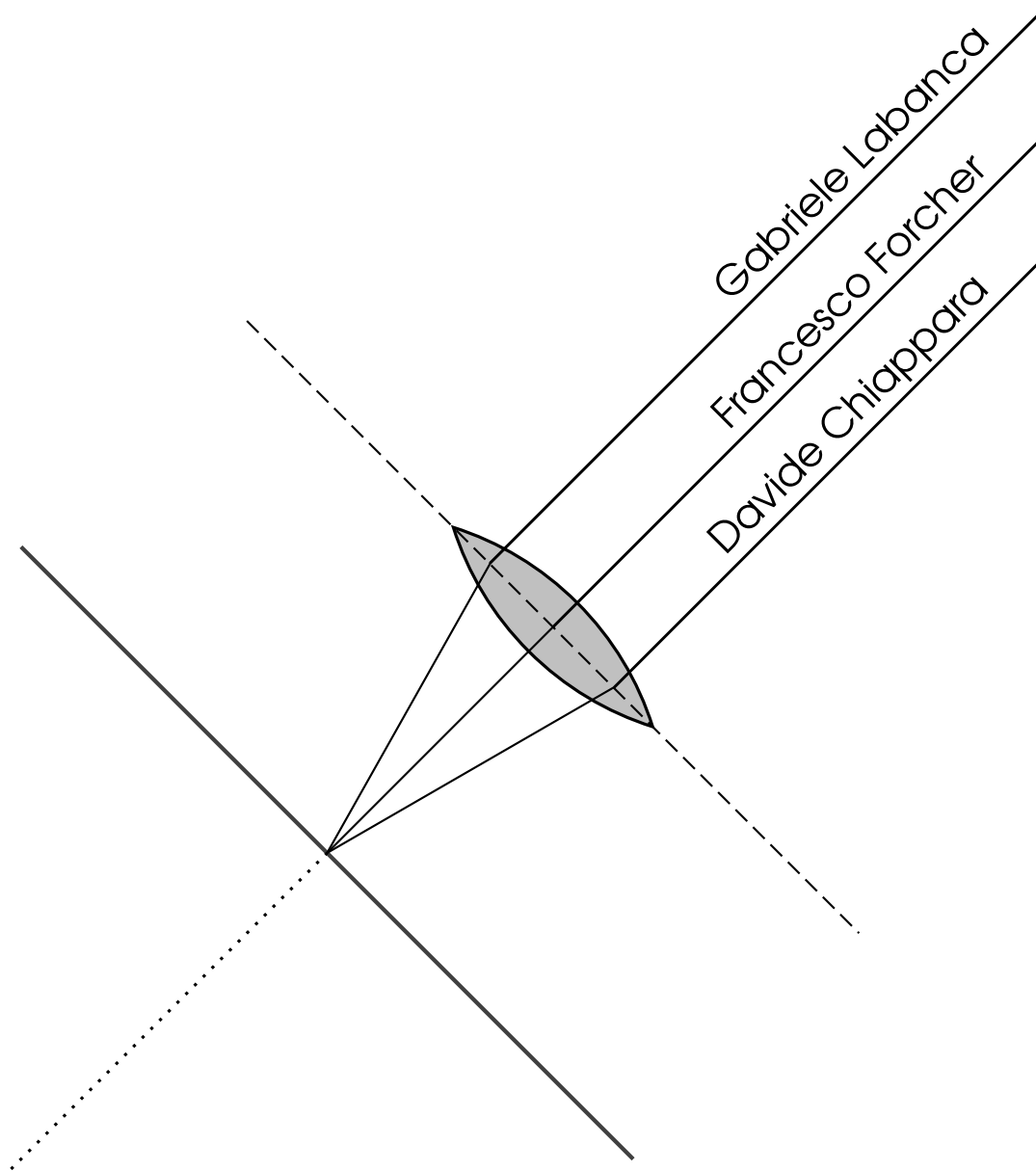


OTTICA GEOMETRICA

Gabriele Labanca

Francesco Forcher

Davide Chiappara



FRANCESCO FORCHER

Università di Padova, Facoltà di Fisica

francesco.forcher@studenti.unipd.it

Matricola: 1073458

DAVIDE CHIAPPARA

Università di Padova, Facoltà di Fisica

davide.chiappara@studenti.unipd.it

Matricola: 1070160

GABRIELE LABANCA

Università di Padova, Facoltà di Fisica

gabriele.labanca@studenti.unipd.it

Matricola: 1069556

28 dicembre 2014

Sommario

L'obiettivo delle esperienze è la stima delle grandezze fisiche caratterizzanti la lente presa in considerazione, la numero 3. Con le prime tre esperienze si sono trovate altrettante stime della distanza focale f^ , le quali sono state utilizzate, una volta corrette rispetto all'aberrazione sferica, per la stima del coefficiente c di tale aberrazione (quarta esperienza) e del numero di Abbe V , indicativo all'aberrazione cromatica (quinta esperienza).*

INDICE

I	Apparato strumentale	3
II	Metodologia di misura	4
I	Autocollimazione	4
II	Punti coniugati	6
III	Bessel	6
IV	Aberrazione sferica	6
V	Aberrazione cromatica e numero di Abbe	8
III	Presentazione dei dati	8
I	Autocollimazione	9
II	Punti coniugati	12
III	Bessel	20
IV	Aberrazione sferica	21
V	Aberrazione cromatica e numero di Abbe	24
IV	Conclusioni	25
V	Codice	26

I. APPARATO STRUMENTALE

Strumentazione utilizzata (banco ottico numero 5):

- Guida ottica di lunghezza ≈ 140 cm con scala graduata con passo 0.5 mm;
- Generatore di corrente di intensità e voltaggio regolabili;
- Lampada;
- Cavaliere portalampada con tre filtri cromatici e un portamascherine;
- Cavaliere portalente con micrometro (valore di azzeramento 8.60 mm);
- Cavaliere portalente senza micrometro;
- Cavaliere portaschermo con due micrometri;
- Cavaliere portasquadra;
- Mascherina con buco centrale;
- Diaframma con singolo buco centrale;

- Diaframma con 2 buchi marginali e 2 parassiali posti su segmenti ortogonali;
- Lente numero 3;
- Doppietto di Dollond;
- Oculare con ingrandimento di 8x.

II. METODOLOGIA DI MISURA

L'esperienza è suddivisa in 5 fasi diverse, ognuna con un approccio sperimentale e un'analisi dati differenti. Questa sezione ha lo scopo di descrivere la metodologia prescelta dagli sperimentatori in laboratorio, dunque non vi si discutono le scelte numeriche fatte o le analisi dati, un'accurata descrizione delle quali è fornita nelle sezioni successive.

Preliminarmente a ogni esperienza, è stato necessario preparare il banco ottico con la seguente procedura: in primo luogo tutti i micrometri sono stati portati allo zero della scala, dopodiché il cavaliere portalamпада è stato fissato in un punto arbitrario della guida; tale punto è stato scelto il più marginalmente possibile sulla sinistra per avere spazio a disposizione per gli altri cavalieri. Bloccato con la vite il cavaliere portalamпада, si è utilizzato il cavaliere con squadra per andare a leggere sulla scala millimetrata il valore che, dopo aver finito la preparazione dell'apparato sperimentale, indica la posizione dell'oggetto relativa alla guida ottica. Il cavaliere con squadra è stato subito rimosso dalla guida ottica. Fatto ciò, si è montata la mascherina con foro singolo sull'apposito supporto presente sul cavaliere portalamпада, mantenendo l'anello di fissaggio rivolto a destra.

Sistemato il cavaliere portalamпада, il cavaliere portalente è stato posizionato sulla guida ottica e vi si sono avvitati la lente sul lato destro, poi il diaframma sul sinistro. È stata posta particolare attenzione nell'avvitare la lente fino alla fine del filo delle componenti meccaniche del sistema. Alla destra del portalente non ancora fissato è stato posto il cavaliere portaschermo con micrometro, in modo tale che lo schermo fosse rivolto verso sinistra, e si è inserito nel cavaliere portalamпада il filtro di colore giallo.

II.1 Autocollimazione

Per stimare la lunghezza focale attraverso il metodo dell'autocollimazione si è operato spostando il cavaliere portalente con micrometro sulla guida ottica manualmente o attraverso il micrometro, leggendo i valori dal metro

posto sulla guida o sui micrometri. Il diaframma utilizzato per questa esperienza è quello con un singolo foro centrale.

Preparato il banco ottico, prima di iniziare la vera e propria presa dati si è cercato approssimativamente quale potesse essere la posizione del fuoco della lente. Si è quindi mosso il cavaliere portante e successivamente confrontata grossolanamente la dimensione delle proiezioni del raggio sullo schermo, quando esso veniva posto vicino o lontano dal cavaliere portante. Questa operazione è stata ripetuta più volte muovendo il cavaliere portante a sinistra o a destra a seconda che l'immagine nello schermo fosse più grande rispettivamente nel caso lo schermo fosse posto più vicino o più lontano dalla lente. Una reiterazione di queste azioni ha permesso dopo circa 4-5 ripetizioni di trovare un punto per il cavaliere portante per il quale il cerchio proiettato sullo schermo fosse di grandezza approssimativamente costante al muoversi del cavaliere portante.

Trovato il punto, ci si è spostati a destra di circa mezzo centimetro (iniziando con il valore zero della scala del micrometro sono possibili infatti solo spostamenti dello stesso che avvicinino la lente alla lampada e non c'è modo di allontanarle) e si è saldamente bloccato il cavaliere portante con l'apposita vite. Il valore letto dall'indice del cavaliere portante è stato registrato e poi è stata iniziata la presa dati. Per prima cosa è stato regolato il micrometro in modo tale che la lente fosse spostata di circa mezzo centimetro, in modo cioè che si trovasse sul punto nel quale a occhio era stata individuata la condizione di fascio parallelo. Successivamente, si è misurato il diametro a posizioni costanti dello schermo (da vicino, 30 cm; da lontano, 130 cm). Per fare ciò, è stato utilizzato il reticolo presente sullo schermo smerigliato: operando con il micrometro che permette allo schermo uno spostamento perpendicolare all'asse ottico, sono state misurate le posizioni che esso segnava quando una linea del reticolo diventava tangente al cerchio luminoso. Presi i dati, il diametro del cerchio è stato ottenuto sommando un centimetro alla differenza, procedura dedotta evidentemente dalla costruzione fisica del sistema. Confrontando i dati con la stessa logica dei passaggi precedenti, anche grazie a un programma che consentiva di visualizzarli istantaneamente su un grafico, si è spostata la lente avvicinandola o allontanandola dall'oggetto andando a operare sul micrometro presente nel cavaliere portante. Trovato il punto in cui la differenza tra il diametro proiettato sullo schermo più distante e quello proiettato sullo schermo più prossimo cambiasse segno, si è indagato con maggiore precisione sull'area compresa tra le due misurazioni.

II.II Punti coniugati

Per trovare il fuoco attraverso il metodo dei punti coniugati, il cavaliere portalampada è stato bloccato, ma, a differenza dell'esperienza precedente, non si è bloccato il cavaliere portalente. Si è operato senza micrometri, solamente spostando i cavalieri lungo la guida ottica, e come nell'esperienza precedente si è utilizzato il diaframma con singolo buco centrale. Preparato il banco ottico si è posto il cavaliere portalente inizialmente a una distanza dal cavaliere portalampada maggiore del fuoco che era stato stimato con il metodo dell'autocollimazione. Muovendo il cavaliere portaschermo si è cercato il punto in cui il raggio proiettato presentasse diametro più piccolo possibile (per vederlo con più facilità si è fatto uso dell'oculare in dotazione), a quel punto si sono registrati su una tabella la posizione del cavaliere portalente e quella del cavaliere portaschermo. Il cavaliere portalente è stato poi allontanato dall'oggetto e si è ripetuta l'operazione, aggiungendo una riga alla tabella precedentemente fatta. Il processo è stato ripetuto indagando il più uniformemente possibile le posizioni permesse dalla guida ottica.

II.III Bessel

Per trovare il fuoco attraverso il metodo di Bessel, sono stati tenuti fermi i cavalieri portalampada e portaschermo e si è mosso solamente il cavaliere portalente. Si è preparato il banco ottico e utilizzato il diaframma con buco singolo e il cavaliere portalente senza micrometro. Per prima cosa, data l'analisi teorica che si può fare a riguardo, si è bloccato il cavaliere portalampada il più a sinistra possibile e, utilizzando le stime fatte con le altre esperienze, si è bloccato il cavaliere portaschermo a più di $4f$. Muovendo il cavaliere portalente, si sono cercate le due posizioni per cui l'immagine andasse a fuoco. Nel caso non risultasse evidente distinguere un fuoco dall'altro si è allontanato ulteriormente il cavaliere portaschermo. Trovata una posizione dei due cavalieri fissi tale che i due fuochi fossero facilmente distinguibili e i cavalieri non fossero troppo lontani tra loro, si è iniziata la presa dati. Aiutandosi con l'oculare, è stata misurata la posizione della lente per la quale il fascio andasse a fuoco sullo schermo. Spostando il cavaliere portalente è stato successivamente registrato il punto in cui l'immagine andasse nuovamente a fuoco nonostante la posizione fosse diversa. Tali misurazioni di posizione sono state ripetute 10 volte ciascuna.

II.IV Aberrazione sferica

Dopo le varie stime del fuoco, si sono cercate l'aberrazione sferica e l'aberrazione cromatica della lente. Per quanto riguarda l'aberrazione sferica,

si è preparato il banco ottico utilizzando, diversamente rispetto ai casi precedenti, entrambi i cavalieri portante: quello con micrometro portante il doppietto di Dollond e quello senza micrometro portante la lente. Inizialmente non è stato montato alcun diaframma ed è stato posizionato sulla guida ottica solamente il cavaliere con il doppietto acromatico. Grazie ad una bacchettina lunga circa quanto la distanza focale del doppietto, si è bloccato il cavaliere portante in una posizione tale che l'oggetto occupasse uno dei suoi fuochi. Per fare ciò si è fatto in modo che tale bacchetta rimanesse sospesa bloccata dagli attriti tra il doppietto e la mascherina montata sul cavaliere portante, a quel punto il cavaliere con il doppietto acromatico è stato bloccato con la vite. Successivamente, spingendo la lente verso destra mantenendo la vite del cavaliere portante avvitata, grazie alla molla presente all'interno del micrometro, è stata rimossa la bacchettina.

Analogamente a quanto fatto nel caso dell'autocollimazione (ma con il doppietto di Dollond e senza diaframma) è stato cercato velocemente il punto in cui il diametro della proiezione sullo schermo sembrasse costante al variare della posizione del cavaliere portante. Dopo aver aggiustato un paio di volte con il micrometro la posizione della lente, si è potuto utilizzare il raggio parallelo creato per la misurazione dell'aberrazione sferica. È stato messo tra il cavaliere con il doppietto acromatico e il cavaliere portante il cavaliere con lente, al quale è stato avvitato il diaframma con 4 fori, in modo tale che i due fori marginali fossero su un piano orizzontale. Il cavaliere portante senza micrometro è stato posizionato il più vicino possibile all'altro cavaliere portante, in modo che non ci fossero dispersioni del fascio uniforme legate alla distanza e che tutti e 4 i fori del diaframma fossero ben illuminati. Fatto ciò, si è andato a muovere il cavaliere portante fino a trovare approssimativamente il punto in cui le 4 immagini si avvicinassero a formare quello che, a primo impatto, sembrava un punto unico. Si è bloccato il cavaliere portante in quel punto e poi, andando a operare sul micrometro, si è verificato che il movimento dello schermo permettesse di raggiungere agevolmente la posizione nella quale i 4 punti fossero ancora separati e quella in cui i 4 punti si separassero di nuovo nettamente.

Fatto ciò è stato possibile iniziare la vera e propria presa dati, per la quale è stato utilizzato solamente il micrometro che permetteva allo schermo uno spostamento parallelo all'asse ottico. Partendo dalla posizione nella quale i 4 punti fossero ben distinti si è cercata la posizione in cui i raggi marginali convergessero in un unico punto, facendo vedere l'immagine all'oculare come tre punti allineati verticalmente. Registrato il valore letto sul micrometro, esso è stato portato avanti fino a vedere i tre punti allineati, questa volta orizzontalmente. Questo valore è stato registrato e poi si è

registrata la posizione nella quale sullo schermo fossero ancora visibili tre punti orizzontali. Questi ultimi due valori sono stati presi in modo che i punti si vedessero allineati orizzontalmente solo all'interno dell'intervallo che li comprendeva. Sono state prese 10 terne di valori. Dopo aver stimato il fuoco prossimale come media degli ultimi due valori di ogni terna, si è misurata in questa posizione la distanza tra i due punti orizzontali più lontani, ripetendo la procedura di misura di lunghezze sullo schermo smerigliato, stando però attenti nel sommare o meno il passo del reticolo. Sfortunatamente a causa di un dissesto delle componenti meccaniche le ultime tre misure della distanza tra i raggi marginali nel fuoco prossimale sono risultate impossibili da prendere.

II.V Aberrazione cromatica e numero di Abbe

Per quanto riguarda la misurazione dell'aberrazione cromatica, sono stati usati anche gli altri filtri presenti sul cavaliere portante (nel blu F e nel rosso C). Il banco ottico è stato preparato, ed è stato creato un fascio di luce parallela analogamente a come era stato fatto nel caso della misurazione dell'aberrazione sferica. Anche in questo caso si è utilizzato il diaframma con i 4 fori, andando a coprire però i fori centrali, in modo da potersi concentrare sul fuoco marginale. Si è portato di nuovo lo schermo nella posizione in cui si vedessero approssimativamente convergere i fuochi marginali del colore giallo e si è bloccato tramite l'apposita vite. Fatto ciò, è stato cambiato il filtro, ottenendo un fascio di luce blu. Operando con il micrometro su schermo, si è cercato il punto in cui il fascio blu convergesse, proiettando sullo schermo smerigliato un solo punto blu. Registrato il valore letto sul micrometro, si è passati dal filtro blu a quello rosso e si è ripetuta la ricerca del fuoco, annotando il valore letto sul micrometro. L'esperienza è stata ripetuta 10 volte.

III. PRESENTAZIONE DEI DATI

Le notazioni usate nella relazione indicano:

- P_O = posizione oggetto;
- P_L = posizione lente;
- P_S = posizione schermo;
- $dr = 0.230$ cm spessore dello spigolo della lente;
- $\overline{VV'} = 0.800$ cm distanza tra i vertici della lente;

- $\overline{PP'} \approx \overline{VV'}/3$ distanza tra i piani principali;
- Rosso = riga C dello spettro di Fraunhofer, $\lambda = 656.3.1 \text{ nm}$;
- Giallo = riga D dello spettro di Fraunhofer, $\lambda = 589.3 \text{ nm}$;
- Blu = riga F dello spettro di Fraunhofer, $\lambda = 486.1 \text{ nm}$.

III.1 Autocollimazione

I risultati delle misure sono nella **Tabella 1**. Per la stima della posizione del fuoco e il calcolo dell'incertezza, si considera la seguente formula:

$$f = P_L - P_O + (\mu_0 - \mu^*) + \frac{dr}{2} - \frac{\overline{PP'}}{2}. \quad (1)$$

Per la stima di μ^* , valore del micrometro per cui il fascio è parallelo, si sono interpolati i diametri del fascio in ordinata con i valori indicati dal micrometro: μ^* è individuato dall'ascissa dell'intersezione delle due rette interpolanti ($y = ax + b$ per la prima, con notazione simile per la seconda) nel **Grafico 1**, i cui parametri sono nella **Tabella 2**.

$$\mu^* = x_{\text{intersezione}} = \frac{b - b'}{a' - a} = 4.73 \text{ mm},$$

da cui, dall'equazione (1) grazie alla formula di propagazione quadratica, si ottiene, considerando (a, b) , (a', b') rispettivamente correlati e le rette tra loro indipendenti,

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu^*}^2(a, a', b, b') &= \left(\frac{\partial F}{\partial a} \Big|_{x_{\text{int}}} \right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial a'} \Big|_{x_{\text{int}}} \right)^2 \sigma_{a'}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial b} \Big|_{x_{\text{int}}} \right)^2 \sigma_b^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial b'} \Big|_{x_{\text{int}}} \right)^2 \sigma_{b'}^2 + 2 \left(\frac{\partial F}{\partial a} \Big|_{x_{\text{int}}} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial b} \Big|_{x_{\text{int}}} \right) \text{cov}(a, b) + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial F}{\partial a'} \Big|_{x_{\text{int}}} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial b'} \Big|_{x_{\text{int}}} \right) \text{cov}(a', b') \end{aligned}$$

che, sotto radice quadrata, dà l'incertezza per μ^* , considerandolo distribuito normalmente. Svolgendo i calcoli, si trova

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu^*}^2 &= \left(\frac{b - b'}{(a' - a)^2} \Big|_{x_{\text{int}}} \right)^2 (\sigma_a^2 + \sigma_{a'}^2) + \left(\frac{1}{a' - a} \Big|_{x_{\text{int}}} \right)^2 (\sigma_b^2 + \sigma_{b'}^2) \\ &+ 2 \left(\frac{1}{a' - a} \Big|_{x_{\text{int}}} \right) \left(\frac{b - b'}{(a' - a)^2} \Big|_{x_{\text{int}}} \right) (\text{cov}(a, b) + \text{cov}(a', b')). \end{aligned} \quad (2)$$

Tabella 1: Risultati autocollimazione [cm]

Posizione relativa della lente	Diametro fascio a 30 cm	Diametro fascio a 130 cm
0.400	1.187	1.000
0.450	1.193	1.105
0.460	1.171	1.172
0.475	1.168	1.190
0.500	1.186	1.254
0.550	1.190	1.367

Tabella 2: Coefficienti delle rette interpolanti

Da vicino	a	σ_a	b [cm]	σ_b [cm]
	11.7	0.5	0.2	1.0
Da lontano	a'	$\sigma_{a'}$	b' [cm]	$\sigma_{b'}$ [cm]
	0.1	0.7	25	1

Calcoliamo le covarianze:

$$\text{cov}(a, b) = -\frac{\sum_i x_i}{\Delta} \sigma_y^2$$

dove Δ è il parametro di interpolazione lineare¹; vale lo stesso per a' e b' , con le adeguate (x, y) .

$$\text{cov}(a, b) = -0.501 \text{ cm}^2$$

$$\text{cov}(a', b') = -0.895 \text{ cm}^2.$$

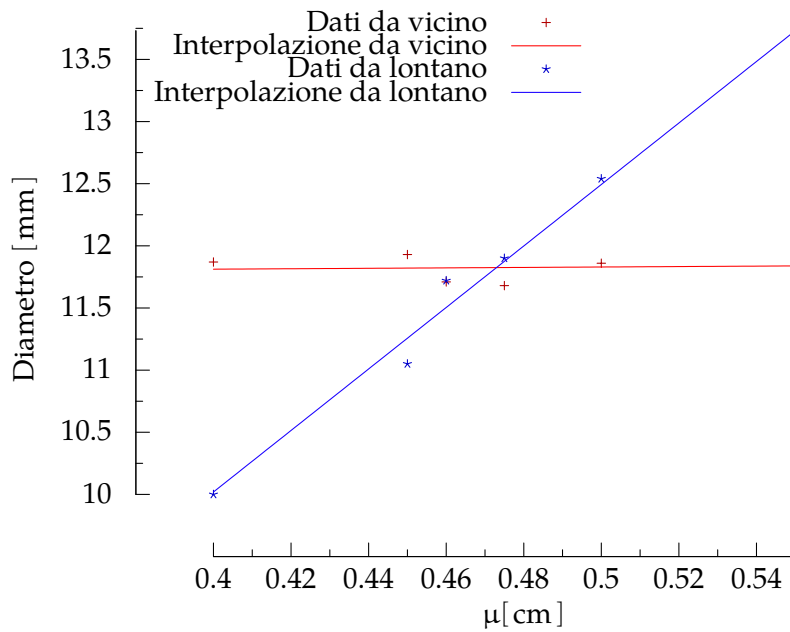
L'incertezza così calcolata risulta di 0.0003 cm, molto bassa a causa della precisione micrometrica, migliorata grazie al fit lineare. Tuttavia si ritiene più corretto considerarla non più bassa dell'incertezza strumentale. L'intersezione è quindi stimata come

$$\mu^* = (0.473 \pm 0.001) \text{ cm}.$$

Per rendere visivamente apprezzabile l'incertezza sulle rette, è stato creato un grafico (**Grafico 2**) contenente le rette tracciate per i valori estremali della quota e del coefficiente angolare. Si trova per il fuoco

¹M. Loreti, *Teoria degli Errori e Fondamenti di Statistica*, p. 266

Grafico 1 Interpolazione lineare

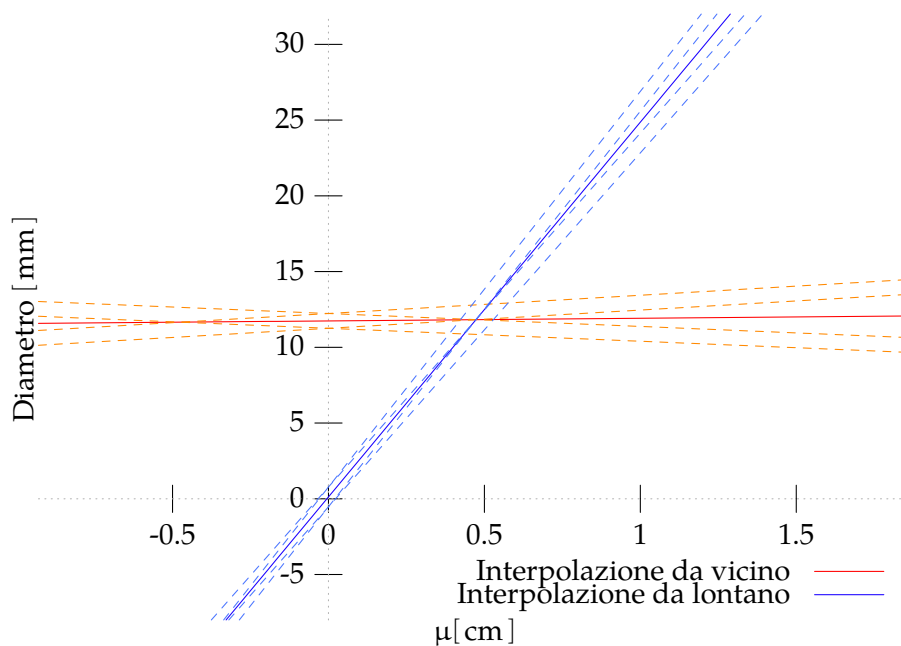


il valore

$$f_1^* = (6.72 \pm 0.07) \text{ cm},$$

si è considerata trascurabile l'incertezza su μ^* (la scelta di considerare l'incertezza strumentale non influisce quindi sugli altri risultati) rispetto a quella fornita dal laboratorio su P_L e P_O , pari a $\sigma_P = 0.05$ cm: ciò porta propagando a un'incertezza di $\sqrt{2}\sigma_P = 0.07$ cm. Tale stima va considerata a meno della correzione di aberrazione sferica (per la quale cfr. sottosezione IV).

Grafico 2 Incertezza sulle rette



III.II Punti coniugati

Un ulteriore metodo per la misurazione del fuoco della lente è quello che prevede l'utilizzo della legge dei punti coniugati. A partire dall'equazione di Gauss per le lenti sottili, apportando alcune correzioni legate al modello delle lenti spesse, si può trovare una serie di equazioni che descrivono il comportamento delle lenti attraverso semplici misure di lunghezze. Tali equazioni sono:

$$\begin{aligned} p &= P_L - P_O + \frac{dr}{2} - \frac{\overline{PP'}}{2} \\ q &= P_S - P_L - \frac{dr}{2} + \frac{\overline{PP'}}{2} \\ \frac{1}{f} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \end{aligned} \quad (3)$$

Sono stati prelevati due campioni diversi, dato che il primo campione possedeva delle imprecisioni. I campioni si possono trovare nella **Tabella 3**. Il valore mantenuto costante durante tutta l'esperienza è

$$P_O = (13.15 \pm 0.05) \text{ cm}$$

Tali campioni sono stati presi in momenti diversi, in particolare sono stati riposizionati tutti i cavalieri tra un campione e l'altro. Si è fatto un

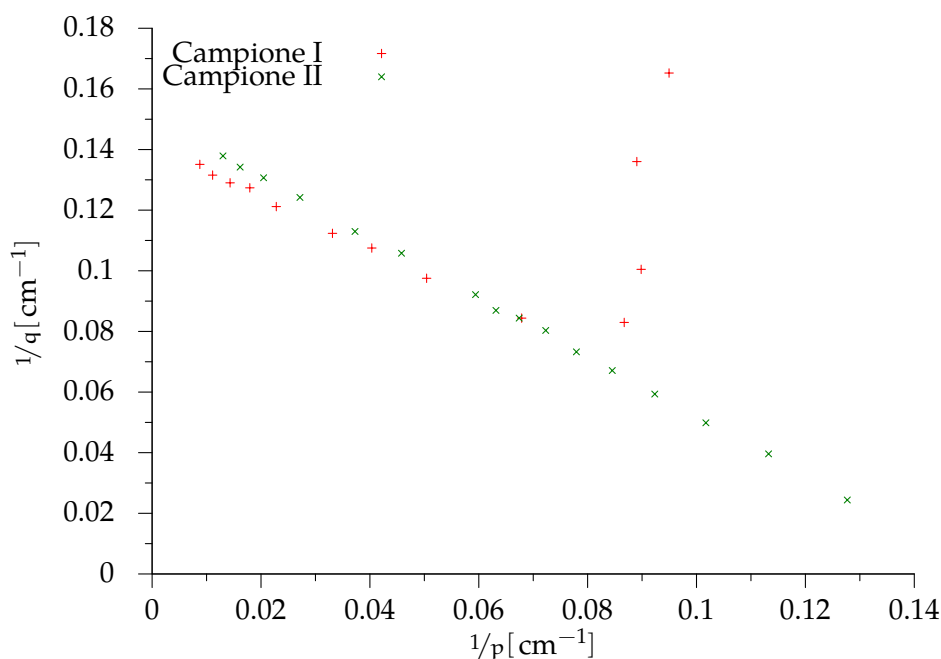
Tabella 3: Campioni (*udm in [cm]*)

Campione I		Campione II	
P_L	P_S	P_L	P_S
23.70	30.00	21.00	62.25
24.40	32.00	22.00	47.50
24.30	34.50	23.00	43.30
24.70	37.00	24.00	41.10
27.90	40.00	25.00	40.15
33.00	43.50	26.00	39.90
37.95	47.50	27.00	39.70
43.35	52.50	28.00	40.10
57.00	65.50	29.00	40.75
68.90	77.00	30.00	41.10
83.00	91.00	35.00	44.70
103.15	111.00	40.00	49.10
127.35	135.00	50.00	58.30
-	-	62.00	69.90
-	-	75.00	82.70
-	-	90.00	97.50

grafico per cercare di comprendere come i dati si distribuivano in un piano cartesiano: nel **Grafico 3** è rappresentato $1/q$ in funzione di $1/p$; secondo la formula (3) risulta che il grafico dovrebbe essere una retta con pendenza -1 .

Si evince facilmente come nel Campione I ci siano dei punti visibilmente fuori scala, probabilmente a causa di inesattezze da parte degli sperimentatori nel prendere quei dati (quando la lente era particolarmente vicina all'oggetto risultava meno semplice andare ad identificare in maniera precisa a quale distanza avrebbe dovuto essere lo schermo affinché l'immagine fosse a fuoco). Alcune accortezze, prese proprio in conseguenza delle imprecisioni del primo campione, hanno permesso di migliorare le misure per un nuovo campione che fosse più preciso del precedente. Ma i due campioni appartengono alla stessa popolazione? La risposta risulta negativa: infatti anche nella zona in cui il Campione I non è evidentemente

Grafico 3 Punti coniugati



sbagliato le due rette non coincidono, come si può vedere dal **Grafico 4** in cui sono stati riportati i dati non evidentemente sbagliati assieme alla rette che li interpolano $y = ax + b$, che si possono trovare nella **Tabella 4**.

Come è stato già detto, la teoria dice che la retta che rappresentiamo sul piano cartesiano ha pendenza -1 . Il nostro approccio sperimentale, però, inserisce errori di tipo statistico e sistematico che fanno in modo che la retta che effettivamente si trova non abbia coefficiente angolare esattamente -1 , ma ci si avvicini. A questo punto sorge spontaneo chiedersi se convenga di più fare un'analisi dati basata su un'interpolazione a doppio parametro (pendenza, intercetta), o fissare la pendenza a -1 come vuole la teoria andando a cercare quale sia l'intercetta in questo caso. Le due diverse interpolazioni danno origine al **Grafico 5**.

Per comprendere quale dei due modi di interpretare il fenomeno sia più opportuno usare si è utilizzato il metodo dell' \mathcal{F} -test: sono stati presi gli scarti quadratici medi delle due interpolazioni diverse e sono stati normalizzati ai gradi di libertà (sono state raccolte 16 coppie di dati, ciò vuol dire che la retta con un solo parametro libero ha 15 gradi di libertà, siano n_1 nelle formule, e la retta con due parametri liberi ha 14 gradi di

Grafico 4 Le interpolazioni dei due campioni

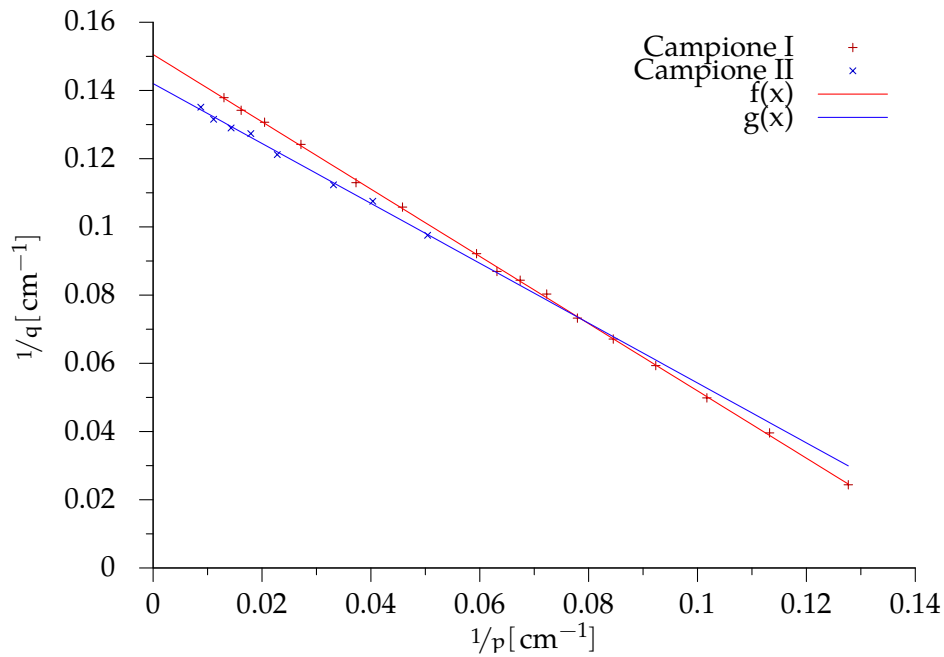


Tabella 4: Rette interpolanti

Campione	a	σ_a	b [cm ⁻¹]	σ_b [cm ⁻¹]
I	-0.88	0.02	0.1420	0.0006
II	-0.986	0.004	0.1505	0.0003

libertà, n_2). La formula utilizzata è:

$$\mathcal{F} = \frac{\frac{\sum_i (y_i - f_1(c_i))^2}{n_1 - n_2} - \frac{\sum_i (y_i - f_2(c_i))^2}{n_2}}{\frac{\sum_i (y_i - f_2(c_i))^2}{n_2}}.$$

Da questa formula risulta $\mathcal{F} = 0.1740$. Ora, per capire quale delle due interpolazioni meglio si addica alla casistica trovata, bisogna consultare le tabelle di riferimento relative alla funzione di Von Mises-Fisher, andando a leggere il valore in corrispondenza dei gradi di libertà del numeratore (in questo caso 1) per trovare la colonna e i gradi di libertà del denominatore (in questo caso 14) per trovare la riga. Si legge che vale la pena introdurre un nuovo parametro alla teoria se $\mathcal{F} > 3.10$, da cui si evince come non sia necessario introdurre il secondo parametro d'interpolazione della retta,

Grafico 5 Le due diverse interpolazioni

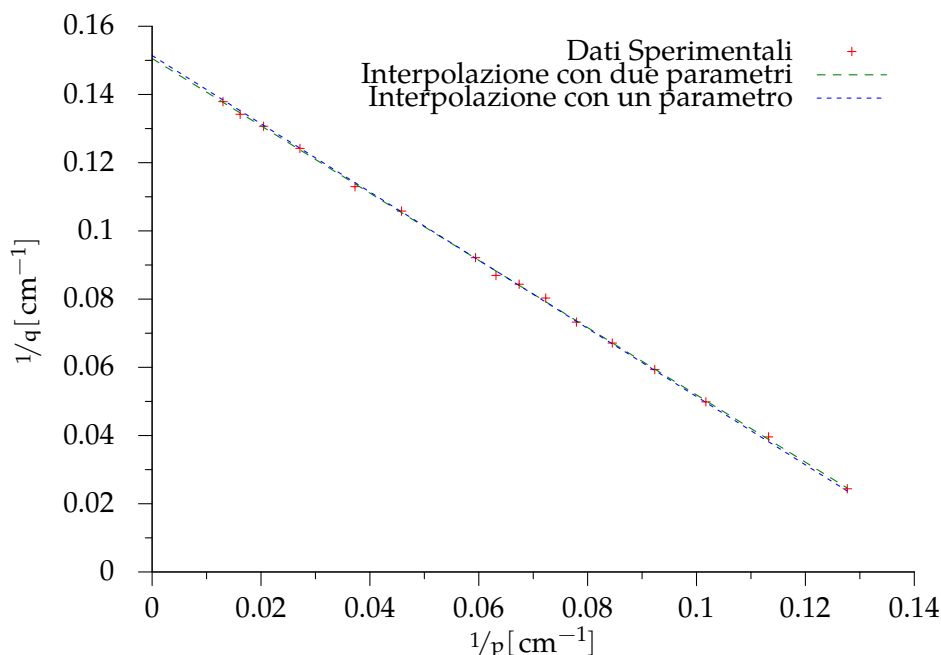


Tabella 5: Numero parametri d'interpolazione

Parametri del modello	a	σ_a	$b [cm^{-1}]$	$\sigma_b [cm^{-1}]$
b	-1	-	0.1514	0.0002
a, b	-0.986	0.004	0.1505	0.0003

che può essere fissato a -1 senza peggiorare il modello². Per fare uno studio più completo si sono effettuate le analisi sia considerando la pendenza della retta come fissata, sia considerandola come una variabile casuale dipendente dal campione.

Considerando la pendenza come dipendente dal campione, si trova una retta che interseca gli assi in due punti di coordinate diverse, coordinate che indicano proprio due stime diverse del reciproco del fuoco della lente, che chiameremo rispettivamente f_x se l'intersezione è con l'asse delle x e f_y se l'intersezione è con l'asse delle y . Per quanto riguarda f_y , la sua stima è piuttosto semplice: prendendo l'equazione della retta interpolante $y = ax + b$ con a e b letti dalla **Tabella 5**, basta cercare il punto con la x nulla per trovare l'intersezione con l'asse. Con una banale sostituzione si ottiene $f_y = b$ il che dà immediatamente un valore del reciproco

²Si prenda una significanza del 90%, riferimento tabella: http://www.socr.ucla.edu/applets.dir/f_table.html

del fuoco che sia anche accompagnato dalla propria incertezza: con una semplice propagazione si trova che l'incertezza su f_y è uguale a quella su b , stimata a partire dalle formule di interpolazione che massimizzano la verosimiglianza (anche questo riportato nella **Tabella 5**). Il primo valore del reciproco del fuoco quindi risulta:

$$f_y = (0.1505 \pm 0.0003) \text{ cm}^{-1}.$$

Per quanto riguarda l'intersezione con l'asse delle x , stavolta il calcolo è leggermente più complesso, infatti sostituendo $y = 0$ alla formula della retta interpolata si ottiene $f_x = -\frac{q}{m}$. Per trovare l'incertezza a questo punto risulta necessario propagare gli errori su m e su q . Applicando la formula di propagazione risulta:

$$\sigma_{f_x} = \sqrt{\frac{1}{m^2} \sigma_q^2 + \frac{q}{m^2} \sigma_m^2 + 2 \text{cov}(q, m)}.$$

Sostituendo, il reciproco del fuoco ha un valore di:

$$f_x = (0.153 \pm 0.002) \text{ cm}^{-1}.$$

Per trovare il fuoco è necessario calcolare i reciproci di f_x ed f_y ; secondo la formula di propagazione: $f'_x = \frac{1}{f_x}$ e $\sigma_{f'_x} = \frac{\sigma_{f_x}}{f_x^2}$ ed analogo per f_y . Da cui i risultati:

$$f'_x = (6.55 \pm 0.09) \text{ cm}$$

$$f'_y = (6.64 \pm 0.01) \text{ cm}.$$

Per dare un risultato finale, si tiene conto di tutti gli errori considerando il fatto che questi due numeri sono diversi: si può stimare effettivamente il fuoco f facendo una media aritmetica dei valori ottenuti e si può stimare l'incertezza andando a vedere la semidifferenza tra i due valori casuali ottenuti. Il risultato finale è:

$$f = (6.60 \pm 0.04) \text{ cm}.$$

Si veda ora come si sarebbero potuti analizzare i dati considerando la retta con l'unico parametro libero l'intercetta. In questo caso il risultato del fuoco e un'indicazione della sua incertezza statistica ci vengono dati dai parametri interpolati e riportati nella **Tabella 5**, per cui la distanza focale, calcolata come nel caso precedente trovando il reciproco dell'intercetta e propagando gli errori, sembrerebbe valere:

$$f' = (6.604 \pm 0.009) \text{ cm}.$$

Ricordando però che i campioni raccolti per la stima della lunghezza focale attraverso il metodo dei punti coniugati erano due ed erano visibilmente

Tabella 6: Campioni con errori sistematici [cm^{-1}]

$1/p \mid P_O$ aumentato	$1/p$ campione	$1/p \mid P_O$ diminuito	$1/q$
0.0596	0.0594	0.0592	0.0922
0.0634	0.0632	0.0630	0.0869
0.0677	0.0674	0.0672	0.0844
0.0726	0.0723	0.0720	0.0803
0.0782	0.0779	0.0776	0.0733
0.0849	0.0845	0.0842	0.0671
0.0927	0.0923	0.0919	0.0593
0.1022	0.1017	0.1012	0.0499
0.1139	0.1132	0.1126	0.0396
0.1285	0.1277	0.1269	0.0244
0.0459	0.0458	0.0457	0.1058
0.0373	0.0373	0.0372	0.1130
0.0272	0.0272	0.0271	0.1242
0.0205	0.0205	0.0205	0.1307
0.0162	0.0162	0.0162	0.1342
0.0130	0.0130	0.0130	0.1379

poco compatibili tra loro, sorge spontaneo chiedersi quali siano gli errori sistematici collegati a tale metodo. Dalle formule della legge (3) risulta che p dipende dalla posizione iniziale dell'oggetto, che tra l'altro rimane fisso per tutta la durata dell'esperimento (probabilmente è da ricondurre ad una non perfetta lettura della posizione dell'oggetto il fatto che i due campioni non siano sottoinsiemi della stessa popolazione), il che vuol dire che un'errata lettura nella posizione iniziale dell'oggetto può sistematicamente creare un bias nel campione, spostando la retta interpolante dalla posizione che realmente dovrebbe occupare. Per stimare tale errore sistematico sono stati creati dei campioni fittizi di $1/p$ considerando l'oggetto non nella posizione registrata al momento dell'esperimento, ma spostata di una sigma (0.5 mm) da uno dei due lati. I valori ottenuti sono riassunti nella **Tabella 6**.

Rappresentando sia il campione reale sia i campioni fittizi con le relative rette interpolate si vede il **Grafico 6**. Da un confronto delle rette

Grafico 6 Errori su P_O

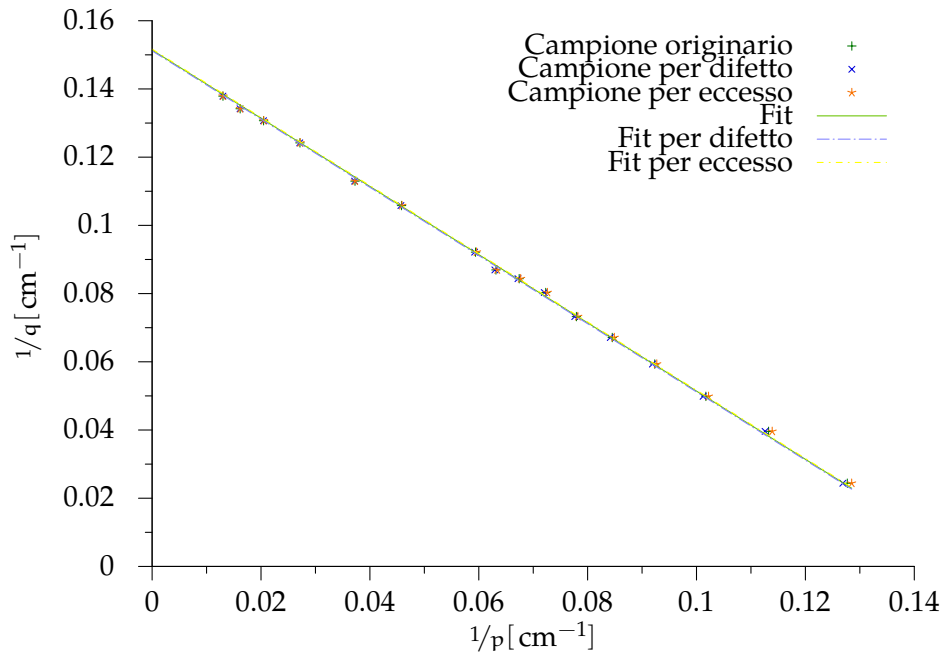


Tabella 7: Rette interpolanti errori sistematici

Campione	Intercetta [cm^{-1}]	σ [cm^{-1}]
Campione originario	0.1514	0.0002
Con $p'_o = (p_o + 0.5) \text{ mm}$	0.1517	0.0008
Con $p'_o = (p_o - 0.5) \text{ mm}$	0.1512	0.0001

interpolanti nella **Tabella 7** si può stimare l'incertezza che può essere collegata all'imprecisione nella lettura della posizione del cavaliere portalampada. In particolare si può leggere l'effettivo valore del fuoco come quello collegato al campione realmente raccolto, e ad esso si può associare un errore sistematico legato alla massima distanza tra i fuochi fittizi ricavati dalle interpolazioni dei campioni fittizi, che risulta di 0.01 cm. Il valore finale risulta, quindi:

$$f_2^* = (6.60 \pm 0.01) \text{ cm},$$

dove è stata considerata la somma tra gli errori statistici e gli errori sistematici su P_O , rispetto ai quali gli errori statistici precedentemente considerati risultano trascurabili. Il valore più giusto tra i due, alla luce dell' \mathcal{F} -test effettuato e delle considerazioni sugli errori sistematici, è il secondo: infatti la semplicità della retta interpolante a singolo parametro libero permette

un più semplice studio degli errori collegati al posizionamento dell'oggetto. Un approccio simile per la ricerca dell'errore sistematico nel caso del doppio parametro libero renderebbe impossibile l'approssimazione dell'incertezza attraverso le formule sopra citate, rendendo difficoltosa una pratica stima della stessa. Il valore ottenuto va comunque corretto tramite i coefficienti di aberrazione sferica, come verrà discusso più avanti.

III.III Bessel

L'ultimo metodo per la misura della lunghezza focale è il cosiddetto metodo di Bessel: questo metodo, usando una differenza delle posizioni, consente di ridurre l'errore sistematico dovuto alle imprecisioni nel posizionamento dei cavalieri. Il metodo consiste nel fissare lo schermo e l'oggetto, e muovere la lente fino a trovare i fuochi.

Si troveranno due posizioni della lente, come spiegato sotto. Sia L la distanza tra l'oggetto e lo schermo (sarà quindi fissata, e dovrà essere $L \geq 4f$, e $S = p_2 - p_1$ la differenza di posizioni p_1 e p_2 della lente dove l'immagine sia a fuoco). Dalla formula (3) si ricava, sostituendo L e S ,

$$f = \frac{L^2 - S^2}{4L} \quad (4)$$

e per trovare l'errore σ_f deriviamo

$$\frac{\partial f}{\partial L} = \frac{L^2 + S^2}{4L^2} \approx \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = -\frac{S}{2L}$$

Questi errori sono minimizzati per $L \approx 4f$, d'altra parte la profondità di campo rende difficile una stima precisa della posizione di coincidenza. Si è scelto quindi di usare valori di L di poco superiori a $4f$ (calcolato con le stime precedenti). Ricordando che

$$P_O = (13.15 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (5)$$

$$P_S = (55.00 \pm 0.05) \text{ cm} \quad (6)$$

$$L = P_S - P_O - \overline{PP'} \quad (7)$$

si sono trovate una decina di misure di p_1 e p_2 , e si è calcolato per ciascuna il fuoco col suo errore (tutto ciò è illustrato nella **Tabella 8**) effettuando infine una media pesata per ottenere la stima del fuoco col metodo di Bessel f_3^* e il suo errore $\sigma_{f_3^*}$:

$$f_3^* = (6.588 \pm 0.007) \text{ cm} \quad (8)$$

Tabella 8: Metodo di Bessel [cm]

p_1	p_2	S	f	σ_f
21.35	46.55	25.20	6.58	0.27
21.25	46.45	25.20	6.58	0.27
21.35	46.60	25.25	6.56	0.28
21.30	46.45	25.15	6.59	0.27
21.35	46.45	25.10	6.61	0.27
21.35	46.45	25.10	6.61	0.27
21.35	46.50	25.15	6.59	0.27
21.30	46.45	25.15	6.59	0.27
21.35	46.55	25.20	6.58	0.27
21.30	46.45	25.15	6.59	0.27

III.IV Aberrazione sferica

I risultati delle misure sono riportati nelle prime colonne della **Tabella 9**. Per la stima del coefficiente di aberrazione sferica c , si è considerata la formula

$$c = \frac{fl}{R^2},$$

con $l = f_p - f_m = \frac{f_i + f_f}{2} - f_m$ e f miglior stima del fuoco nel giallo dalle precedenti esperienze.

Per trovare l si è calcolato l_i su ogni terna di valori, propagandone l'errore quadraticamente. Nel calcolo della propagazione si è notato che l'incertezza su f_m è trascurabile rispetto a quella su f_p : infatti risulta da evidenze sperimentali che la profondità di campo dei raggi prossimali all'asse ottico è molto maggiore di quella dei raggi marginali; è stato più semplice comprendere la posizione del fuoco marginale rispetto a quella del fuoco prossimale, per identificare il quale è stato necessario trovare i due valori all'interno del quale il fuoco fosse compreso. Al fuoco prossimale è stata associata, quindi, un'incertezza pari alla semiampiezza dell'intervallo di fuoco dei raggi prossimali, proprio in conseguenza delle difficoltà già espresse. Si è in seguito fornita una stima di l come media pesata del campione così creato:

$$l = (0.51 \pm 0.03) \text{ cm.}$$

Per la correzione di aberrazione sferica sulle stime f_j^* ottenute dalle precedenti esperienze, è necessario il valore l' , definito come la distanza

Tabella 9: Aberrazione sferica, [mm] tranne le ultime due colonne adimensionali

f_m	f_i	f_f	f_p	t	l	σ_l	c	σ_c
4.18	8.00	10.65	9.33	1.93	5.1	1.3	1.75	0.45
4.10	8.18	10.60	9.39	2.02	5.3	1.2	1.80	0.41
4.15	8.15	10.39	9.27	1.99	5.1	1.1	1.74	0.38
4.08	7.50	9.90	9.20	1.94	4.6	2.2	1.57	0.41
4.25	7.90	10.35	9.13	1.90	4.9	1.2	1.66	0.42
3.90	8.75	9.80	9.28	1.95	5.4	0.5	1.83	0.18
4.90	8.00	10.30	9.15	1.87	4.2	1.1	1.44	0.39
4.10	8.25	10.30	9.28	-	5.2	1.0	1.76	0.35
4.00	8.25	10.10	9.18	-	5.2	0.9	1.76	0.31
4.07	7.31	10.50	8.91	-	4.8	1.6	1.64	0.54

tra i punti di messa a fuoco rispettivamente dei raggi prossimali all'asse ottico e di quelli al margine del fascio, nel caso del diaframma a foro singolo (diametro $d_0 = 1.00\text{cm}$). Per trovare tale valore si utilizza la definizione di aberrazione sferica longitudinale $l' = \frac{c(d/2)^2}{f}$: a partire dai dati dell'esperienza illustrata nella sottosezione I, si è trovata l'ordinata dell'intersezione tra le due rette, corrispondente al diametro del fascio creato, $d = 1.182\text{ cm}$ (non si è ricercata l'incertezza di tale valore, in quanto la correzione per aberrazione sferica prevede l'utilizzo esclusivamente del valore di l' , ma non dell'incertezza associata). Risolvendo il sistema tra la formula sopra detta e $l = \frac{cR^2}{f}$, si ottiene

$$l' = l \left(\frac{d}{2R} \right)^2 = 0.09\text{ cm}.$$

Con tale l' , si è compiuta una correzione di aberrazione sferica per ogni f_j^* ottenuto dalle precedenti esperienze, sommando $l'/2$ alla stima stessa e andando a stimare nuovamente la sua incertezza. Infatti i risultati presentati nel caso delle prime tre esperienze trovano il fuoco della lente a meno delle correzioni per aberrazione sferica: a causa della costruzione dell'apparato, l'oggetto non è effettivamente puntiforme, ma ha un diametro finito d a causa del diaframma. Ciò vuol dire che, analogamente a quanto è stato notato nell'esecuzione dell'esperimento IV, i raggi che incidono la lente a distanza maggiore dal centro della stessa convergono prima degli altri. A causa di questo fenomeno irriducibile, quello che è stato trovato nelle esperienze precedenti non è realmente il fuoco (conside-

rato come punto in cui convergono i raggi prossimali all'asse ottico), ma è il centro dell'intervallo di messa a fuoco dell'immagine. Per questo, andando a correggere tale valore, risulta necessario aggiungere $\frac{l'}{2}$ per spostarsi dal punto in cui si è registrato il fuoco nelle prime tre esperienze al punto dove effettivamente si ritiene più probabile sia il fuoco; all'incertezza va sommata quadraticamente la stessa quantità per considerare il fatto che non si sa esattamente dove sia il fuoco nell'intervallo che va da quello registrato a quello più probabile. Si considera dunque f come media pesata di tali valori:

$$f = (6.65 \pm 0.03) \text{ cm.}$$

Per quanto riguarda c , si è proceduto creando un nuovo valore per ogni set di dati; la formula di propagazione fornisce

$$\sigma_{c_i}^2 = \frac{f^2 \sigma_{l_i}^2 + l^2 \sigma_f^2}{R^4}$$

in cui si è considerata trascurabile l'incertezza su $R = 1.40$ cm, fornito dal laboratorio. Da questo campione si è ricavata la media pesata, con relativa incertezza:

$$c = 1.7 \pm 0.1$$

Come ulteriore stima di c , si è utilizzata la formula

$$c_t = \frac{tf(f-1)}{2R^3},$$

dove t è l'aberrazione sferica trasversale misurata, stimata con una media semplice, potendo considerare σ costante:

$$t = (0.194 \pm 0.002) \text{ cm.}$$

L'incertezza su t si è trovata a posteriori con la formula RMS, per evitarne una difficile stima a partire dalla sensibilità dello strumento. L'incertezza di c_t si trova quindi con la propagazione:

$$\sigma_{c_t} = \sqrt{\frac{f^2(f-1)^2 \sigma_t^2 + t^2(2f-1)^2 \sigma_f^2 + t^2 f^2 \sigma_l^2}{4R^6}}$$

$$c_t = 1.45 \pm 0.04.$$

La stima di c_t attraverso t è meno affidabile della stima di c attraverso l , in quanto i valori di t registrati sono influenzati da errori sistematici non trascurabili nel caso in cui la misura venga fatta non esattamente nel fuoco prossimale. Per questo motivo per la correzione del fuoco si è preferito utilizzare l'aberrazione sferica longitudinale rispetto a quella trasversale. Anche la differenza tra le due stime c e c_t è imputabile ai medesimi errori sistematici su t . La difficoltà nella stima di tali errori rende inoltre impossibile una media tra le due stime, irrimediabilmente correlate.

Tabella 10: Risultati aberrazione cromatica

$f_C[\text{mm}]$	$f_F[\text{mm}]$	$A[\text{mm}]$	V	σ_V
3.10	4.25	1.15	58	4
3.05	4.00	0.95	70	5
2.90	4.25	1.35	49	3
2.82	4.23	1.41	47	2
3.21	4.26	1.05	63	4
2.92	4.13	1.21	55	3
3.04	4.18	1.14	58	4
3.13	3.98	0.85	78	7
3.18	4.26	1.08	62	4
3.08	4.16	1.08	62	4

III.V Aberrazione cromatica e numero di Abbe

I risultati delle misure sono riportati nella **Tabella 10**. Per questa esperienza si sono utilizzate le proprietà del doppietto acromatico di Dollond, lente composta da una lente convergente e una divergente, le quali siano allineate sul medesimo asse ottico. Tale configurazione in condizioni particolari massimizza il numero di Abbe della lente stessa: infatti il doppietto acromatico fa sì che i raggi siano proiettati nel medesimo punto a prescindere dalla loro lunghezza d'onda. Per l'analisi si è considerato il doppietto acromatico come ideale, e non si è valutato l'errore sistematico legato al fatto che il raggio avrebbe potuto non essere effettivamente parallelo con uno dei due filtri. Tale proprietà risulta importante per la misurazione del numero di Abbe della lente presa in esame, in quanto è necessario che il fascio di partenza sia parallelo a prescindere dal filtro utilizzato.

Per la stima del numero di Abbe V si è utilizzata la formula

$$V = \frac{f}{A}$$

dove $A = f_C - f_F$ e f_D è la miglior stima del fuoco nel giallo dalle precedenti esperienze. Per la stima di A , si è utilizzata una media semplice sul campione A_i creato a partire dai dati:

$$A = (0.113 \pm 0.005) \text{ cm.}$$

Considerando invece il campione di $V_i = \frac{f}{A_i}$, la formula di propagazione porta a

$$\sigma_{V_i}^2 = \frac{\frac{2f^2 s^2}{A_i^2} \sigma^2 + \sigma_f^2}{A_i^2}$$

e la media pesata restituisce la nostra stima:

$$V = 56 \pm 1.$$

IV. CONCLUSIONI

Le grandezze fisiche della lente cercate sono presentate nella seguente lista:

- $f_{D,1} = (6.76 \pm 0.08) \text{ cm}$
- $f_{D,2} = (6.65 \pm 0.05) \text{ cm}$
- $f_{D,3} = (6.63 \pm 0.05) \text{ cm}$
- $f_D = (6.66 \pm 0.03) \text{ cm}$
- $c = (1.7 \pm 0.1)$
- $t = (0.194 \pm 0.002) \text{ cm}$
- $A = (0.113 \pm 0.005) \text{ cm}$
- $V = (56 \pm 1)$

(dove il fuoco è inteso nel giallo).

Per il calcolo delle grandezze fisiche non dirette (per esempio per il calcolo della media del fuoco o per il calcolo della costante di aberrazione sferica c) si è operato con i valori ottenuti nell'analisi dati non approssimati, l'approssimazione è stata fatta solo in fase di presentazione dei dati stessi.

Le stime dei fuochi sono sufficientemente compatibili tra loro e con la deviazione massima della prima stima è giustificabile con la maggiore incertezza legata alla metodologia di misura; la maggior parte dell'incertezza della seconda e terza stima è invece dovuta alla correzione per aberrazione sferica (vedi sottosezione IV).

Le stime dei coefficienti di aberrazione sono in linea con le aspettative teoriche.

V. CODICE

```

1 #include <iostream>
2 #include <fstream>
3 #include <cmath>
4 #include "libstat.h"
5
6 using namespace std;
7
8 struct line
9 {
10     double a, b, sa, sb;
11 };
12
13 int main (){
14     int N = 6;
15     double * x = new double [N];
16     double * yv = new double [N];
17     double * yl = new double [N];
18
19     for(int i = 0; i < 7; i++){
20         cin >> x[i];
21         cin >> yv[i];
22         cin >> yl[i];
23     }
24
25     line retv, retl;
26     retv.a = interp_a(N, x, yv);
27     retv.b = interp_b(N, x, yv);
28     retv.sa = interp_sigmaa(N, x, yv);
29     retv.sb = interp_sigmasb(N, x, yv);
30
31     retl.a = interp_a(N, x, yl);
32     retl.b = interp_b(N, x, yl);
33     retl.sa = interp_sigmaa(N, x, yl);
34     retl.sb = interp_sigmasb(N, x, yl);
35
36     cout <<
37     "x medio = " << media(N, x) << ", Var(x) = " << scarto2(N, x)
38     << endl <<
39     "y vicino medio = " << media(N, yv) << ", Var(y) = " <<
40     scarto2(N, yv) << endl <<
41     "y lontano medio = " << media(N, yl) << ", Var(y) = " <<
42     scarto2(N, yl) << endl;
43
44     cout <<
45     "Da vicino" <<
46     "\nm = " << retv.b << " +/- " << retv.sb <<
47     "\nq = " << retv.a << " +/- " << retv.sa <<
48     "\ncov(m, q) = " << covab(N, x, yv) <<

```

```

47     "\nfv(x) = " << retv.b << " * x + " << retv.a <<
48     "\nfv_hh(x) = " << retv.b + retv.sb << " * x + " << retv.a +
        retv.sa <<
49     "\nfv_hl(x) = " << retv.b + retv.sb << " * x + " << retv.a -
        retv.sa <<
50     "\nfv_lh(x) = " << retv.b - retv.sb << " * x + " << retv.a +
        retv.sa <<
51     "\nfv_ll(x) = " << retv.b - retv.sb << " * x + " << retv.a -
        retv.sa <<
52     "\nDa lontano" <<
53     "\nm = " << retl.b << " +/- " << retl.sb <<
54     "\nq = " << retl.a << " +/- " << retl.sa <<
55     "\ncov(m, q) = " << covab(N, x, y1) <<
56     "\nfl(x) = " << retl.b << " * x + " << retl.a <<
57     "\nfl_hh(x) = " << retl.b + retl.sb << " * x + " << retl.a +
        retl.sa <<
58     "\nfl_hl(x) = " << retl.b + retl.sb << " * x + " << retl.a -
        retl.sa <<
59     "\nfl_lh(x) = " << retl.b - retl.sb << " * x + " << retl.a +
        retl.sa <<
60     "\nfl_ll(x) = " << retl.b - retl.sb << " * x + " << retl.a -
        retl.sa << endl;
61
62
63     return 0;
64 }

```

../src/01prog.cxx

```

1  #include <iostream>
2  #include <fstream>
3  #include <cmath>
4  #include "libstat.h"
5
6  using namespace std;
7
8  struct line
9  {
10     double a, b, sa, sb;
11 };
12
13 int main (){
14     int N = 16;
15     double * x = new double [N];
16     double * y = new double [N];
17
18     for(int i = 0; i < N; i++){
19         cin >> x[i];
20         cin >> y[i];
21     }
22
23

```

```

24 line ret;
25 ret.a = interp_a(N, x, y);
26 ret.b = interp_b(N, x, y);
27 ret.sa = interp_sigmaa(N, x, y);
28 ret.sb = interp_sigmas(N, x, y);
29
30 cout <<
31 "x medio = " << media(N, x) << ", Var(x) = " << scarto2(N, x)
    << endl <<
32 "y medio = " << media(N, y) << ", Var(y) = " << scarto2(N, y)
    << endl;
33
34 cout <<
35 "Parametri retta:" <<
36 "\nm = " << ret.b << " +/- " << ret.sb <<
37 "\nq = " << ret.a << " +/- " << ret.sa <<
38 "\ncov(m, q) = " << covab(N, x, yv) << endl;
39 return 0;
40 }

```

../src/02PtiConjCov.cxx

```

1 //Estrae e analizza i dati da 04dat_pr.txt:
2 //fm fi ff fp t s(sigma su t)
3 //corretto da Fra
4
5 #include <iostream>
6 #include <fstream>
7 #include <cmath>
8 #include "libstat.h"
9
10
11 double const sch = 40.80;
12 int const N = 10;
13 double const f = 6.655; //////////
14 double const sf = 0.0305226; //////////
15 double const R = 1.4;
16 using namespace std;
17
18 struct mis
19 {
20     double fm /*mm*/, fi /*mm*/, ff /*mm*/, fp /*mm*/, t /*mm*/, s
        /*cm*/, c;
21 };
22
23
24 int main(){
25     mis * arr = new mis [N];
26     double lmpes = 0;
27     double lspes = 0;
28     double mpes = 0;
29     double spes = 0;

```

```

30 double sl;
31 for(int i = 0; i < N; i++){
32     cin >> arr[i].fm;
33     cin >> arr[i].fi;
34     cin >> arr[i].ff;
35     cin >> arr[i].fp;
36     cin >> arr[i].t;
37     cin >> arr[i].s;
38     arr[i].s = 0.001;
39     arr[i].fm = arr[i].fm;
40     arr[i].fi = arr[i].fi;
41     arr[i].ff = arr[i].ff;
42     arr[i].fp = arr[i].fp;
43     arr[i].c = ((arr[i].fi + arr[i].ff)/2 - arr[i].fm)/10;
44     // trascuro l'errore su fm, perche' piccolo rispetto a quello
    su fp=(ff+fi)/2
45     sl = (arr[i].ff-arr[i].fi)/20;
46     lmpes += arr[i].c / (sl * sl);
47     lspes += 1 / (sl * sl);
48     cout << i + 1 << "esimo l = " << arr[i].c << ", sigma = " <<
        sl << endl;
49     arr[i].s = sqrt((f * f * sl * sl + arr[i].c * arr[i].c * sf *
        sf) / (R * R * R * R));
50     arr[i].c = arr[i].c * f / (R * R);
51     cout << i + 1 << " esimo c = " << arr[i].c << ", sigma = "
        << arr[i].s << endl;
52     mpes += arr[i].c / ((arr[i].s) * (arr[i].s));
53     spes += 1 / ((arr[i].s) * (arr[i].s));
54 }
55 lmpes = lmpes / lspes;
56 lspes = sqrt(1.0 / lspes);
57
58 cout << "Media pesata di l = " << lmpes << "cm, con sigma = "
    << lspes << "cm." << endl;
59
60 mpes = mpes / spes;
61 spes = sqrt(1 / spes);
62
63 cout << "Media pesata di c = " << mpes << "cm, con sigma = " <<
    spes << "cm." << endl;
64
65 double tsum = 0;
66 double * t = new double [N - 3];
67 for(int i = 0; i < (N - 3); i++){ //gli ultimi tre t non sono
    considerati
68     //cin >> arr[i].fm;
69     //cin >> arr[i].fi;
70     //cin >> arr[i].ff;
71     //cin >> arr[i].fp;
72     //cin >> arr[i].t;
73     //cin >> arr[i].s;
74     tsum += arr[i].t;

```

```

75     t[i] = arr[i].t;
76 }
77 double tau = tsum / (10 * (N - 3));
78 double st = scarto2((N - 3), t)/(10 * (sqrt(N - 3)));
79
80 cout << "t = " << tau << "cm, sigmat = cm" << st << endl;
81
82
83
84 return 0;
85 }

```

../src/04prog.cxx

```

1 //Estrae e analizza i dati da 05dat_pr.txt:
2 //
3 //
4
5 #include <iostream>
6 #include <fstream>
7 #include <cmath>
8 #include "libstat.h"
9
10
11 int const N = 10;
12 double const f = 6.655; //////////
13 double const sf = 0.0305226; //////////
14 double const s = 0.005;
15 using namespace std;
16
17 struct mis
18 {
19     double fF /*mm*/, fC /*mm*/, V;
20 };
21
22
23 int main(){
24     mis * arr = new mis [N];
25     double * A = new double [N];
26     double mpes = 0;
27     double spes = 0;
28     double Am = 0;
29     double sigma;
30     double frac;
31     for(int i = 0; i < N; i++){
32         cin >> arr[i].fF;
33         cin >> arr[i].fC;
34         A[i] = (arr[i].fC - arr[i].fF) / 10;
35         Am += A[i];
36         frac = 1 / A[i];
37         arr[i].V = f * frac;
38         //debug

```

```

39     cout << arr[i].V << "      " << frac << endl;
40     sigma = sqrt(frac * frac * (sf * sf + 2 * f * f * frac * frac
    * s * s));
41     cout << i + 1 << "esimo V = " << arr[i].V << ", sigma = " <<
    sigma << endl;
42     mpes += arr[i].V / ((sigma) * (sigma));
43     //debug
44     cout << "mpes " << mpes << endl;
45     spes += 1 / ((sigma) * (sigma));
46 }
47 Am = Am / N;
48 double sAm = scarto2(N, A)/((sqrt(N)));
49
50 cout << "Media di A = " << Am << ", con sigma = " << sAm <<
    endl;
51
52 mpes = mpes / spes;
53 spes = sqrt(1 / spes);
54
55 cout << "Media pesata di V = " << mpes << ", con sigma = " <<
    spes << endl;
56
57 return 0;
58 }

```

../src/05prog.cxx

```

1 dataBessel :=
    ReadList["~/Dropbox/Laboratorio/03betadat.txt",Number,RecordLists->True];
2 p0 = 13.15;
3 ps = 55.00;
4 vv= 0.8;
5 pp=vv/3;
6 L=ps-p0-pp;
7 funzfuoco[{p1_,p2_}] := (L^2- (p2- p1)^2)/(4L);
8 (*fuoco = Mean[funzfuoco /@ dataBessel];*)
9 sigmafuoco[{p1_,p2_}] := Sqrt[((p2- p1)/(2L) 0.7)^2+(0.7/4)^2];
10 fuochi = funzfuoco /@ dataBessel;
11 sigmafuochi = sigmafuoco /@ dataBessel;
12 devstand= 1/Total[1/sigmafuochi^2]
13 media = Total[fuochi/sigmafuochi^2]/Total[1/sigmafuochi^2]

```

../src/bessel.txt

```

1 #include <iostream>
2 #include <vector>
3 using namespace std;
4 int main()
5 {
6     vector <double> c1;
7     vector <double> c2;
8     vector <double> c3;
9     vector <double> c4;

```

```

10 vector <double> c5;
11 vector <double> xi;
12 vector <double> yi;
13 int counter = 0;
14 int shift;
15 double t1,t2,t3,t4,t5;;
16 while (cin >> t1) {
17     cin >> t2;
18     cin >> t3;
19     cin >> t4;
20     cin >> t5;
21
22     c1.push_back(t1);
23     c2.push_back(t2);
24     c3.push_back(t3);
25     c4.push_back(t4);
26     c5.push_back(t5);
27 }
28 int n = c1.size();
29 for (int i = 0 ; i < n ; i++)
30 {
31     xi.push_back(1.0/(c2.at(i)-c1.at(i)+0.1*c4.at(i)-0.1*c5.at(i)));
32     yi.push_back(1.0/(c3.at(i)-c2.at(i)-0.1*c4.at(i)-0.1*c5.at(i)));
33     cout << xi.at(i) << "\t" << yi.at(i) << endl;
34 }
35 return 0;
36 }

```

../src/Coordgraf.cpp

```

1 #include <iostream>
2 #include <cmath>
3 using namespace std;
4 int main ()
5 {
6     double q, m, sq, sm, cqm;
7     cerr << "Inserisci in ordine: q, sq, m, sm, cqm: " << endl;
8     cin >> q >> sq >> m >> sm >> cqm;
9     double sx;
10    sx = sqrt ( ((1/( m * m ) ) * sq * sq ) + ((q * q ) /( m * m * m
        * m) * sm * sm ) + ( 2 * cqm ));
11    cerr << "L'errore su f_x vale " << sx << endl;
12    return 0;
13 }

```

../src/errore_fx.cpp

```

1 #include <iostream>
2 #include <vector>
3 #include <climits>
4 using namespace std;

```



```

5 double sum (vector <double> a, vector <double> b);
6 double diff (vector <double> a, vector <double> b);
7 int main ()
8 {
9     char c;
10    double t1, t2;
11    int counter = 0;
12    vector <double> xi;
13    vector <double> yi;
14    while (cin >> t1)
15    {
16        cin >> t2;
17        xi.push_back(t1);
18        yi.push_back(t2);
19        if(t1 == 0) break;
20    }
21    int n = xi.size();
22    double a,b,q;
23    cerr << "Inserire pendenza retta interpolante
24    a due parametri: ";
25    cin >> a;
26    cerr << "Inserire intercetta retta interpolante
27    a due parametri: ";
28    cin >> b;
29    cerr << "Inserire intercetta retta a parametro
30    singolo: ";
31    cin >> q;
32    double Ftest;
33    vector <double> f2par;
34    vector <double> f1par;
35    for (int i =0; i < n; i++)
36    {
37        f1par.push_back(q - (xi.at(i) ) );
38        f2par.push_back(b + a * (xi.at(i) ) );
39    }
40    Ftest= (((diff(yi, f1par) * diff(yi, f1par) )
41    - (diff(yi , f2par) * diff(yi , f2par) ) ) * (
42    n - 2) ) / (diff(yi , f2par) * diff(yi , f2par) );
43    cerr << "Il tuo Ftest per il fit ad un parametro
44    e due parametri ha dato un risultato di " << Ftest
45    << " ora vai a " << "controllarlo in una
46    tabella che da' le probabilita' per la
47    distribuzione di Fisher per capire quale delle due "
48    << "interpolazioni e' migliore, prendi
49    quella a due parametri se
50    f(Ftest) > CL";
51    return 0;
52
53
54 }
55
56 double sum (vector <double> a, vector <double> b)

```

```

57 {
58     int n = a.size();
59     double sum = 0;
60     for (int i = 0; i < n; i++)
61     {
62         sum += a.at(i) + b.at(i);
63     }
64     return sum;
65 }
66
67 double diff (vector <double> a, vector <double> b)
68 {
69     int n = a.size();
70     double diff = 0;
71     for (int i = 0; i < n; i++)
72     {
73         diff += a.at(i) - b.at(i);
74     }
75     return diff;
76 }

```

../src/FTest.cpp

```

1 #include <iostream>
2 #include <fstream>
3 #include <cmath>
4
5 using namespace std;
6
7 //////Analisi preliminare
8 double media(int N, double * misure)
9 {
10     double sum=0;
11     for (int i=0; i<N; i++){
12         sum+=misure[i];
13     }
14     double media=sum/N;
15     return media;
16 }
17
18 double scarto1(int N, double * misure)
19 {
20     double med = media(N, misure);
21     double sums=0;
22     for(int i=0; i<N; i++){
23         sums += (med-misure[i])*(med-misure[i]);
24     }
25     double sqm=sqrt(sums/N);
26     return sqm;
27 }
28
29

```

```

30 double scarto2(int N, double * misure)
31 {
32     double eqm=sqrt((N/(N-1)))*scarto1(N, misure);
33     return eqm;
34 }
35
36 double err_media(int N, double * misure)
37 {
38     double em=scarto2(N, misure)/sqrt(N);
39     return em;
40 }
41 /////
42
43
44 /////Sommatorie
45 double sum(int N, double * x)
46 {
47     double sum=0;
48     for(int i=0; i<N; i++){
49         sum+=x[i];
50     }
51     return sum;
52 }
53
54 double sumquad(int N, double * x)
55 {
56     double sum=0;
57     for(int i=0; i<N; i++){
58         sum+=(x[i]*x[i]);
59     }
60     return sum;
61 }
62
63 double sumprod(int N, double * x, double * y)
64 {
65     double sum=0;
66     for(int i=0; i<N; i++){
67         sum+=(x[i]*y[i]);
68     }
69     return sum;
70 }
71 /////
72
73 /////Funzioni interpolazione: y=a+bx
74 double interp_delta(int N, double * x, double * y)
75 {
76     double delta=N*sumquad(N, x)-((sum(N, x))*(sum(N, x)));
77     return delta;
78 }
79
80 double interp_a(int N, double * x, double * y)
81 {

```

```

82  double a=(1/interp_delta(N, x, y))*((sumquad(N, x))*(sum(N,
      y))-(sum(N, x))*(sumprod (N, x, y)));
83  return a;
84 }
85
86 double interp_b(int N, double * x, double * y)
87 {
88     double b=(1/interp_delta(N, x, y))*(N*(sumprod(N, x,
      y))-(sum(N, x))*(sum(N, y)));
89     return b;
90 }
91
92 double sigmay_post(int N, double * x, double * y)
93 {
94     double sy=0;
95     for (int i=0; i<N; i++){
96         sy+=((interp_a(N, x, y))+((interp_b(N, x,
      y))*x[i])-(y[i]))*((interp_a(N, x, y))+((interp_b(N, x,
      y))*x[i])-(y[i]));
97     }
98     sy=sy/(N-2);
99     sy=sqrt(sy);
100    return sy;
101 }
102
103 double interp_sigmaa(int N, double * x, double * y)
104 {
105     double sa=(sigmay_post(N, x, y))*sqrt((sumquad(N,
      x))/(interp_delta(N, x, y)));
106     return sa;
107 }
108
109 double interp_sigtab(int N, double * x, double * y)
110 {
111     double sb=(sigmay_post(N, x, y))*sqrt(N/(interp_delta(N, x,
      y)));
112     return sb;
113 }
114
115 double covab(int N, double * x, double * y)
116 {
117     return (-(sum(N, x)*sigmay_post(N, x, y)*sigmay_post(N, x,
      y)/interp_delta(N, x, y)));
118 }

```

../src/libstat.h