

RELAZIONE DI ELETTRONICA

FRANCESCO FORCHER

Università di Padova, Facoltà di Fisica
francesco.forcher@studenti.unipd.it
Matricola: 1073458

DAVIDE CHIAPPARA

Università di Padova, Facoltà di Fisica
davide.chiappara@studenti.unipd.it
Matricola: 1070160

GABRIELE LABANCA

Università di Padova, Facoltà di Fisica
gabriele.labanca@studenti.unipd.it
Matricola: 1069556

29 marzo 2015

Sommario

Sono stati costruiti dei circuiti elementari e sono state misurate le resistenze interne degli strumenti di misura. Si è inoltre verificata la validità della legge di Ohm.

INDICE

I Circuiti	2
II Analisi dei dati	4
I Misure dirette di resistenze	4
II Misura voltamperometrica di una resistenza	5
III Resistenze interne degli strumenti di misura	9
III Appendice: calcolo degli errori	10
IV Conclusioni	10
V Codice	11

I. CIRCUITI

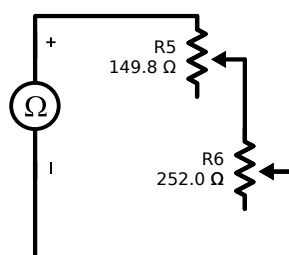


Figura 1: Resistenza in serie

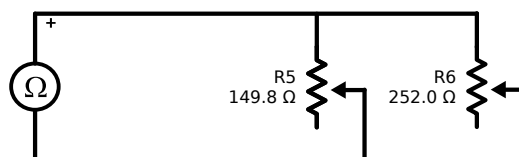


Figura 2: Resistenza in parallelo

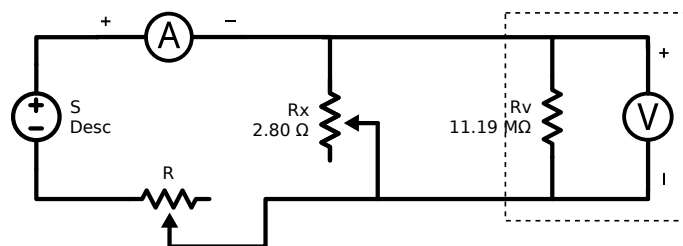


Figura 3: Misura voltamperometrica

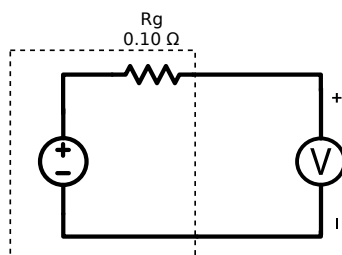


Figura 4: Resistenza del generatore (I)

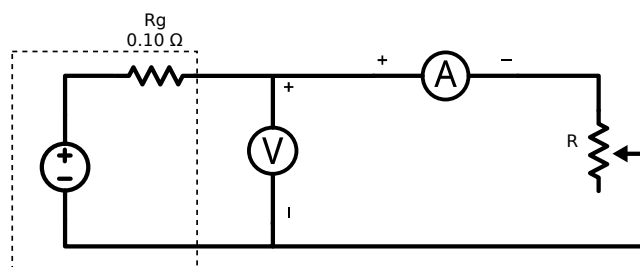


Figura 5: Resistenza del generatore (II)

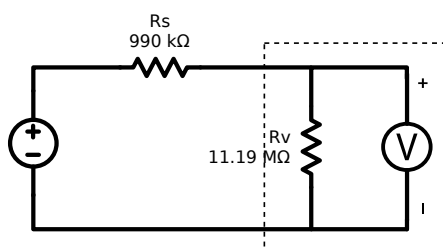


Figura 6: Resistenza voltmetro

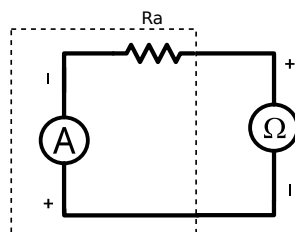


Figura 7: Resistenza amperometro

II. ANALISI DEI DATI

Nota bene: tutti i calcoli sono stati effettuati mantenendo un numero superiore di cifre significative, riducendone il numero solo in sede di presentazione dati.

II.1 Misure dirette di resistenze

I valori riportati in **Tabella 1** (valori in Ω) sono quelli delle misure dirette delle resistenze, prese col multimetro FLUKE 111.

Per stimare gli errori delle misure dirette si è usata la formula nell'appendice §III.

Per quanto riguarda le resistenze R_5 e R_6 in serie, da una misurazione diretta effettuata col multimetro FLUKE 111 risulta che $R_{S, \text{sper}} = (402 \pm 2)\Omega$.

Per il calcolo teorico, è stato considerato che $R_{S, \text{teor}} = k \cdot (R_5^{(r)} + R_6^{(r)})$: infatti la k è costante in misurazioni successive, mantenendo il medesimo fondo scala. Con semplice propagazione degli errori risulta che

$$\sigma_{R_{S, \text{teor}}} = \sqrt{(R_5 + R_6)^2 \cdot \sigma_k^2 + \sigma_{R_5^{(r)}}^2 + \sigma_{R_6^{(r)}}^2};$$

$$R_{S, \text{teor}} = (402 \pm 2)\Omega$$

È stata calcolata la compatibilità tra le due diverse stime della resistenza, considerando che la loro differenza dovrebbe essere nulla:

$$\Delta R = R_{S, \text{teor}} - R_{S, \text{sper}} = k \cdot (R_{S, \text{sper}}^{(r)} - R_5^{(r)} - R_6^{(r)})$$

da cui per propagazione si ricava che

$$\sigma_{\Delta R} = \sqrt{(\Delta R)^2 \sigma_k^2 + 3\sigma_R^{(r)2}}$$

Tabella 1: Misure dirette resistenze

	R	σ_R	R_{FS}
R_1	67.8	0.4	600
R_2	67.9	0.4	600
R_3	561	3	600
R_4	1890	10	6000
R_5	149.8	0.8	600
R_6	252.0	1.3	600

e quindi

$$\lambda = \frac{|\Delta R - 0|}{\sigma_{\Delta R}} = 0.5$$

Per il calcolo della resistenza equivalente a R_5 e R_6 in parallelo, il valore misurato con il multimetro FLUKE 111 è $R_{P,sper} = (94 \pm 2)\Omega$.

Considerando che $R_{P,teor} = k \frac{R_5^{(r)} R_6^{(r)}}{R_5^{(r)} + R_6^{(r)}}$ e propagando, riutilizzando la medesima semplificazione sull'errore di scala, si ottiene

$$\sigma_{P,teor} = \sqrt{\left(\frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}\right)^2 \sigma_k^2 + \frac{R_5^4 + R_6^4}{(R_5 + R_6)^4} \sigma_{R^{(r)}}^2} \cdot R_{P,teor}$$

$$R_{P,teor} = (94 \pm 0.5)\Omega$$

Ridefinendo

$$\Delta R = k \cdot \left(R_{P,sper} - \frac{R_5^{(r)} R_6^{(r)}}{R_5^{(r)} + R_6^{(r)}} \right)$$

da cui per propagazione si ricava che

$$\sigma_{\Delta R} = \sqrt{\sigma_k^2 \cdot \Delta R^2 + \sigma_{R^{(r)}}^2 \left(1 + \frac{R_5^4 + R_6^4}{(R_5 + R_6)^4} \right)}$$

la compatibilità risulta

$$\lambda = \frac{|\Delta R - 0|}{\sigma_{\Delta R}} = 0.39$$

II.II Misura voltamperometrica di una resistenza

Per misurare una resistenza piccola è stato costruito un circuito come in figura. Una prima misura diretta è stata effettuata utilizzando il multimetro FLUKE 111, che è risultata $R_x = (3.0 \pm 0.1)\Omega$.

Costruito il circuito, si è variata la resistenza di carico e la potenza erogata dal generatore per indagare di quanto fosse la caduta di potenziale al variare della corrente che attraversa R . I dati ottenuti sono riportati in **Tabella 2**. Il fondo scala è di 200mA per le correnti e di 600mV per le tensioni.

Nel **Grafico 1** sono riportate tali misure esprimendo V in funzione di I , sovrapposte a un fit lineare ottenuto col metodo della massima verosimiglianza.

I coefficienti della retta interpolante $y = mx + q$ sono:

$$m = (2.798 \pm 0.007)\Omega$$

$$q = (1.0 \pm 0.5)\text{mV}.$$

Tabella 2: Misure caduta di potenziale

i (mA)	V (mV)
25.0	70.5
30.6	86.2
37.5	106.4
49.6	140.3
60.8	171.7
64.7	182.0
72.9	204.3
81.8	230.1
90.5	254.8
100.0	280.1

Utilizzando la formula per la covarianza tra i coefficienti dell'interpolazione lineare, si è potuto calcolare la correlazione

$$\rho(m, q) = \frac{\text{cov}(m, q)}{\sigma_m \sigma_q} = -0.93$$

e l'errore a posteriori sulla caduta di tensione è di $\sigma_V = 0.6 \text{ mV}$.

Questo valore è stato calcolato direttamente dai dati con la formula¹

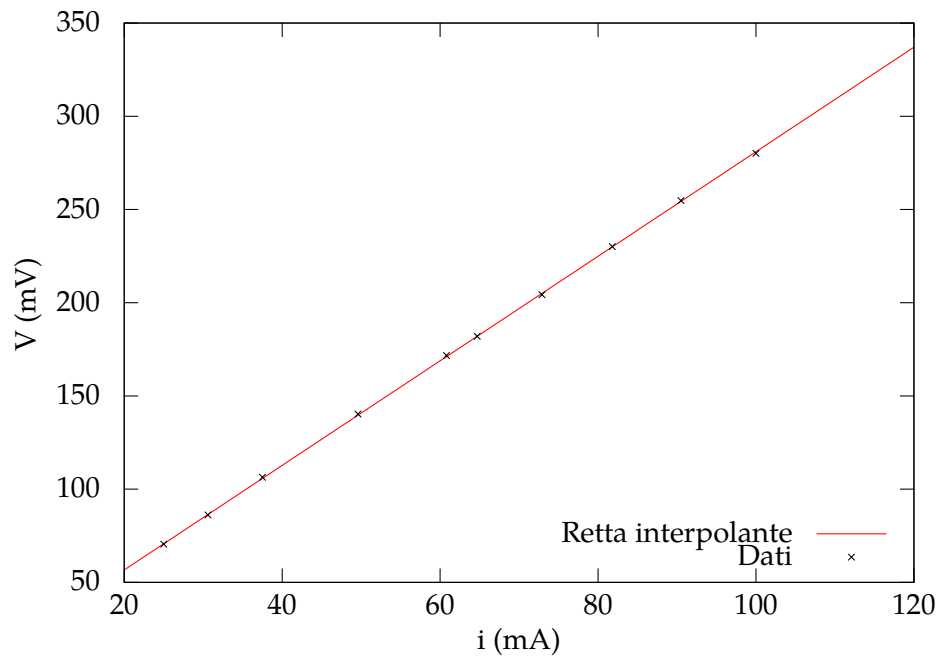
$$\sigma_V = \frac{\sum_i^N (y_i - (mx_i + q))^2}{N - 2}. \quad (1)$$

Risulta un po' alto, ma si vede anche dal **Grafico 2** come un valore minore di σ_V implicherebbe che la maggior parte dei dati sia a più di una sigma dallo zero.

In tale grafico si è rappresentata la differenza tra il valore di tensione misurato e quello ricavato teoricamente dalla retta interpolante in corrispondenza del suo valore di corrente.

Una stima della resistenza è data dalla pendenza della retta interpolante. Tale retta ha un errore che è composizione di un errore sistematico e di uno statistico, infatti si può scrivere $m = \frac{k_V (V_2^{(r)} - V_1^{(r)})}{k_i (i_2^{(r)} - i_1^{(r)})} = \frac{k_V}{k_i} m^{(r)}$. Da una propagazione risulta che l'errore su tale grandezza è $\sigma_m = \sqrt{\sigma_{m, \text{fit}}^2 + \sigma_{k_V}^2 m^2 + \sigma_{k_i}^2 m^2}$

¹ M. Loreti, *Teoria degli Errori e Fondamenti di Statistica*, p. 184

Grafico 1 Fit lineare

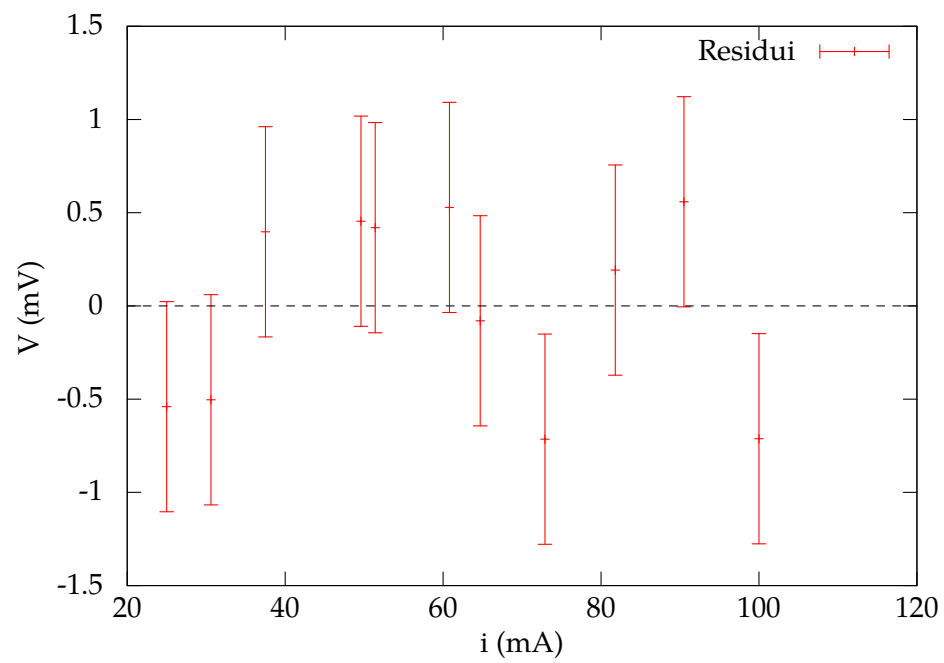
con $\sigma_{m,fit}$ errore casuale ottenuto attraverso le formule dell'interpolazione. Risultata che l'incertezza sulla resistenza è quasi completamente data dall'errore sistematico. Il risultato finale è

$$R = (2.80 \pm 0.02)\Omega;$$

l'errore percentuale è 0.59%.

Si possono confrontare il risultato teorico e quello sperimentale con un calcolo di compatibilità. Dato che sono state usate strumentazioni differenti per le due stime, se ne può applicare la definizione:

$$\lambda = \frac{|R_x - R|}{\sqrt{\sigma_{R_x}^2 + \sigma_R^2}} = 1.7$$

Grafico 2 Residui

II.III Resistenze interne degli strumenti di misura

Attraverso costruzioni di circuiti o misure dirette, si sono stimate le resistenze interne degli strumenti utilizzati. Per la stima della resistenza interna del generatore si è costruito un circuito come in figura e utilizzato il voltmetro AGILENT U1232A con l'amperometro BECKMAN T110B. Dalle misure risulta che

$$V_0 = (5.01 \pm 0.01)V \text{ con } V_{FS} = 6V \quad (2)$$

$$i = (124.9 \pm 0.5)mA \text{ con } i_{FS} = 200mA \quad (3)$$

$$V = (5.00 \pm 0.01)V \text{ con } V_{FS} = 6V. \quad (4)$$

Da uno studio del circuito si ricava la formula $R_G = \frac{V_0 - V}{i}$. Stimandone l'errore, per evitare problemi di correlazione si può scrivere

$$R_G = \frac{k_v (V_0^{(r)} - V^{(r)})}{i}$$

da cui propagando:

$$\sigma_{R_G} = \sqrt{R_G^2 \sigma_{k_v}^2 + \frac{(\sigma_{V^{(r)}}^2 + \sigma_{V_0^{(r)}}^2)}{i^2} + \frac{(V_0 - V)^2}{i^4} \sigma_i^2}$$

$$R_G = (0.10 \pm 0.01)\Omega$$

Un diverso circuito è stato costruito per stimare la resistenza interna dell'AGILENT U1232A utilizzato come voltmetro. Una misurazione diretta di R_V è stata ottenuta utilizzando come ohmetro il BECKMAN T110B:

$$R_{V, \text{sper}} = (11.2 \pm 0.1)M\Omega$$

con fondo scala di $20M\Omega$. Le misure prese a circuito chiuso sono:

$$R_S = (0.990 \pm 0.005)M\Omega \text{ con } R_{FS} = 6M\Omega \quad (5)$$

$$V_0 = (5.01 \pm 0.01)V \text{ con } V_{FS} = 6V \quad (6)$$

$$V = (4.60 \pm 0.01)V \text{ con } V_{FS} = 6V \quad (7)$$

Studiando il circuito, si può dimostrare che $R_{V, \text{teor}} = \frac{R_S V}{V_0 - V}$. Evidenziando il coefficiente k_V e semplificandolo, si ha $R_{V, \text{teor}} = \frac{R_S V^{(r)}}{V_0^{(r)} - V^{(r)}}$ da cui, propagando, si ottiene

$$\sigma_{R_{V, \text{teor}}} = \sqrt{\sigma_{R_S}^2 \left(\frac{V}{V_0 - V} \right)^2 + \sigma_{V^{(r)}}^2 \left(\frac{R_S V_0}{(V_0 - V)^2} \right)^2 + \sigma_{V_0^{(r)}}^2 \left(\frac{R_S V}{(V_0 - V)^2} \right)^2}$$

$$R_{V, \text{teor}} = (11.19 \pm 0.08)M\Omega$$

Per misurare la resistenza interna del BECKMAN T110B, usato come amperometro, si è semplicemente effettuato un collegamento con il FLUKE 111 usato come ohmetro. I valori sono riportati in **Tabella 3**.

Tabella 3: Resistenze dell'amperometro BECKMAN

I_{FS}	$R(\Omega)$	$\sigma_R(\Omega)$	$R_{FS}(\Omega)$
200 mA	1002	5	6000
2 mA	102.1	0.5	600
20 mA	11.4	0.1	600
200 mA	1.8	0.1	600
2 A	1.2	0.1	600

III. APPENDICE: CALCOLO DEGLI ERRORI

Si riporta la formula usata per il calcolo dell'incertezza di una misura diretta $A \pm \sigma_A$:

$$\sigma_A = \sqrt{\sigma_{sist}^2 + \sigma_{stat}^2} = 0.58 \sqrt{(A \cdot \Delta P)^2 + (n_{digit} \cdot \min(FS))^2}$$

Infatti gli errori legati alla misurazione sono dovuti sia a errori di scala ($A = k_A \cdot A^{(r)}$), sia a errori casuali connessi al numero di digit. Per chiarezza di notazione, $\sigma^{(r)}$ è considerato errore statistico, mentre con σ si intende l'errore totale.

Inoltre, per stimare σ_k si è utilizzato l'errore percentuale fornito dal costruttore del multimetro, considerando k distribuito uniformemente:

$$\sigma_k = 0.58 \cdot \Delta_P$$

IV. CONCLUSIONI

Tutti i valori misurati e calcolati sono coerenti e richiamano le aspettative fatte. L'unica grandezza che rivela un parziale disaccordo tra i dati è la compatibilità nel caso della misura voltamperometrica. Si evince comunque, dai grafici presentati, che la retta interpola sufficientemente bene i dati raccolti.

V. CODICE

È presentata qua la parte fondamentale del codice in c++ usato per i calcoli numerici. Inoltre è stato usato per i calcoli Mathematica.

```

1 double interp_delta(int N, double * x, double * y)
2 {
3     double delta=N*sumquad(N, x)-((sum(N, x))*(sum(N, x)));
4     return delta;
5 }
6 double interp_a(int N, double * x, double * y)
7 {
8     double a=(1/interp_delta(N, x, y))*((sumquad(N, x))*(sum(N,
9         y))-((sum(N, x))*(sumprod (N, x, y))));
10    return a;
11 }
12 double interp_b(int N, double * x, double * y)
13 {
14     double b=(1/interp_delta(N, x, y))*(N*(sumprod(N, x, y))-((sum(N,
15         x))*(sum(N, y))));
16    return b;
17 }
18 double sigmay_post(int N, double * x, double * y)
19 {
20     double sy=0;
21     for (int i=0; i<N; i++){
22         sy+=((interp_a(N, x, y))+((interp_b(N, x,
23             y))*x[i])-(y[i]))*((interp_a(N, x, y))+((interp_b(N, x,
24             y))*x[i])-(y[i]));
25     }
26     sy=sy/(N-2);
27     sy=sqrt(sy);
28     return sy;
29 }
30 double interp_sigmaa(int N, double * x, double * y)
31 {
32     double sa=(sigmay_post(N, x, y))*sqrt((sumquad(N,
33         x))/(interp_delta(N, x, y)));
34     return sa;
35 }
36 double interp_siglab(int N, double * x, double * y)
37 {
38     double sb=(sigmay_post(N, x, y))*sqrt(N/(interp_delta(N, x, y)));
39     return sb;
40 }
41 double cov_mq(int N, double * x, double * y)
42 {
43     return (-((sum(N, x)*sigmay_post(N, x, y)*sigmay_post(N, x,
44         y)/interp_delta(N, x, y)));
45 }

```