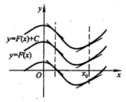
第八章不定积分

不定积分概念与基本积分公式

- **定义1（原函数）** 设函数 f 与 F 在区间 I 上都有定义. 若 $F'(x)=f(x), x\in I$, 则称 F 为 f 在区间 I 上的一个原函数.
- **定理8.1（连续一定可积）** 若函数 f 在区间 I 上连续, 则 f 在 I 上存在原函数 F, 即 $F'(x)=f(x), x\in I$
  - 初等函数都是连续函数→也是可积函数
- **定理8.2(原函数相差常数)** 设 F 是 f 在区间 I 上的一个原函数, 则
  $(i)F+C$ 也是 f 在 I 上的原函数, 其中 C 为任意常量函数;
  $(ii)f$ 在 I 上的任意两个原函数之间, 只可能相差一个常数.
  - 由拉格朗日中值定理推论证的
- **定义2（不定积分）** 函数 f 在区间 I 上的全体原函数称为 f 在 I 上的不定积分, 记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$, 其中称 $\int$ 为积分号, $f(x)$ 为被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式, x 为积分变量.
  - 几何意义



  - 存在不定积分==存在原函数
- **定理8.3（线性）** 若函数 f 与 g 在区间 I 上都存在原函数, k_1,k_2 为两个任意常数, 则 k_1f+k_2g 在 I 上也存在原函数, 且当 k_1 和 k_2 不同时为零时有 $\int[k_1f(x)+k_2g(x)]\mathrm{d}x=k_1\int f(x)\mathrm{d}x+k_2\int g(x)\mathrm{d}x.$
  - 由导数的线性性质证得

换原积分法和分布积分法

- **定理8.4-定理8.5** 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $\varphi(t)$ 在区间 J 上可导, 且 $\varphi(J)\subseteq I$.
  (i) 如果不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 在 I 上存在,
  则不定积分 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 在 J 上也存在, 且 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(\varphi(t))+C.$
  (ii) 如果 $x=\varphi(t)$ 在 J 上存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x), x\in I$, 且不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 在 I 上存在,
  则当不定积分 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=G(t)+C$ 在 J 上存在时, 在 I 上有 $\int f(x)\mathrm{d}x=G\big(\varphi^{-1}(x)\big)+C$
  - 有复合函数求导法则证得
- **定理8.6（分部积分法）** 若 $u(x)$ 与 $v(x)$ 可导, 不定积分 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则 $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ 也存在,
  并有 $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$
  - 积的求导法则可推出

有理函数和可化为有理函数的不定积分

- **有理函数的不定积分** $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\cdots+\alpha_n}{\beta_0x^m+\beta_1x^{m-1}+\cdots+\beta_m}$ **待定系数法**
- **三角函数有理式的不定积分** 换元: $t=\tan\dfrac{x}{2}$
  - $\sin x=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2t}{1+t^2}$
  - $\cos x=\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
- **某些无理根式的不定积分**
  - $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 令 $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$
  - **欧拉变换** 一般地, 二次三项式 ax^2+bx+c 中
    若 $a>0$, 则可令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x\pm t$;
    若 $c>0$, 还可令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}.$

需要具体的例题

第九章定积分

定积分概念

- **定义1（分割）**

  设闭区间 $[a,b]$ 上有 $n-1$ 个点, 依次为 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 它们把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i], i=1,2,\cdots,n$. 这些分点或这些闭子区间构成对 $[a,b]$ 的一个 分割, 记为 $T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 或 $\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$. 小区间 Δ_i 的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, 并记 $\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$, 称为 分割 T 的模.

- **定义2（黎曼和）**

  设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的一个函数. 对于 $[a,b]$ 的一个分割 $T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$, 任取点 $\xi_i\in\Delta_i, i=1,2,\cdots,n$, 并作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$. 称此和式为函数 f 在 $[a,b]$ 上的一个 积分和, 也称 黎曼和.

- **定义3（黎曼积分）**

  设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的一个函数, J 是一个确定的实数. 若对任给的正数 ε, 总存在某一正数 δ, 使得对 $[a,b]$ 的任何分割 T, 以及在其上任意选取的点集 $\{\xi_i\}$, 只要 $\|T\|<\delta$, 就有 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon$, 则称函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积或黎曼可积; 数 J 称为 f 在 $[a,b]$ 上的定积分或黎曼积分, 记作 $J=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

牛顿-莱布尼茨公式

- **定理9.1(牛顿-莱布尼茨公式)**

  若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 且存在原函数 F, 即 $F'(x)=f(x), x\in[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

  上式称为牛顿一莱布尼茨公式, 它也常写成 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\big|_a^b$.

  - 由拉格朗日中值定理和一致连续性定理证得

可积条件

- **定理9.2（必要条件）**

  若函数 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上必定有界.

  - 根据定义反证法

- **达布和**

  设 $T=\{\Delta_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$ 为对 $[a,b]$ 的任一分割. 由 f 在 $[a,b]$ 上有界, 它在每个 Δ_i 上存在上、下确界: $M_i=\sup\limits_{x\in\Delta_i}f(x), m_i=\inf\limits_{x\in\Delta_i}f(x), i=1,2,\cdots,n$.

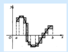
  作和 $S(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i, s(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$,

  分别称为 f 关于分割 T 的上和与下和 (或称达布上和与达布下和, 统称达布和).

  任给 $\xi_i\in\Delta_i, i=1,2,\cdots,n$, 显然有 $s(T)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant S(T)$

- **定理9.3（可积准则）**

  函数 f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是:任给 $\varepsilon>0$, 总存在相应的一个分割 T, 使得 $S(T)-s(T)<\varepsilon$

- 可积函数类
  - **定理9.4（闭区间上连续函数可积）**

    若 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

    - 由一致连续性定理证明

  - **定理9.5（有限间断点的有界函数）**

    若 f 是区间 $[a,b]$ 上只有有限个间断点的有界函数, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

  - **定理9.6（有界单调函数可积）**

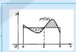
    若 f 是 $[a,b]$ 上的单调有界函数, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

    - 单调有界函数即使有无限个间断点，也不失其可积性

定积分的性质

- 线性性质
  - **性质1（数乘）** 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, k 为常数, 则 kf 在 $[a,b]$ 上也可积, 且 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
  - **性质2（加和）** 若 f,g 都在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f\pm g$ 在 $[a,b]$ 上也可积, 且 $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
- **性质3（乘积）** 若 f,g 都在 $[a,b]$ 上可积,则 $f\cdot g$ 在 $[a,b]$ 上也可积.
- **性质4（可加性）** f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是:任给 $c\in(a,b)$, f 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上都可积. 此时又有等式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.
- **性质5（积分保号性）** 设 f 为 $[a,b]$ 上的可积函数. 若 $f(x)\geqslant0, x\in[a,b]$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant0$
  - **推论（积分不等式性）** 若 f 与 g 为 $[a,b]$ 上的两个可积函数, 且 $f(x)\leqslant g(x), x\in[a,b]$, 则有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
- **性质6（绝对积分）** 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上也可积, 且 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.
- **定理9.7（积分第一中值定理）**

  若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

  - 由积分不等式性和连续函数介值性定理证得

- **定理9.8（推广的积分第一中值定理）**

  若 f 与 g 都在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

  - 同上证得

微积分学基本定理

- **定理9.9（变限积分连续）** 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续.
- **定理9.10（原函数存在定理）** 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则函数 Φ 在 $[a,b]$ 上处处可导, 且 $\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x), x\in[a,b]$
  - 有积分第一中值定理证的
- 建立反常积分收敛判别法的工具
  - **定理9.11（积分第二中值定理）**

    设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积.

    (i) 若函数 g 在 $[a,b]$ 上减, 且 $g(x)\geqslant0$, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x$;

    (ii) 若函数 g 在 $[a,b]$ 上增, 且 $g(x)\geqslant0$, 则存在 $\eta\in[a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(b)\int_{\eta}^{b}f(x)\mathrm{d}x$.

    - **推论** 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积. 若 g 为单调函数, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_{\xi}^{b}f(x)\mathrm{d}x$.
- **定理9.12（定积分换元积分法）**
- **定理9.13（定积分分部积分法）**
- **沃利斯公式** $\frac{\pi}{2}=\lim\limits_{m\to\infty}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2m+1}$ 揭示了π和整数之间的关系
- **泰勒公式的积分项余项**
  - **推广的分部积分公式** $\int_a^b u(x)v^{(n+1)}(x)\mathrm{d}x=\left[u(x)v^{(n)}(x)-u'(x)v^{(n-1)}(x)+\cdots+(-1)^n u^{(n)}(x)v(x)\right]_a^b+(-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}(x)v(x)\mathrm{d}x$, $(n=1,2,\cdots)$.
  - $R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t$ （分部积分公式）
  - $R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ （推广的微分第一中值定理）
  - $R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)$, $\xi=x_0+\theta(x-x_0), 0\leqslant\theta\leqslant1$. （微分第一中值定理）