

# PENDOLO A TORSIONE

FRANCESCO FORCHER

Università di Padova, Facoltà di Fisica  
francesco.forcher@studenti.unipd.it  
Matricola 1073458

DAVIDE CHIAPPARA

Università di Padova, Facoltà di Fisica  
davide.chiappara@studenti.unipd.it  
Matricola 1070160

SIMONE FRAU

Università di Padova, Facoltà di Fisica  
simone.frau@studenti.unipd.it  
Matricola 1074028

10 giugno 2014

$$pV = nRT$$

## Sommario

*Obiettivo dell'esperienza è stato studiare il moto di un cilindro in acqua in seguito ad una forza periodica impressa al cilindro stesso da un motore elettrico attraverso un filo che permette la trasmissione di un momento torcente. Dai campioni ricavati sperimentalmente si è indagato, in particolare, sulla curva di risonanza, sulla frequenza di risonanza, sul coefficiente di smorzamento e sulla pulsazione propria del sistema.*

## INDICE

<b>I</b>	<b>Apparato strumentale</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Metodologia di misura</b>	<b>2</b>
<b>III</b>	<b>Presentazione dei dati</b>	<b>3</b>
I	Tabelle . . . . .	3
II	Grafici . . . . .	6
<b>IV</b>	<b>Analisi dei dati</b>	<b>7</b>
<b>V</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>7</b>
<b>VI</b>	<b>Codice</b>	<b>7</b>

## I. APPARATO STRUMENTALE

L'apparato strumentale consiste in un cilindro in plexiglass al cui interno è posto un peso in acciaio di massa:  $(115.5 \pm 0.1)g$  e diametro:  $(22.7 \pm 0.1)mm$  e altezza:  $(34.0 \pm 0.1)mm$  collegato ad un filo di acciaio armonico, materiale dotato discrete capacità elastiche, ed immerso in un liquido. Il filo è inoltre collegato ad una piattaforma rotante azionata da un motore di diametro circa 8cm che, una volta azionato, induce un'oscillazione forzata del corpo formato dal filo più il pesetto. Il range delle frequenze alla quale il motore può essere indotto ad oscillare risulta compreso tra 0.8 e 1.2 Hz. Di suddetta oscillazione è possibile modificare il periodo e l'ampiezza. Il tutto viene controllato e registrato mediante l'interfaccia fornita da un computer. I dati vengono acquisiti in intervalli di 0.05 secondi permettendo una frequenza di rilevamento di 20 dati per secondo. L'interfaccia permette di visualizzare valori della frequenza, dell'ampiezza e della fase (espressa in gradi). Inoltre sono presenti diversi grafici che mostrano, in tempo reale, la curva di risonanza, il moto del pesetto, segnandone la posizione. Inoltre la presenza del pulsante offset permetteva di tarare l'apparato dopo ogni misurazione, al fine di limitare errori sistematici.

## II. METODOLOGIA DI MISURA

Per poter stimare la frequenza di risonanza si è proceduti azionando il motore e mettendo in oscillazione la piattaforma rotante. Partendo dalle informazioni fornite e dall'apparecchiatura si è deciso di porre l'ampiezza a 10 millesimi di giro e di variare gli intervalli delle frequenze di 0.020 Hz e acquisendo campioni di misure per un tempo totale di circa 10 secondi durante la fase a regime, interrompendo la misurazione per eseguire lo store dei dati così ricavati, spegnendo il motore e intraprendendo una seconda fase di registrazione dati per una durata di circa 20 secondi per la fase di smorzamento, al termine del quale è stato eseguito nuovamente lo store dei dati. Le misure sono state prese solo non appena è stato evidente dai grafici di riferimento il carattere periodico del moto del pendolo. L'apparato strumentale è stato ricalibrato prima delle prese dati della giornata per permetterne un funzionamento ottimale. L'ampiezza massima di oscillazione della forzante è stata scelta per permettere oscillazioni abbastanza ampie da studiare ma non così ampie da rendere caotico il moto del pendolo, costringendolo a muoversi sul piano perpendicolare all'asse di oscillazione. Attraverso questo metodo è stato possibile ottenere una panoramica del comportamento oscillatorio del materiale di studio e identificare efficacemente il settore in cui avveniva il fenomeno di risonanza. Tale settore è stato poi sondato ricorrendo al metodo di bisezione restringendosi in un intorno di valori della frequenza e aumentando l'esposizione dell'acquisizione dati. In questa fase (che

si concentra nell'intervallo tra 0.965 e 0.970 Hz) sono stati registrati valori per la durata di circa 100 secondi per la fase a regime e di 40 secondi circa per la fase in smorzamento, una volta spento il motore. Questo offre agli sperimentatori la possibilità di analizzare una serie di campioni più concentrati avente intervalli di frequenza di 0.001 Hz, permettendo di stimare il più efficacemente possibile la frequenza di risonanza.

### III. PRESENTAZIONE DEI DATI

#### I. Tabelle

**Tabella 1:** *Pulsazioni smorzate*

Frequenza forzante [Hz]	Pulsazione smorzante [ $\frac{rad}{s}$ ]	Errore [Hz]
0.900	6	1
0.920	6.1	0.2
0.940	6.1	0.2
0.960	6.08	0.03
0.965	6.1	0.1
0.966	6.07	0.06
0.967	6.08	0.06
0.968	6	1
0.969	5	2
0.970	6.08	0.08
0.975	6.0	0.6
0.980	6.08	0.06
0.990	6.1	0.1
1.000	6	1
1.020	6.1	0.5
1.060	5	2
1.080	6	1

Media pesata pulsazione di smorzamento:  $6.07 [\frac{rad}{s}]$

Errore media pesata:  $0.09 [\frac{rad}{s}]$

**Tabella 2:** *Ampiezze di osillazione a regime*

Frequenza forzante [Hz]	Ampiezza [giri]	$\sigma_{amp}$ [giri]
0.900	0.031	0.001
0.920	0.0452	0.0009
0.940	0.083	0.001
0.960	0.2187	0.0007
0.965	0.247	0.008
0.966	0.23	0.01
0.967	0.282	0.002
0.968	0.290	0.006
0.969	0.290	0.002
0.970	0.275	0.002
0.975	0.227	0.001
0.980	0.168	0.003
1.000	0.072	0.003
1.020	0.050	0.002
1.040	0.0373	0.0007
1.060	0.0302	0.0005
1.080	0.0257	0.0007
1.100	0.0226	0.0006

**Tabella 3:** Interpolazione per trovare le gamma, retta  $y = a + b \cdot x$  su scala logaritmica

Frequenza forzante [Hz]	Parametro a	Errore su a	Parametro b [Hz]	Errore su b [Hz]
0.900	-1.56	0.02	-0.045	0.002
0.920	-1.22	0.04	-0.047	0.003
0.940	-0.82	0.05	-0.040	0.005
0.960	-0.82	0.05	-0.040	0.005
0.965	0.459	0.006	-0.0481	0.0003
0.966	0.461	0.005	-0.0481	0.0002
0.967	0.51	0.02	-0.0470	0.0008
0.968	0.53	0.02	-0.0467	0.0004
0.969	0.52	0.03	-0.0469	0.0005
0.970	0.42	0.04	-0.045	0.002
0.975	0.23	0.02	-0.046	0.001
0.980	-0.14	0.06	-0.039	0.005
1.000	-0.85	0.09	-0.035	0.008
1.020	-1.25	0.02	-0.045	0.002
1.060	-2.05	0.02	-0.048	0.002
1.080	-2.2	0.1	-0.03	0.01

Media pesata gamma:  $-0.047s^{-1}[Hz]$

Errore media pesata:  $0.007s^{-1}[Hz]$

Pulsazione propria:  $6.1 \pm 0.3[Hz]$

## II. Grafici

#### IV. ANALISI DEI DATI

Come detto nella descrizione dell'apparato strumentale, il tasso di rilevamento dei dati è di 20 al secondo. Questo corrisponde a una frequenza di campionamento di 20 Hertz, di molto superiore al Nyquist rate necessario per il pendolo (il doppio della massima frequenza necessaria), dato che come verificabile a vista ha una frequenza dell'ordine di 1 Hz. Non ci sono quindi problemi di aliasing e sottocampionamento. Per quanto riguarda l'offset, è stata rifatta la calibrazione prima di ogni presa dati (inizio giornata) e si può vedere che era calibrato da un'evidente simmetria rispetto all'asse delle ascisse. Per il calcolo dei massimi è stato utilizzato un programma che riconoscesse i punti di massimo e minimo approssimando la funzione come una parabola in un intorno dei dati "stazionari" (dati massimi e minimi locali) usando il dato precedente e il successivo, vincolando la parabola a passare per questi 3 punti e trovandone il vertice. L'errore legato all'utilizzo di questa approssimazione è, come noto dallo sviluppo di Taylor delle funzioni goniometriche,  $o(x^3)$ , che essendo lo step 0.05 è compreso tra  $10^{-3}$  e  $10^{-4}$ , e trascurabile rispetto agli altri errori. Per una stima delle ampiezze legate alle frequenze di oscillazione sono stati presi i valori medi delle ordinate dei massimi (e dei valori assoluti dei minimi).

Una stima della pulsazione di risonanza è stata fatta con un processo di esplorazione iniziale che ha permesso, attraverso il metodo di bisezione, di concentrarsi sull'area nella quale l'ampiezza era più alta. Il valore finale trovato risulta di... Per stimare il coefficiente di smorzamento  $\gamma$  legato al movimento dell'acqua è stato tentato un approccio diretto con gnuplot, ma i problemi del suo algoritmo (Levenberg-Marquardt, una forma di step gradient descent) nel caso di funzioni come questa, in cui il gradiente dei minimi quadrati è pieno di punti stazionari locali, ne hanno impedito l'applicabilità pratica. Quindi è stato scelto un'altro approccio che elimini questi problemi, in particolare limitando lo studio a una semplice funzione esponenziale, che è stata ulteriormente semplificata in un fit lineare usando una scala logaritmica. Di conseguenza, sono stati cercati gli  $x_i \mid f(x_i) = 0$ . Essendo la funzione

$$\theta_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega_s t + \phi), \quad (1)$$

poichè  $e^{-\gamma t} > 0$  gli zeri della funzione sono solo gli zeri del seno. Quindi i punti medi  $x_m = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$  fra gli zeri sono i punti in cui  $\sin(\omega_s t + \phi) = 1$ . Interpolando questi punti la funzione diventa dunque

$$\theta_0 e^{-\gamma t} \cdot 1 = \theta_0 e^{-\gamma t}.$$

Interpolando questa funzione con i punti  $(x_m, \log f(x_m))$  (le coordinate  $f(x_m)$  sono state calcolate, nei casi in cui non fossero già un punto dei dati, interpolando linearmente tra i due punti più prossimi).

La pulsazione di smorzamento è stata ottenuta attraverso una media pesata delle pulsazioni ottenute dallo studio dei periodi dei grafici durante la fase di smorzamento (vedasi tabella...) La pulsazione propria è stata trovata attraverso la formula  $\omega_0 = \sqrt{\omega_s^2 + \gamma^2}$ . Gli errori sono stati stimati a partire da una stima diretta con la sommatoria degli scarti al quadrato diviso  $N - 1$ . I grafici rivelano che, entro gli errori casuali...

#### V. CONCLUSIONI

#### VI. CODICE