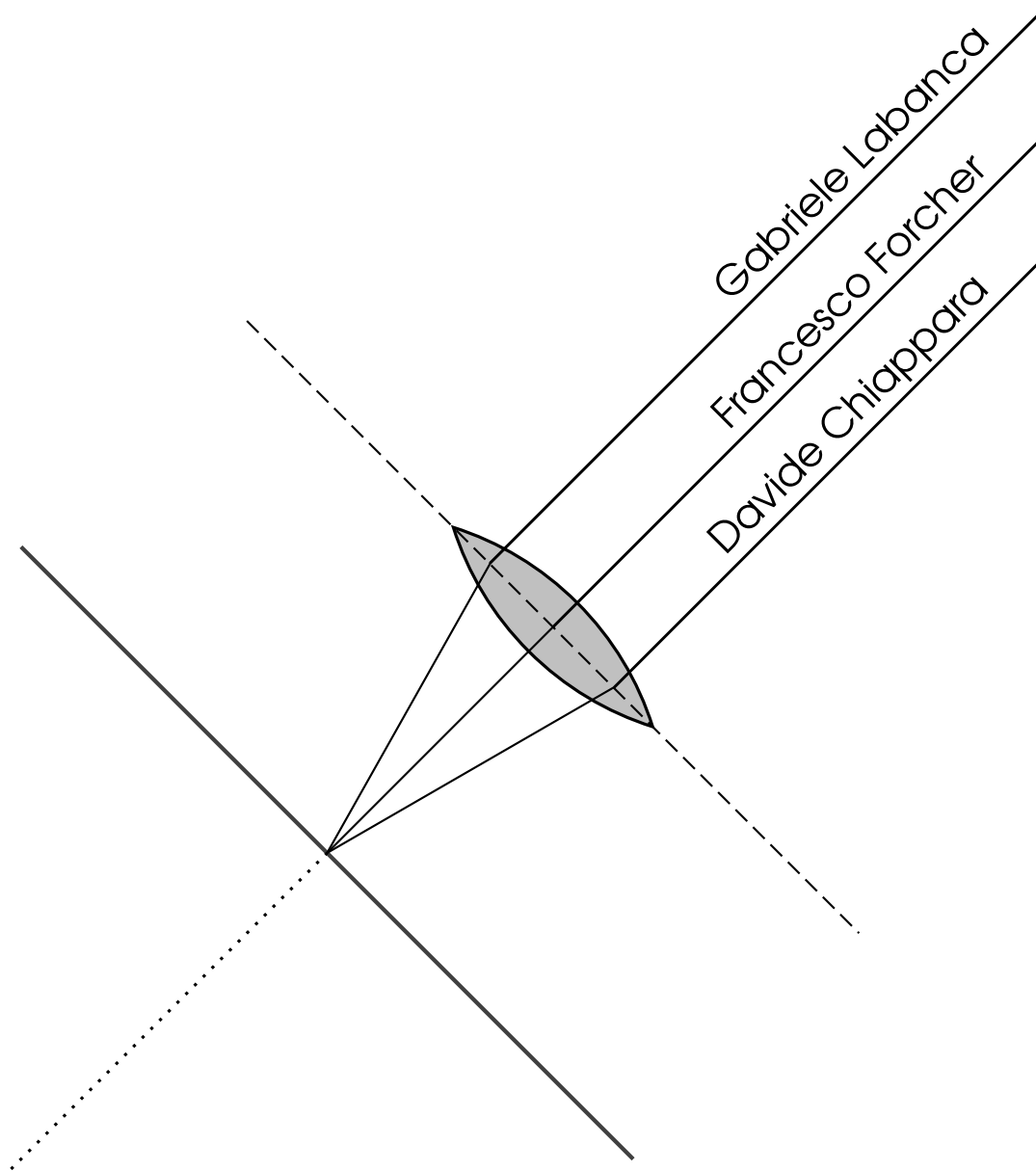


# OTTICA GEOMETRICA

Gabriele Labanca

Francesco Forcher

Davide Chiappara



FRANCESCO FORCHER

Università di Padova, Facoltà di Fisica  
francesco.forcher@studenti.unipd.it  
Matricola: 1073458

DAVIDE CHIAPPARA

Università di Padova, Facoltà di Fisica  
davide.chiappara@studenti.unipd.it  
Matricola: 1070160

GABRIELE LABANCA

Università di Padova, Facoltà di Fisica  
gabriele.labanca@studenti.unipd.it  
Matricola: 1069556

22 dicembre 2014

## Sommario

*L'obiettivo delle esperienze è la stima delle grandezze fisiche caratterizzanti la lente presa in considerazione, la numero 3. Con le prime tre esperienze si sono trovate altrettante stime della distanza focale  $f^*$ , le quali sono state utilizzate, una volta corrette rispetto all'aberrazione sferica, per la stima del coefficiente  $c$  di tale aberrazione (quarta esperienza) e del numero di Abbe  $V$ , indicativo all'aberrazione cromatica (quinta esperienza).*

## INDICE

<b>I</b>	<b>Apparato strumentale</b>	<b>3</b>
<b>II</b>	<b>Metodologia di misura</b>	<b>4</b>
<b>III</b>	<b>Presentazione dei dati</b>	<b>8</b>
I	Autocollimazione . . . . .	8
II	Punti coniugati . . . . .	11
III	Bessel . . . . .	19
IV	Aberrazione sferica . . . . .	20
V	Aberrazione cromatica . . . . .	22
<b>IV</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>24</b>
<b>V</b>	<b>Codice</b>	<b>24</b>

## I. APPARATO STRUMENTALE

La strumentazione (banco ottico numero 5) consisteva in:

- Guida ottica di lunghezza  $\approx 140$  cm con scala graduata con passo 0.5 mm
- Generatore di corrente di intensità e voltaggio regolabili
- Lampada
- Cavaliere portalampada con tre filtri cromatici e un portamascherina
- Cavaliere portalente con micrometro (valore di azzeramento 8.60 mm)
- Cavaliere portalente senza micrometro
- Cavaliere portaschermo con due micrometri
- Cavaliere portasquadra
- Mascherina con buco centrale
- Diaframma con singolo buco centrale
- Diaframma con 2 buchi marginali e 2 parassiali posti su segmenti ortogonali
- Lente numero 3
- Doppietto di Dollond
- Oculare con un ingrandimento di 8x

## II. METODOLOGIA DI MISURA

L'esperienza è suddivisa in 5 fasi diverse, ognuna con un'approccio sperimentale e un'analisi dati differente. Questa sezione ha lo scopo di descrivere la metodologia prescelta dagli sperimentatori in laboratorio, dunque non vi si discutono le scelte numeriche fatte o le analisi dati, un'accurata descrizione delle quali è fornita nelle sezioni successive.

Preliminarmente a ogni esperienza, è stato necessario preparare il banco ottico con la seguente procedura: in primo luogo tutti i micrometri sono portati allo zero della scala, dopodiché il cavaliere portalamпада è fissato in un punto arbitrario della guida; tale punto è stato scelto il più marginalmente possibile sulla sinistra per avere spazio a disposizione per gli altri cavalieri. Bloccato con la vite il cavaliere portalamпада, si utilizza il cavaliere con squadra per andare a leggere sulla scala millimetrata il valore che, dopo aver finito la preparazione dell'apparato sperimentale, corrisponderà alla posizione dell'oggetto relativa alla guida ottica. Il cavaliere con squadra va subito rimosso dalla guida ottica. Fatto ciò, viene montata la mascherina con foro singolo sull'apposito supporto presente sul cavaliere portalamпада, mantenendo l'anello di fissaggio rivolto a destra.

Sistemato il cavaliere portalamпада, il cavaliere portalente viene posizionato sulla guida ottica e vi si avvita la lente sul lato destro, poi il diaframma sul sinistro. È necessaria particolare attenzione nell'avvitare la lente fino alla fine del filo delle componenti meccaniche del sistema. Alla sinistra del portalente non ancora fissato va posto il cavaliere portascermo con micrometro, in modo tale che lo schermo sia rivolto verso sinistra, e si inserisce nel cavaliere portalamпада il filtro di colore giallo.

Per stimare la lunghezza focale attraverso il metodo dell'autocollimazione si è operato spostando il cavaliere portalente con micrometro sulla guida ottica manuale o attraverso il micrometro, e tramite lettura di valori sul metro posto sulla guida o sui micrometri. Il diaframma utilizzato per questa esperienza è quello con un singolo foro centrale.

Preparato il banco ottico, prima di iniziare la vera e propria presa dati si è cercato approssimativamente quale potesse essere la posizione del fuoco della lente. Si è quindi mosso il cavaliere portalente e successivamente confrontata grossolanamente la dimensione delle proiezioni del raggio sullo schermo quando esso veniva posto vicino o lontano dal cavaliere portalente. Eseguita una volta questa operazione, essa è stata ripetuta più volte muovendo il cavaliere portalente a sinistra o a destra a seconda che l'immagine nello schermo fosse più grande rispettivamente nel caso lo schermo fosse posto più vicino o più lontano dalla lente. Una reiterazione di queste azioni ha permesso dopo circa 4-5 ripetizioni di

trovare un punto per il cavaliere portalente per il quale il cerchio proiettato sullo schermo fosse di grandezza approssimativamente costante al muoversi del cavaliere portaschermo.

Trovato il punto, ci si è spostati a destra di circa mezzo centimetro (iniziando con il valore zero della scala del micrometro sono possibili infatti solo spostamenti dello stesso che avvicinano la lente alla lampada, non c'è modo di allontanarle) e si è saldamente bloccato il cavaliere portalamпада con l'apposita vite. Il valore letto dall'indice del cavaliere portalente è stato registrato e poi è stata iniziata la vera e propria presa dati. Per prima cosa è stato regolato il micrometro in modo tale che la lente fosse spostata di circa mezzo centimetro, in modo cioè che si trovasse sul punto nel quale a occhio era stata individuata la condizione di fascio parallelo. Successivamente, si è misurato il diametro a posizioni costanti dello schermo (da vicino, 20 cm; da lontano, 130 cm). Per fare ciò, è stato utilizzato il reticolo presente sullo schermo smerigliato: operando con il micrometro che permetteva allo schermo uno spostamento perpendicolare all'asse ottico, sono state misurate le posizioni che esso segnava quando una linea del reticolo diventava tangente al cerchio luminoso. Presi i dati, il diametro del cerchio è stato ottenuto sommando un centimetro alla differenza ottenuta, come risulta evidente dalla costruzione fisica del sistema. Confrontando i dati con la stessa logica dei passaggi precedenti, anche grazie a un programma che consentiva di visualizzarli istantaneamente su un grafico, si è spostata la lente avvicinandola o allontanandola dall'oggetto andando a operare sul micrometro presente nel cavaliere portalente. Trovato il punto in cui la differenza tra il diametro proiettato sullo schermo più distante e quello proiettato sullo schermo più prossimo cambiasse segno, si è indagato con maggiore precisione sull'area compresa tra le due misurazioni.

Per trovare il fuoco attraverso il metodo dei punti coniugati, il cavaliere portalamпада è stato bloccato, ma, a differenza di quella precedente, non si è bloccato il cavaliere portalente. Si è operato senza micrometri, solamente spostando i cavalieri lungo la guida ottica, e come nell'esperienza precedente si è utilizzato il diaframma con singolo buco centrale. Preparato il banco ottico si è posto il cavaliere portalente inizialmente a una distanza dal cavaliere portalamпада maggiore del fuoco che era stato stimato con il metodo dell'autocollimazione. Muovendo il cavaliere portaschermo si è cercato il punto in cui il raggio proiettato presentava diametro più piccolo possibile (per vederlo con più facilità si è fatto uso dell'oculare in dotazione), a quel punto si sono registrati su una tabella la posizione del cavaliere portalente e quella del cavaliere portaschermo. Il cavaliere portalente è stato poi spostato a destra e si è ripetuta l'operazione, aggiungendo una riga alla tabella precedentemente fatta. Il processo

è stato ripetuto indagando il più uniformemente possibile le posizioni permesse dalla guida ottica.

Per trovare il fuoco attraverso il metodo di Bessel, sono stati tenuti fermi i cavalieri portalampada e quello portaschermo e si è mosso solamente il cavaliere portalente. Si è preparato il banco ottico e utilizzato il diaframma con buco singolo e il cavaliere portalente senza micrometro. Per prima cosa, data l'analisi teorica che si può fare a riguardo, si è bloccato il cavaliere protalampada il più a sinistra possibile (come nelle altre esperienze) e, utilizzando le stime fatte con le altre esperienze, si è bloccato il cavaliere portaschermo a più di  $4f$ . Muovendo il cavaliere portalente, si sono cercate le due posizioni per cui l'immagine andava a fuoco. Nel caso non risultasse evidente distinguere un fuoco dall'altro si è allontanato ulteriormente il cavaliere portaschermo. Trovata una posizione dei due cavalieri fissi tale che i due fuochi fossero facilmente distinguibili e i cavalieri non fossero troppo lontani tra loro, si è iniziata la presa dati. Aiutandosi con l'oculare, è stata misurata la posizione della lente per la quale il fascio andava a fuoco sullo schermo. Spostando il cavaliere portalente è stato, successivamente, registrato il punto in cui l'immagine andava nuovamente a fuoco nonostante la posizione fosse diversa. Tali misurazioni di posizione sono stati ripetuti 10 volte ciascuno.

Dopo le varie stime del fuoco, si sono cercate l'aberrazione sferica e l'aberrazione cromatica della lente. Per quanto riguarda l'aberrazione sferica, si è preparato il banco ottico andando, differentemente rispetto ai casi precedenti, ad utilizzare entrambi i cavalieri portالenti: quello con micrometro portante il doppietto di Dollond e quello senza micrometro portante la lente. Inizialmente non è stato montato alcun diaframma ed è stato posizionato sulla guida ottica solamente il cavaliere con il doppietto acromatico. Grazie ad una bacchettina lunga circa quanto la distanza focale del doppietto, si è bloccato il cavaliere portالente in una posizione tale che l'oggetto occupasse uno dei suoi fuochi. Per fare ciò si è fatto in modo che la barretta rimanessesse sospesa bloccata dagli attriti tra il doppietto e la mascherina montata sul cavaliere portalampada, a quel punto il cavaliere con il doppietto acromatico è stato bloccato con la vite. Successivamente, andando a spingere la lente verso sinistra mantenendo la vite del cavaliere portالente avvitata, grazie alla molla presente all'interno del micrometro, è stata rimossa la bacchettina. Analogamente a quanto fatto nel caso dell'autocollimazione (ma con il doppietto di Dollond e senza diaframma) è stato cercato velocemente il punto in cui il diametro della proiezione sullo schermo sembrava costante al variare della posizione del cavaliere portaschermo. Dopo aver aggiustato un paio di volte con il micrometro la posizione della lente, si è potuto utilizzare il raggio parallelo creato per la misurazione dell'aberrazione sferica. È

stato messo tra il cavaliere con il doppietto acromatico e il cavaliere portaschermo il cavaliere con lente, al quale è stato avvitato il diaframma con 4 buchi, in modo tale che i due buchi marginali fossero su un piano orizzontale. Il cavaliere portalente senza micrometro è stato posizionato il più vicino possibile all'altro cavaliere portalente, in modo che non ci fossero dispersioni del fascio uniforme legate alla distanza e che tutti e 4 i buchi del diaframma fossero ben illuminati. Fatto ciò, si è andato a muovere il cavaliere portaschermo fino a trovare approssimativamente il punto in cui le 4 immagini si avvicinavano a formare quello che, a primo impatto, sembrava un punto unico. Si è bloccato il cavaliere portaschermo in quel punto e poi, andando a operare sul micrometro, si è verificato che il movimento dello schermo permettesse di raggiungere agevolmente la posizione della quale i 4 punti erano ancora separati e la posizione nella quale i 4 punti se separavano di nuovo nettamente. Fatto ciò è stato possibile iniziare la vera e propria presa dati, per la quale è stato solamente utilizzato il micrometro che permetteva allo schermo uno spostamento parallelo all'asse ottico. Partendo dal punto per il quale i 4 punti erano ben distinti si è cercato il punto in cui i raggi marginali convergessero in un unico punto, facendo vedere l'immagine all'oculare come tre punti allineati verticalmente. Registrato il valore letto sul micrometro, si è portato avanti il micrometro fino a vedere i tre punti allineati, questa volta, orizzontalmente. Questo valore è stato registrato e poi si è registrata la posizione nella quale nello schermo erano ancora visibili tre punti orizzontali. Questi ultimi due valori sono stati tali che se la lettura del micrometro fosse stata inferiore al primo valore o superiore al secondo non si sarebbero visti i punti orizzontalmente allineati, mentre si sono visti per tutti i valori del micrometro tra loro compresi. Sono state prese 10 terne di valori diversi. Dopo aver stimato il fuoco proximale andando a mediare per ogni terna gli ultimi due valori si è tornati in questa posizione per misurare la distanza tra i due punti orizzontali in quella posizione, ripetendo il procedimento fatto nell'esperienza dell'autocollimazione di stima di lunghezze sullo schermo smerigliato, stando però attenti nel sommare o meno il passo del reticolo. Sfortunatamente a causa di un dissesto delle componenti meccaniche le ultime tre misure della distanza tra i raggi marginali nel fuoco proximale sono risultate impossibili da prendere.

Per quanto riguarda la misurazione dell'aberrazione cromatica, invece, sono stati usati i filtri presenti sul cavaliere portalente differentemente da come fatto in tutte le altre esperienze. Il banco ottico è stato preparato, ed è stato creato un fascio di luce parallela analogamente a come era stato fatto nel caso della misurazione dell'aberrazione sferica. Anche in questo caso si è utilizzato il diaframma con i 4 buchi, andando a

coprire però i buchi centrali, in modo da potersi concentrare sul fuoco marginale. Si è portato di nuovo lo schermo circa nella posizione in cui si vedevano convergere i fuochi marginali del colore giallo e si è bloccato tramite l'apposita vite. Fatto ciò, è stato cambiato il filtro, andando a creare un fascio di luce blu. Operando con il micrometro su schermo, si è cercato il punto in cui il fascio blu convergeva, proiettando sullo schermo smerigliato un solo punto blu. Registrato il valore letto sul micrometro, si è passati dal filtro blu a quello rosso e si è ripetuta la ricerca del fuoco, annotando il valore letto sul micrometro. L'esperienza è stata ripetuta 10 volte.

### III. PRESENTAZIONE DEI DATI

Le notazioni usate nella relazione indicano:

- $P_O$  = posizione oggetto
- $P_L$  = posizione lente
- $P_S$  = posizione schermo
- Rosso = riga C dello spettro di Fraunhofer,  $\lambda = 656.3.1\text{nm}$
- Giallo = riga D dello spettro di Fraunhofer,  $\lambda = 589.3\text{nm}$
- Blu = riga F dello spettro di Fraunhofer,  $\lambda = 486.1\text{nm}$

#### III.1 Autocollimazione

I risultati delle misure sono nella **Tabella 1**. Per la stima della posizione del fuoco e il calcolo dell'incertezza, si considera la seguente formula:

$$f = P_L - P_O + (\mu_0 - \mu^*) + \frac{dr}{2} - \frac{\overline{PP'}}{2}. \quad (1)$$

Per la stima di  $\mu^*$ , valore del micrometro per cui il fascio è parallelo, si sono interpolati i diametri del fascio in ordinata con i valori indicati dal micrometro:  $\mu^*$  è individuato dall'intersezione delle due rette interpolanti nel **Grafico 1**.

$$\mu^* = x_{\text{intersezione}} = \frac{a - a'}{b' - b} = 4.73 \text{ mm},$$

da cui, grazie alla formula di propagazione quadratica, si ottiene, considerando  $(a, b)$ ,  $(a', b')$  rispettivamente correlati e le rette tra loro



**Tabella 1:** Risultati autocollimazione [cm]

Posizione relativa della lente	Diametro fascio a 30 cm	Diametro fascio a 130 cm
0.4	11.87	10.00
0.45	11.93	11.05
0.46	11.71	11.72
0.475	11.68	11.90
0.5	11.86	12.54
0.55	11.90	13.67

indipendenti,

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu^*(a, a', b, b')}^2 = & \left( \frac{\partial F}{\partial a} \Big|_{x_{\text{int}}} \right)^2 \sigma_a^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial a'} \Big|_{x_{\text{int}}} \right)^2 \sigma_{a'}^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial b} \Big|_{x_{\text{int}}} \right)^2 \sigma_b^2 + \\ & + \left( \frac{\partial F}{\partial b'} \Big|_{x_{\text{int}}} \right)^2 \sigma_{b'}^2 + 2 \left( \frac{\partial F}{\partial a} \Big|_{x_{\text{int}}} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial b} \Big|_{x_{\text{int}}} \right) \text{cov}(a, b) + \\ & + 2 \left( \frac{\partial F}{\partial a'} \Big|_{x_{\text{int}}} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial b'} \Big|_{x_{\text{int}}} \right) \text{cov}(a', b') \end{aligned}$$

che, sotto radice quadrata, dà l'incertezza per  $\mu^*$ , considerandolo distribuito normalmente. Svolgendo i calcoli, si trova

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu^*(a, a', b, b')}^2 = & \left( \frac{1}{b' - b} \Big|_{x_{\text{int}}} \right)^2 (\sigma_a^2 + \sigma_{a'}^2) + \left( \frac{a - a'}{(b' - b)^2} \Big|_{x_{\text{int}}} \right)^2 (\sigma_b^2 + \sigma_{b'}^2) + \\ & + 2 \left( \frac{1}{b' - b} \Big|_{x_{\text{int}}} \right) \left( \frac{a - a'}{(b' - b)^2} \Big|_{x_{\text{int}}} \right) (\text{cov}(a, b) + \text{cov}(a', b')). \end{aligned} \quad (2)$$

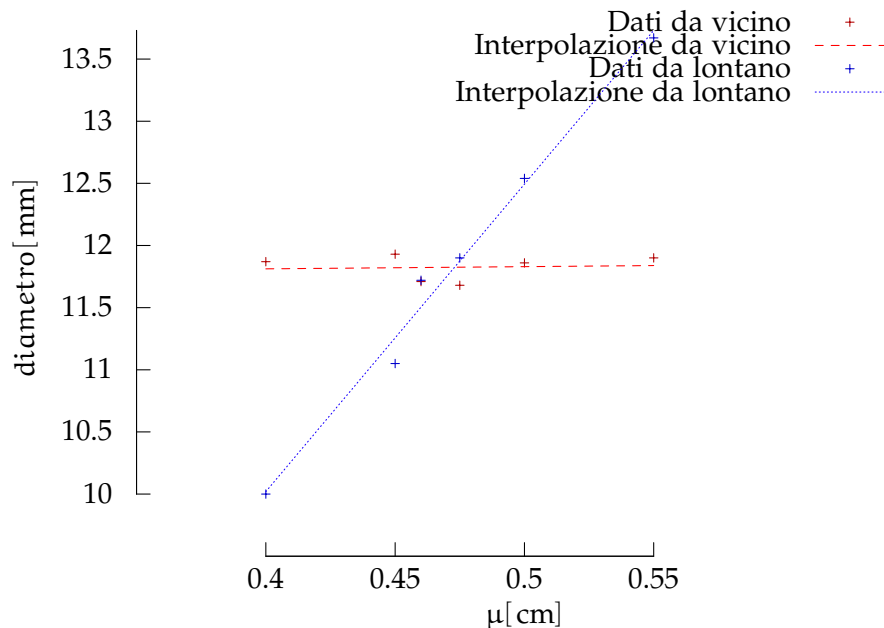
Calcoliamo le covarianze:

$$\text{cov}(a, b) = -\frac{\sum_i x_i}{\Delta} \sigma_y^2$$

dove  $\Delta$  è il parametro di interpolazione lineare; vale lo stesso per  $a'$  e  $b'$ , con le adeguate  $(x, y)$ .

$$\text{cov}(a, b) = -0.501, \text{cov}(a', b') = -0.895.$$

**Grafico 1:** *Interpolazione lineare*



L'incertezza così calcolata risulta di 0.0003 cm, molto bassa a causa della precisione micrometrica, migliorata grazie al fit lineare. Tuttavia si ritiene più corretto considerarla non più bassa dell'incertezza strumentale. L'intersezione è quindi stimata come

$$\mu^* = (0.473 \pm 0.001) \text{ cm.}$$

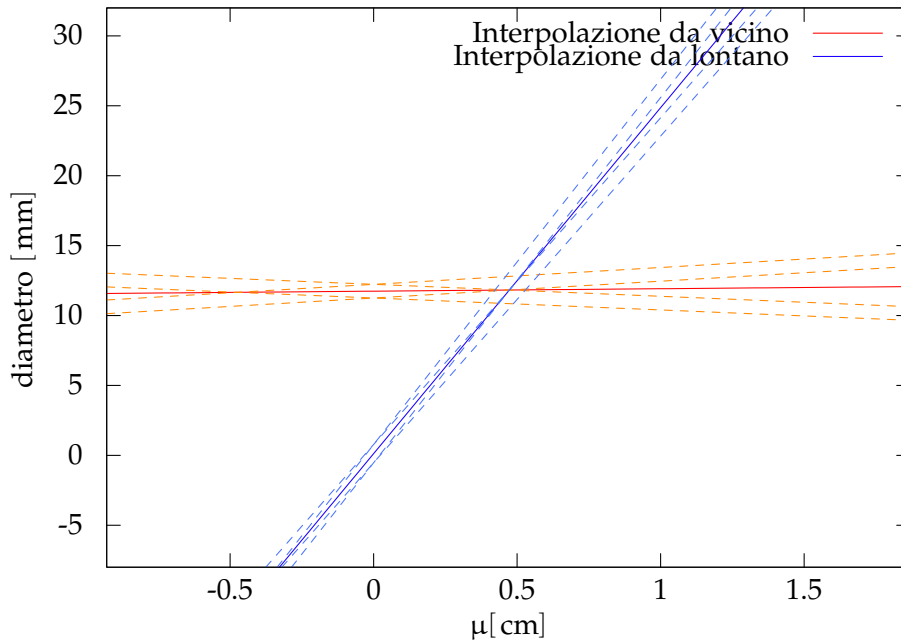
Per rendere visivamente apprezzabile l'incertezza sulle rette, è stato creato un grafico (**Grafico 2**) contenente le rette tracciate per i valori estremali della quota e del coefficiente angolare.

Si trova per il fuoco il valore

$$f_1^* = (6.72 \pm 0.07) \text{ cm,}$$

si è considerata trascurabile l'incertezza su  $\mu^*$  (la scelta di considerare l'incertezza strumentale non influisce quindi sugli altri risultati) rispetto a quello fornito dal laboratorio su  $P_L$  e  $P_O$ , pari a  $\sigma_P = 0.05 \text{ cm}$ : ciò porta propagando a un'incertezza di  $\sqrt{2}\sigma_P = 0.07 \text{ cm}$ . Tale stima va considerata a meno della correzione di aberrazione sferica, che verrà compiuta sulla miglior stima del valore di  $f$ ).

**Grafico 2:** Incertezza sulle rette



### III.II Punti coniugati

Un ulteriore metodo per la misurazione del fuoco della lente è quello che prevede l'utilizzo della legge dei punti coniugati. A partire dall'equazione di Gauss per le lenti sottili, apportando alcune correzioni legate al modello delle lenti spesse, si può trovare una serie di equazioni che descrivono il comportamento delle lenti attraverso semplici misure di lunghezze. Tali equazioni sono:

$$\begin{aligned}
 p &= P_L - P_O + \frac{dr}{2} - \frac{\overline{PP'}}{2} \\
 q &= P_S - P_L - \frac{dr}{2} + \frac{\overline{PP'}}{2} \\
 \frac{1}{f} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Sono stati prelevati due campioni diversi, dato che il primo campione possedeva delle imprecisioni. I campioni si possono trovare nella **Tabella 2**. I valori mantenuti costanti durante tutta l'esperienza e i parametri fisici della lente sono:

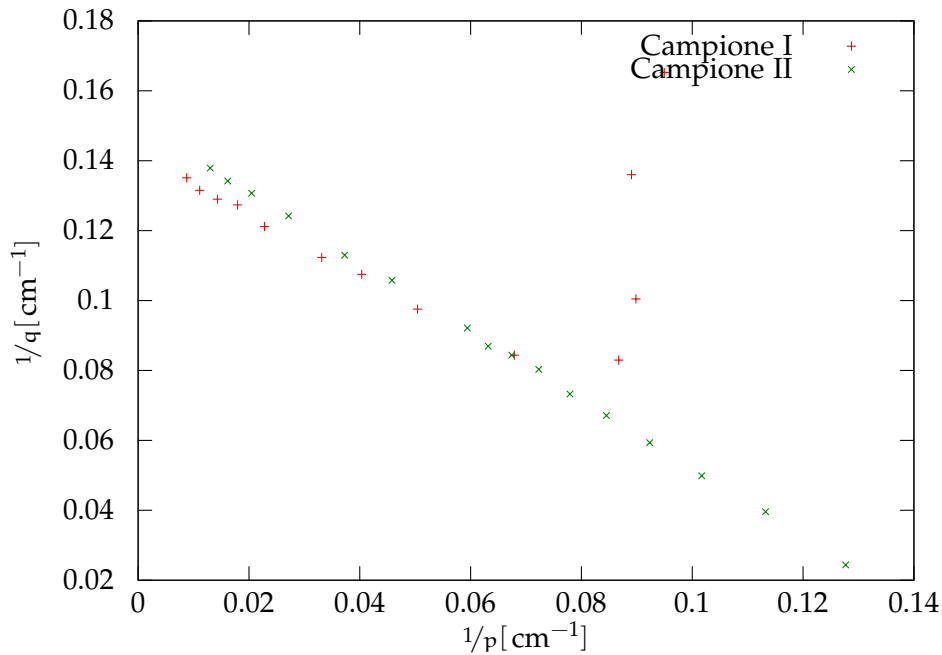
$$P_O = 13.15 \text{ cm}, \frac{dr}{2} = 0.115 \text{ cm}, \frac{\overline{PP'}}{2} = \frac{\overline{VV'}}{6} = 0.133 \text{ mm}$$

**Tabella 2:** *Campioni (udm in [cm])*

Campione I		Campione II	
p <sub>L</sub>	p <sub>S</sub>	p <sub>L</sub>	p <sub>S</sub>
23.70	30.00	21.00	62.25
24.40	32.00	22.00	47.50
24.30	34.50	23.00	43.30
24.70	37.00	24.00	41.10
27.90	40.00	25.00	40.15
33.00	43.50	26.00	39.90
37.95	47.50	27.00	39.70
43.35	52.50	28.00	40.10
57.00	65.50	29.00	40.75
68.90	77.00	30.00	41.10
83.00	91.00	35.00	44.70
103.15	111.00	40.00	49.10
127.35	135.00	50.00	58.30
-	-	62.00	69.90
-	-	75.00	82.70
-	-	90.00	97.50

Tali campioni sono stati presi in momenti diversi, in particolare sono stati riposizionati tutti i cavalieri tra un campione e l'altro. Si faccia un grafico per cercare di comprendere come i dati si distribuiscono in un piano cartesiano: nel **Grafico 3**, è rappresentato  $1/q$  in funzione di  $1/p$ , dalla formula (3) risulta che il grafico dovrebbe essere una retta con pendenza  $-1$ .

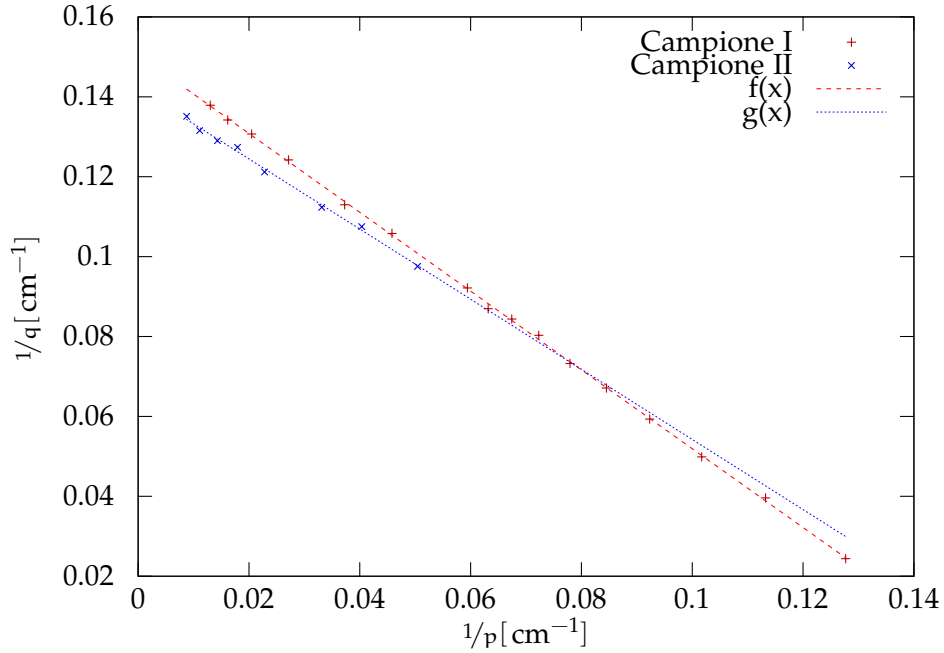
Si evince facilmente come nel Campione I ci siano dei punti visibilmente fuori scala, probabilmente a causa di inesattezze da parte degli sperimentatori nel prendere quei dati (quando la lente era particolarmente vicina all'oggetto risultava meno semplice andare ad identificare in maniera precisa a quale distanza sarebbe dovuto essere lo schermo affinché l'immagine fosse a fuoco). Alcune accortezze, prese proprio in risposta al primo campione poco convincente, hanno permesso di prendere un altro set di misure che fosse più preciso del precedente. Ma i

**Grafico 3:** *Punti coniugati*

due campioni appartengono alla stessa popolazione? La risposta risulta evidentemente no, infatti anche nella zona in cui il Campione I non è evidentemente sbagliato le due rette non coincidono, come si può vedere dal **Grafico 4** in cui sono stati riportati i dati non evidentemente sbagliati assieme alla rette che li interpolano  $y = ax + b$ , che si possono trovare nella **Tabella 3**

Come è stato già detto, la teoria ci dice che la retta che rappresentiamo sul piano cartesiano ha pendenza  $-1$ . Il nostro approccio sperimentale, però, inserisce errori di tipo statistico e sistematico che fanno in modo che la retta che effettivamente si trova non ha coefficiente angolare esattamente  $-1$  ma ci si avvicina. A questo punto sorge spontaneo chiedersi se convenga di più fare un'analisi dati basata su un'interpolazione a doppio parametro (pendenza, intercetta), o fissare la pendenza a  $-1$  come vuole la teoria andando a cercare quale sia l'intercetta in questo caso. Le due diverse interpolazioni danno origine al **Grafico 5**.

Per comprendere quale dei due modi di interpretare il fenomeno sia più opportuno usare si utilizzi il metodo dell' $\mathcal{F}$ -test: sono stati presi gli scarti quadratici medi delle due interpolazioni diverse e sono stati normalizzati ai gradi di libertà (sono state raccolte 16 coppie di dati, ciò vuol dire che la retta con un solo parametro libero ha 15 gradi di libertà, siano  $n_1$  nelle formule, e la retta con due parametri liberi ha 14 gradi di

**Grafico 4:** Le interpolazioni dei due campioni**Tabella 3:** Rette interpolanti

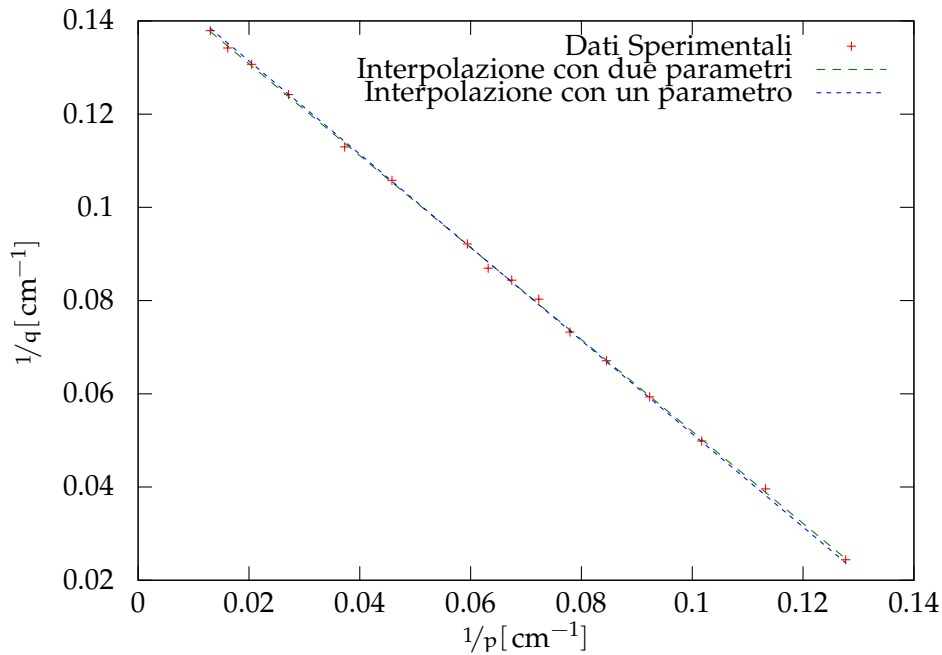
Campione	a	$\sigma_a$	b [cm <sup>-1</sup> ]	$\sigma_b$ [cm <sup>-1</sup> ]
I	-0.88	0.02	0.1420	0.0006
II	-0.986	0.004	0.1505	0.0003

libertà,  $n_2$ ). La formula utilizzata è:

$$\mathcal{F} = \frac{\frac{\sum_i (y_i - f_1(c_i))^2 - \sum_i (y_i - f_2(c_i))^2}{n_1 - n_2}}{\frac{\sum_i (y_i - f_2(c_i))^2}{n_2}}$$

Andando a calcolare la  $\mathcal{F}$  da questa formula risulta  $\mathcal{F} = 0.1740$ . Ora, per capire quale delle due interpolazioni meglio si addice alla casistica trovata, va cercato nelle tabelle di riferimento relative alla funzione di Von Mises-Fisher, andando a leggere il valore in corrispondenza dei gradi di libertà del numeratore (in questo caso 1) per trovare la colonna e i gradi di libertà del denominatore (in questo caso 14) per trovare la riga, si legge che vale la pena introdurre un nuovo parametro alla teoria se <sup>1</sup>  $\mathcal{F} > 3.10$ ,

<sup>1</sup>Si prenda una significanza del 90%, riferimento tabella: [http://www.socr.ucla.edu/applets.dir/f\\_table.html](http://www.socr.ucla.edu/applets.dir/f_table.html)

**Grafico 5:** Le due diverse interpolazioni**Tabella 4:** Numero parametri d'interpolazione

Numero parametri	$a$	$\sigma_a$	$b[\text{cm}^{-1}]$	$\sigma_b[\text{cm}^{-1}]$
I	-1	-	0.1514	0.0002
II	-0.986	0.004	0.1505	0.0003

da cui evinciamo come non sia necessaria la stima del secondo parametro d'interpolazione della retta, che può essere fissato senza perdere troppe informazioni a  $-1$ . Per limitare le perdite di dati si effettuino le analisi sia considerando la pendenza della retta fissa, sia considerandola come una variabile casuale dipendente dal campione.

Considerando la pendenza dipendente dal campione, abbiamo una retta che interseca gli assi in due punti di coordinate diverse, coordinate che indicano proprio due stime diverse del reciproco del fuoco della lente, che chiameremo rispettivamente  $f_x$  se l'intersezione è con l'asse delle  $x$  e  $f_y$  se l'intersezione è con l'asse delle  $y$ . Per quanto riguarda  $f_y$ , la sua stima è piuttosto semplice: prendendo l'equazione della retta interpolante  $y = ax + b$  con  $a$  e  $b$  letti dalla tabella di cui sopra, basta cercare il punto con la  $x$  nulla per trovare l'intersezione con gli assi. Con una banale sostituzione otteniamo  $f_y = b$  il che ci dà immediatamente un valore reciproco del fuoco che sia anche accompagnato dalla sua

incertezza: con una semplice propagazione si trova che l'incertezza su  $f_y$  è uguale a quella su  $b$ , stimata a partire dalle formule di interpolazione che massimizzano la verosimiglianza (anche questo riportato nella **Tabella 4**). Il primo valore del reciproco del fuoco quindi risulta:

$$f_y = (0.1505 \pm 0.0003) \text{ cm}^{-1}$$

Per quanto riguarda l'intersezione con l'asse delle  $x$ , stavolta il calcolo è leggermente più complesso, infatti sostituendo  $y = 0$  alla formula della retta interpolata si ottiene  $f_x = -\frac{q}{m}$ . Per trovare l'incertezza a questo punto risulta necessario propagare gli errori su  $m$  e su  $q$ . Applicando la solita formula di propagazione risulta

$$\sigma_{f_x} = \sqrt{\frac{1}{m^2} \sigma_q^2 + \frac{q}{m^2} \sigma_m^2 + 2 \text{cov}(q, m)}.$$

Sostituendo, il reciproco del fuoco ha un valore di:

$$f_x = (0.153 \pm 0.002) \text{ cm}^{-1}$$

Per trovare il fuoco è necessario calcolare i reciproci di  $f_x$  ed  $f_y$ , andando a propagare gli errori secondo la formula di propagazione:  $f'_x = \frac{1}{f_x}$  e  $\sigma_{f'_x} = \frac{\sigma_{f_x}}{f_x^2}$  ed analogo per  $f_y$ . Da cui i risultati:

$$f'_x = (6.55 \pm 0.09) \text{ cm}$$

$$f'_y = (6.64 \pm 0.01) \text{ cm}$$

Per dare un risultato finale, si possono includere tutti gli errori nel fatto che questi due numeri sono diversi: si può andare a stimare effettivamente il fuoco  $f$  facendo una media aritmetica dei valori ottenuti e si può stimare l'incertezza andando a vedere la semidifferenza tra i due valori casuali ottenuti. Il risultato finale è:

$$f = (6.60 \pm 0.04) \text{ cm}.$$

Si veda ora come si sarebbero potuti analizzare i dati considerando la retta con l'unico parametro libero l'intercetta. In questo caso il risultato del fuoco, come del resto un'indicazione del suo errore statistico, ci vengono dati dai parametri interpolati e riportati nella **Tabella 4**, per cui la lunghezza focale, calcolata come nel caso precedente trovando il reciproco dell'intercetta e propagando gli errori, sembrerebbe valere:

$$f' = (6.604 \pm 0.009) \text{ cm}$$

Ricordando però che i campioni raccolti per la stima della lunghezza focale attraverso il metodo dei punti coniugati erano due ed erano visibilmente poco compatibili tra loro, sorge spontaneo chiedersi quali siano



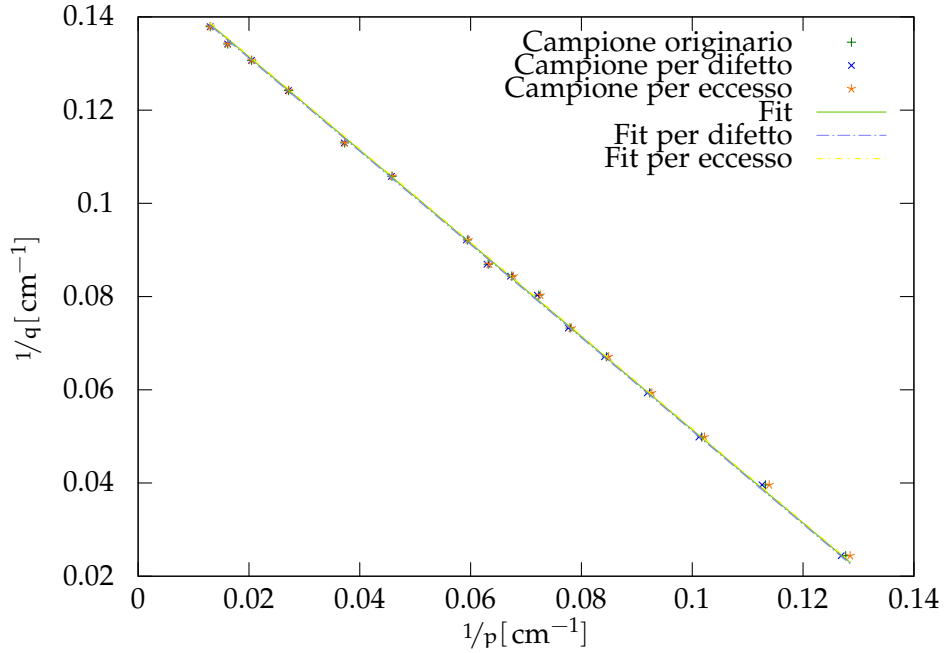
**Tabella 5:** *Campioni con errori sistematici* [cm<sup>-1</sup>]

$1/p$ con $p_o$ aumentato	$1/p$ campione	$1/p$ con $p_o$ diminuito	$1/q$
0.0596	0.0594	0.0592	0.0922
0.0634	0.0632	0.0630	0.0869
0.0677	0.0674	0.0672	0.0844
0.0726	0.0723	0.0720	0.0803
0.0782	0.0779	0.0776	0.0733
0.0849	0.0845	0.0842	0.0671
0.0927	0.0923	0.0919	0.0593
0.1022	0.1017	0.1012	0.0499
0.1139	0.1132	0.1126	0.0396
0.1285	0.1277	0.1269	0.0244
0.0459	0.0458	0.0457	0.1058
0.0373	0.0373	0.0372	0.1130
0.0272	0.0272	0.0271	0.1242
0.0205	0.0205	0.0205	0.1307
0.0162	0.0162	0.0162	0.1342
0.0130	0.0130	0.0130	0.1379

gli errori sistematici collegati a tale metodo. Dalle formule della legge dei punti coniugati risulta che  $p$  dipende dalla posizione iniziale dell'oggetto, che tra l'altro rimane fisso per tutta la durata dell'esperimento (probabilmente è da ricondurre ad una non perfetta lettura della posizione dell'oggetto il fatto che i due campioni non siano sottoinsiemi della stessa popolazione), il che vuol dire che un'errata lettura nella posizione iniziale dell'oggetto può sistematicamente creare un bias nel campione, spostando la retta interpolante dalla posizione che realmente dovrebbe occupare. Per stimare tale errore sistematico sono stati creati dei campioni fittizi di  $1/p$  e di  $1/q$  considerando l'oggetto non nella posizione registrata al momento dell'esperimento, ma spostata di una sigma (0.5 mm) da uno dei due lati. I valori ottenuti sono riassunti nella **Tabella 5**.

Andando a rappresentare sia il campione reale che i campioni fittizi con le relative rette interpolate si vede il **Grafico 6**. Da un confronto delle rette interpolanti nella **Tabella 6** si può stimare l'incertezza che può essere collegata all'imprecisione nella lettura della posizione del

**Grafico 6:** Errori su  $P_O$



**Tabella 6:** Rette interpolanti errori sistematici

Campione	Intercetta [ $\text{cm}^{-1}$ ]	$\sigma$ [ $\text{cm}^{-1}$ ]
Campione originario	0.1514	0.0002
Con $p'_o = (p_o + 0.5) \text{ mm}$	0.1517	0.0008
Con $p'_o = (p_o - 0.5) \text{ mm}$	0.1512	0.0001

cavaliere portalampada. In particolare si può leggere l'effettivo valore del fuoco come quello collegato al campione realmente raccolto, e ad esso si può associare un errore sistematico legato alla massima distanza tra i fuochi fittizi ricavati dalle interpolazioni dei campioni fittizi, che risulta di 0.01 cm. Il valore finale risulta, quindi:

$$f_2^* = (6.60 \pm 0.01) \text{ cm}$$

Dove è stata considerata la somma tra gli errori statistici e gli errori sistematici su  $P_O$ , rispetto ai quali gli errori statistici precedentemente considerati risultano trascurabili. Il valore più giusto tra i due, alla luce dell' $\mathcal{F}$ -test effettuato e delle considerazioni sugli errori sistematici, è il secondo: infatti la semplicità della retta interpolante a singolo parametro libero permette un più semplice studio degli errori collegati al posi-

zionamento dell'oggetto. Un approccio simile per la ricerca dell'errore sistematico nel caso del doppio parametro libero renderebbe impossibile l'approssimazione dell'errore attraverso le formule sopra citate, rendendo difficoltosa una pratica stima dello stesso. Il valore ottenuto va comunque corretto tramite i coefficienti di aberrazione sferica, come verrà discusso più avanti.

### III.III Bessel

L'ultimo metodo per la misura della lunghezza focale è il cosiddetto metodo di Bessel: questo metodo, usando una differenza delle posizioni, consente di ridurre l'errore sistematico dovuto alle imprecisioni nel posizionamento dei cavalieri. Il metodo consiste nel fissare lo schermo e l'oggetto, e muovere la lente fino a trovare i fuochi.

Ci saranno due posizioni della lente, come spiegato sotto. Chiamiamo  $L$  la distanza tra l'oggetto e lo schermo (sarà quindi fissata, e dovrà essere  $L \geq 4f$ ), e  $S = p_2 - p_1$  la differenza di posizioni  $p_1$  e  $p_2$  della lente. Dalla formula (3) si ricava, sostituendo  $L$  e  $S$ ,

$$f = \frac{L^2 - S^2}{4L} \quad (4)$$

e per trovare l'errore  $\sigma_f$  deriviamo

$$\frac{\partial f}{\partial L} = \frac{L^2 + S^2}{4L^2} \approx \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = -\frac{S}{2L}$$

Questi errori sono minimizzati per  $L \approx 4f$ , d'altra parte la profondità di campo rende difficile una stima precisa della posizione di coincidenza. Quindi meglio usare valori di  $L$  di poco superiori a  $4f$  (calcolato con le stime precedenti). Abbiamo dunque trovato una decina di misure di  $p_1$  e  $p_2$ , e abbiamo calcolato per ciascuna il fuoco col suo errore (tutto ciò è illustrato nella **Tabella 7**) e infine abbiamo fatto una media pesata per ottenere la stima del fuoco col metodo di Bessel  $f_3^*$  e il suo errore  $\sigma_{f_3^*}$ :

$$f_3^* = (6.588 \pm 0.007) \text{ cm} \quad (5)$$

**Tabella 7:** Metodo di Bessel [cm]

$p_1$	$p_2$	$S$	$f$	$\sigma_f$
21.35	46.55	25.20	6.58	0.27
21.25	46.45	25.20	6.58	0.27
21.35	46.60	25.25	6.56	0.28
21.30	46.45	25.15	6.59	0.27
21.35	46.45	25.10	6.61	0.27
21.35	46.45	25.10	6.61	0.27
21.35	46.50	25.15	6.59	0.27
21.30	46.45	25.15	6.59	0.27
21.35	46.55	25.20	6.58	0.27
21.30	46.45	25.15	6.59	0.27

### III.IV Aberrazione sferica

I risultati delle misure sono riportati nella **Tabella 8**.

Per la stima del coefficiente di aberrazione sferica  $c$ , si è considerata la formula

$$c = \frac{fl}{R^2},$$

con  $l = \frac{f_i + f_f}{2} - f_m$  e  $f$  miglior stima del fuoco nel giallo dalle precedenti esperienze.

Per trovare  $l$  si è calcolato  $l_i$  su ogni terna di valori, propagandone l'errore quadraticamente. Nel calcolo della propagazione si è notato che l'incertezza su  $f_m$  è trascurabile rispetto a quella su  $f_p$ , infatti risulta da evidenze sperimentali che la profondità di campo dei raggi parassiali è molto maggiore di quella dei raggi marginali: è stato più semplice comprendere la posizione del fuoco marginale rispetto a quella del fuoco marginale, per identificare il quale è stato necessario addirittura trovare due valori all'interno del quale il fuoco fosse compreso. Al fuoco prossimale è stato associato, quindi, un'incertezza pari alla semiampiezza dell'intervallo di fuoco dei raggi prossimali, proprio in virtù delle difficoltà già espresse. Si è in seguito fornita una stima di  $l$  come media pesata del campione così creato:

$$l = (0.51 \pm 0.03) \text{ cm.}$$

Per la correzione di aberrazione sferica sulle stime  $f_j^*$  ottenute dalle precedenti esperienze, è necessario il valore  $l'$ , definito come la distanza

**Tabella 8:** *Aberrazione sferica* [cm]

$f_m$	$f_i$	$f_f$	$f_p$	$t$	$l$	$\sigma_l$	$c$	$\sigma_c$
4.18	8.00	10.65	9.33	0.193	0.51	0.13	1.75	0.45
4.10	8.18	10.60	9.39	2.02	0.53	0.12	1.80	0.41
4.15	8.15	10.39	9.27	1.99	0.51	0.11	1.74	0.38
4.08	7.50	9.90	9.20	1.94	0.46	0.22	1.57	0.41
4.25	7.90	10.35	9.13	1.90	0.49	0.12	1.66	0.42
3.90	8.75	9.80	9.28	1.95	0.54	0.05	1.83	0.18
4.90	8.00	10.30	9.15	1.87	0.42	0.11	1.44	0.39
4.10	8.25	10.30	9.28	-	0.52	0.10	1.76	0.35
4.00	8.25	10.10	9.18	-	0.52	0.09	1.76	0.31
4.07	7.31	10.50	8.91	-	0.48	0.16	1.64	0.54

tra i punti di messa a fuoco rispettivamente dei raggi prossimali all'asse ottico e di quelli al margine del fascio, nel caso del diaframma a foro singolo (diametro  $d_0 = 1.00\text{cm}$ ). Per trovare tale valore si utilizzi la definizione di aberrazione sferica longitudinale  $l' = \frac{c(d/2)^2}{f}$ : a partire dai dati dell'esperienza I, si è trovata l'ordinata dell'intersezione tra le due rette, corrispondente al diametro del fascio creato. Sostituendo

$$l' = (0.09 \pm \dots) \text{ cm}$$

Con tale  $l$ , si è compiuta una prima correzione di aberrazione sferica per ogni  $f_j$  ottenuto dalle precedenti esperienze, sommando  $l/2$  alla stima stessa e andando a ristimare la sua incertezza. Infatti i risultati presentati nel caso delle prime tre esperienze trovano il fuoco della lente a meno delle correzioni per aberrazione sferica: a causa della costruzione dell'apparato, l'oggetto non è effettivamente puntiforme, ma ha un diametro finito (maggiore di 10 mm) a causa del nostro diaframma. Ciò vuol dire che, analogamente a quanto è stato notato nell'esecuzione di quest'esperimento, i raggi che incidono la lente a distanza maggiore dal centro della stessa convergono prima degli altri. A causa di questo fenomeno irriducibile causato dalle approssimazioni considerate nella creazione del modello, quello che è stato trovato nelle esperienze precedenti non è realmente il fuoco (considerato come punto in cui convergono i punti parassiali) ma è l'inizio della messa a fuoco. Per questo, andando a correggere tale valore, risulta necessario aggiungere  $l/2$  per spostarsi dal punto in cui si inizia a vedere il fuoco (che è quello registrato) al punto

dove effettivamente si ritiene più probabile sia il fuoco, e all'incertezza va sommata quadraticamente la stessa quantità per considerare il fatto che non si sa esattamente dove sia il fuoco nell'intervallo che va dal fuoco registrato al fuoco registrato aumentato di  $l/2$ . Consideriamo dunque  $f$  come media pesata di tali valori:

$$f = (6.65 \pm 0.03) \text{ cm.}$$

Per quanto riguarda  $c$ , si è proceduto creando un nuovo campione per ogni presa dati; la formula di propagazione fornisce

$$\sigma_{c_i}^2 = \frac{f^2 \sigma_{l_i}^2 + l^2 \sigma_f^2}{R^4},$$

in cui si è considerata trascurabile l'incertezza su  $R = 1.4 \text{ cm}$ , fornito dal laboratorio. Da questo campione si è ricavata la media pesata, con relativo incertezza:

$$c = (1.7 \pm 0.1).$$

Come ulteriore stima di  $c$ , si è utilizzata la formula

$$c_t = \frac{tf(f-l)}{2R^3},$$

dove  $t$  è l'aberrazione sferica trasversale misurata, stimata con una media semplice, potendo considerare  $\sigma$  costante:

$$t = (0.194 \pm 0.002) \text{ cm.}$$

L'incertezza di  $c_t$  si trova quindi con la propagazione:

$$\sigma_{c_t} = \sqrt{\frac{f(f-1)^2 \sigma_t^2 + t^2(2f-1)^2 \sigma^2 f + t^2 f^2 \sigma_{(l)}^2}{4R^6}}$$

$$c_t = 1.45 \pm 0.04.$$

### III.V Aberrazione cromatica

I risultati delle misure sono riportati nella **Tabella 9**.

Per questa esperienza si sono utilizzate le proprietà del doppietto acromatico di Dollond, lente composta di una lente convergente e una divergente, le quali siano allineate sul medesimo asse ottico. Tale configurazione minimizza il numero di Abbe della lente stessa: infatti tale configurazione fa sì che i raggi siano proiettati nel medesimo punto a prescindere dalla loro lunghezza d'onda. Tale proprietà risulta importante per la misurazione del numero di Abbe della lente presa in esame, in

**Tabella 9:** Risultati aberrazione cromatica [cm]

$f_C$	$f_F$	$A$	$V$	$\sigma_V$
3.10	4.25	1.15	58	4
3.05	4.00	0.95	70	5
2.90	4.25	1.35	49	3
2.82	4.23	1.41	47	2
3.21	4.26	1.05	63	4
2.92	4.13	1.21	55	3
3.04	4.18	1.14	58	4
3.13	3.98	0.85	78	7
3.18	4.26	1.08	62	4
3.08	4.16	1.08	62	4

quanto è necessario che il fascio di partenza sia parallelo a prescindere dal filtro utilizzato.

Per la stima del numero di Abbe  $V$  si è utilizzata la formula

$$V = \frac{f}{A},$$

dove  $A = f_C - f_F$  e  $f$  è la miglior stima del fuoco nel giallo dalle precedenti esperienze. Per la stima di  $A$ , si è utilizzata una media semplice sul campione  $A_i$  creato a partire dai dati:

$$A = (0.113 \pm 0.005) \text{ cm.}$$

Considerando invece il campione di  $V_i = \frac{f}{A_i}$ , la formula di propagazione porta a

$$\sigma_{V_i}^2 = \frac{\frac{2f^2 s^2}{A_i^2} \sigma^2 + \sigma_f^2}{A_i^2}$$

e la media pesata restituisce la nostra stima:

$$V = 56 \pm 1.$$

## IV. CONCLUSIONI

L'esperimento ha creato dei risultati che bene si accordano con le previsioni sperimentali (per esempio, si può vedere dal fatto che i coefficienti di smorzamento sono molto simili per tutte le prove effettuate). La curva di risonanza si rivela un buono strumento per lo studio delle ampiezze in funzione della frequenza, e il grafico da essa disegnato non si discosta molto da quello atteso.

Per migliorare i risultati ottenuti, sarebbe stato necessario ridurre le interazioni dell'ambiente con il pendolo (impossibile con l'apparato strumentale dato) oppure effettuare un maggior numero di indagini anche a frequenze differenti. L'analisi dati è stata fatta in modo da minimizzare gli errori, che risultano comunque molto buoni per tutti i risultati presentati.

## V. CODICE

```
1 #include <iostream>
  #include <vector>
3 #include <climits>
  using namespace std;
5 double sum (vector <double> a, vector <double> b);
  double diff (vector <double> a, vector <double> b);
7 int main ()
  {
9   char c;
    double t1, t2;
11  int counter = 0;
    vector <double> xi;
13  vector <double> yi;
    while (cin >> t1)
15  {
        cin >> t2;
17    xi.push_back(t1);
        yi.push_back(t2);
19    if(t1 == 0) break;
    }
21  int n = xi.size();
    double a,b,q;
23  cerr << "Inserire pendenza retta interpolante
a due parametri: ";
25  cin >> a;
    cerr << "Inserire intercetta retta interpolante
a due parametri: ";
27  cin >> b;
    cerr << "Inserire intercetta retta a parametro
singolo: ";
```



```
31  cin >> q;
    double Ftest;
33  vector <double> f2par;
    vector <double> f1par;
35  for (int i =0; i < n; i++)
    {
37      f1par.push_back(q - (xi.at(i) ) );
      f2par.push_back(b + a * (xi.at(i) ) );
39  }
    Ftest= (((diff(yi, f1par) * diff(yi, f1par) )
41  - (diff(yi , f2par) * diff(yi , f2par) ) ) * (
      n - 2) ) / (diff(yi , f2par) * diff(yi , f2par) );
43  cerr << "Il tuo Ftest per il fit ad un parametro
    e due parametri ha dato un risultato di " << Ftest
45  << " ora vai a " << "controllarlo in una
    tabella che da' le probabilita' per la
47  distribuzione di Fisher per capire quale delle due "
    << "interpolazioni e' migliore, prendi
49  quella a due parametri se
    f(Ftest) > CL";
51  return 0;

53
}

55 double sum (vector <double> a, vector <double> b)
57 {
    int n = a.size();
59    double sum = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
61    {
        sum += a.at(i) + b.at(i);
63    }
    return sum;
65 }

67 double diff (vector <double> a, vector <double> b)
    {
69    int n = a.size();
    double diff = 0;
71    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
73        diff += a.at(i) - b.at(i);
    }
75    return diff;
}
```

../src/FTest.cpp