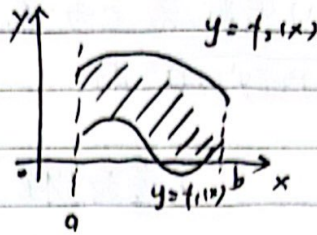


总结 §7. 定积分的应用

△ 平面图形的面积

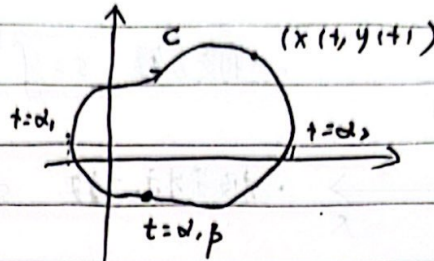
1. 一般方程

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$



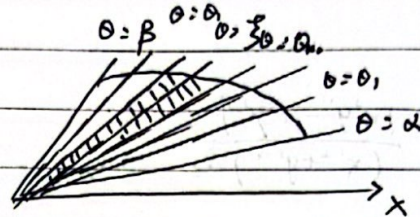
2. 参数方程

$$A = \int_a^b [y(t)x'(t)] dt$$



3. 极坐标方程

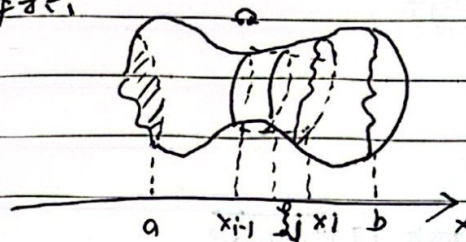
$$A = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\theta) d\theta$$



△ 由平面截面面积求体积

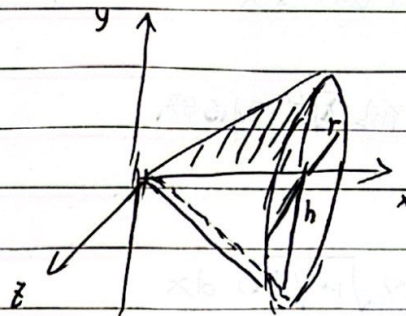
1. 切片求体积

$$V = \int_a^b A(x) dx$$



2. 旋转体体积

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



△ 平面曲线的弧长与曲率

1. 定理 10.1 (平面曲线的弧长) 设曲线 C 是一条没有自交点的封闭曲线,

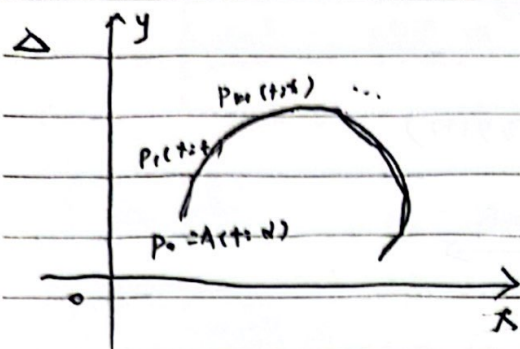
由参数方程 $x=x(t), y=y(t), t \in [\alpha, \beta]$ 给出. 若 $x(t)$ 与 $y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 连续可微, 则 C 是可求长的. 弧长为 $s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$.



2. 定义 3 (光滑曲线)

设曲线 C 由参数方程 (1) 给出, 若 C 为一光滑曲线, 则 C 是可求长的.

且弧长为 $s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$



• 参数方程 $s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$

• 一般方程 $s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$

• 极坐标方程 $s = \int_a^b \sqrt{r'^2(\theta) + r^2(\theta)} d\theta$

3. 曲率

• 参数方程 $K = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$

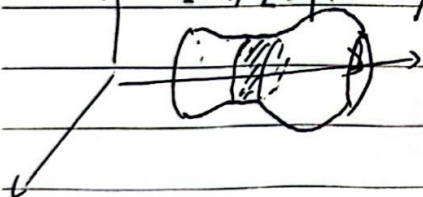
• 一般方程 $K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$

△ 旋转曲面的面积

1. 微元法

• $\Delta s = \pi [f(x) + f(x + \Delta x)] \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

$\uparrow = \pi [2f(x) + \Delta y] \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$



近似圆台侧面积

2. 面积方程

• 一般方程 $s = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$

• 参数方程 $s = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$

△ 定积分在物理学中的应用

1. 液体静压力

2. 引力

3. 功与平均功率



△ 定积分的近似计算

1. 梯形法

2. 抛物线法

