实验题

用C, C++, Python, Java 之一实现下面五个函数:

1. ```
   bool power_eng(double* pld, double* env,
                  double* a, int n);
   ```

   用幂法求矩阵 $a_{n\times n}$ 的最大特征值及其特征向量.

   假设矩阵 $a_{n\times n}$ 以行优先存储. 函数 `power_eng` 用幂法求其按绝对值最大的特征值及其特征向量. 特征值保存在 `*pld` 中, 特征向量保存在 `env[0,n)` 中. 成功时返回 false, 否则返回 true.

2. ```
   bool jacobi_eng(double* ev, double* a, int n);
   ```

   用 Jacobi 方法求对称矩阵的全部特征值.

   假设对称矩阵 $a_{n\times n}$ 以行优先存储. 函数 `jacobi_eng` 用 Jacobi 方法求其所有的特征值. 特征值保

存在 `ev[0,n)` 中，成功时返回 false，否则返回 true.

3. `void gauss_hessen(double* a, int n);`

   假设矩阵 $a_{n\times n}$ 以行优先存储. 函数 `gauss_hesssen` 用 Gauss 相似变换将矩阵 $a_{n\times n}$ 就地转换为上 Hessenberg 矩阵.

4. `bool qr_aux(int i, int j);`

   矩阵特征值问题 QR 算法辅助函数.

   假设 Hessenberg 矩阵 $a_{n\times n}$ 按行优先存储. 函数 `qr_aux` 用 QR 算法求其对角线上的子矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{i,i} & a_{i,i+1} & a_{i,i+2} & \cdots & a_{i,j-2} & a_{i,j-1} \\ a_{i+1,i} & a_{i+1,i+1} & a_{i+1,i+2} & \cdots & a_{i+1,j-2} & a_{i+1,j-1} \\ 0 & a_{i+2,i+1} & a_{i+2,i+2} & \cdots & a_{i+2,j-2} & a_{i+2,j-1} \\ 0 & 0 & a_{i+3,i+2} & \cdots & a_{i+3,j-2} & a_{i+2,j-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{j-1,j-2} & a_{j-1,j-1} \end{pmatrix}$$

的所有特征值. 结果存放在 ev[i,j) 中. 成功时返回 false, 否则返回 true. 矩阵的首址 a, 维数 n, 以及特征值结果数组 en 以全局变量的形式给出.

当 $j-i>2$ 时, 函数 ar_aux 实现 QR 算法迭代. 检查次对角线元素

$$a_{i+1,i}\ a_{i+2,i+1}\ \cdots\ a_{j-1,j-2}$$

是否有零元素存在. 一旦发现零元素 $a_{k,k-1}$ 则将矩阵分为两个子矩阵:

$$a[i,k)\times[i,k)\text{和 } a[k,j)\times[k,j)$$

递归调用 qr_aux(i,k) 和 qr_aux(k j).

qr_aux 至少需要三个全局变量, 其实现形式大致为

```
typedef std::complex<double> Complex;
double* a;       //Hessenberg 矩阵首址;
int n;           //Hessenberg 矩阵维数.
Complex* en;     //保存特征值.
```

```
bool qr_aux(int i, int j)
{
  //QR 算法的实现
}
```

QR 算法的驱动程序可以实现为:

```
bool
qr_eng(Complex* result, double* h, int m)
{ //QR 算法求 Hessenberg 矩阵 h (m x m)
  //的全部特征值,
  //结果存放在 result[0, m) 之中,
  //成功返回 false, 否则返回 true.

  //给全局变量赋值
  a = h;
  n = m;
  en = result;

  //调用驱动函数
  return qr_aux(0,n);
}
```

用上面实现的算法求下面五个矩阵的特征值.

1. 矩阵 $A_{8\times 8} =$

$$\begin{pmatrix}
611 & 196 & -192 & 407 & -8 & -52 & -49 & 29 \\
 & 899 & 113 & -192 & -71 & -43 & -8 & -44 \\
 & & 899 & 196 & 61 & 49 & 8 & 52 \\
 & & & 611 & 8 & 44 & 59 & -23 \\
 & & & & 411 & -599 & 208 & 208 \\
 & \text{对} & \text{称} & & & 411 & 208 & 208 \\
 & & & & & & 99 & -911 \\
 & & & & & & & 99
\end{pmatrix}$$

2. 矩阵 $B_{10\times 10} =$

$$\begin{pmatrix}
1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 \\
 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 & 1/11 \\
 & & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 & 1/11 & 1/12 \\
 & & & 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 & 1/11 & 1/12 & 1/13 \\
 & & & & 1/9 & 1/10 & 1/11 & 1/12 & 1/13 & 1/14 \\
 & & & & & 1/11 & 1/12 & 1/13 & 1/14 & 1/15 \\
 & & & & & & 1/13 & 1/14 & 1/15 & 1/16 \\
 & & \text{对} & \text{称} & & & & 1/15 & 1/16 & 1/17 \\
 & & & & & & & & 1/17 & 1/18 \\
 & & & & & & & & & 1/19
\end{pmatrix}$$

3. 矩阵 $C_{12\times 12} =$

$$\begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 11 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 10 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. 矩阵 $D_{20\times 20} = \left(d_{jk}\right) \quad 1 \le j, k \le 20$

其中 $d_{jk} = \sqrt{\frac{2}{21}} \sin\left(\frac{jk\pi}{21}\right)$.

5. 矩阵 $E_{50\times 50} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}_{50\times 50} \qquad \text{50 阶Guass 矩阵}$$

给出下面三个表格中信息:

1. 幂法

矩阵	最大特征值	特征向量	误差	运行时间	备注
A					
B					
C					
D					
E					

注: 用 $\frac{\|Mx-\lambda x\|_2}{\|x\|_2}$ 计量误差. 其中 λ 为最大特征值, x 为 λ 对应的特征向量.

2. Jacobi 方法

矩阵	特征值	运行时间	备注
A			
B			
C			
D			

3. QR 方法

矩阵	特征值	运行时间	备注
A			
B			
C			
D			
E			

4. 求下面11次多项式的根

$$x^{11} + x^{10} + \cdots + x + 1 = 0$$