

Università degli Studi di Padova

RELAZIONE DI LABORATORIO: DISTRIBUZIONI ANGOLARI

Laboratorio di fisica, primo anno LM

Davide Chiappara

Università di Padova, facoltà di fisica,
davide.chiappara@studenti.unipd.it
Matricola: 1153465

Ivan Di Terlizzi

Università di Padova, facoltà di fisica,
ivan.diterlizzi@studenti.unipd.it
Matricola: 1155188

Enrico Lusiani

Università di Padova, facoltà di fisica,
enrico.lusiani@studenti.unipd.it
Matricola: 1153399

Anno accademico 2016-2017

Sommario

La seguente è la relazione sull'esperimento di distribuzioni angolari eseguito da Chiappara Davide, Di Terlizzi Ivan e Lusiani Enrico facenti parte del gruppo 8. I dati sono stati raccolti presso il laboratorio di fisica in via Loredan in data 5-6-7 Novembre 2016, e sono stati successivamente analizzati durante lo stesso anno accademico.

L'esperienza consiste nella misura della correlazione angolare di una sorgente gamma di ^{60}Co tramite rivelatori a scintillazione di NaI(Tl) di cui si misura inoltre l'efficienza.

Indice

1	Esecuzione esperimento	1
2	Analisi dati	2
2.1	Calibrazione	2
2.2	Studio della geometria dell'apparato	4
2.3	Stima dell'efficienza	7
2.4	Correlazione	11
2.4.1	Analisi basilare	11
2.4.2	Correzione per angolo solido finito	12
2.4.3	Simulazione tramite metodo Monte Carlo	13

1. Esecuzione esperimento

L'apparato sperimentale consiste in una serie di moduli NIM (un generatore di alta tensione per alimentare i due PMT, un fan in/out, un CFTD, un TAC, una scatola di ritardi e una coincidence unit), due scintillatore di NaI(Tl) collegati ciascuno ad un PMT XP2020, un oscilloscopio e un digitizer CAEN DT5720.

Durante la prima giornata si sono analizzate le varie parti dell'apparato strumentale e si sono calibrati i sistemi di acquisizione. Per prima cosa si sono collegate le uscite dei due rivelatori al fan in/out e da lì all'oscilloscopio, e si è analizzata la forma (polarità, ampiezza media e tempi caratteristici) dei due segnali. Si è inoltre identificata l'ampiezza caratteristica dei segnali corrispondenti al fotone da 1333 keV.

Subito dopo si è passati all'analisi del segnale del CFTD. Si è perciò collegato un uscita del fan in/out (su ciascun segnale) all'entrata del CFTD e le uscite prompt e delayed di quest ultimo all'oscilloscopio. Triggherando sul segnale di prompt si è analizzato l'effetto dei microswitch sul segnale delayed.

Per evitare che il CFTD scattasse sul rumore bianco dell'elettronica è stata poi settata la soglia del modulo. Si è collegata un uscita del fan in/out all'oscilloscopio, triggherando sull'uscita delayed del CFTD. Tramite l'uso della funzione "persistenza" dell'oscilloscopio si è regolata la soglia facendo in modo che in corrispondenza del trigger i segnali avessero tutti un ampiezza minima che li identificasse come eventi reali. Il procedimento è stato ripetuto per il secondo rivelatore.

Per la calibrazione in energia si è preso uno spettro con un campione di ^{60}Co , mandando il segnale del CFTD alla coincidence unit settata in modalità "OR" (ovvero semplicemente il segnale stesso), che in precedenza era stata collegata all'entrata TRG IN del digitizer. Le misure sono state acquisite per 10 min su ogni rivelatore. Dato che i fotoni del decadimento del ^{60}Co hanno energie molto alte e vicine tra loro, è stato necessario acquisire anche uno spettro con un campione di ^{241}Am , che contiene un fotone di energia di 59.5 keV, per eliminare la forte correlazione che si avrebbe in caso contrario tra i parametri della retta del fit.

Si è poi verificato che i segnali di CFTD si trovassero effettivamente sovrapposti in presenza di una coincidenza, trovando che effettivamente lo erano, e non è stato perciò necessario cambiare il ritardo del segnale delayed.

In preparazione ai giorni seguenti, si è definita la geometria dell'apparato. Le distanze dalla sorgente e le aree sottese dai rivelatori sono infatti necessarie sia per una stima dell'accettanza dei rivelatori, sia per una buona analisi delle misure della correlazione angolare eseguite il terzo giorno. Subito dopo è stato preso un campione di prova con i rivelatori a 180° l'uno dall'altro, per ottenere una misura della rate da confrontare con quella teorica ricavabile dai parametri geometrici appena misurati.

Durante la seconda giornata si sono completate le misure della geometria dell'apparato ed eseguite misure riguardanti l'efficienza dei due rivelatori. Nella prima parte si è cercata la posizione della sorgente rispetto all'asse di rotazione del braccio dell'apparato contenente il rivelatore 2. Per fare ciò si è posto il trigger del digitizer sul CFTD di tale rivelatore e si sono presi campioni da 10 min l'uno facendo variare l'angolo del braccio a 0, 20, 40, 50, 70 e 90° . Dalle differenze delle rate misurate è

possibile ricavare una stima della posizione della sorgente.

Una volta conosciuta la struttura precisa dell'apparato si è passati a misure dell'efficienza dei rivelatori. Questa misura è stata fatta utilizzando sia il metodo dei due fotoni, sia con il metodo del picco somma. Entrambe le misure hanno richiesto run di circa 60/90 min, con il trigger sulla coincidence unit in modalità "OR", ma mentre nella prima si cercavano gli eventi in cui un fotone era stato rivelato dal primo e uno dal secondo rivelatore, nella seconda si cercavano gli eventi in cui entrambi i fotoni erano stati raccolti dallo stesso rivelatore. Dato che quest'ultimo evento è molto raro e nello spettro in energia si trova sommerso dal rumore si è deciso che sarebbe stata presa anche una run notturna per avere una campione dalla statistica molto alta.

Si sono poi cominciate a prendere le misure per la correlazione angolare dei due fotoni, poi completate il giorno seguente. Tali misure sono state prese con il trigger sulla coincidence unit in modalità "AND", con una durata di 10 min per ogni run, facendo variare l'angolo del braccio dell'apparato di 10 in 10° tra 0 e 90°. Grazie alla misura della rate di coincidenze al variare dell'angolo, si ha una stima dei parametri della funzione di correlazione angolare.

2. Analisi dati

2.1 Calibrazione

Un primo passo necessario per la successiva analisi dati vera e propria è la calibrazione del sistema di acquisizione, effettuata tramite una conoscenza a priori dell'energia associata ai fotoni emessi dalla sorgente. I fotoni utilizzati a tale scopo sono quelli relativi alla cascata gamma successiva al decadimento β del nucleo di ^{60}Co , ovvero i gamma con energia pari a 1173 keV e 1333 keV. Per ogni rivelatore è stato quindi acquisito uno spettro in cui fossero visibili i picchi associati a tali gamma che sono stati successivamente fittati in maniera tale da potervici associare un centroide. A questo punto avendo due coppie di valori per rivelatore sarebbe in linea di principio possibile ottenere una relazione lineare che permette di calibrare lo spettro, ma essendo i centroidi trovati di valore molto grande $\approx 10^4$ e relativamente molto vicini, ciò porterebbe ad una grande incertezza sul parametro di ordine 0 del fit. Si è quindi acquisito un ulteriore spettro relativo ad una sorgente di ^{241}Am che presenta un picco a 59.5 keV, ottenendo in tal modo un terzo punto per la calibrazione. Di seguito i punti ottenuti per la calibrazione ed i parametri ricavati dal fit. I risultati sono per il rivelatore 1:

$$m = (0.1046 \pm 0.0002)\text{keV}, q = (0.6 \pm 2)\text{keV}$$

mentre per il rivelatore 2 si ha:

$$m = (0.1092 \pm 0.0009)\text{keV}, q = (0.3 \pm 8)\text{keV}$$

Per quanto riguarda le interpolazioni dei singoli fotopicchi si rimanda alle appendici.

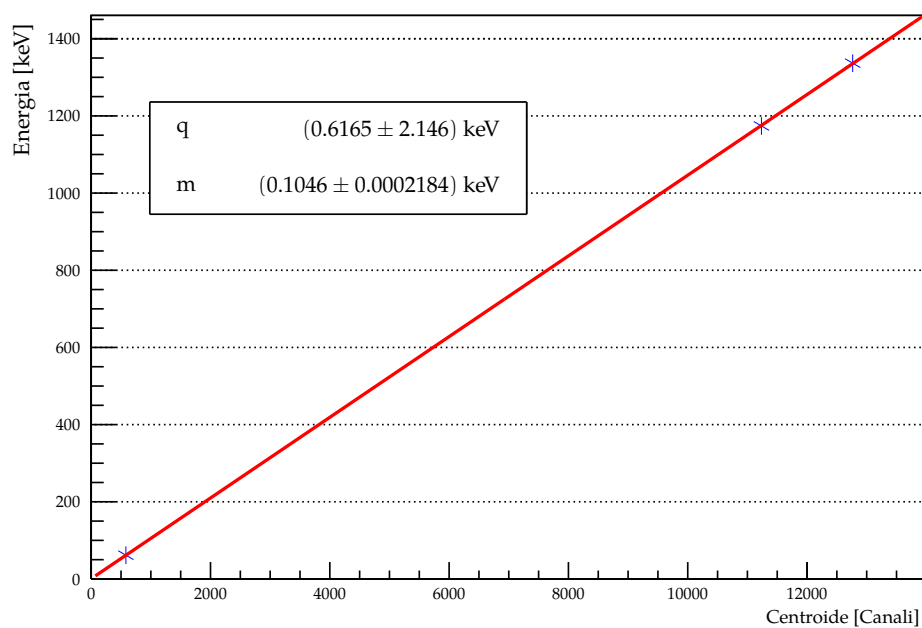


Figura 1: Grafico della calibrazione in energia del primo canale.

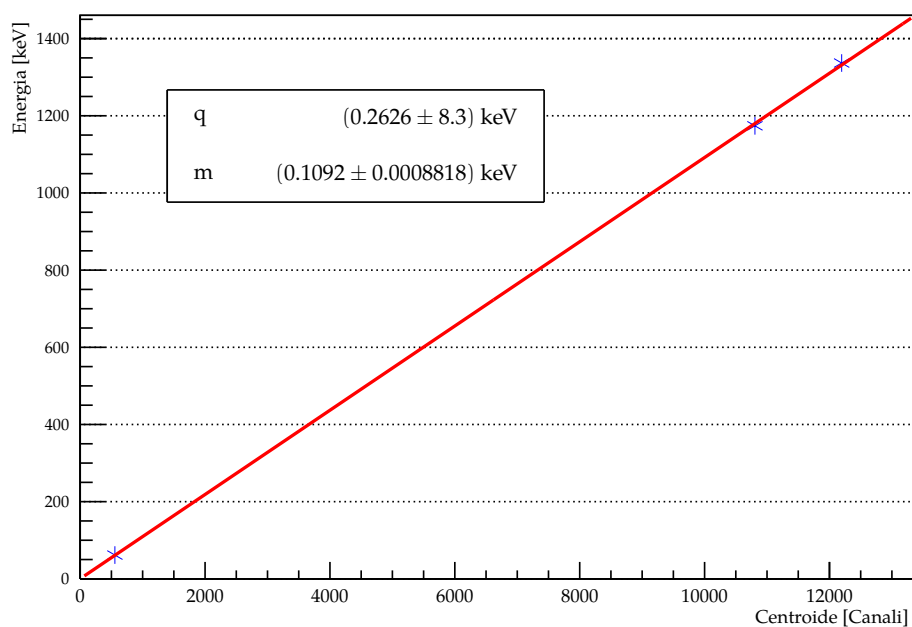


Figura 2: Grafico della calibrazione in energia del secondo canale.

2.2 Studio della geometria dell'apparato

Si è voluto studiare se la sorgente è posta effettivamente al centro dell'asse di rotazione o meno. per farlo si sono semplicemente presi dei dati per un tempo costante al variare dell'angolo, e si vuole confrontare la rate con cui tali dati sono stati raccolti, in questo modo si avrà una stima della distanza tra sorgente e rivelatore al variare dell'angolo del rivelatore stesso. I risultati si possono vedere nella Tabella 1, dove l'errore sulle rate è stato preso come errore poissoniano sui conteggi e considerando che il tempo non ha errore. Per trovare ora la posizione dell'asse di rotazione rispetto a quella della

Angolo [gradi]	rate [kHz]	Errore [kHz]
0	8.301	0.004
20	8.331	0.004
40	8.362	0.004
50	8.387	0.004
70	8.420	0.004
90	8.437	0.004

Tabella 1: Rate di acquisizione al variare dell'angolo del rivelatore.

sorgente si vada nel sistema di riferimento in cui l'origine è l'asse di rotazione stesso. Considerando il rivelatore come a dimensione piccola rispetto alla sua distanza dalla sorgente, si ha che la frequenza con cui registra dati va come $1/r^2$, con r distanza tra rivelatore e sorgente. Si consideri un sistema di riferimento in modo tale che il rivelatore a gradi giaccia sul semiasse negativo delle ascisse, e l'asse di rotazione sia sullo zero, e si riscali in maniera che il rivelatore giaccia nelle coordinate $(-1,0)$. In questo modo la distanza tra rivelatore e sorgente sarà presa come 1, e sarà la distanza di riferimento. Allora, nelle altre configurazioni, considerando la rotazione come perfetta (cioè rotazione attorno ad un asse realmente unidimensionale), si ha che nelle altre configurazioni il rivelatore occupa delle coordinate nel sistema cartesiano facilmente ricavabili a partire da funzioni goniometriche, e la distanza dalla sorgente si ottiene a partire da quella di riferimento moltiplicandola per un fattore $\sqrt{\frac{v_\theta}{v_0}}$, cioè per la radice del rapporto tra la rate di riferimento e a quell'angolo. Per calcolare le grandezze allora si trova da ragionamenti di natura geometrica:

$$x_\theta = x_0 \cos \theta \quad y_\theta = y_0 \sin \theta \quad r_\theta = r_0 \sqrt{\frac{v_\theta}{v_0}}$$

Per fare questi calcoli si è trascurato l'errore sulle rate (e quindi sulle distanze): dato che i conteggi non sono così differenti tra loro, l'errore si approssima con facilità ad essere uguale per tutte le configurazioni, quindi è sufficiente minimizzare la distanza dai cerchi per trovare il valore più palusibile della posizione della sorgente. I cerchi si possono vedere nella Figura 3

Per fare tale operazione si va a definire la funzione analitica che descrive la somma della distanza al quadrato tra i cerchi su cui si prevede giaccia la sorgente:

$$d = \sum_{\theta} \left(\sqrt{(x - x_\theta)^2 + (y - y_\theta)^2} - r_\theta \right)^2$$

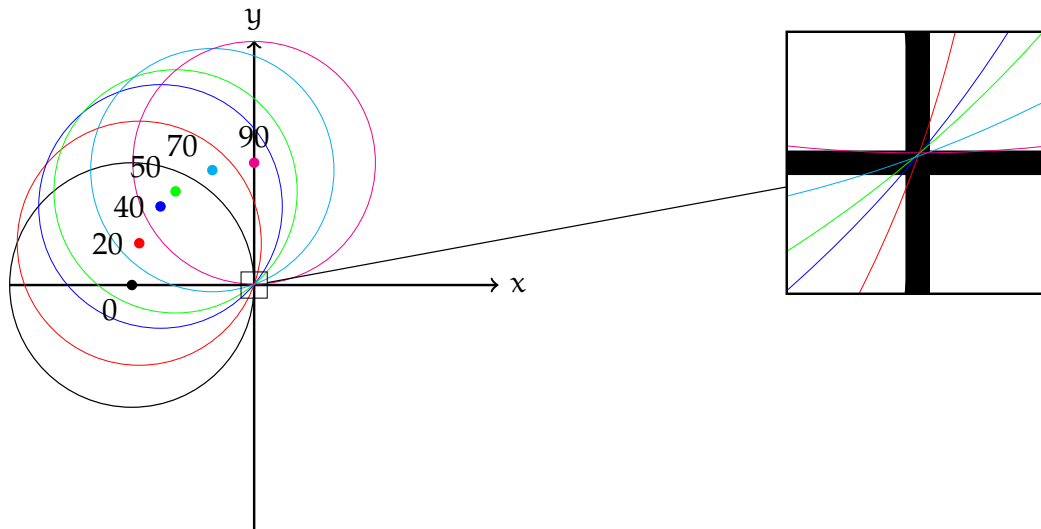


Figura 3: La rappresentazione del sistema di riferimento con le circonferenze (in scala) su cui ci si aspetta giaccia la sorgente.

Minimizzare questa funzione non è semplice, conviene vederla come un χ quadro: si può fare un fit al posto che la minimizzazione di una funzione. Si consideri la funzione che descrive la distanza della sorgente dal rivelatore. Usando le stesse notazioni del ragionamento precedente, si ha che la distanza tra un punto (x, y) e il rivelatore nella posizione θ è data da

$$\sqrt{(x - x_\theta)^2 + (y - y_\theta)^2}$$

Perciò andando a vedere il raggio stimato precedentemente come valore atteso della distanza, si può fare un fit a due parametri liberi con sei punti per ottenere l'effettiva posizione nel piano della sorgente rispetto all'asse di rotazione. Si esegue questa operazione, andando a trovare il grafico che si può vedere nella Figura 4. Questo rivela come la sorgente sia nel punto:

$$(0.0007 \pm 0.0004, 0.0076 \pm 0.0004)$$

Alla luce di quanto discusso fin'ora, si può andare a definire nel migliore dei modi possibili la geometria dell'esperimento. In laboratorio si sono misurate le seguenti grandezze:

$$R1 = 14.1\text{cm} \quad R2 = 14.5\text{cm} \quad d = 8\text{cm}$$

Che indicano la distanza tra sorgente e rivelatore 1 (nella configurazione a zero gradi), sorgente e rivelatore 2 e il diametro di entrambi i rivelatori. Dai calcoli fatti risulta che la sorgente non coincide esattamente con l'asse di rotazione di R1. Perciò R1 non è l'unità nel sistema di riferimento precedentemente scelto, ma si ha che R1 è uguale a $\sqrt{(1 + 0.0007)^2 + (0.0076)^2} = 1.0007$ e perciò l'unità nel sistema di riferimento precedente è data da:

$$u = \frac{R1}{1.0007} = 14.1\text{cm}$$

e questo numero permette di reinterpretare tutti i rapporti precedentemente scritti. In particolare quindi, se l'asse è nell'origine del sistema di riferimento, la sorgente è spostata a destra di 0.0099 cm e verso l'alto di 0.107 cm.

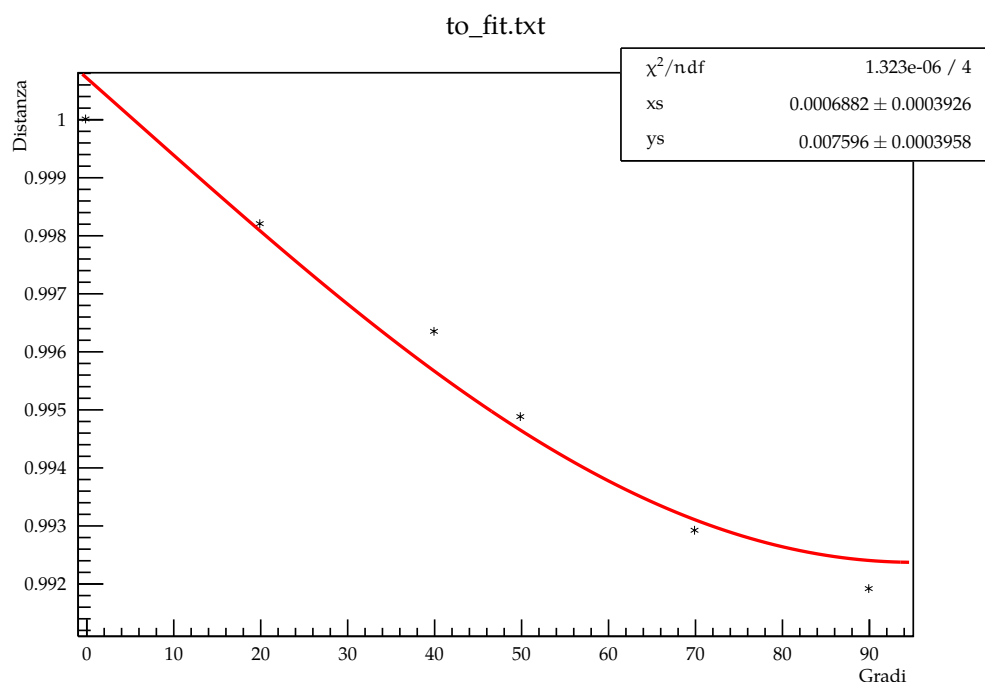


Figura 4: Fit della funzione che permette di stimare al meglio la posizione della sorgente.

Una volta descritta la geometria del problema utilizzando il rivelatore R1, si vuole comprendere cosa succede con R2 oppure come utilizzare l'informazione ottenuta per modificare la descrizione al variare dell'angolo. Per discutere R2 si può andare a guardare un diverso file di dati: R2 in un'altra misurazione ha preso un buon numero di dati con una rate che si attesta intorno a (8.125 ± 0.004) kHz. Considerando il ragionamento fin'ora fatto sul rapporto tra rate e distanze, risulta che il rivelatore R2 dovrebbe essere a una distanza dalla sorgente di $14.1 \text{ cm} \sqrt{\frac{8.301}{8.125}} = 14.4 \text{ cm}$, che è un valore perfettamente in linea con l'errore casuale legato all'utilizzo del metro per la misura delle distanze.

Ora si vuole andare a interpretare il risultato ottenuto: se l'asse di rotazione non coincide con il supporto per la sorgente, vuol dire che spostando il rivelatore non si raggiunge effettivamente esattamente l'angolo, si calcoli allora a quale angolo si pone il rivelatore. Trascurando ancora il fatto che il rivelatore potrebbe avere un'orientazione non perfetta rispetto alla sorgente, se ne trascurano le dimensioni fisiche, e si considera qual è la distanza dalla sorgente e l'angolo a cui il rivelatore si trova. Dato che non si può ragionare altrimenti, si considera R2 come perfettamente orientato rispetto alla sorgente, e si considera un eventuale cattivo allineamento nel sistema R2-sorgente-R1 come un non allineamento tra la sorgente e R1 (cioè si considera la proiezione della sorgente come al centro di R2). Da calcoli di natura trigonometrica, sapendo la posizione della sorgente rispetto all'asse di rotazione, si trovano i valori riassunti nella Tabella 2¹, che sono stati ottenuti utilizzando le formule:

$$\theta' = 180^\circ - \arctan\left(\frac{y_s - \sin \theta}{x_s + \cos \theta}\right)$$

$$d' = \sqrt{(x_0 + \cos \theta)^2 + (y_0 - \sin \theta)^2}$$

¹Si noti che non si sono fatte le necessarie approssimazioni in quella tabella, ciò è conseguenza del fatto che prima di approssimare correttamente i valori si vuole conoscere l'entità della correzione da fare

e la distanza è, come prima, in unità arbitrarie, cioè nel sistema di riferimento in cui la distanza tra il rivelatore uno e l'asse (cioè 14.1 cm) è unitaria.

Angolo teorico [gradi]	Angolo reale [gradi]	distanza
0	-0.452	1.001
10	9.541	0.999
20	19.549	0.999
30	29.570	0.997
40	39.604	0.996
50	49.650	0.995
60	59.707	0.994
70	69.774	0.993
80	79.847	0.992
90	89.925	0.992

Tabella 2: *Correzione dei valori di distanze e angoli alle varie configurazioni.*

2.3 Stima dell'efficienza

Un altro obiettivo che ci si era prefissati per l'esperienza è la stima dell'efficienza dei rivelatori. Come prima efficienza, si può considerare semplicemente il numero di fotoni visti dal rivelatore R2 a 1333 keV una volta che il rivelatore R1 ha visto un fotone a 1173 keV. Per poter andare a stimare in questo modo l'efficienza si è presa una misura notturna (della durata di circa una ventina di ore) e si è studiato il campione. Come prima cosa si è definita la coincidenza, data da due eventi registrati nei due diversi rivelatori entro un intervallo di tempo di 200 ns uno dall'altro, e poi si sono contati il numero di queste coincidenze in cui R1 ha registrato il fotone da 1173 keV e R2 quello più energetico. A questo punto, dato che la teoria assicura che questi fotoni vengono emessi sempre in coppia, il rapporto tra questo numero di coincidenze e il numero di fotoni a 1173 keV nel fotopicco di R1 dà effettivamente l'efficienza di R2 nella configurazione a zero gradi. Nella Figura 5 si può vedere il picco a 1173 keV di R1, che, integrato, rivela un numero di fotoni pari a $(7.32447 \pm 0.00085) \times 10^7$. Nella Figura 6 e 7, invece, si possono vedere i due spettri una volta imposta la coincidenza e richiesto che i fotoni stessero nei fotopicchi di interesse, e queste figure rivelano come effettivamente si abbiano $(3.35800 \pm 0.0058) \times 10^5$ coincidenze. Questo vuol dire che l'efficienza del rivelatore nella configurazione a zero gradi è data da

$$\epsilon_{1333} = \frac{3.35 \times 10^5}{7.32447 \times 10^7} = (4.574 \pm 0.008) \times 10^{-3}$$

dove l'errore è stato calcolato sempre come possoniano, e per l'efficienza si possono considerare i due integrali come indipendenti.

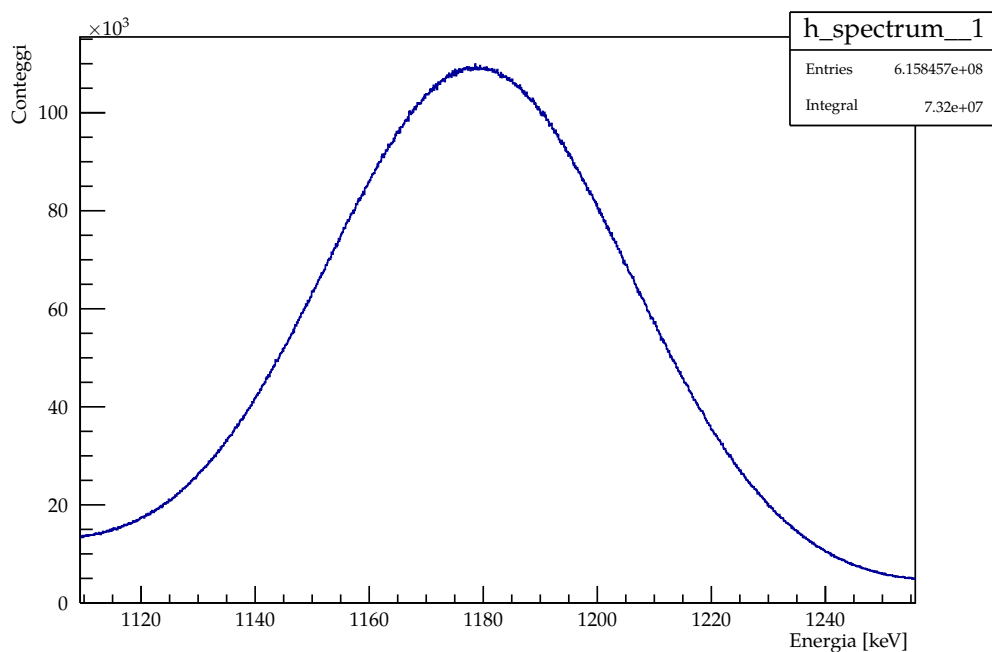


Figura 5: Il fotopicco a 1173 keV visto dal rivelatore 1

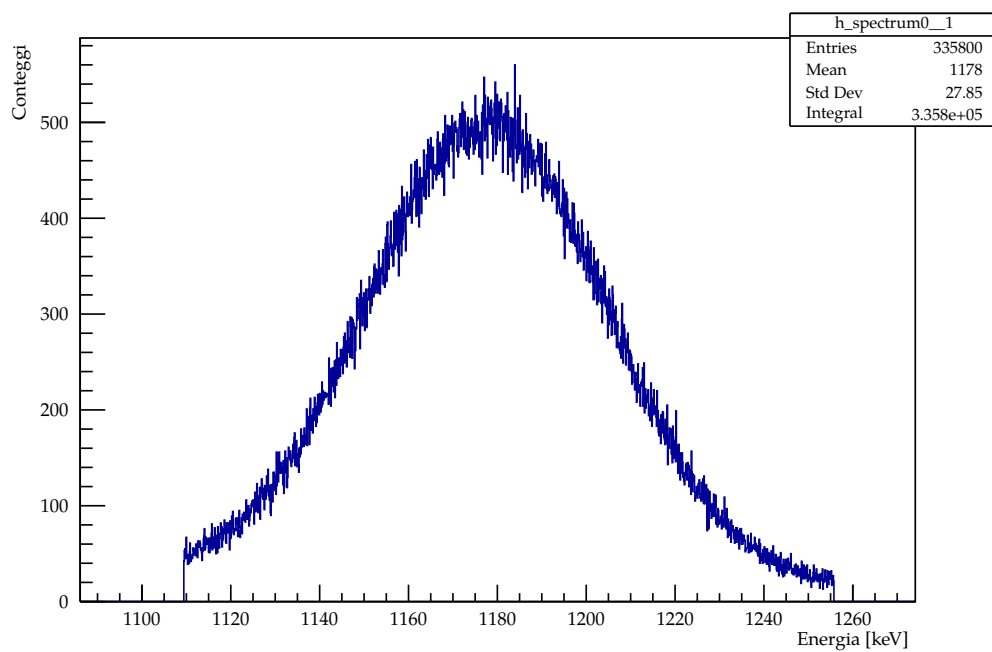


Figura 6: I fotoni visti nel rivelatore 1 dell'energia interessata in coincidenza con quelli del rivelatore 2

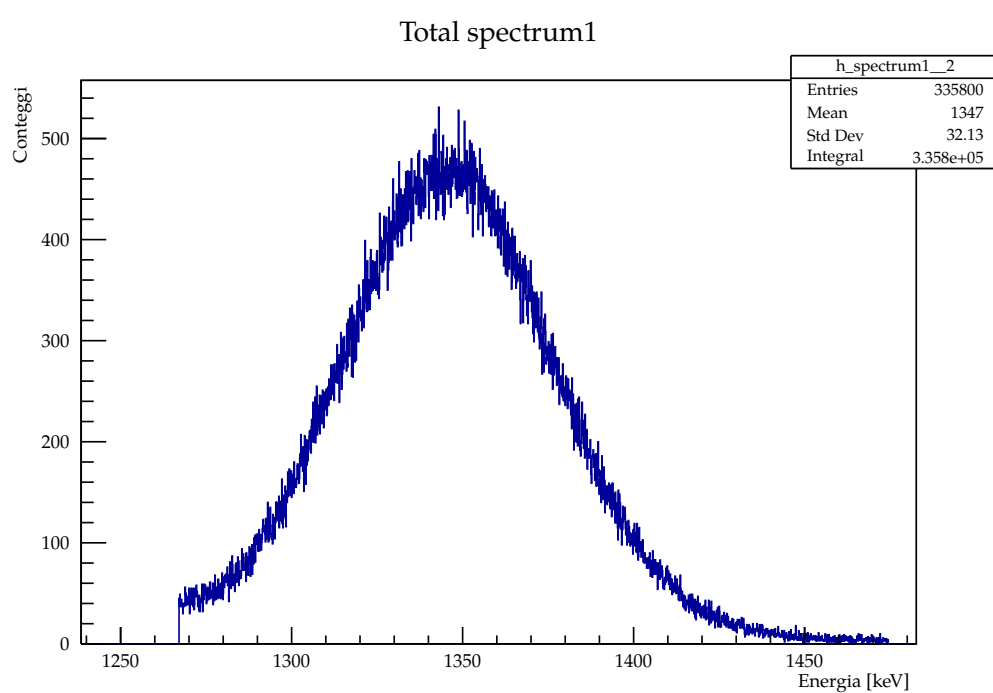


Figura 7: I fotoni visti nel rivelatore 2 dell'energia interessata in coincidenza con quelli del rivelatore 1

Una diversa stima di efficienza si può effettuare utilizzando il cosiddetto *metodo del picco somma*: si va a guardare all'interno del rivelatore il picco dato dalla somma dei due fotoni emessi dalla sorgente. Una simile rappresentazione di tale somma si può vedere nella Figura 8. Tale figura è stata fittata utilizzando la somma di una funzione esponenziale (che vuole descrivere il fondo), e tre funzioni gaussiane che descrivono in effetti la somma di due fotoni ugualmente energetici (la prima e la terza) e la somma dei due fotoni a diversa energia.

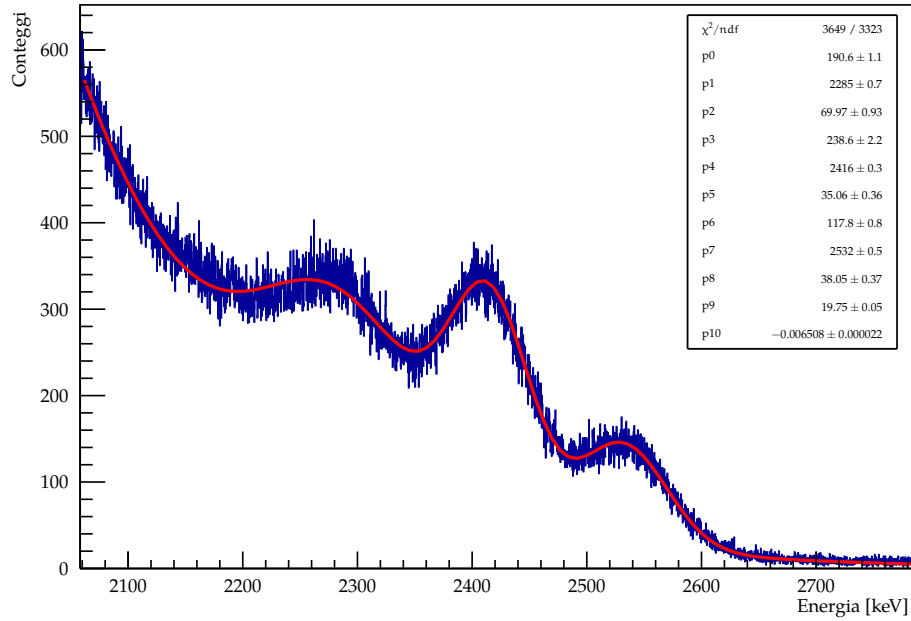


Figura 8: Grafico calibrato dei picchi più bassi del rivelatore 2.

Per andare a stimare l'efficienza a partire da questa figura è necessario considerare *quando* un evento viene registrato all'interno del picco somma. Questo succede a patto che entrambi i fotoni vengano registrati nello stesso rivelatore, questo significa che l'efficienza per quanto riguarda il picco somma sarà il prodotto delle efficienze per quanto riguarda i due fotoni a energia diversa, e a partire dall'integrale di questo picco si possono ottenere le efficienze del primo e del secondo fotone andando a dividere l'integrale della gaussiana rispettivamente per l'integrale del secondo e del primo fotone. Per quanto riguarda questi ultimi integrali, essi si possono leggere direttamente dai grafici, e rivelano i valori:

$$I_{1173} = (7.32447 \pm 0.00085) \times 10^7$$

$$I_{1333} = (6.22539 \pm 0.00079) \times 10^7$$

Per quanto riguarda il picco somma, invece, dato che giace su un fondo non trascurabile, per leggerne l'integrale conviene andare a guardare i valori dei parametri interpolanti, in particolare si avrà:

$$I_{2506} = p_3 p_5 \sqrt{2\pi} = (2.097 \pm 0.021) \times 10^4$$

Dove l'errore è stato calcolato considerando gli errori stimati dal fit e la loro correlazione (comunque si vede essere dello stesso ordine di quello che sarebbe un errore poissoniano associato alla misura).

Allora, considerando gli integrali dei picchi come indipendenti, per quanto scritto si avrà:

$$\varepsilon_{1173} = \frac{I_{2506}}{I_{1333}} = (3.368 \pm 0.12) \times 10^{-4} \quad \varepsilon_{1333} = \frac{I_{2506}}{I_{1173}} = (2.863 \pm 0.10) \times 10^{-4}$$

Questi valori sono abbastanza in linea con quello che ci si aspetta, in particolare si nota come la risoluzione per quanto riguarda il fotone a 1333 keV sia abbastanza simile a quella che era stata stimata in precedenza (sebbene non siano compatibili: si stanno probabilmente trascurando tutta una serie di errori sistematici considerando come unico errore quello poissoniano).

2.4 Correlazione

2.4.1 Analisi basilare

La parte finale dell'analisi consiste nello studiare la correlazione tra le direzioni dei due gamma emessi durante il decadimento. Tali distribuzioni infatti sono entrambe funzioni dello spin del nucleo originale e sono perciò correlate. Dalla letteratura si sa che la funzione di correlazione angolare è

$$C(\alpha)/C(\pi/2) = 1 + a * \cos^2(\alpha) + b * \cos^4(\alpha)$$

Dalle misure della rate di coincidenza ai vari angoli si è ottenuto il grafico di Figura 9. Nel grafico è già presente la correzione basata sulla posizione della sorgente rispetto all'asse di rotazione. Interpolandolo con l'espressione conosciuta di $C(\alpha)/C(\pi/2)$ si ottengono dei valori per a e b di:

$$a = 0.17 \pm 0.01$$

$$b = 0.00 \pm 0.02$$

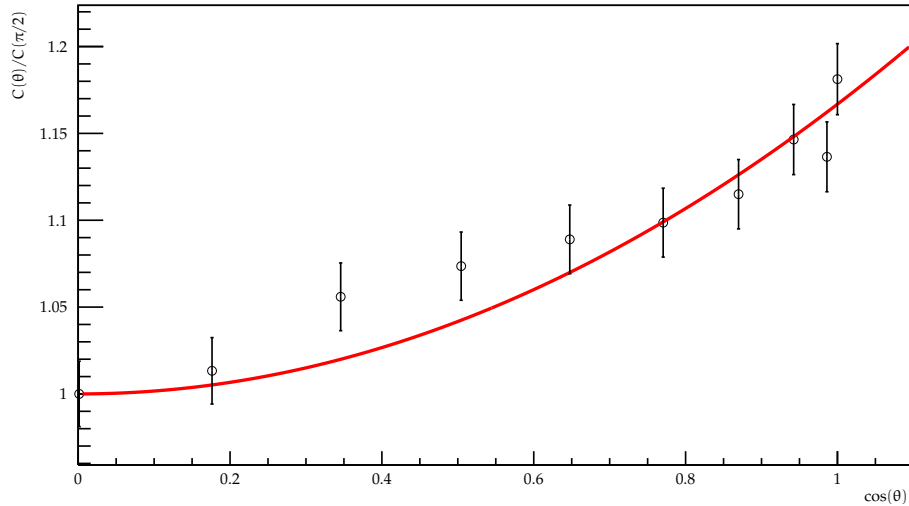


Figura 9: Grafico delle rate calcolate al variare dell'angolo tra Riv 1 e Riv 2, considerandoli puntiformi.

2.4.2 Correzione per angolo solido finito

Nell'analizzare la dipendenza angolare delle rate di acquisizione per verificare l'anisotropia dell'emissione del secondo gamma si è in prima trascurata la dimensione finita del rivelatore considerandolo puntiforme. Ovviamente tale approssimazione porta a degli errori nell'analisi dati, soprattutto per il fatto che la funzione di correlazione non è costante su tutto l'angolo solido spazzato dal rivelatore. Al fine di correggere questa inesattezza, si può pensare di ricavare per ogni angolo α tra i due rivelatori un angolo $\bar{\alpha}$ tale che l'integrale sull'angolo sotteso dal rivelatore posto ad un angolo α della funzione di correlazione sia pari all'integrale di una distribuzione uniforme sull'angolo sotteso dal rivelatore posto invece ad un angolo $\bar{\alpha}$. Sappiamo che la distribuzione di probabilità dell'emissione del secondo fotone in funzione dell'angolo tra i due fotoni è $1 + a \cos^2 \theta + b \cos^4 \theta$, quindi ciò che è stato detto nella frase precedente si traduce in:

$$\int_{R_2} [1 + a \cos^2 \theta + b \cos^4 \theta] d\Omega = (1 + a \cos^2 \bar{\theta} + b \cos^4 \bar{\theta}) \int_{R_2} d\Omega$$

Dove con $\int_{R_2} d\Omega$ si intende l'integrale sull'angolo solido sotteso dal rivelatore 2. Fissiamo un sistema di riferimento tale che l'asse z passi per il centro del rivelatore 1 e tale che il centro del secondo rivelatore giace sul piano yz . Supponiamo inoltre che il primo fotone venga rivelato esattamente al centro del rivelatore 1 e che si possa quindi parametrizzare la sua traiettoria con il versore $n_1 = (0, 0, 1)$. Il secondo fotone viene invece emesso ad una direzione arbitraria parametrizzata dal versore $n_2 = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$. Notiamo che $n_1 \cdot n_2 = \cos \theta$, quindi θ è effettivamente l'angolo cercato su cui verrà effettuato l'integrale. Per ricavare delle condizioni sugli angoli, notiamo che la proiezione del rivelatore 2 sul piano xz è un'ellisse di equazione:

$$\frac{(z - R \cos \alpha)^2}{r^2 \sin^2 \alpha} + \frac{x^2}{r^2} = 1$$

con r raggio del rivelatore ed R distanza del rivelatore dalla sorgente. Affinchè il fotone 2 venga rivelato le coordinate x e y appartenenti al vettore $Rn_2 = (x, y, z)$ devono appartenere all'ellisse, ovvero:

$$\frac{(\cos \theta - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha} + \cos^2 \phi \sin^2 \theta \leq \frac{r^2}{R^2}$$

Per come è stato costruito il sistema di riferimento l'angolo ϕ è tale che $\cos \phi \approx 1$ per cui :

$$\frac{(\cos \theta - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha} + \sin^2 \theta \leq \frac{r^2}{R^2}$$

da cui con un po' di algebra si giunge a : $\cos^2 \theta \cos^2 \alpha - 2 \cos \theta \cos \alpha + 1 - \left(\frac{r}{R}\right) \sin^2 \theta \leq 0$ che ha come soluzioni

$$\frac{1 - g \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} \leq \cos \theta \leq \frac{1 + g \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

dove $g = r/R$ Abbiamo quindi una condizione sull'angolo θ , mentre quella su ϕ è ricavabile tramite semplici considerazioni geometriche, ovvero $-\arctan\left(\frac{r}{R}\right) \leq \phi \leq \arctan\left(\frac{r}{R}\right)$. Chiamiamo per comodità $\frac{1 \pm g \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = C_{\pm}$ e $\arctan\left(\frac{r}{R}\right) = G$. Si è adesso in grado di calcolare l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_{R_2} [1 + a \cos^2 \theta + b \cos^4 \theta] d\Omega &= \int_{-G}^G d\phi \int_{C_+}^{C_-} d\cos(\theta) [1 + a \cos^2 \theta + b \cos^4 \theta] \\ &= 2G \left[\cos \theta + \frac{a}{3} \cos^3 \theta + \frac{b}{5} \cos^5 \theta \right]_{C_+}^{C_-} \end{aligned}$$

Il secondo integrale invece:

$$\int_{R2} d\Omega = \int_{-G}^G d\phi \int_{C+}^{C-} d\cos(\theta) = 2G [\cos\theta]_{C+}^{C-}$$

Dalla condizione

$$\int_{R2} [1 + a \cos^2 \theta + b \cos^4 \theta] d\Omega = (1 + a \cos^2 \bar{\theta} + b \cos^4 \bar{\theta}) \int_{R2} d\Omega$$

si ricava

$$1 + a \cos^2 \bar{\theta} + b \cos^4 \bar{\theta} = \frac{\int_{R2} [1 + a \cos^2 \theta + b \cos^4 \theta] d\Omega}{\int_{R2} d\Omega} = \frac{[\cos\theta + \frac{a}{3} \cos^3 \theta + \frac{b}{5} \cos^5 \theta]_{C+}^{C-}}{[\cos\theta]_{C+}^{C-}} := I$$

quindi:

$$b \cos^4 \bar{\theta} + a \cos^2 \bar{\theta} + 1 - I = 0$$

Tale equazione ha come soluzioni:

$$\cos^2 \bar{\theta} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b(1-I)}}{2b}$$

dove si è scartata la soluzione col “-”.

2.4.3 Simulazione tramite metodo Monte Carlo

Per avere un'ulteriore analisi degli effetti dell'angolo solido finito sotteso dai rivelatori, si è sviluppato un sistema di simulazione tramite metodo Monte Carlo ². I risultati ottenuti sono mostrati nel grafico (il grafico bello bello), insieme ai dati reali corretti.

²Per dettagli sulla simulazione si rimanda alla relazione del positronio, in quanto i due programmi erano quasi interamente identici

Riferimenti bibliografici