群论

一团纷乱无序的碎碎念

作者：Fisher The First

组织：夜航港

时间：April 8, 2024

版本：笔记初稿

邮箱：samjiajun@outlook.com

在没有结束前，总要做很多没有意义的事，这样才可以在未来某一天，用这些无意义的事去堵住那些讨厌的缺口

第 1 章 三维转动群 SO(3)

我记得她很容易哭鼻子, 记得她喜欢聊以前的事, 记得她在信纸上为我写的每个字, 却再也没有见过她一次我记得她很容易哭鼻子, 记得她喜欢聊以前的事, 记得她在信纸上为我写的每个字, 却再也没有见过她一次.

——《未闻花名》

1.1 三维转动

定义 1.1 (三维转动)

三维欧几里得空间中，保持矢量长度不变的线性变换，为三维转动。

三维转动矩阵具有良好的性质。

性质 1.

1. 基矢的变换的行矢量的形式
   $\hat{e}_i \xrightarrow{R} \hat{e}'_i = \hat{e}_j R^j_i$
2. 矢量变换 (用分量的形式写出)
   $x'^i = R^i_j x^j$
3. 转动矩阵为实正交矩阵
   $|\vec{x}| = |\vec{x}| \Rightarrow RR^T = R^T R = E \Rightarrow R^i_k R^j_l \delta^{kl} = \delta^{ij}$
4. 行列式关系
   $\det R = 1 \Rightarrow R^i_l R^j_m R^k_n \varepsilon^{lmn} = \varepsilon^{ijk}$
   由行列式逆序数定义易证明

注意到 3、4 两点性质表明 $\delta^{ij}, \varepsilon^{ijk}$ 为不变张量。

定义 1.2 (SO(3) 群)

所有三维空间中保持矢量长度不变的线性变换构成群，即是 SO(3) 群。

证明 以下仅验证满足群乘法。

$$R_2(R_1\hat{e_i}) = R_2\hat{e_j}R^j_{1i} = \hat{e_k}R^k_{2j}R^j_{1i} = \hat{e_k}(R_2R_1)^k_i \tag{1.1}$$

$$R_3 = R_2R_1 \tag{1.2}$$

1.2 三维转动群轴角表达

刚体转动中有如下两条几何性质

性质 1.

1. （位移定理）刚体定点运动的任意位移，可由绕过定点的某个轴，作定轴转动得到
2. （恰斯尔定理）刚体的一般运动可分解随基点的平动与绕基点的定点转动。

位移定理是几何定理，由三维转动性质得到，恰斯尔定理由运动学关系不难导出。

因此，可利用两个方位角 ϕ, θ 刻画转动转轴方向，转动角度由 ψ 刻画，由此可做出 SO(3) 群的球形流形。易得，其具有如下性质

性质 1. 流形性质

流形为一个球，以 ψ 大小作为半径，且对三个参数作如下规定

$$0 \le \theta \le \pi \quad 0 \le \phi < 2\pi \quad 0 \le \psi \le \pi \tag{1.3}$$

$$R_{-\hat{n}}(\pi) = R_{\hat{n}}(\pi) \tag{1.4}$$

以删去冗余，注意到球面上的点与其反演点是同一点，SO(3) 流形具有如下性质。

1. 紧性
2. 双连通 (有两种形式的闭合曲线)

轴角表达式有个漂亮的恒等式，

定理 1.1 (共轭类与轴角恒等式)

对于两个满足 $\hat{n'} = R\hat{n}$ 的转轴，由如下关系

$$R_{\hat{n'}}(\psi) = RR_{\hat{n'}}(\psi)R^{-1} \tag{1.5}$$

则所有旋转相同 ψ 角的变换，属于同一共轭类。

即是证明两者的对易性，本质上即是位移定理的证明。

1.3 欧拉角表述

以欧拉角来表述三维转动是简洁的。$1, 2, 3$ 与 $1', 2', 3'$ 分别表示前后的坐标系，节线矢量 $\hat{N}$ 由第一次转动后 1 轴得到，也即为 $(1, 2)$ 与 $(1', 2')$ 平面的交线。则三维转动的欧拉角形式为

定理 1.2 (三维转动的欧拉角形式)

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{3'}(\gamma)R_{\hat{N}}(\beta)R_3(\alpha) \tag{1.6}$$

其中角标表示转轴

将所有的转动表示为固定的转轴是颇为方便的，且有一个简洁的公式

定理 1.3 (固定转轴欧拉角表示)

$$R(\alpha,\beta,\gamma)=R_3(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma) \tag{1.7}$$

证明 反复利用轴角表达式将 $3'$ 轴与 $\hat{N}$ 轴化为固定轴即可。

由此可见，关键是沿固定轴转动的矩阵表示。我们容易写出

沿坐标轴的转动矩阵

$$R_3(\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1.8}$$

$$R_2(\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi & 0 & \sin\psi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi\end{pmatrix} \tag{1.9}$$

$$R_1(\psi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi\\ 0 & \sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix} \tag{1.10}$$

显然，轴角表达与欧拉角形式之间能进行相互转化

定理 1.4 (两种参数化方式的联系)

$$\phi=\frac{\pi+\alpha-\gamma}{2} \tag{1.11}$$

$$\tan(\theta)=\frac{\tan(\frac{\beta}{2})}{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}} \tag{1.12}$$

$$\cos\psi=2\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}-1 \tag{1.13}$$

1.4 单参数子群与生成元

定义 1.3 (单参数子群)

绕定轴 $\hat{n}$ 的转动构成 SO(3) 的一个子群，称为单参数子群。

单参数子群总能同构到一个 SO(2) 群，记其生成元为 J_n，则子群元素为

$$R_n(\psi)=e^{-i\psi J_n} \tag{1.14}$$

J_n 也具有轴角形式，也有类似的轴角恒等式。

定理 1.5

若 $\hat{n'}=R\hat{n}$，则有 $RJ_nR^{-1}=J_{n'}$

我们给出沿基矢方向的单参数生成元

基矢生成元

$$(J_k)^l_m = -i\varepsilon_{klm} \tag{1.15}$$

实际上，生成元 J_n 具有矢量的特性，是**矢量生成元**。

定理 1.6 (矢量生成元)

1. 基矢变换
   $RJ_kR^{-1} = J_lR^l_k$
2. 所有的 J_n 都能由 J_1, J_2, J_3 表出，即有
   $J_n = J_kn^k$
   其中 n^k 是表征转轴方向的系数，即 $\hat{n} = \hat{e_k}n^k$

♡

证明 1 的证明将生成元的表达式带入即可，其本质为反对称张量的性质，2 可用轴角恒等式，将 J_n 化到基矢生成元，再由基本生成元满足矢量变化可证明。

故 J_1, J_2, J_3 张成了单参数生成元的的向量空间