第十一章反常积分

反常积分概念

定义1（无穷积分）

$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x = J$$

通过变限定积分的极限来定义

定义2（瑕积分）

设函数 f 定义在区间 $(a,b]$ 上, 在点 a 的任一右邻域上无界, 但在任何内闭区间 $[u,b]\subset(a,b]$ 上有界且可积. 如果存在极限 $\lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x = J$, 则称此极限为无界函数 f 在 $(a,b]$ 上的反常积分, 记作 $J=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

无穷积分的性质与敛散判别

定理11.1（无穷积分柯西收敛）

无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是:任给 $\varepsilon>0$, 存在 $G\geqslant a$, 只要 $u_1,u_2>G$, 便有 $\left|\int_a^{u_2} f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{u_1} f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$

性质1（线性性质）

若 $\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$ 都收敛, k_1,k_2 为任意常数, 则 $\int_a^{+\infty}[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]\mathrm{d}x$ 也收敛, 且 $\int_a^{+\infty}[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)]\mathrm{d}x=k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x.$

性质2（可加性）

若 f 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积, $a<b$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛态, 且有 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$

性质3（绝对收敛）

若 f 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积, 且有 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 亦必收敛, 并有 $\left|\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$

- 当 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛时, 称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为 绝对收敛
- 收敛而不绝对收敛称为条件收敛

非负函数无穷积分敛散性判断

定理11.2（比较原则）

设定义在 $[a,+\infty)$ 上的两个 非负函数 f 和 g 都在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积, 且满足 $f(x)\leqslant g(x), x\in[a,+\infty)$, 则当 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 必收敛（或者, 当 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 必发散).

推论1（比较原则极限形式）

若 f 和 g 都在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积, 当 $x\in[a,+\infty)$ 时, $f(x)\geqslant 0, g(x)>0$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c$, 则有:

(i) 当 $0<c<+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同敛态;

(ii) 当 $c=0$ 时, 由 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛可推知 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛;

(iii) 当 $c=+\infty$ 时, 由 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散可推知 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

推论2（柯西判别法）

设 f 定义于 $[a,+\infty)(a>0)$, 且在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积, 则有:

(i) 当 $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{x^p}, x\in[a,+\infty)$, 且 $p>1$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(ii) 当 $f(x)\geqslant\frac{1}{x^p}, x\in[a,+\infty)$, 且 $p\leqslant 1$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

推论3

设 f 是定义于 $[a,+\infty)$ 上的非负函数, 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=\lambda$. 则有

(i) 当 $p>1, 0\leqslant\lambda<+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收玫;

(ii) 当 $p\leqslant 1, 0<\lambda\leqslant+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

一般无穷积分的敛散判别法

定理11.3(狄利克雷判别法)

若 $F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上当 $x\to+\infty$ 时单调趋于 0, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

- 积分第二中值定理证得

定理 11. 4 (阿贝尔 (Abel) 判别法)

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

瑕积分的性质与敛散判别

定理11.5（瑕积分柯西收敛）

瑕积分 $\int_a f(x)\mathrm{d}x$(瑕点为 a) 收敛的充要条件是:任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $u_1,u_2\in(a,a+\delta)$, 总有 $\left|\int_{u_1}^b f(x)\mathrm{d}x-\int_{u_2}^b f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$

- 性质1
- 性质2
- 性质3

同上

非负函数瑕积分敛散性判别

定理11.6（比较原则）

设定义在 $(a,b]$ 上的两个函数 f 与 g, 瑕点同为 $x=a$, 在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上都可积, 且满足 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x), x\in(a,b]$. 则当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 必定收敛 (或者, 当 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 亦必发散).

推论1（比较原理极限形式）

又若 $f(x)\geqslant 0, g(x)>0$, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=c$, 则有:

(i) 当 $0<c<+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 同敛态;

(ii) 当 $c=0$ 时, 由 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛可推知 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛;

(iii) 当 $c=+\infty$ 时, 由 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散可推知 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

推论2（柯西判别法）

设 f 定义于 $(a,b], a$ 为其瑕点, 且在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积, 则有:

(i) 当 $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{(x-a)^p}$, 且 $0<p<1$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(ii) 当 $f(x)\geqslant\frac{1}{(x-a)^p}$, 且 $p\geqslant 1$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

推论3

设 f 是定义于 $(a,b]$ 上的非负函数, a 为其瑕点, 且在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积. 如果 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)=\lambda$, 则有:

(i) 当 $0<p<1, 0\leqslant\lambda<+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(ii) 当 $p\geqslant 1, 0<\lambda\leqslant+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

一般瑕积分的敛散判别法

定理 11.7（狄利克雷判别法）

设 a 为 $f(x)$ 的瑕点, 函数 $F(u)=\int_u^b f(x)\mathrm{d}x$ 在 $(a,b]$ 上有界, 函数 $g(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$, 则瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 11.8 (阿贝尔判别法)

设 a 为 $f(x)$ 的瑕点, 瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 函数 $g(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调且有界, 则瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

第十二章数项级数

级数的敛散性

- **定义1（级数）** 给定一个数列 $\{u_n\}$, 对它的各项依次用 “+” 号连接起来 的表达式 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 称为常数项无穷级数或数项级数 (也常简称级数), 其中 u_n 称为数项级数 (1) 的通项或一般项.
- **定义2（级数收敛）** 即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$)
- **定理12.1（级数收敛的柯西准则）** 级数 (1) 收敛的充要条件是:任给正数 ε, 总存在正整数 N, 使得当 $m>N$ 以及对任意的正整数 p, 都有 $|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon$.
  - **推论** 若级数 (1) 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
- **定理 12.2 （线性）** 若级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都收玫, 则对任意常数 c, d, 级数 $\sum(cu_n+dv_n)$ 亦收敛, 且 $\sum(cu_n+dv_n)=c\sum u_n+d\sum v_n$.
- **定理12.3（改变有限项）** 去掉、增加或改变级数的有限个项并不改变级数的敛散性.
  - 余项不变
- **定理12.4（加括号）** 在收敛级数的项中任意加括号, 既不改变级数的收敛性, 也不改变它的和.
  - 若加括号后发散，则原级数发散
  - 子列收敛

正项级数

- **定理12.5（正项级数收敛）** 正项级数 $\sum u_n$ 收敛充要条件是:部分和数列 $\{S_n\}$ 有界, 即存在某正数 M, 对一切正整数 n 有 $S_n<M$.
  - 数列单调有界定理
- **定理 12.6 (比较原则)** 设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数, 如果存在某正数 N, 对一切 $n>N$ 都有 $u_n\leqslant v_n$, 则
  (i) 若级数 $\sum v_n$ 收敛, 则级数 $\sum u_n$ 也收敛;
  (ii) 若级数 $\sum u_n$ 发散, 则级数 $\sum v_n$ 也发散.
  - (ii) 为 (i)的逆否命题
  - **推论（比较原则的极限形式）** 设 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots(3), v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots(4)$ 是两个正项级数, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$, 则
    (i) 当 $0<l<+\infty$ 时, 级数 (3) 、 (4) 同时收敛或同时发散;
    (ii) 当 $l=0$ 且级数 (4) 收敛时, 级数 (3) 也收敛;
    (iii) 当 $l=+\infty$ 且级数 (4) 发散时, 级数 (3) 也发散.
- **定理 12.7（达朗贝尔\比式判别法）** 设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且存在某正整数 N_0 及常数 $q(0<q<1)$.
  (i) 若对一切 $n>N_0$, 成立不等式 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q$, 则级数 $\sum u_n$ 收敛.
  (ii) 若对一切 $n>N_0$, 成立不等式 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$, 则级数 $\sum u_n$ 发散.
  - 由比较原则和等比级数敛散性判别证得
  - **推论1（极限形式）** 若 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$,
    (i) 当 $q<1$ 时, 级数 $\sum u_n$ 收敛;
    (ii) 当 $q>1$ 或 $q=+\infty$ 时, 级数 $\sum u_n$ 发散.
    - 若q=1时无法判断敛散性，如调和级数
  - **推论2（极限不存在时）** 设 $\sum u_n$ 为正项级数.
    (i) 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q<1$, 则级数收敛;
    (ii) 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q>1$, 则级数发散.
- **定理12.8（柯西/根式判别法）** 设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且存在某正数 N_0 及正常数 l,
  (i) 若对一切 $n>N_0$, 成立不等式 $\sqrt[n]{u_n}\leqslant l<1$, 则级数 $\sum u_n$ 收敛;
  (ii) 若对一切 $n>N_0$, 成立不等式 $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$, 则级数 $\sum u_n$ 发散.
  - 由比较原则和等比级数证得
  - **推论1（极限形式）** 设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, 则
    (i) 当 $l<1$ 时, 级数 $\sum u_n$ 收敛;
    (ii) 当 $l>1$ 时, 级数 $\sum u_n$ 发散.
    - l=1时无法判断敛散性，如调和级数
  - **推论2（极限不存在时用上极限）** 设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, 则当
    $(i) l<1$ 时级数收敛;
    $(ii) l>1$ 时级数发散.
- 绝对收敛级数的两条性质（见下） / $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$, 则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$.
- **定理12.9（积分判别法）** 设 f 为 $[1,+\infty)$ 上非负减函数, 那么正项级数 $\sum f(n)$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.
  - 级数是积分的离散形式
- **定理12.10（拉贝判别法）** 设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且存在某正整数 N_0 及常数 r,
  (i) 若对一切 $n>N_0$, 成立不等式 $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\geqslant r>1$, 则级数 $\sum u_n$ 收敛;
  (ii) 若对一切 $n>N_0$, 成立不等式 $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\leqslant 1$, 则级数 $\sum u_n$ 发散.
  - **推论（极限形式）** 设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=r$ 存在, 则
    (i) 当 $r>1$ 时, 级数 $\sum u_n$ 收敛;
    (ii) 当 $r<1$ 时, 级数 $\sum u_n$ 发散.
  - 思想：找收敛速度更慢的函数

一般项级数

- **交错级数** 级数各项符号正负相间，即 $u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n+1}u_n+\cdots \quad (u_n>0, n=1,2,\cdots)$
- **定理12.11（莱布尼茨判别法）** 若交错级数满足下述两个条件:
  (i) 数列 $\{u_n\}$ 单调递减; (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$,
  则级数收敛.
  - 利用奇偶项构成闭区间套，通过区间套定理证得
  - **推论（余项估计）** 若级数 (1) 满足莱布尼茨判别法的条件, 则收敛级数 (1) 的余项估计式为 $|R_n|\leqslant u_{n+1}$.
- **定理12.2（绝对收敛）** 绝对收敛级数一定收敛
  - 利用柯西收敛准则证得
- **绝对收敛级数的两条性质**
  - **定理12.3（级数重排）** 设级数 绝对收敛, 且其和等于 S, 则任意重排后所得到的级数也绝对收敛, 且有相同的和数.
    - 注：条件收敛级数适当重排后，可得到发散数列或收敛于任意数
    - 证明没看懂
  - **定理12.4（级数乘积）** 设有收敛级数 $\sum u_n = u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots = A(11)$, $\sum v_n = v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots = B(12)$. 若级数 (11) 、 (12) 都 绝对收敛, 则对 (13) 中所有乘积 u_iv_j 按任意顺序排列所得到的级数 $\sum w_n$ 也绝对收敛, 且其和等于 AB.
    - 由正项有界级数收敛和级数重排证得
- **引理（阿贝尔变换/分部求和）** 设 $\varepsilon_i, v_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为两组实数, 若令 $\sigma_k=v_1+v_2+\cdots+v_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$, 则有如下分部求和公式成立:
  $$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i v_i=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sigma_1+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\sigma_2+\cdots+(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)\sigma_{n-1}+\varepsilon_n\sigma_n$$
  - 
    几何意义
  - 分部积分的离散形式
- **推论（阿贝尔引理）** 若 $(i)\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是单调数组;
  (ii) 对任一正整数 $k \quad (1\leqslant k\leqslant n)$ 有 $|\sigma_k|\leqslant A$(这里 $\sigma_k=v_1+\cdots+v_k$),
  则记 $\varepsilon=\max\limits_k\{|\varepsilon_k|\}$, 有 $\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k v_k\right|\leqslant 3\varepsilon A$
- **定理12.5（阿贝尔判别法）** 设级数 $\sum a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n+\cdots$ 若 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, 且级数 $\sum b_n$ 收敛, 则该级数收敛.
- **定理12.6（狄利克雷判别法）** 若数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, 又级数 $\sum b_n$ 的部分和数列有界, 则上面级数收敛.

第十四章幂级数

幂级数

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$，（1）
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$（2）
- **定理14.1(阿贝尔定理)**
  - 若幂级数 (2) 在 $x=\bar{x}\neq 0$ 处收敛，则对满足不等式 $|x|<|\bar{x}|$ 的任何 x，幂级数 (2)收敛而且绝对收敛；
    若幂级数 (2) 在 $x=\bar{x}$ 处发散，则对满足不等式 $|x|>|\bar{x}|$ 的任何 x，幂级数 (2) 发散.
    - 由M判别法证得
- **定理14.2（根式收敛半径）**
  - 对于幂级数 (2)，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$，则当
    $(i) 0<\rho<+\infty$ 时，幂级数 (2) 的收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$；
    $(ii) \rho=0$ 时，幂级数 (2) 的收敛半径 $R=+\infty$；
    $(iii) \rho=+\infty$ 时，幂级数 (2) 的收敛半径 $R=0$.
    - 由根式判别法推出
  - 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$. 因此比式判别法也可推出收敛半径
- **定理 14. 3 (柯西-阿达马(Cauchy-Hadamard) 定理)**
  - 对于幂级数 (2)，设 $\rho=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$，则当
    $(i) 0<\rho<+\infty$ 时，收玫半径 $R=\frac{1}{\rho}$；
    $(ii) \rho=0$ 时，$R=+\infty$；
    $(iii) \rho=+\infty$ 时，$R=0$.
    - 上极限总是存在的
- **定理14.4（收敛区间上的内闭一致收敛）**
  - 若幂级数 (2) 的收敛半径为 $R(>0)$，则幂级数 (2) 在它的收敛区间 $(-R,R)$ 内任一闭区间 $[a,b]$ 上都一致收敛.
    - M判别法
- **定理 14.5（收敛区间端点问题）**
  - 若幂级数 (2) 的收敛半径为 $R(>0)$，且在 $x=R$(或 $x=-R$) 时收敛，则级数 (2) 在 $[0,R]$(或 $[-R,0]$) 上一致收敛.
    - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n\left(\frac{x}{R}\right)^n$. 由阿贝尔判别法证得
- **定理14.6（收敛区间端点连续问题）**
  - (i) 幂级数 (2) 的和函数是 $(-R,R)$ 上的连续函数；
    (ii) 若幂级数 (2) 在收敛区间的左 (右) 端点上收敛，
    则其和函数也在这一端点上右 (左) 连续.
- **幂函数逐项求导和逐项求积**
  - $a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots(7)$
    $a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\cdots(8)$
- **定理14.7(拥有相同的收敛区间)**
  - 幂级数 (2) 与幂级数 (7)、(8) 具有相同的收敛区间.
    - 由阿贝尔定理、比试判别法、比较原则证得
- **定理14.8（逐项求导和逐项积分）**
  - 设幂级数 (2) 在收敛区间 $(-R,R)$ 上的和函数为 f，若 x 为 $(-R,R)$ 上任意一点，则
    $(i) f$ 在点 x 可导，且 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$；
    $(ii) f$ 在 0 与 x 之间的这个区间上可积，且 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.
    - **推论1**
      - 记 f 为幂级数 (2) 在收敛区间 $(-R,R)$ 上的和函数，则在 $(-R,R)$ 上 f 具有任何阶导数，且可逐项求导任何次，即
        $f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$,
        $f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$,
        $\cdots\cdots\cdots\cdots$
        $f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n(n-1)\cdots 2a_{n+1}x+\cdots$,
    - **推论2**
      - 记 f 为幂级数 (2) 在点 $x=0$ 某邻域上的和函数，则幂级数 (2) 的系数与 f 在 $x=0$ 处的各阶导数有如下关系: $a_0=f(0)$, $\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(n=1,2,\cdots)$.
        - 唯一确定
- **定义1（幂级数相等）**
  - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$（2）
    $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots$（9）
    若幂级数 (2) 与 (9) 在点 $x=0$ 的某邻域内有相同的和函数，则称这两个幂级数在该邻域内相等.
- **定理14.9（幂级数相等）**
  - 若幂级数 (2) 与 (9) 在点 $x=0$ 的某邻域内相等，则它们同次幂项的系数相等，即 $a_n=b_n \quad (n=1,2,\cdots)$.
- **定理14.10（幂级数性质）**
  - 若幂级数 (2) 与 (9) 的收玫半径分别为 R_a 和 R_b，则有
    $$\lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_nx^n, |x|<R_a,$$
    $$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n, |x|<R,$$
    $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n, |x|<R,$$
    式中 λ 为常数，$R=\min\{R_a,R_b\}$，$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}$.
    - 由（绝对收敛）级数性质推出

函数的幂级数展开

- **Xo点的泰勒级数**
  - $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$
- **定理14.11（泰勒展开充要条件）**
  - 设 f 在点 x_0 具有任意阶导数，那么 f 在区间 (x_0-r,x_0+r) 上等于它的泰勒级数的和函数的充分条件是:对一切满足不等式 $|x-x_0|<r$ 的 x，有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$
- **麦克劳林级数**
  - $f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$
- **通过余项判断函数是否能泰勒展开**
  - 积分项余项：$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t$
  - 拉格朗日型余项：$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$
  - 柯西型余项：$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)$,
    $\xi=x_0+\theta(x-x_0), 0\leqslant\theta\leqslant 1$.

复变量的指数函数·欧拉公式

- **欧拉公式**
  - $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x, -\infty<x<+\infty$.
    - 实变量与三角函数之间的关系

第十五章傅里叶级数

傅里叶级数

三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).\text{（4）}$$

三角函数系

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

- 在 $[-\pi,\pi]$ 上具有正交性

定理15.1(三角级数收敛性)

若级数 $\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛, 则级数 (4) 在整个数轴上 绝对收敛且一致收敛.

- M判别法证得

定理15.2(傅里叶系数)

若在整个数轴上 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

且等式右边级数一致收敛, 则有如下关系式:

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots,$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots$

- 由正交性计算得到

光滑

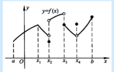
若 f 的 导函数 在 $[a,b]$ 上连续, 则称 f 在 $[a,b]$ 上光滑.

按段光滑

若定义在 $[a,b]$ 上除了至多有有限个第一类间断点的函数 f 的导函数在 $[a,b]$ 上除了至多有限个点外都存在且连续, 在这有限个点上导函数 f' 的左、右极限存在, 则称 f 在 $[a,b]$ 上按段光滑.

看不懂?

几何意义：由有限个光滑弧段所组成, 它至 多有有限个第一类间断点与角点



按段光滑性质

$1^\circ f$ 在 $[a,b]$ 上可积.

2° 在 $[a,b]$ 上每一点都存在 $f(x\pm 0)$, 且有 $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)\ \ f(x+0)}{t}=f'(x+0)$, $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t}=f'(x-0)$.

3° 补充定义 f' 在 $[a,b]$ 上那些至多有限个不存在点上的值后 (仍记为 f'), f' 在 $[a,b]$ 上可积.

定理15.3（收敛定理）

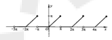
若以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上按段光滑, 则在每一点 $x\in[-\pi,\pi]$, f 的傅里叶级数 (12) 收敛于 f 在点 x 的左、右极限的算术平均值, 即

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

- **推论** 若 f 是以 2π 为周期的连续函数, 且在 $[-\pi,\pi]$ 上按段光滑, 则 f 的傅里叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛于 f.

周期延拓之后按段光滑

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0, & -\pi<x<0\end{cases}$$



以2l为周期的函数的展开式

傅里叶级数

变量置换 $\frac{\pi x}{l}=t$ 或 $x=\frac{lt}{\pi}$

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots,$

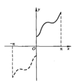
$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$

奇/偶函数的傅里叶展开

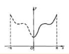
- f为[-l,l]的偶函数 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$（余弦级数）
- f为[-l,l]的奇函数 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$（正弦级数）

定义在[0,l]上的函数

- 奇延拓



- 偶延拓



收敛定理的证明

预备定理 1 (贝塞尔 (Bessel) 不等式)

若函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 则 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x,$

- **推论1（黎曼-勒贝格定理）** 若 f 为可积函数, 则 $\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0\\ \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0\end{array}\right\}$
- **推论 2** 若 f 为可积函数, 则 $\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x=0\\ \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x=0\end{array}\right\}$

预备定理2

若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积,

则它的傅里叶级数部分和 $S_n(x)$ 可写成 $S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t,$

当 $t=0$ 时, 被积函数中的不定式由极限 $\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=n+\frac{1}{2}$ 来确定.