P$ (die x-Koordinate des Punktes $P$)
- $\sin(\alpha) = y_P$ (die y-Koordinate des Punktes $P$)

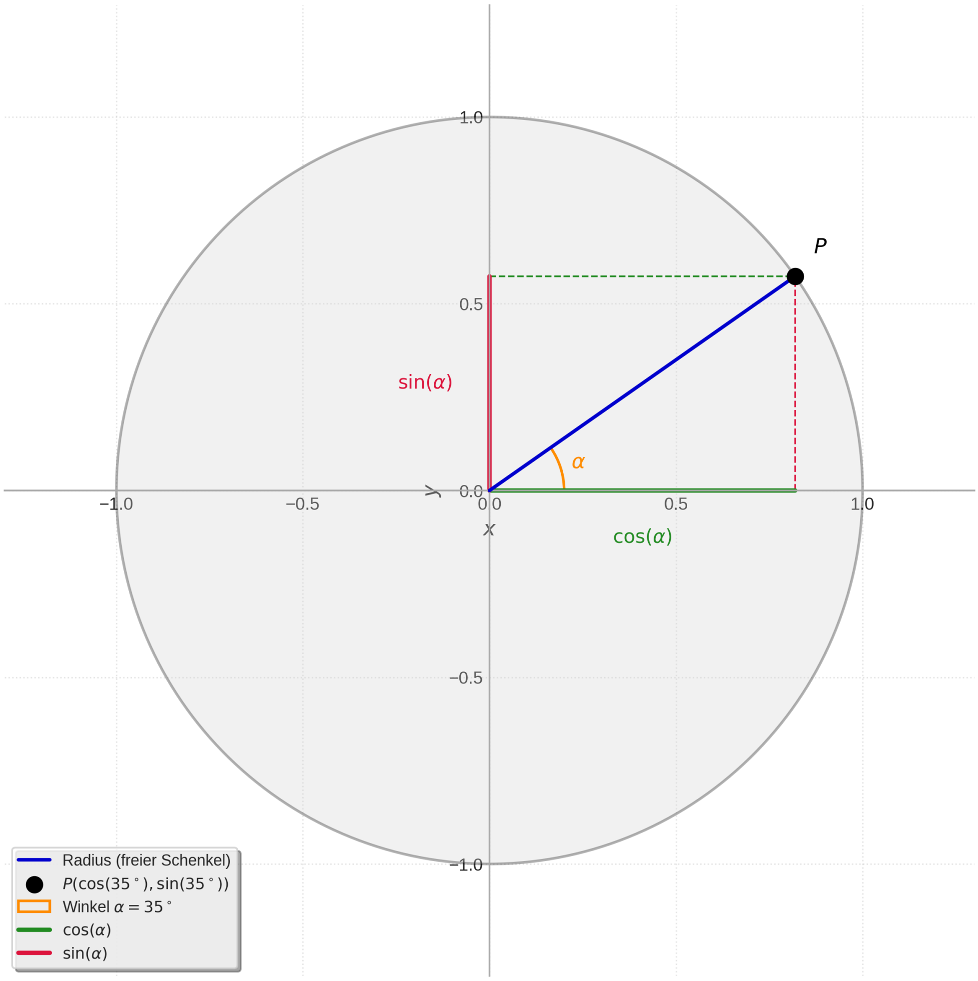


Abbildung 9.1: Definition von Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Aus dieser Definition am Einheitskreis ergeben sich viele wichtige Eigenschaften.

### 9.1.2 Graphen und Eigenschaften von $\sin(x)$ und $\cos(x)$

**ϟ *9.1 Eigenschaften von $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$***

- **Definitionsbereich:** $D_f = D_g = \mathbb{R}$ (man kann jeden reellen Winkel einsetzen).
- **Wertebereich:** $W_f = W_g = [-1, 1]$ (die Funktionswerte liegen immer zwischen -1 und 1, inklusive).
- **Periodizität:** Beide Funktionen sind periodisch mit der **Periode** $2\pi$. Das bedeutet, ihre Werte wiederholen sich alle $2\pi$:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \text{und} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

- **Nullstellen:**
  - $\sin(x) = 0$ für $x = k \cdot \pi$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ (alle ganzen Zahlen). Also bei $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
  - $\cos(x) = 0$ für $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, wobei $k \in \mathbb{Z}$. Also bei $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
- **Extremstellen:**
  - $\sin(x)$ hat Maxima $(+1)$ bei $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ und Minima $(-1)$ bei $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.
  - $\cos(x)$ hat Maxima $(+1)$ bei $x = 2k\pi$ und Minima $(-1)$ bei $x = \pi + 2k\pi$.

- **Symmetrie:**
  - $\sin(x)$ ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**: $\sin(-x) = -\sin(x)$.
  - $\cos(x)$ ist **achsensymmetrisch zur y-Achse**: $\cos(-x) = \cos(x)$.
- **Zusammenhang:** Die Graphen von Sinus und Kosinus sind zueinander phasenverschoben: $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (Kosinus ist Sinus um $\pi/2$ nach links verschoben). $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ (Sinus ist Kosinus um $\pi/2$ nach rechts verschoben).
- **Wichtiger Grundzusammenhang (Trigonometrischer Pythagoras):** Für jeden Winkel $x$ gilt:
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$
(Das folgt direkt aus dem Satz des Pythagoras am Einheitskreis, da $x_P^2 + y_P^2 = r^2 = 1^2$).

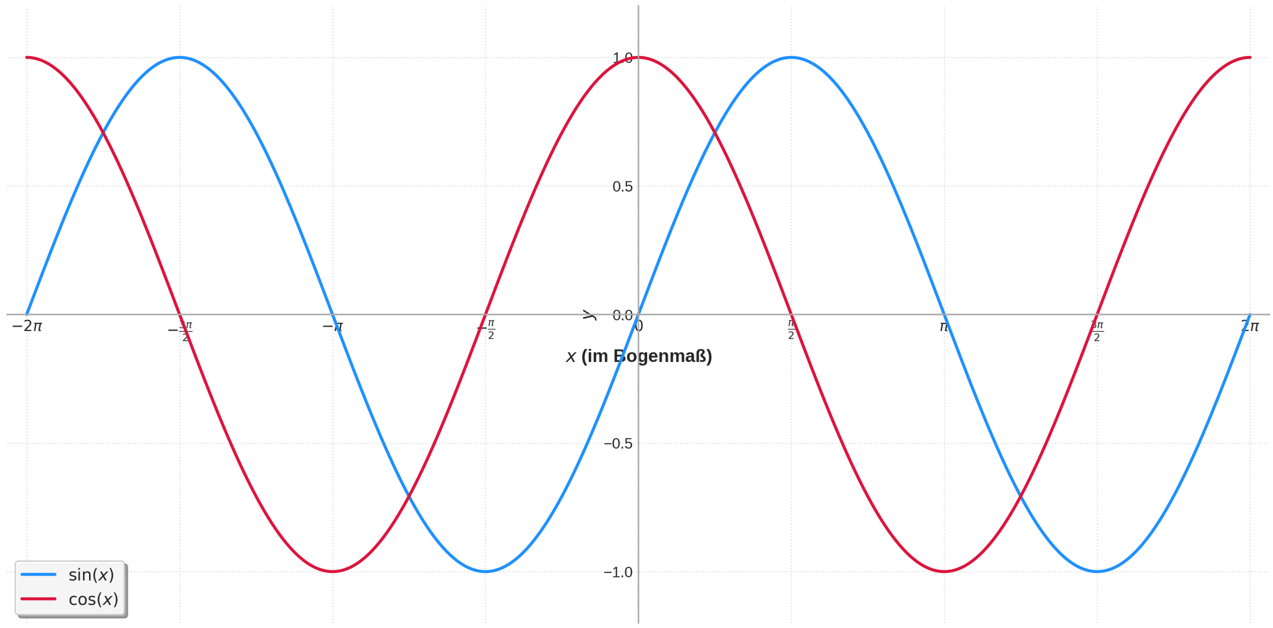


Abbildung 9.2: Graphen der Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$

**_Tipp 9.1: Pythagoras im Test – Eine kleine Selbstüberprüfung_**

Du hast gerade gelernt, dass für jeden Winkel $x$ gilt: $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$. Überlege einmal: Könnte es einen Winkel $x$ geben, für den gleichzeitig $\sin(x) = 0,8$ und $\cos(x) = 0,7$ gilt? Überprüfe dies, indem du die Werte in die Gleichung einsetzt. Was stellst du fest? (Zur Erinnerung: $\sin^2(x)$ bedeutet $(\sin x)^2$.)

### 9.1.3 Ein tieferer Einblick: Sinus und Kosinus als unendliche Reihen (Taylorreihen)

Eine faszinierende Eigenschaft vieler Funktionen in der Mathematik ist, dass sie als unendliche Summen von Potenzfunktionen dargestellt werden können – sogenannte **Taylorreihen** (oder Maclaurinreihen, wenn die Entwicklung um den Punkt $x = 0$ erfolgt). Für Sinus und Kosinus sehen diese Reihen besonders elegant aus:

**Taylorreihen für Sinus und Kosinus**

Für alle reellen Zahlen $x$ (im Bogenmaß!) gilt:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Dabei bedeutet $k!$ (gelesen 'k Fakultät') das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis $k$: $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k$. (Und $0! = 1$). Zum Beispiel: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

**Was bedeuten diese Reihen?**

- Sie zeigen, dass Sinus und Kosinus im Grunde 'unendlich lange Polynome' sind.
- Man kann mit diesen Reihen die Werte von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für jedes $x$ beliebig genau annähern, indem man genügend Glieder der Summe berücksichtigt. So berechnen auch Taschenrechner diese Werte!
- Aus diesen Reihen lassen sich viele Eigenschaften der Funktionen ableiten, z.B. ihre Ableitungen.

Die Herleitung dieser Reihen ist fortgeschrittene Mathematik, aber ihre Existenz zu kennen, öffnet ein Fenster zu tieferen Zusammenhängen.

*Selbst-Check:* Setze $x = 0$ in die Reihen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ein. Was erhältst du? Vergleiche mit $\sin(0)$ und $\cos(0)$ vom Einheitskreis. (Antwort: $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$. Das passt!)

***Schon gewusst? $\pi$ aus dem Nichts? Eine unendliche Summe enthüllt die Kreiszahl!***

Die Kreiszahl $\pi \approx 3,14159\ldots$ ist dir sicher bekannt. Sie beschreibt das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser. Aber wie kommt man eigentlich auf diese unendlich vielen Nachkommastellen? Es gibt viele faszinierende Wege, $\pi$ zu berechnen, und einige davon haben Verbindungen zur Differential- und Integralrechnung!

Eine berühmte Methode verwendet eine unendliche Summe, die mit dem Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (einem der 'Erfinder' der Differentialrechnung) in Verbindung gebracht wird, aber auch schon früher in Indien bekannt war:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

Das ist die sogenannte **Leibniz-Reihe**. Sie besagt, dass man sich dem Wert von $\pi/4$ immer genauer annähert, je mehr Terme dieser abwechselnden (alternierenden) Reihe man addiert und subtrahiert. Multipliziert man das Ergebnis mit 4, erhält man eine Annäherung für $\pi$.

**Wo steckt da die Verbindung zur Analysis?** Diese Reihe ist eigentlich ein Spezialfall der Taylorreihe für die Funktion $f(x) = \arctan(x)$ (Arkustangens, die Umkehrfunktion des Tangens), ausgewertet an der Stelle $x = 1$, denn $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Die Taylorreihe einer Funktion ist eine Darstellung dieser Funktion als unendliche Summe von Potenztermen, wobei die Koeffizienten dieser Terme durch die **Ableitungen** der Funktion an einem bestimmten Punkt bestimmt werden.

Man kann zeigen:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Setzt man hier $x = 1$ ein, erhält man genau die Leibniz-Reihe für $\frac{\pi}{4}$.

Die Herleitung solcher unendlicher Reihen für Funktionen ist ein wichtiges Anwendungsfeld der Differential- (und auch der Integral-) rechnung. Sie zeigt, wie man komplexe Zahlen wie $\pi$ oder

Funktionswerte durch einfachere Bausteine (Potenzen) annähern und berechnen kann. Auch wenn diese spezielle Reihe für die praktische Berechnung von $\pi$ nicht sehr schnell konvergiert (man braucht viele Terme für eine gute Genauigkeit), ist sie ein wunderschönes Beispiel für die tiefen Verbindungen in der Mathematik!

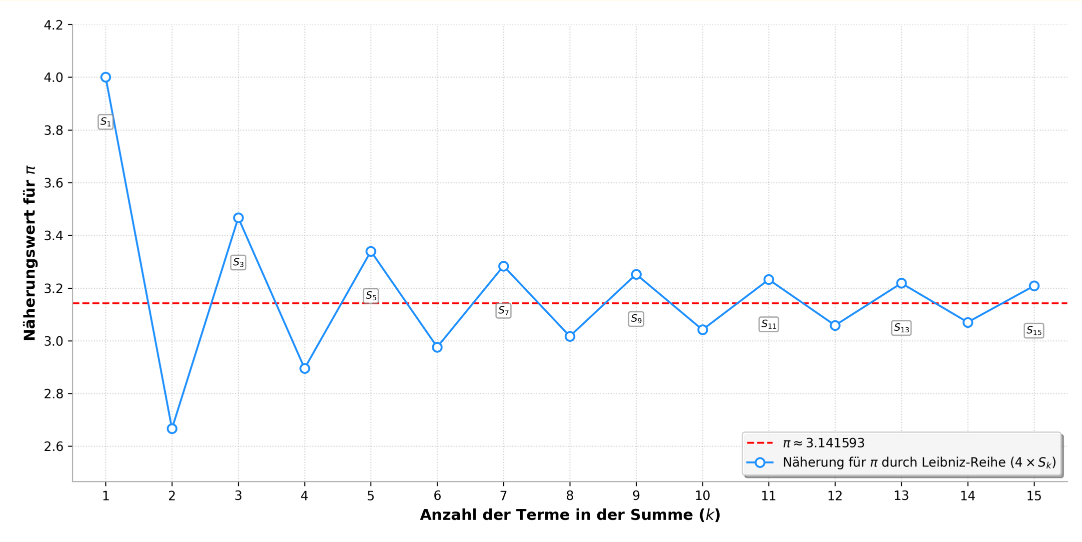


Abbildung 9.3: Annäherung an $\pi$ durch die Leibniz-Reihe (konzeptionelle Darstellung)

### 9.1.4 Ableitungen von Sinus und Kosinus

Eine der schönsten Symmetrien in der Differentialrechnung findet sich bei den Ableitungen von Sinus und Kosinus.

**Beobachtung: Steigung von $\sin x$ und Werte von $\cos x$**

Bevor wir die Ableitungsregeln für Sinus und Kosinus formal kennenlernen, lass uns eine kleine Beobachtung am Graphen von $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ machen (siehe Abbildung 9.2):

- Wo hat der Graph von $\sin(x)$ seine Hoch- und Tiefpunkte? Welche Steigung hat der Graph an diesen Stellen offensichtlich? Welchen Wert hat $\cos(x)$ an genau diesen x-Stellen?
- Wo schneidet der Graph von $\sin(x)$ die x-Achse mit positiver Steigung (z.B. bei $x = 0, 2\pi, \ldots$)? Welchen Wert hat $\cos(x)$ dort? Wo ist die Steigung von $\sin(x)$ am größten?
- Wo schneidet der Graph von $\sin(x)$ die x-Achse mit negativer Steigung (z.B. bei $x = \pi, 3\pi, \ldots$)? Welchen Wert hat $\cos(x)$ dort? Wo ist die Steigung von $\sin(x)$ am stärksten negativ (also betragsmäßig am größten, aber negativ)?

Vielleicht erkennst du schon ein Muster im Zusammenhang zwischen der Steigung von $\sin(x)$ und den Funktionswerten von $\cos(x)$. Genau diesen Zusammenhang werden wir mit der Ableitung präzisieren!

**ϟ *9.2 Ableitungen von* $\sin(x)$ *und* $\cos(x)$**

Für Winkel $x$ im Bogenmaß gilt:

- Die Ableitung von $f(x) = \sin(x)$ ist $f'(x) = \cos(x)$.
$$(\sin x)' = \cos x$$
- Die Ableitung von $g(x) = \cos(x)$ ist $g'(x) = -\sin(x)$.
$$(\cos x)' = -\sin x$$

**Tipp 9.2: Ableitungen aus den Taylorreihen (für Interessierte)**

Wenn man die Taylorreihen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ Glied für Glied mit der Potenzregel ableitet (was bei Potenzreihen unter bestimmten Bedingungen erlaubt ist), erhält man genau diese Ableitungsregeln! Beispiel für Sinus: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ $(\sin(x))' = (x)' - (\frac{x^3}{6})' + (\frac{x^5}{120})' - \dots$ $= 1 - \frac{3x^2}{6} + \frac{5x^4}{120} - \dots = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \cos(x)$!

Mit diesen Ableitungen können wir nun auch die höheren Ableitungen bestimmen:

- $f(x) = \sin(x)$
- $f'(x) = \cos(x)$
- $f''(x) = (\cos x)' = -\sin(x)$
- $f'''(x) = (-\sin x)' = -(\cos x) = -\cos(x)$
- $f^{(4)}(x) = (-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin(x)$

Nach der vierten Ableitung wiederholt sich der Zyklus! Das Gleiche gilt für $\cos(x)$.

### 9.1.5 Stammfunktionen von Sinus und Kosinus

Aus den Ableitungsregeln ergeben sich direkt die Stammfunktionen:

**ϟ 9.3 Stammfunktionen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$**

- Eine Stammfunktion von $f(x) = \cos(x)$ ist $F(x) = \sin(x)$, denn $(\sin x)' = \cos x$. Also:
$$\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + C$$
- Eine Stammfunktion von $g(x) = \sin(x)$ ist $G(x) = -\cos(x)$, denn $(-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$. Also:
$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + C$$

Achte auf das Minuszeichen bei der Stammfunktion von $\sin(x)$!

**Beispiel 9.1 Ableiten und Integrieren mit $\sin x$ und $\cos x$**

1. Leite $f(x) = 3\sin(x) - 2\cos(x) + x^2$ ab. $f'(x) = (3\sin x)' - (2\cos x)' + (x^2)'$ $f'(x) = 3\cos(x) - 2(-\sin x) + 2x = 3\cos(x) + 2\sin(x) + 2x$.
2. Bestimme $\int(4\cos(x) + \sin(x) - 2)\, dx$. $\int(4\cos(x) + \sin(x) - 2)\, dx = 4\int\cos(x)dx + \int\sin(x)dx - \int 2dx = 4\sin(x) + (-\cos x) - 2x + C = 4\sin(x) - \cos(x) - 2x + C$.

**Aufgabe 9.1 Erste Übungen mit $\sin x$ und $\cos x$**

1. Bilde die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen:
   - $f_1(x) = -5\cos(x) + 2\sin(x) - e^x$
   - $f_2(x) = \sin(x) + \ln(x)$ (Beachte den Definitionsbereich!)
2. Bestimme die Menge aller Stammfunktionen:
   - $g_1(x) = \frac{1}{2}\sin(x) - 3\cos(x) + x^3$
   - $g_2(x) = \cos(x) - \frac{1}{x}$

3. Berechne das bestimmte Integral $\int_0^\pi \sin(x)\,dx$. Was stellt dieser Wert geometrisch dar? Skizziere den Graphen von $\sin(x)$ im Intervall $[0, 2\pi]$ und markiere die berechnete Fläche.
4. Was ist $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx$? Erkläre das Ergebnis anhand der Symmetrie und der orientierten Fläche.

## 9.2 Transformationen von Sinus- und Kosinusfunktionen

Die Grundfunktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ können durch verschiedene Parameter verändert (transformiert) werden, um eine größere Vielfalt an periodischen Vorgängen zu modellieren. Die allgemeine Form einer transformierten Sinusfunktion (analog für Kosinus) ist:

$$f(x) = A \cdot \sin(B(x - C)) + D$$

oder auch oft geschrieben als:

$$f(x) = A \cdot \sin(Bx - \varphi) + D \quad \text{mit } \varphi = B \cdot C$$

**ϟ *9.4 Parameter der allgemeinen Sinusfunktion* $f(x) = A\sin(B(x - C)) + D$**

- **Amplitude $|A|$:**
  - Der Faktor $A$ streckt oder staucht den Graphen in y-Richtung.
  - $|A|$ ist die **Amplitude**, d.h. die maximale Auslenkung von der Mittellage. Der Wertebereich ist $[D - |A|, D + |A|]$.
  - Wenn $A < 0$, wird der Graph zusätzlich an der Mittellage (Gerade $y = D$) gespiegelt.
- **Periode $P$ (beeinflusst durch $B$):**
  - Der Faktor $B$ beeinflusst die Periode der Schwingung. $B$ wird auch Kreisfrequenz genannt (oft als $\omega$ bezeichnet).
  - Die **Periode** $P$ (die Länge einer vollständigen Schwingung) berechnet sich als:

    $$P = \frac{2\pi}{|B|}$$

  - Wenn $|B| > 1$, wird die Periode kürzer (die Schwingung ist 'schneller', gestaucht in x-Richtung).
  - Wenn $0 < |B| < 1$, wird die Periode länger (die Schwingung ist 'langsamer', gestreckt in x-Richtung).
  - *Zum Weiterdenken:* Was passiert anschaulich mit der Periode $P$, wenn der Betrag von $B$ sehr groß wird (z.B. $|B| = 100$)? Die Schwingung wird dann sehr ... (schnell/kurz oder langsam/lang)? Und was passiert, wenn $|B|$ sehr klein (aber positiv) wird (z.B. $|B| = 0.1$)? Die Schwingung wird dann sehr ...? Passt das zu deiner Vorstellung von 'gestaucht' bzw. 'gestreckt' in x-Richtung?
- **Verschiebung in x-Richtung (Phasenverschiebung $C$):**
  - Der Parameter $C$ bewirkt eine Verschiebung des Graphen entlang der x-Achse.
  - Wenn $C > 0$ (also im Term $(x - C)$), wird der Graph um $C$ Einheiten nach **rechts** verschoben.
  - Wenn $C < 0$ (also im Term $(x + |C|)$), wird der Graph um $|C|$ Einheiten nach **links** verschoben.

– Diese Verschiebung wird auch **Phasenverschiebung** genannt.

- **Verschiebung in y-Richtung (Mittellage $D$):**
  - Der Parameter $D$ verschiebt den gesamten Graphen um $D$ Einheiten in y-Richtung.
  - Die Gerade $y = D$ ist die neue **Mittellage** oder Ruhelage der Schwingung.

Die gleichen Interpretationen gelten für die Kosinusfunktion $f(x) = A\cos(B(x - C)) + D$.

**Beispiel 9.2 Analyse einer transformierten Sinusfunktion**

Betrachte die Funktion $f(x) = 2\sin\left(0.5(x - \frac{\pi}{2})\right) + 1$.

- **Amplitude $A$:** $A = 2$. Die maximale Auslenkung von der Mittellage ist 2.
- **Parameter $B$ und Periode $P$:** $B = 0.5$. Die Periode ist $P = \frac{2\pi}{|0.5|} = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$. Die Schwingung ist also langsamer als die Grundschwingung.
- **Verschiebung in x-Richtung $C$:** $C = \frac{\pi}{2}$. Der Graph der Sinusfunktion $2\sin(0.5x)$ wird um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben.
- **Verschiebung in y-Richtung $D$:** $D = 1$. Die Mittellage ist die Gerade $y = 1$.
- **Wertebereich:** Die Mittellage ist $y = 1$, die Amplitude ist 2. Also schwingt die Funktion zwischen $1 - 2 = -1$ und $1 + 2 = 3$. Der Wertebereich ist $[-1, 3]$.

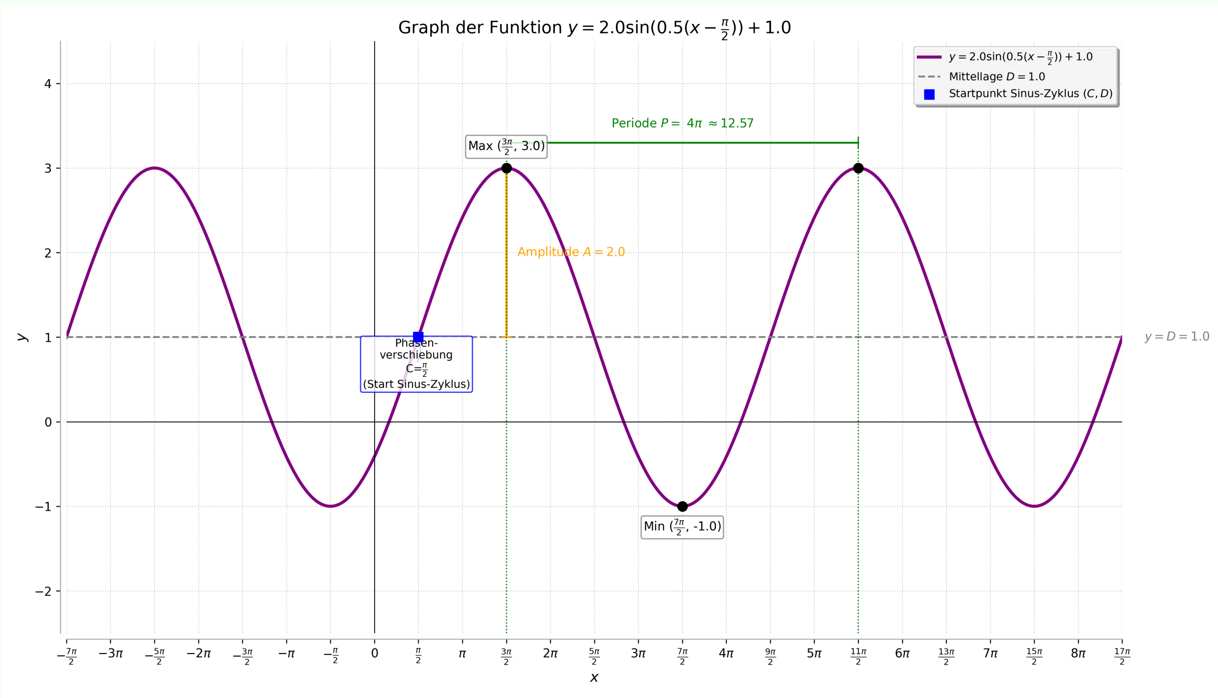


Abbildung 9.4: Graph der transformierten Sinusfunktion.

**Achtung Stolperstein! 9.1: Trigonometrische Funktionen – Typische Fallstricke**

Beim Rechnen mit Sinus, Kosinus und Co. gibt es einige typische Fehlerquellen:

- **Gradmaß vs. Bogenmaß:** Die Ableitungs- und Integrationsregeln $(\sin x)' = \cos x$ etc. gelten **nur**, wenn $x$ im Bogenmaß angegeben ist! Viele Taschenrechner sind standardmäßig auf Gradmaß (DEG) eingestellt. Für die Analysis muss er auf Radiant (RAD) umgestellt sein, sonst sind numerische Ergebnisse falsch.

- **Vorzeichen bei Ableitungen/Stammfunktionen:** Merke dir gut: $(\cos x)' = -\sin x$ und $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$. Diese Minuszeichen werden oft vergessen!
- **Parameter bei Transformationen falsch interpretiert:**
  - Bei $A\sin(B(x - C)) + D$: Die Periode ist $P = \frac{2\pi}{|B|}$, nicht $2\pi \cdot B$ oder Ähnliches.
  - Die Phasenverschiebung bei $B(x - C)$ ist $C$ nach rechts. Steht z.B. $\sin(2x - \pi)$, musst du erst 2 ausklammern zu $\sin(2(x - \frac{\pi}{2}))$, um die korrekte Phasenverschiebung $C = \frac{\pi}{2}$ nach rechts zu erkennen.
- **Definitionsbereich von $\tan x$ ignoriert:** $\tan x$ ist nicht für $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ definiert. An diesen Stellen sind Polstellen (senkrechte Asymptoten).
- **Verwechslung von $\sin^2 x$ mit $\sin(x^2)$:** $\sin^2 x = (\sin x)^2$, während $\sin(x^2)$ bedeutet, dass zuerst $x$ quadriert und dann der Sinus davon genommen wird. Beim Ableiten erfordern sie unterschiedliche Anwendungen der Kettenregel.

Achte auf diese Punkte, um typische Fehler zu vermeiden!

**Aufgabe 9.2 Transformierte Sinus- und Kosinusfunktionen**

1. Bestimme für die folgenden Funktionen Amplitude, Periode, Phasenverschiebung (Richtung und Betrag) und Verschiebung in y-Richtung. Gib den Wertebereich an.
   - $f_1(x) = 3\cos(2x - \pi) - 1$ (Tipp: Klammere zuerst den Faktor vor dem $x$ in der Klammer aus, um die Form $B(x - C)$ zu erhalten: $2x - \pi = 2(x - \frac{\pi}{2})$)
   - $f_2(x) = -0.5\sin(\pi x + \frac{\pi}{4}) + 2$
   - $f_3(t) = 100\cos(2\pi \cdot 50t)$ (Modell für Wechselspannung)
2. Skizziere den Graphen von $g(x) = \sin(2(x + \frac{\pi}{4}))$ für eine Periode. Beginne mit dem Graphen von $\sin(x)$ und führe die Transformationen schrittweise durch.
3. Gegeben ist ein Graph einer Sinusfunktion. Bestimme aus dem Graphen die Parameter $A, B, C, D$ und stelle eine mögliche Funktionsgleichung auf.

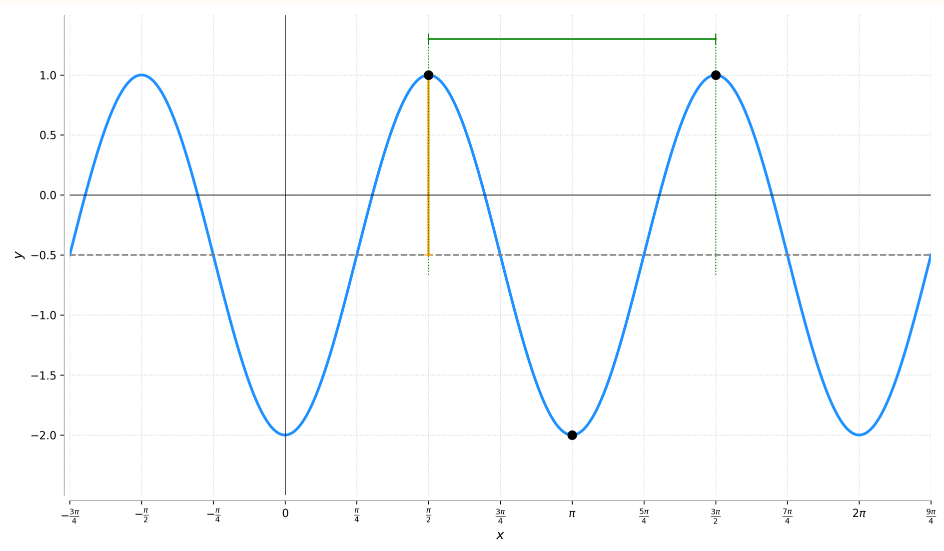


Abbildung 9.5: Graph zum Ablesen der Parameter

## 9.3 Die Tangensfunktion ($\tan x$) und Kotangensfunktion ($\cot x$)

Neben Sinus und Kosinus gibt es weitere wichtige trigonometrische Funktionen. Die bekannteste davon ist die Tangensfunktion.

**ϟ *9.5 Definition der Tangensfunktion ($\tan x$)***

Die **Tangensfunktion** ist definiert als das Verhältnis von Sinus zu Kosinus:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

**Geometrische Deutung am Einheitskreis:** Die Tangensfunktion entspricht der y-Koordinate des Punktes, an dem der verlängerte freie Schenkel des Winkels $x$ die Tangente an den Einheitskreis im Punkt (1|0) schneidet. Sie kann auch als Steigung des freien Schenkels des Winkels $x$ interpretiert werden.

**Eigenschaften von $f(x) = \tan(x)$:**

- **Definitionsbereich:** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Der Tangens ist nicht definiert, wenn $\cos(x) = 0$ ist (also an den Nullstellen des Kosinus), da man nicht durch Null teilen darf. An diesen Stellen hat der Graph **senkrechte Asymptoten**.
- **Wertebereich:** $W_f = \mathbb{R}$ (der Tangens kann jeden reellen Wert annehmen).
- **Periodizität:** Die Tangensfunktion ist periodisch mit der **Periode** $\pi$.

  $$\tan(x + \pi) = \tan(x)$$

  (Beachte: kürzere Periode als Sinus und Kosinus!)
- **Nullstellen:** $\tan(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$. Also für $x = k \cdot \pi$, wobei $k \in \mathbb{Z}$.
- **Symmetrie:** $\tan(x)$ ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**: $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan(x)$.
- **Monotonie:** Die Tangensfunktion ist in jedem ihrer Definitionsintervalle streng monoton steigend.

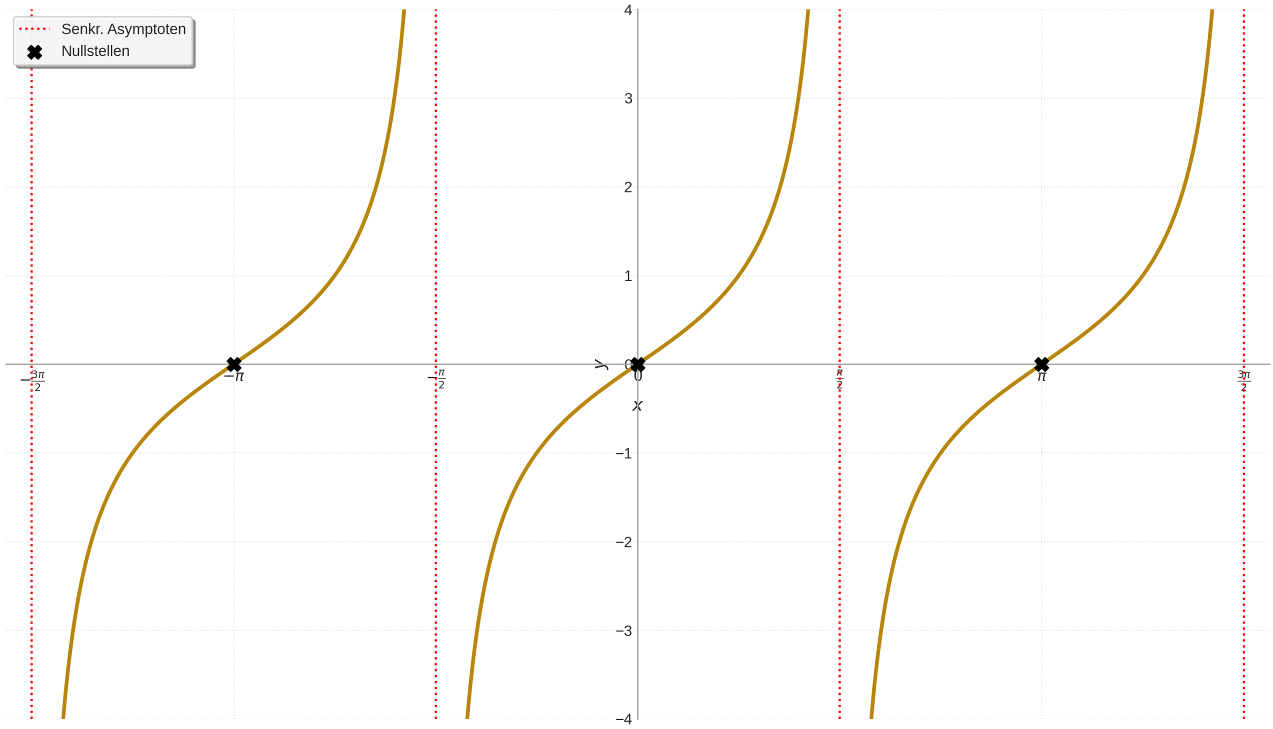


Abbildung 9.6: Graph der Funktion $f(x) = \tan(x)$

**Die Kotangensfunktion** ($\cot x$)

Die **Kotangensfunktion** ist definiert als $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$. Sie ist nicht definiert, wenn $\sin(x) = 0$ ist (also bei $x = k\pi$). Ihre Periode ist ebenfalls $\pi$. Der Kotangens spielt in der Schulmathematik oft eine geringere Rolle als der Tangens, ist aber in manchen Anwendungen nützlich.

### 9.3.1 Ableitungen von Tangens (und Kotangens)

Die Ableitung der Tangensfunktion können wir mit der Quotientenregel herleiten.

***9.6 Ableitung von*** $\tan(x)$ ***und*** $\cot(x)$

- Die Ableitung von $f(x) = \tan(x)$ ist:

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

- Die Ableitung von $g(x) = \cot(x)$ ist:

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cot^2(x))$$

**Herleitung der Ableitung von** $\tan(x)$**:** Wir verwenden $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und die Quotientenregel $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$. Sei $u(x) = \sin(x) \implies u'(x) = \cos(x)$. Sei $v(x) = \cos(x) \implies v'(x) = -\sin(x)$. $(\tan x)' = \frac{(\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$. Mit dem trigonometrischen Pythagoras $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt: $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$. Alternative Form: $\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2(x)$.

**Aufgabe 9.3 Ableiten mit Tangens**

Bilde die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

1. $f(x) = 3\tan(x) - x$

2. $g(x) = x \cdot \tan(x)$ (Produktregel!)

3. $h(x) = \tan(2x+1)$ (Kettenregel! Äußere Funktion $\tan(u)$, innere $u = 2x+1$)

## 9.4 Anwendung der Ableitungsregeln auf trigonometrische Funktionen

Jetzt kombinieren wir Sinus, Kosinus (und Tangens) mit Polynomen oder anderen Funktionen und wenden unsere bekannten Ableitungsregeln (Produkt-, Quotienten-, Kettenregel) an.

**Beispiel 9.3 Kombinierte Ableitungsregeln mit trigonometrischen Funktionen**

1. **Produktregel:** $f(x) = x^2 \sin(x)$. $u(x) = x^2 \implies u'(x) = 2x$. $v(x) = \sin(x) \implies v'(x) = \cos(x)$. $f'(x) = u'v + uv' = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$.

2. **Quotientenregel:** $g(x) = \frac{\cos(x)}{x}$. (Für $x \neq 0$) $u(x) = \cos(x) \implies u'(x) = -\sin(x)$. $v(x) = x \implies v'(x) = 1$. $g'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{-\sin(x)\cdot x - \cos(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{-x\sin(x)-\cos(x)}{x^2}$.

3. **Kettenregel:** $h(x) = \sin(3x^2+2)$. Äußere Funktion: $a(u) = \sin(u) \implies a'(u) = \cos(u)$. Innere Funktion: $b(x) = 3x^2+2 \implies b'(x) = 6x$. $h'(x) = a'(b(x)) \cdot b'(x) = \cos(3x^2+2) \cdot 6x = 6x\cos(3x^2+2)$.

4. **Kombination:** $k(x) = e^x\cos(2x)$. (Produkt- und Kettenregel) $u(x) = e^x \implies u'(x) = e^x$. $v(x) = \cos(2x)$. Für $v'(x)$ brauchen wir die Kettenregel: Äußere: $\cos(u) \implies -\sin(u)$. Innere: $2x \implies 2$. Also $v'(x) = -\sin(2x)\cdot 2 = -2\sin(2x)$. $k'(x) = u'v + uv' = e^x\cos(2x) + e^x(-2\sin(2x)) = e^x(\cos(2x) - 2\sin(2x))$.

**Aufgabe 9.4 Ableiten trigonometrischer Funktionskombinationen**

Bilde die erste Ableitung der folgenden Funktionen und vereinfache, wenn möglich.

1. $f_1(x) = (x^3+1)\cos(x)$

2. $f_2(x) = \frac{\sin(x)}{e^x}$

3. $f_3(x) = \cos(x^2+1)$

4. $f_4(x) = \sin^2(x)$ (Tipp: $\sin^2(x) = (\sin x)^2$. Kettenregel!)

5. $f_5(x) = \ln(\cos x)$ (Für welche $x$ ist dies definiert?)

6. $f_6(x) = e^{\sin(x)}$

## 9.5 Kurvendiskussion von trigonometrischen Funktionen (Beispiele)

Die Kurvendiskussion von reinen Sinus- oder Kosinusfunktionen ist oft einfach, da ihre Eigenschaften (Periode, Amplitude, Nullstellen, Extrema) bekannt sind. Interessanter wird es, wenn sie mit anderen Funktionen kombiniert werden oder transformiert sind.

**Beispiel 9.4 Kurvendiskussion von $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ im Intervall $[0, 2\pi]$**

1. **Definitionsbereich:** $D_f = \mathbb{R}$, hier betrachten wir $[0, 2\pi]$.

2. **Symmetrie:** $f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin(x) + \cos(x)$. Weder achsen- noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

3. **Grenzwerte:** Nicht relevant für ein abgeschlossenes Intervall. Periodisch mit $P = 2\pi$.

4. **y-Achsenabschnitt:** $f(0) = \sin(0) + \cos(0) = 0 + 1 = 1$. $P_y(0|1)$.

5. **Nullstellen:** $f(x) = 0 \implies \sin(x) + \cos(x) = 0 \implies \sin(x) = -\cos(x)$. Wenn $\cos(x) \neq 0$, können wir teilen: $\frac{\sin x}{\cos x} = -1 \implies \tan(x) = -1$. Im Intervall $[0, 2\pi]$ sind die Lösungen $x_1 = \frac{3\pi}{4}$ und $x_2 = \frac{7\pi}{4}$. $N_1(\frac{3\pi}{4}|0)$, $N_2(\frac{7\pi}{4}|0)$.

6. **Erste Ableitung:** $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$.

7. **Extremstellen:** $f'(x) = 0 \implies \cos(x) - \sin(x) = 0 \implies \cos(x) = \sin(x)$. Wenn $\cos(x) \neq 0$: $1 = \tan(x)$. Im Intervall $[0, 2\pi]$ sind die Lösungen $x_{E1} = \frac{\pi}{4}$ und $x_{E2} = \frac{5\pi}{4}$.

8. **Zweite Ableitung:** $f''(x) = -\sin(x) - \cos(x) = -(\sin x + \cos x) = -f(x)$.

9. **Art der Extremstellen:** $f''(\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0 \implies$ Hochpunkt. $y_H = f(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \approx 1.414$. $H(\frac{\pi}{4}|\sqrt{2})$. $f''(\frac{5\pi}{4}) = -\sin(\frac{5\pi}{4}) - \cos(\frac{5\pi}{4}) = -(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} > 0 \implies$ Tiefpunkt. $y_T = f(\frac{5\pi}{4}) = \sin(\frac{5\pi}{4}) + \cos(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$. $T(\frac{5\pi}{4}|-\sqrt{2})$.

10. **Wendepunkte:** $f''(x_W) = 0 \implies -(\sin(x_W) + \cos(x_W)) = 0 \implies \sin(x_W) + \cos(x_W) = 0$. Das sind dieselben Stellen wie die Nullstellen der Funktion: $x_{W1} = \frac{3\pi}{4}, x_{W2} = \frac{7\pi}{4}$. Dritte Ableitung: $f'''(x) = -f'(x) = -(\cos x - \sin x) = \sin x - \cos x$. $f'''(\frac{3\pi}{4}) = \sin(\frac{3\pi}{4}) - \cos(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} \neq 0$. $f'''(\frac{7\pi}{4}) = \sin(\frac{7\pi}{4}) - \cos(\frac{7\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \neq 0$. Wendepunkte bei $W_1(\frac{3\pi}{4}|0)$ und $W_2(\frac{7\pi}{4}|0)$ (also die Nullstellen).

11. **Skizze:**

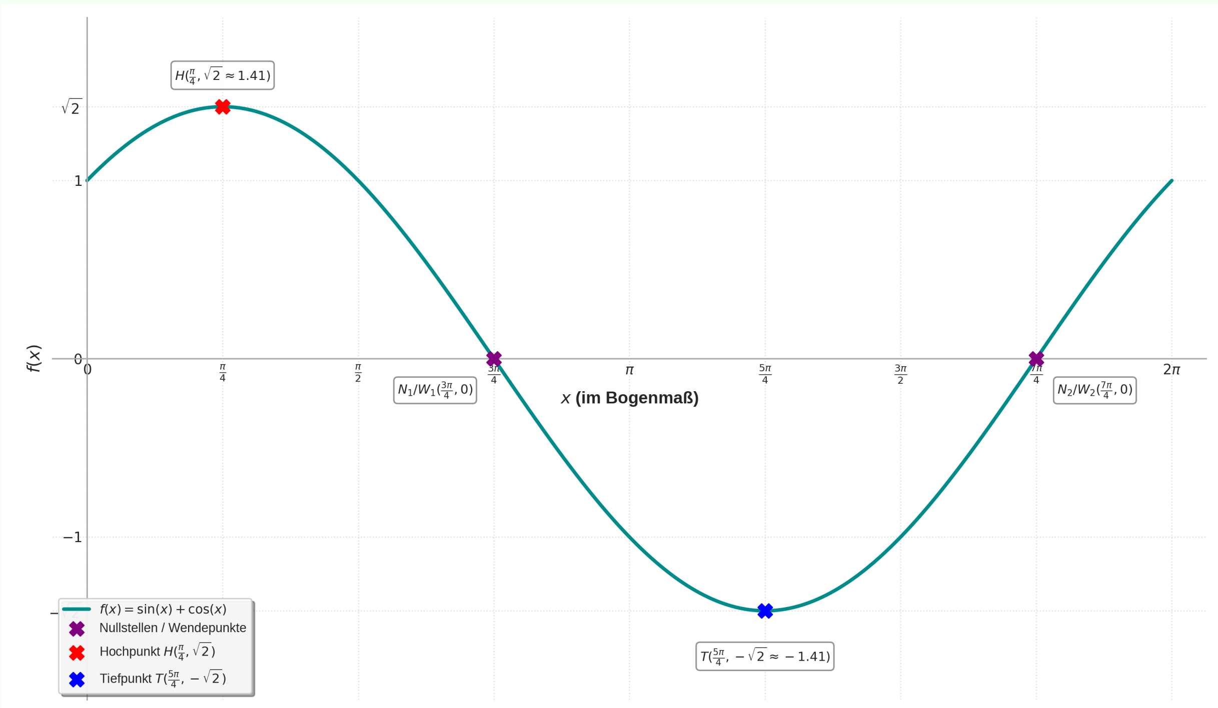


Abbildung 9.7: Graph von $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

**Aufgabe 9.5 Kurvendiskussionen mit trigonometrischen Funktionen**

Führe eine möglichst vollständige Kurvendiskussion für die folgenden Funktionen im angegebenen Intervall durch und skizziere den Graphen. Bestimme alle Eigenschaften (Definitionsbereich, Symmetrie, Verhalten an den Rändern, y-Achsenabschnitt, Ableitungen, Monotonie, Krümmung) analytisch, soweit dies mit den dir bekannten Methoden möglich ist.

Für Nullstellen oder die x-Koordinaten von Extrem- und Wendepunkten, deren exakte Berechnung auf **transzendente Gleichungen** führt (Gleichungen, die algebraisch nicht einfach nach der Variablen aufgelöst werden können, z.B. wenn $x$ sowohl innerhalb als auch außerhalb einer trigonometrischen Funktion steht), ist eine exakte algebraische Lösung oft nicht das Ziel.

- Versuche in solchen Fällen, die *Existenz* von Lösungen durch Überlegungen (z.B. Zwischenwertsatz, falls bekannt, oder Monotonie) zu begründen oder zumindest plausibel zu machen.
- Du kannst dann **digitale Werkzeuge** (wie Wolfram Alpha, GeoGebra oder einen grafikfähigen Taschenrechner) verwenden, um Näherungswerte für diese speziellen x-Werte zu ermitteln. Notiere in deiner Lösung, wenn du solche Näherungswerte verwendest, um deine Skizze zu vervollständigen und die Analyse abzurunden.

Der Schwerpunkt liegt auf dem Verständnis der analytischen Schritte und der Interpretation der Ergebnisse.

1. $f(x) = 2\sin(x) - x$ im Intervall $[0, 2\pi]$.

   ***Tipp 9.3: Umgang mit Nullstellen von $f(x)$***

   Du wirst feststellen, dass $x = 0$ eine Nullstelle ist. Die Gleichung $2\sin(x) = x$ für weitere Nullstellen ist transzendent. Du kannst grafisch argumentieren, dass es eine weitere Nullstelle im Intervall gibt (z.B. indem du $y = 2\sin x$ und $y = x$ vergleichst) oder deren ungefähre Lage mit einem digitalen Werkzeug bestimmen. Konzentriere dich ansonsten auf die exakte Berechnung der Ableitungen, Extrem- und Wendestellen, soweit möglich.

2. $g(x) = x \cdot \cos(x)$ im Intervall $[-\pi, \pi]$.

   ***Tipp 9.4: Umgang mit Extremstellen von $g(x)$***

   Die Nullstellen von $g(x)$ sind exakt bestimmbar. Die notwendige Bedingung für Extremstellen ($g'(x) = 0$) führt hier jedoch auf die transzendente Gleichung $\cos(x) = x\sin(x)$. Untersuche die Ableitung $g'(x)$ an markanten Punkten (z.B. Nullstellen von $g(x)$ oder Ränder des Intervalls), um Bereiche mit unterschiedlichem Monotonieverhalten zu identifizieren. Für die genaue Lage der Extremstellen kannst du Näherungswerte aus digitalen Werkzeugen verwenden und dies vermerken.

***Kurz & Knapp 9.1: Trigonometrische Funktionen – Das Wichtigste im Überblick***

- **Grundfunktionen:** $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
- **Bogenmaß:** Standard für Winkelangaben in der Analysis ($2\pi \widehat{=} 360°$).
- **Eigenschaften** $\sin(x), \cos(x)$**:**
  - Definitionsbereich: $\mathbb{R}$. Wertebereich: $[-1, 1]$.
  - Periode: $2\pi$.
  - Nullstellen: $\sin(x) = 0$ für $x = k\pi$; $\cos(x) = 0$ für $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
  - Symmetrie: $\sin(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, $\cos(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
  - Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
- **Eigenschaften** $\tan(x)$**:**

- Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$. Polstellen bei $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- Wertebereich: $\mathbb{R}$. Periode: $\pi$.
- Nullstellen: $x = k\pi$. Punktsymmetrisch zum Ursprung.

- **Wichtige Ableitungen:**
  - $(\sin x)' = \cos x$
  - $(\cos x)' = -\sin x$
  - $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- **Wichtige Stammfunktionen:**
  - $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
  - $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
  - $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$ (seltener benötigt)
- **Transformationen:** Funktionen der Form $A \cdot \sin(B(x - C)) + D$ beschreiben allgemeine Sinusschwingungen mit Amplitude $|A|$, Periode $P = \frac{2\pi}{|B|}$, Phasenverschiebung $C$ und Mittellage $D$.
- **Anwendungen:** Modellierung von periodischen Vorgängen, Schwingungen, Wellen.

**Aufgabe 9.6 Integrationsregeln im Mix**

Nachdem du nun vielfältige Funktionen und Integrationstechniken kennengelernt hast, soll diese Aufgabe dein Verständnis und deine Fertigkeiten bei der Kombination verschiedener Regeln prüfen. Berechne die folgenden unbestimmten Integrale. Gib an, welche Methode(n) (z.B. partielle Integration, Substitution, Grundintegrale) du verwendest.

(a) $\int x^2 \cos(x) \, dx$

> ***Tipp 9.5: Mehrfache partielle Integration***
>
> Hier ist die partielle Integration zweimal anzuwenden, ähnlich wie bei $\int x^2 e^x \, dx$. Wähle den Polynomteil zum Ableiten.

(b) $\int \sin(x) \cdot e^{\cos(x)} \, dx$

> ***Tipp 9.6: Substitution mit $e$-Funktion***
>
> Erkennst du eine innere Funktion $g(x)$, deren Ableitung $g'(x)$ (oder ein Vielfaches davon) ebenfalls im Integranden vorkommt? Denke an die Ableitung des Exponenten.

(c) $\int e^{2x} \cos(x) \, dx$

> ***Tipp 9.7: Der 'Trick-Integral' mit Varianten***
>
> Diese Aufgabe ähnelt dem Integral $\int e^x \sin(x) \, dx$. Du wirst zweimal partiell integrieren müssen, bevor das ursprüngliche Integral (oder ein Vielfaches davon) wieder auf der rechten Seite erscheint und du die Gleichung danach auflösen kannst.

(d) **Für Experten:** $\int \sin(\ln x) \, dx$

**Tipp 9.8: Knifflige Kombination**

Versuche zuerst eine Substitution $u = \ln x$, woraus $x = e^u$ und $dx = e^u du$ folgt. Das führt zu einem Integral der Form $\int \sin(u)e^u du$, das du bereits aus einer früheren Herausforderung (Aufgabe 7.12, Teil f) kennst oder mit der dort beschriebenen Methode lösen kannst. Vergiss am Ende die Rücksubstitution nicht!

(e) **Flächenberechnung (Herausforderung):** Bestimme den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = e^x \sin(x)$ und der x-Achse im Intervall $[0, \pi]$ eingeschlossen wird. Fertige eine Skizze an. Du benötigst die Stammfunktion aus Aufgabe (c) (oder der früheren Herausforderung). Beachte, dass $\sin(x)$ im Intervall $[0, \pi]$ nicht negativ ist.

Diese Aufgaben erfordern sorgfältiges Anwenden der Regeln und oft auch mehrere Schritte. Viel Erfolg!

**Die Welt der Wellen und Kreise – Ein Nachklang zu den trigonometrischen Funktionen**

Mit den trigonometrischen Funktionen hast du die mathematischen Werkzeuge kennengelernt, um die vielfältigen periodischen Rhythmen und zyklischen Muster zu beschreiben, die uns in der Natur und Technik überall begegnen – von den harmonischen Schwingungen einer gestimmten Saite über die Wellen des Lichts bis hin zu den komplexen Überlagerungen von Signalen in der Kommunikationstechnik.
Die Eleganz, mit der Sinus und Kosinus Kreisbewegungen und periodische Phänomene erfassen, ist ein weiteres wunderbares Beispiel für die tiefe Verbindung zwischen Geometrie und Analysis. Die Untersuchung ihrer Ableitungen und Integrale hat dir gezeigt, wie die Werkzeuge der Analysis auch auf diese speziellen Funktionen angewendet werden können, um ihr Verhalten genau zu verstehen und Vorhersagen zu treffen.
Vielleicht hast du bei der Beschäftigung mit Sinus und Kosinus auch schon eine Ahnung von noch tieferen Zusammenhängen bekommen, wie beispielsweise der Eulerschen Formel ($e^{ix} = \cos x + i \sin x$). Diese verblüffende Gleichung schlägt eine Brücke zwischen der Welt der Exponentialfunktionen (mit der Basis $e$) und der Welt der Trigonometrie und öffnet gleichzeitig die Tür zum Reich der komplexen Zahlen – ein weiteres faszinierendes Feld der Mathematik.
Die Reise in die Welt der Schwingungen, Wellen und periodischen Muster ist voller Entdeckungen und zeigt eindrücklich, wie universell und mächtig die Sprache der Mathematik ist, um die Phänomene um uns herum zu beschreiben und zu verstehen.

**Aufgabe 9.7 Checkliste: Bogenmaß, Einheitskreis und Grundeigenschaften verstehen**

Die Basis der trigonometrischen Funktionen liegt im Einheitskreis und der Verwendung des Bogenmaßes. Überprüfe dein Verständnis:

(a) **Bogenmaß vs. Gradmaß:**

- Erkläre mit eigenen Worten, was das Bogenmaß eines Winkels darstellt. Warum ist $180° = \pi$ rad?
- Warum ist es in der Analysis (insbesondere beim Ableiten) wichtig, Winkel im Bogenmaß anzugeben? (Tipp: Denke an die Einfachheit der Ableitungsformeln.)

(b) **Sinus und Kosinus am Einheitskreis:**

- Wie hängen die Koordinaten eines Punktes $P(x_P|y_P)$ auf dem Einheitskreis mit $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ zusammen, wenn $\alpha$ der Winkel zwischen der positiven x-Achse und dem Strahl zum Punkt $P$ ist?

- Erkläre mithilfe des Einheitskreises, warum der Wertebereich von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ das Intervall $[-1, 1]$ ist.
- Leite die Identität $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ (Trigonometrischer Pythagoras) aus der Definition am Einheitskreis her.

(c) **Periodizität und Symmetrie:**

- Was bedeutet es, dass $\sin(x)$ und $\cos(x)$ periodisch mit der Periode $2\pi$ sind? Wie zeigt sich das am Einheitskreis und im Graphen?
- Erkläre die Punktsymmetrie von $\sin(x)$ zum Ursprung ($\sin(-x) = -\sin x$) und die Achsensymmetrie von $\cos(x)$ zur y-Achse ($\cos(-x) = \cos x$) anhand des Einheitskreises.

**Aufgabe 9.8 Checkliste: Transformationen und Analysis trigonometrischer Funktionen**

Die Grundfunktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ können transformiert und mit den Werkzeugen der Differential- und Integralrechnung analysiert werden.

(a) **Transformierte Sinusfunktion $f(x) = A\sin(B(x - C)) + D$:**

- Wenn du eine Schwingung modellieren möchtest, die doppelt so hoch ausschlägt wie $\sin(x)$ und nur halb so schnell schwingt (also die doppelte Periode hat), wie müsstest du $A$ und $B$ wählen (angenommen $A > 0, B > 0$)?
- Wie verschiebt sich der 'Standard-Startpunkt' (der bei $\sin(x)$ im Ursprung mit positiver Steigung liegt) durch die Parameter $C$ und $D$? Was ist die Gleichung der Mittellage?

(b) **Ableitungen und ihre Bedeutung:**

- Es gilt $(\sin x)' = \cos x$. Betrachte die Graphen von $\sin x$ und $\cos x$: An welchen Stellen hat $\sin x$ seine Extrempunkte (Hoch-/Tiefpunkte)? Was ist an diesen Stellen der Wert von $\cos x$ (also der Ableitung)? Passt das zur Regel, dass die Ableitung an Extremstellen Null ist?
- Umgekehrt: Wo hat $\cos x$ seine Nullstellen? Was für Punkte (bezüglich Steigung) hat $\sin x$ an diesen Stellen?
- Warum ist das Vorzeichen bei $(\cos x)' = -\sin x$ negativ? Versuche, dies anhand der Steigung des Kosinusgraphen zu erklären, wenn $\sin x$ positiv ist.

(c) **Integration und Fläche:**

- Das bestimmte Integral $\int_0^{2\pi} \cos(x)\,dx = 0$. Erkläre dieses Ergebnis geometrisch anhand des Graphen von $\cos(x)$ und dem Konzept der orientierten Fläche.
- Wie würdest du vorgehen, um den *gesamten geometrischen Flächeninhalt* zu berechnen, den der Graph von $f(x) = \sin(x)$ mit der x-Achse im Intervall $[0, 2\pi]$ einschließt? (Tipp: Nullstellen und Beträge).

(d) **Tangensfunktion:**

- Warum ist die Tangensfunktion $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert? Was befindet sich an den Definitionslücken im Graphen?
- Die Ableitung von $\tan x$ ist $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Ist diese Ableitung jemals negativ? Was bedeutet das für die Monotonie der Tangensfunktion in ihren Definitionsintervallen?

# 10 Ein würdiger Abschluss und ein Blick nach vorn

Liebe Leserin, lieber Leser,

herzlichen Glückwunsch! Du hast dich durch eine beachtliche Menge an mathematischen Konzepten gearbeitet, von den alltäglichen Grundlagen des Dreisatzes bis zu den anspruchsvollen Gipfeln der Differential- und Integralrechnung, und dabei auch die faszinierenden Welten der Exponential- und Logarithmusfunktionen erkundet. Das ist eine beeindruckende Leistung, die Ausdauer, Neugier und eine gehörige Portion Gehirnschmalz erfordert hat!

## Hut ab vor deinem Durchhaltevermögen!

Du hast nicht nur Formeln und Rechenwege kennengelernt, sondern hoffentlich auch ein tieferes Verständnis für die Struktur und die innere Logik der Mathematik entwickelt. Du hast gesehen, wie verschiedene Ideen miteinander verwoben sind:

- Wie der einfache Dreisatz die Grundlage für das Verständnis linearer Zusammenhänge legt.
- Wie lineare Funktionen uns zu den eleganteren Kurven der quadratischen Funktionen führen.
- Wie die Differentialrechnung uns erlaubt, Veränderungen präzise zu beschreiben – von der momentanen Geschwindigkeit bis zur optimalen Form eines Kaffeefilters.
- Wie die Integralrechnung uns die Macht gibt, aus Änderungsraten Gesamtgrößen zu rekonstruieren und Flächen unter Kurven zu bestimmen, die vorher unerreichbar schienen.
- Und wie Exponential- und Logarithmusfunktionen uns helfen, die dynamischen Prozesse des Wachstums und Zerfalls in der Welt um uns herum zu modellieren.

**Mehr als nur Zahlen und Formeln**

Mathematik ist, wie du vielleicht gemerkt hast, viel mehr als nur das Rechnen mit Zahlen. Sie ist eine Sprache, die uns hilft, die Welt präzise zu beschreiben, Muster zu erkennen, Probleme zu lösen und logische Schlüsse zu ziehen. Die Werkzeuge, die du in diesem Skript kennengelernt hast, sind fundamental – nicht nur für weitere mathematische Studien, sondern auch für unzählige Anwendungen in den Naturwissenschaften, der Technik, der Wirtschaft, der Informatik und vielen anderen Bereichen.

Denke an die Eleganz der Eulerschen Zahl $e$, die wie von Zauberhand in Wachstumsprozessen und bei kontinuierlicher Verzinsung auftaucht, oder an die Art und Weise, wie Sinus und Kosinus die periodischen Rhythmen der Natur einfangen. Die Fähigkeit, solche Zusammenhänge zu verstehen und mathematisch zu modellieren, ist eine wertvolle Kompetenz.

***Warum ist das wichtig? 10.1: Dein mathematischer Werkzeugkasten ist jetzt gut gefüllt!***

Mit dem Wissen aus diesem Skript bist du nun in der Lage:

- Lineare und quadratische Gleichungen und Funktionen sicher zu handhaben.
- Die Grundkonzepte der Differentialrechnung (Ableitung, Ableitungsregeln) zu verstehen und anzuwenden.
- Vollständige Kurvendiskussionen für Polynomfunktionen sowie für grundlegende Exponential- und Logarithmusfunktionen durchzuführen.
- Die Grundlagen der Integralrechnung (Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz) zu verstehen und für Flächenberechnungen und einfache Anwendungen zu nutzen.

- Die besonderen Eigenschaften und Anwendungsfelder von Exponential- und Logarithmusfunktionen zu erkennen.

Das ist ein solides Fundament, auf dem du aufbauen kannst, sei es im weiteren Schulverlauf, im Studium oder einfach aus persönlichem Interesse.

**Wie geht es weiter?**

Die Reise durch die Mathematik ist nie wirklich zu Ende. Es gibt immer neue, spannende Gebiete zu entdecken. Basierend auf dem, was wir hier behandelt haben, könnten nächste Schritte sein:

- **Vertiefung der Integrationstechniken:** Neben der partiellen Integration und Substitution gibt es weitere Methoden, um komplexere Integrale zu lösen.
- **Vektorrechnung und Analytische Geometrie:** Die Beschreibung von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum.
- **Stochastik (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik):** Die Mathematik des Zufalls und der Datenanalyse.
- **Komplexe Zahlen:** Eine Erweiterung des Zahlenbereichs, die in vielen Bereichen der Physik und Technik unerlässlich ist.
- **Differentialgleichungen:** Gleichungen, die Funktionen und ihre Ableitungen beinhalten und zur Modellierung dynamischer Systeme dienen.

Lass deine Neugier dein Kompass sein!

***Tipp 10.1: Bleib am Ball!***

Der Schlüssel zum Erfolg in der Mathematik ist kontinuierliche Übung und die Bereitschaft, sich auch mit herausfordernden Problemen auseinanderzusetzen. Nutze die Aufgaben in diesem Skript, suche dir weitere Übungen, arbeite mit Mitschülern zusammen und scheue dich nicht, Fragen zu stellen.
Denke daran: Jeder Fehler ist eine Chance zu lernen. Die Aha-Momente, wenn ein komplexer Zusammenhang plötzlich klar wird, sind die schönste Belohnung. ☺

***Schon gewusst? Der Zick-Zack-Tanz der Moleküle: Wenn $(\Delta \textit{Weg})^2$ plötzlich zählt!***

Du kennst die Brownsche Bewegung vielleicht aus dem Physik- oder Chemieunterricht: die unaufhörliche, zufällige Zitterbewegung winziger Teilchen (z.B. Pollen auf einer Wasseroberfläche), die durch die Stöße der umgebenden Moleküle verursacht wird. Albert Einstein lieferte 1905 eine bahnbrechende theoretische Erklärung für dieses Phänomen, die half, die Existenz von Atomen und Molekülen endgültig zu beweisen!
Der Pfad eines solchen Teilchens, $W_t$ zur Zeit $t$, ist extrem unregelmäßig und zackig – so sehr, dass er mathematisch gesehen an keinem einzigen Punkt differenzierbar (also 'glatt') ist! Diese extreme 'Rauheit' führt zu erstaunlichen Eigenschaften.
Stell dir vor, du betrachtest eine 'normale', glatte Funktion $f(t)$, z.B. den Weg eines gleichmäßig beschleunigten Objekts. Wenn du die Änderungen $\Delta f = f(t_{i+1}) - f(t_i)$ über viele kleine Zeitintervalle $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ betrachtest, dann gilt $\Delta f \approx f'(t_i)\Delta t$. Wenn du nun die Quadrate dieser Änderungen aufsummierst, $\sum(\Delta f)^2 \approx \sum(f'(t_i))^2(\Delta t)^2$, und die Zeitschritte $\Delta t$ immer kleiner machst, geht diese Summe sehr schnell gegen Null (wegen des $(\Delta t)^2$).
**Die Überraschung bei der Brownschen Bewegung:** Bei der Brownschen Bewegung $W_t$ ist das anders! Wenn man die Quadrate der Wegänderungen $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ über kleine Zeitintervalle

$\Delta t$ aufsummiert, passiert etwas Unerwartetes:

$$\sum_{i=0}^{N-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \quad \text{für } t_0 = 0, t_N = T \text{ und } \Delta t = T/N$$

Wenn man die Zeitintervalle $\Delta t$ immer kleiner macht ($N \to \infty$), geht diese Summe nicht etwa gegen Null, sondern sie nähert sich dem Gesamtwert der verstrichenen Zeit $T$ an!

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 = T$$

Dieses Ergebnis nennt man die **quadratische Variation** der Brownschen Bewegung. Es bedeutet heuristisch, dass $(dW_t)^2$ sich wie $dt$ verhält – das Quadrat einer winzigen Änderung des Weges ist so groß wie die winzige Änderung der Zeit! Das ist völlig anders als bei glatten Funktionen, wo $(df)^2 \approx (f'(t)dt)^2$ ein Term 'höherer Ordnung' ist, der viel schneller verschwindet.
Diese besondere Eigenschaft $E[(dW_t)^2] \approx dt$ (wobei $E[\dots]$ für den Erwartungswert steht, eine Art Mittelwert über viele mögliche Pfade) ist einer der Gründe, warum für die Beschreibung von Zufallsprozessen eine eigene, spezielle Form der Analysis entwickelt wurde, die sogenannte **stochastische Analysis** (oder Itô-Kalkül). Sie spielt heute eine riesige Rolle, z.B. in der Finanzmathematik bei der Modellierung von Aktienkursen. Was als Beobachtung von zitternden Pollen begann, hat also zu ganz neuen mathematischen Welten geführt!

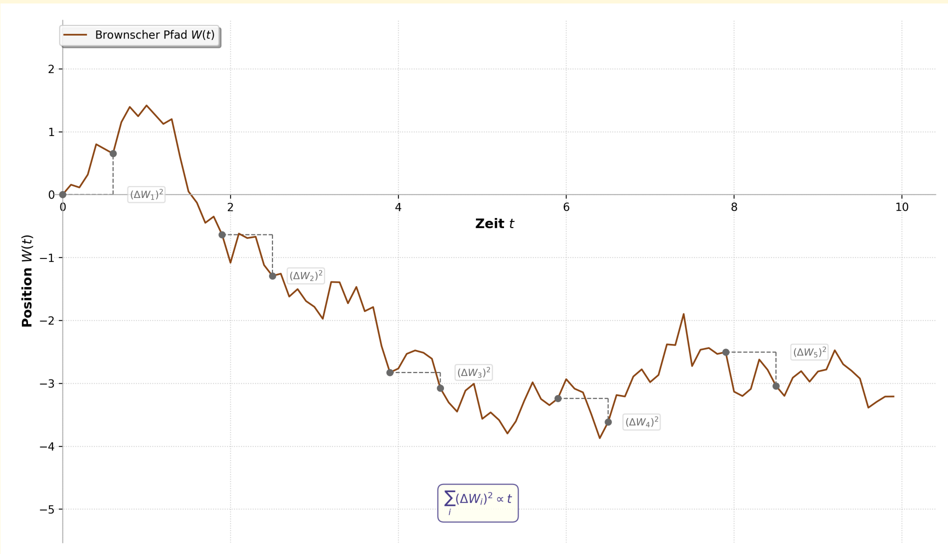


Abbildung 10.1: Konzept der quadratischen Variation bei der Brownschen Bewegung

Wir hoffen, dieses Lernmaterial hat dir nicht nur Wissen vermittelt, sondern auch ein wenig von der Faszination und der Schönheit der Mathematik gezeigt. Die Fähigkeit, logisch zu denken, Probleme strukturiert anzugehen und komplexe Zusammenhänge zu durchdringen, wird dir in vielen Lebensbereichen von Nutzen sein.

*Alles Gute auf deinem weiteren Weg!*

# Anhang

## A: Algebraische Formelsammlung

Diese Sammlung fasst einige wichtige algebraische Regeln und Formeln zusammen, die im gesamten Skript nützlich sind.

### A.1 Bruchrechnung

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und Nenner $\neq 0$:

- **Erweitern:** $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad$ (für $c \neq 0$)
- **Kürzen:** $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \quad$ (für $c \neq 0$)
- **Addition/Subtraktion (gleichnamig):** $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$
- **Addition/Subtraktion (ungleichnamig):** $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$ (Hauptnenner bilden)
- **Multiplikation:** $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- **Division (Kehrwert):** $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$
- **Doppelbruch:** $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
- **Umwandlung Dezimalzahl in Bruch:** z.B. $0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$
- **Umwandlung gemischte Zahl in Bruch:** z.B. $2\frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{13}{5}$

### A.2 Potenzgesetze

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{Z}$ für einige Regeln, wenn die Basis negativ sein kann):

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad$ (für $a \geq 0$, wenn $n$ gerade)
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad$ (für $a \geq 0$, wenn $n$ gerade)

### A.3 Wurzelgesetze

Für $a, b \geq 0$ und $n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq 2$:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad$ (für $b \neq 0$)
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a^n} = a$ (für $a \geq 0$)
- $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$ (Teilweises Radizieren / unter die Wurzel bringen)

### A.4 Binomische Formeln

Für $a, b \in \mathbb{R}$:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Erweiterungen:

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

## A.5 Logarithmengesetze

Für $u, v > 0$, Basis $b > 0, b \neq 1$ und $r \in \mathbb{R}$:

- $\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$
- $\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$
- $\log_b(u^r) = r \cdot \log_b(u)$

Speziell für den natürlichen Logarithmus (ln, Basis $e$):

- $\ln(e) = 1$
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e^x) = x$
- $e^{\ln(x)} = x$ (für $x > 0$)

# B: Beispiele zur Termumformung und zum Lösen von Gleichungen

## B.1 Lineare Gleichung lösen

Löse die folgende Gleichung nach $x$:

$$5(x-2) + 3x = 2(x+7) - 4$$

**Lösungsweg:**

$$\begin{aligned} 5(x-2)+3x &= 2(x+7)-4 && \text{Klammern ausmultiplizieren} \\ 5x-10+3x &= 2x+14-4 && \text{Terme zusammenfassen} \\ 8x-10 &= 2x+10 && \mid -2x \\ 6x-10 &= 10 && \mid +10 \\ 6x &= 20 && \mid :6 \\ x &= \tfrac{20}{6} && \text{Kürzen} \\ x &= \tfrac{10}{3} \end{aligned}$$

Die Lösung der Gleichung ist $x = \frac{10}{3}$.

## B.2 Komplexen Bruchterm vereinfachen

Vereinfache den folgenden Bruchterm so weit wie möglich (alle Variablen seien so gewählt, dass die Ausdrücke definiert sind und keine Nenner Null werden):

$$\frac{(a^2b^{-3})^2 \cdot (ab)^4}{a^5b^{-1}} : \frac{(a^2b)^3}{b^5a^{-1}}$$

**Lösungsweg:** Wir vereinfachen zuerst den ersten Bruch (Dividend) und den zweiten Bruch (Divisor) getrennt und wenden dann die Divisionsregel für Brüche an.

**1. Dividend vereinfachen:** $D_1 = \frac{(a^2b^{-3})^2 \cdot (ab)^4}{a^5b^{-1}}$

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{(a^{2\cdot2}b^{-3\cdot2}) \cdot (a^1b^1)^4}{a^5b^{-1}} && \text{(Potenzgesetz: } (x^m)^n = x^{mn}\text{)} \\ &= \frac{a^4b^{-6} \cdot a^4b^4}{a^5b^{-1}} && \text{(Potenzgesetz: } (xy)^n = x^ny^n\text{)} \\ &= \frac{a^{4+4}b^{-6+4}}{a^5b^{-1}} && \text{(Potenzgesetz: } x^mx^n = x^{m+n}\text{)} \\ &= \frac{a^8b^{-2}}{a^5b^{-1}} \\ &= a^{8-5} \cdot b^{-2-(-1)} && \text{(Potenzgesetz: } x^m/x^n = x^{m-n}\text{)} \\ &= a^3 \cdot b^{-2+1} \\ &= a^3b^{-1} = \frac{a^3}{b} \end{aligned}$$

**2. Divisor vereinfachen:** $D_2 = \frac{(a^2b)^3}{b^5a^{-1}}$

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{(a^{2\cdot 3}b^{1\cdot 3})}{b^5a^{-1}} && \text{(Potenzgesetz: } (x^m)^n = x^{mn} \text{ und } (xy)^n = x^ny^n\text{)} \\ &= \frac{a^6b^3}{b^5a^{-1}} \\ &= a^{6-(-1)} \cdot b^{3-5} && \text{(Potenzgesetz: } x^m/x^n = x^{m-n}\text{)} \\ &= a^{6+1} \cdot b^{-2} \\ &= a^7b^{-2} = \frac{a^7}{b^2} \end{aligned}$$

**3. Division durchführen:** Dividend : Divisor $= D_1 : D_2 = D_1 \cdot \frac{1}{D_2}$ (bzw. mit Kehrwert multiplizieren)

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{b} : \frac{a^7}{b^2} &= \frac{a^3}{b} \cdot \frac{b^2}{a^7} \\ &= \frac{a^3b^2}{ba^7} \\ &= a^{3-7} \cdot b^{2-1} && \text{(Kürzen bzw. Potenzgesetze)} \\ &= a^{-4}b^1 \\ &= \frac{b}{a^4} \end{aligned}$$

Der vereinfachte Term ist $\frac{b}{a^4}$.