

Università degli Studi di Padova

---

# **RELAZIONE DI LABORATORIO: POSITRONIO**

*Laboratorio di fisica, primo anno LM*

*Davide Chiappara*

Università di Padova, facoltà di fisica,  
davide.chiappara@studenti.unipd.it  
Matricola: 1153465

*Ivan Di Terlizzi*

Università di Padova, facoltà di fisica,  
ivan.diterlizzi@studenti.unipd.it  
Matricola: 1155188

*Enrico Lusiani*

Università di Padova, facoltà di fisica,  
enrico.lusiani@studenti.unipd.it  
Matricola: 1153399

---

Anno accademico 2016-2017

## Sommario

*La seguente è la relazione sull'esperimento di decadimento del positronio eseguito da Chiappara Davide, Di Terlizzi Ivan e Lusiani Enrico facenti parte del gruppo 8. I dati sono stati raccolti presso il laboratorio di fisica in via Loredan in data 14-15-16 Novembre 2016, e sono stati successivamente analizzati durante lo stesso anno accademico.*

*L'esperienza consiste nello studio del decadimento del positrone prodotto da un atomo di  $^{22}\text{Na}$  con la produzione di orto-positronio o di para-positronio, andando a verificare il rapporto tra il decadimento a due fotoni e quello a tre fotoni e andando a misurare la distribuzione temporale degli eventi.*

# Indice

<b>1</b>	<b>Esecuzione esperimento</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Analisi dati</b>	<b>2</b>
2.1	Analisi preliminare dei segnali . . . . .	2
2.2	Calibrazione in energia dei rivelatori . . . . .	3
2.3	Calibrazione in tempo del TAC . . . . .	5
2.4	Decadimento a due fotoni . . . . .	8
2.5	Decadimento a tre fotoni . . . . .	9
2.6	Confronto tra le rate . . . . .	13
2.7	Il tempo di decadimento dell'ortopositronio . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Simulazioni del decadimento</b>	<b>13</b>
3.1	Stima teorica dell'accettanza del rivelatore . . . . .	13
3.1.1	Angolo solido sotteso da un singolo rivelatore . . . . .	14
3.1.2	Decadimento a due corpi, rivelatori a 180 gradi . . . . .	14
3.1.3	Decadimento a tre corpi, rivelatori a 120 gradi . . . . .	14
3.2	Simulazione degli eventi tramite metodo Monte Carlo . . . . .	18
<b>A</b>	<b>Interpolazioni gaussiane</b>	<b>21</b>

## 1. Esecuzione esperimento

L'apparato strumentale consiste in quattro rivelatori a scintillazione NaI(Tl), di cui uno montato verticalmente sopra il supporto per la sorgente di  $^{22}\text{Na}$  e tre montati orizzontalmente su un goniometro a bracci che ne permette lo spostamento. Inoltre si ha accesso ad una serie di moduli elettronici (un amplificatore ad alto voltaggio, un fan in-out, un CFTD, uno shaping amplifier, una coincidence unit, un TAC, una delay unit e un modulo scaler rate). Per quanto riguarda l'acquisizione, si ha accesso ad un oscilloscopio e ad un ADC.

Il primo giorno ci si è focalizzati sullo studio dei segnali dei rivelatori e sulla calibrazione dell'apparato. Come prima cosa, si è visualizzato il segnale di ogni rivelatore, separatamente, sull'oscilloscopio, e si è caratterizzato tale segnale. Dopo aver preso nota di tali segnali si è collegato all'amplificatore il rivelatore, e si sono guardati i segnali sull'oscilloscopio, riconoscendo quali di questi fossero associati a segnali del tipo fotone da 511 keV e quali invece fotone da 1275 keV. Per fare questo si è semplicemente utilizzato il rate indicato dall'oscilloscopio stesso in fase di visualizzazione del segnale. Infatti, alzando il trigger dell'oscilloscopio, si vedono solo i segnali più energetici, e quindi si vede la rate diminuire di netto quando si supera l'ampiezza corrispondente ai segnali di fotopicco; questo ha permesso di vedere effettivamente quale fosse l'ampiezza caratteristica dei segnali associati ai diversi fotoni emessi dalla sorgente. Tale operazione è stata ripetuta per tutti e 4 i rivelatori per verificare che non ci fossero problemi di alcuna natura nella rivelazione dei fotoni emessi dal sodio. Dopo aver visualizzato i segnali in uscita dall'amplificatore si è voluto comprendere il funzionamento del CFTD: per farlo si è utilizzata un'uscita del fan in-out come input e si è visualizzata sull'oscilloscopio l'uscita prompt e, triggherando su di essa, l'uscita delayed, dopodiché si è visto il funzionamento dei vari micro-switch andando a modificarli e guardando il segnale all'oscilloscopio. Successivamente si è settata la soglia di tutti e quattro i rivelatori: per i tre rivelatori complanari (quindi i rivelatori 1, 2 e 3) si è impostata la soglia in modo da non vedere il rumore elettronico, mentre per il quarto rivelatore la soglia è stata impostata in modo da non vedere nemmeno il fotone da 511 keV. Per fare questo si è collegato all'oscilloscopio l'uscita amplificata del rivelatore e si è triggherato il segnale sul segnale prompt del CFTD con input sempre su un'uscita del rivelatore stesso. Andando a modificare un trimmer sul CFTD stesso si è potuto vedere come alzando la soglia scomparissero dal rivelatore via via i segnali meno energetici. Continuando ad agire su tale trimmer è stato possibile rimuovere il rumore elettronico per i tre rivelatori complanari e il fotone da 511 keV per il quarto (si era precedentemente riconosciuta l'ampiezza del segnale legato alla rivelazione di tale fotone). Una volta compreso il funzionamento dei vari moduli e impostata la soglia del CFTD in modo che potesse visualizzare il segnale a cui si è interessati, si è passati alla vera e propria calibrazione dei rivelatori. Per farlo si è attaccato il rivelatore in questione all'amplificatore e quest'ultimo al sistema di acquisizione digitale e si è dato a tale sistema il trigger utilizzando l'uscita delayed del CFTD a cui è stato attaccato lo stesso rivelatore (per poter calibrare è stata abbassata la soglia di tutti i rivelatori precedentemente impostata, poi è stata ripristinata per le misure successive alla calibrazione). Fatto questo si sono cambiati i parametri dell'amplificatore in modo che i due fotopicchi fossero visualizzati il primo circa al canale 500 e il secondo circa al canale 1300. Dopo aver calibrato, è risultato più semplice agire sul trimmer per la regolazione della soglia del quarto rivelatore (infatti è stato sufficiente alzare la soglia fino alla scomparsa del primo fotopicco). Sistemate tutte le soglie come richiesto si è passati alla vera e propria presa dati che sono stati successivamente analizzati, e per preparare l'apparato si sono regolate le width in modo da essere circa di 100 ns e si sono messi i delay in modo che ci fosse sovrapposizione tra i segnali dei rivelatori 1 e 2 e ci fosse un ritardo di circa 20 ns tra il segnale del rivelatore 1 e quello del rivelatore 2. Successivamente si è verificata la coincidenza tra i segnali del rivelatore 1 e del rivelatore

3 e si è agito sui microswitch di quest'ultimo per fare in modo che questa fosse buona.

Durante la seconda sessione di laboratorio si sono presi i dati, sfruttando l'apparato sistemato e studiato durante la sessione precedente. Come prima cosa si è certificato che i rivelatori fossero nella configurazione 1, cioè con i rivelatori 1 e 2 collineari e il rivelatore 3 che forma un angolo di  $\pi/3$  con il rivelatore 2. Fatto questo, si è collegata la prima uscita della coincidence unit, cioè quella che genera un segnale quando arrivano in coincidenza i segnali dal primo e dal secondo rivelatore al Master Gate del segnale di acquisizione. Poi, verificato che tutti i rivelatori fossero collegati all'ADC, si è preso un file di prova andando a vedere se effettivamente si sono visti solamente i picchi a 511 keV. Successivamente a questo si è calibrato il TAC, andando ad aggiungere i ritardi tramite l'apposita cassetta; si è poi passati alla vera e propria acquisizione dati. Come prima cosa si è collegato il modulo scaler/rate per avere una visione il tempo reale del rate di acquisizione dei rivelatori. Per questa prima misura si è utilizzato come master trigger la coincidenza nel rivelatore 1 e nel rivelatore 2, in modo che venissero registrati esclusivamente gli eventi in cui il positronio è decaduto lungo la linea formata dai rivelatori, e che poi si potessero selezionare via software i dati in cui il primo fotone da 1275 keV è entrato nel quarto rivelatore. Infine si è preparato il sistema per la misura del decadimento del positronio in tre fotoni (cioè con i tre rivelatori complanari distanziati da angoli di 120 gradi) e si è messo il master gate di acquisizione sulla coincidenza tra i tre rivelatori complanari. Tale misura è stata fatta per tutta la durata tra la seconda e la terza sessione (cioè per circa 20 ore).

Durante la terza sessione di laboratorio si sono prese le misure fisiche dei rivelatori (in particolare si è guardato il datasheet e si è misurata la distanza tra i rivelatori e la sorgente e le dimensioni fisiche dei rivelatori stessi), dopodiché si è presa un'ulteriore misura nel caso dei due rivelatori collineari e si è iniziata l'analisi dati.

## 2. Analisi dati

### 2.1 Analisi preliminare dei segnali

Come prima cosa si è voluto caratterizzare il segnale in uscita direttamente dai rivelatori, oppure dal fan in-out. Per fare ciò si sono semplicemente collegati all'oscilloscopio i rivelatori e si è preso nota delle caratteristiche del segnale stesso. I valori misurati sono riassunti nella Tabella 1. Tutti i segnali sono risultati di polarità negativa e si è misurata l'ampiezza di un segnale tipico, se ne è misurato il tempo di salita e il tempo di discesa (visti come i tempi impiegati dal segnale per raggiungere dal 10% al 90% dell'ampiezza massima e viceversa) e si è misurato il rumore utilizzando una latenza di 5 s per il segnale. Alle prime misure si è associato un errore calcolato come errore dati i parametri costruttivi dell'oscilloscopio, mentre al rumore non si è voluto associare un errore in quanto si è interessati solo all'entità di tale grandezza. Collegando tra il rivelatore il fan in-out non si è vista alcuna differenza sostanziale nei segnali visti. A scopo di semplice confronto dei rivelatori, si è voluto anche andare a leggere le ampiezze medie dei segnali in uscita dai rivelatori. Si è rivelato come, effettivamente, le ampiezze medie fossero tra loro molto vicine. Non si riportano i valori in quanto è stato fatto solamente un confronto qualitativo.

Andando a spostare il trigger dell'oscilloscopio è stato possibile andare ad indentificare le ampiezze caratteristiche dei segnali associati ai due diversi fotoni emessi dalla sorgente di sodio. Alzando il trigger si è notato un primo abbassamento repentino nella rate appena si è superata la soglia del rumore elettronico, poi si è visto un secondo abbassamento repentino superando il fotopicco da

Rivelatore	Ampiezza [mV]	Errore [mV]	tempo salita [ns]	Errore [ns]	tempo discesa [ns]	Errore [ns]	Rumore [mV]
1	103	2	33	2	524	6	1.6
2	152	3	34	2	528	6	1.3
3	33	1	34.8	0.6	480	6	1.2
4	84	2	35.6	0.6	480	6	1.4

**Tabella 1:** Misura preliminare dei segnali in uscita dai rivelatori

511 keV e un terzo abbassamento molto rapido superato il fotopicco a 1275 keV, dopo il quale il rate si attestava a qualche decina di Hertz, legati a fotoni di natura ambientale o cosmica.

## 2.2 Calibrazione in energia dei rivelatori

Successivamente si è passati alla vera e propria calibrazione dei quattro rivelatori che sono stati utilizzati, per effettuare la quale si è semplicemente fatta la fit lineare dei centroidi dei fotopicchi rivelati tramite il programma di acquisizione. Nella Tabella 2 si possono vedere i valori dei parametri interpolanti ottenuti, mentre si rimanda alle appendici per vedere le singole interpolazioni.

Rivelatore	Centroide	Errore	Sigma	Errore
1	522.45	0.03	18.27	0.04
	1285.6	0.1	31.3	0.1
2	520.99	0.03	16.88	0.03
	1270.42	0.09	29.05	0.09
3	539.04	0.03	18.91	0.04
	1299.3	0.1	33.1	0.1
4	537.17	0.02	18.10	0.02
	1292.0	0.1	33.7	0.1

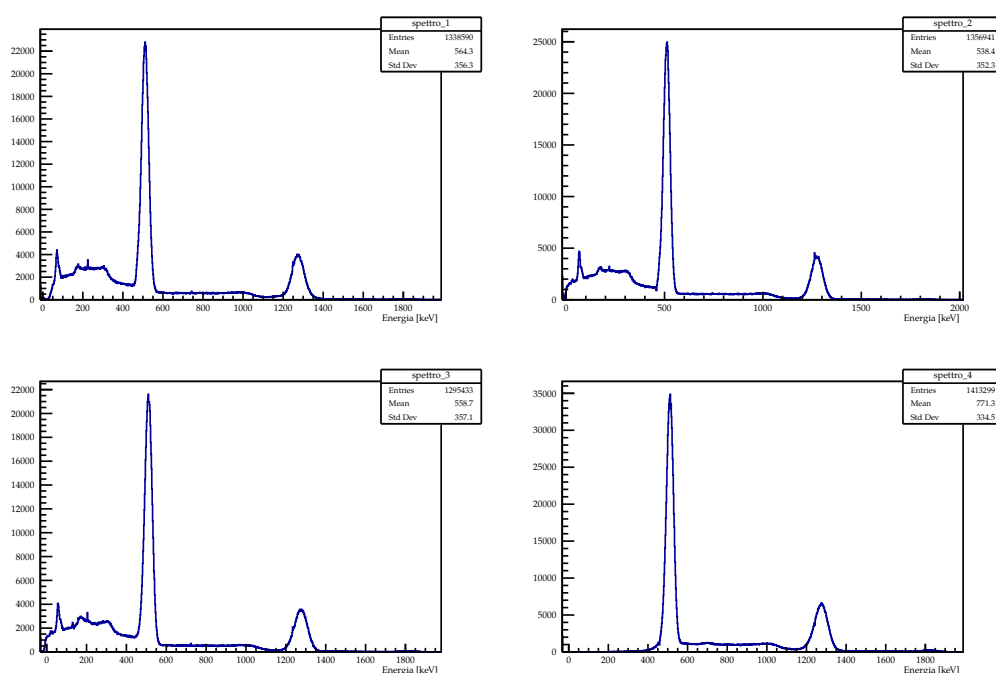
**Tabella 2:** Parametri dell'interpolazione dei singoli picchi degli spettri.

Partendo da questi dati è stato possibile andare a stimare i parametri di calibrazione  $m$  e  $q$  (dato che si conoscono solo due punti per i quali questa retta passa, non si è fatta una vera e propria interpolazione ma si sono calcolati i coefficienti delle rette passanti per tali punti, non computando alcun errore in quanto non necessario per la calibrazione dei grafici). I risultati si possono vedere nella Tabella 3.

A scopo di presentare il lavoro fatto, nella Figura 1 si possono vedere gli spettri calibrati di tutti e quattro i rivelatori.

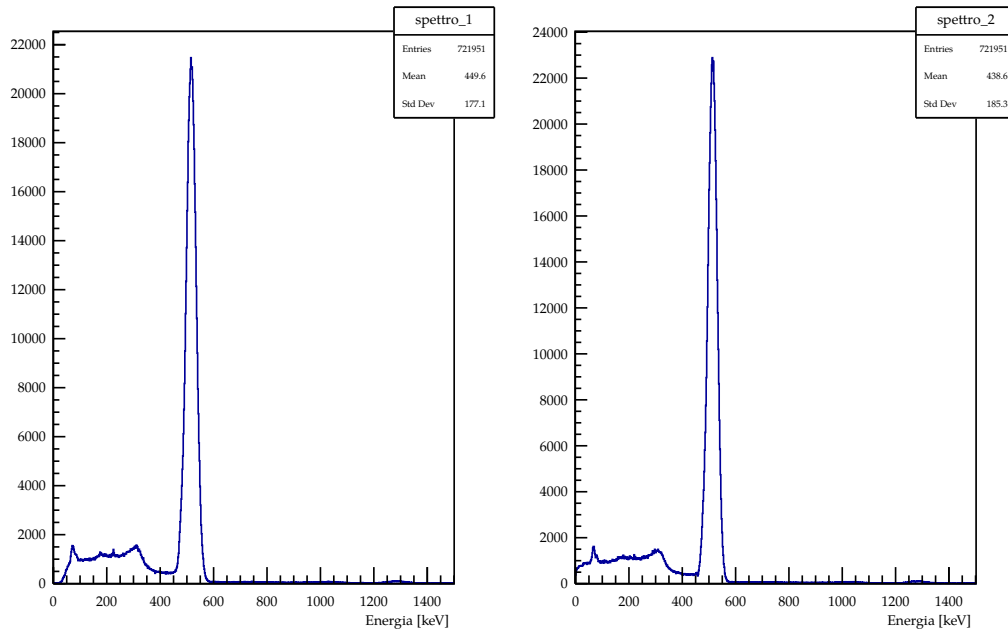
Rivelatore	m [keV]	q [keV]
1	1.001	-12.02
2	1.019	-19.72
3	1.006	-31.69
4	1.012	-32.56

**Tabella 3:** Parametri di calibrazione dei rivelatori.



**Figura 1:** Gli spettri dei quattro rivelatori opportunamente calibrati

Poi si è preso un primo file di prove con le coincidenze, e si è visto che effettivamente si sono visti solamente i picchi a 511 keV. Questi spettri si possono vedere nella Figura 2. Nel prendere il file di prova non si era ancora regolata opportunamente la soglia. Effettivamente da questi spettri si vede che a meno di effetti ambientali si sono raccolti solamente i dati sul primo fotopicco e la spalla Compton associata a tale picco.



**Figura 2:** Prima prova della verifica della coincidenza con i due rivelatori collineari

## 2.3 Calibrazione in tempo del TAC

Successivamente si è passati alla calibrazione temporale del sistema di acquisizione, andando ad utilizzare la cassetta dei ritardi per vedere lo spostamento del segnale in uscita dal TAC al variare dei ritardi inseriti. Sono stati fatti dei fit gaussiani del segnale in uscita dal TAC e tutti i grafici trovati si possono vedere nella Figura 3. Inoltre nella Tabella 4 si possono vedere i parametri interpolanti tali segnali al variare del ritardo introdotto.

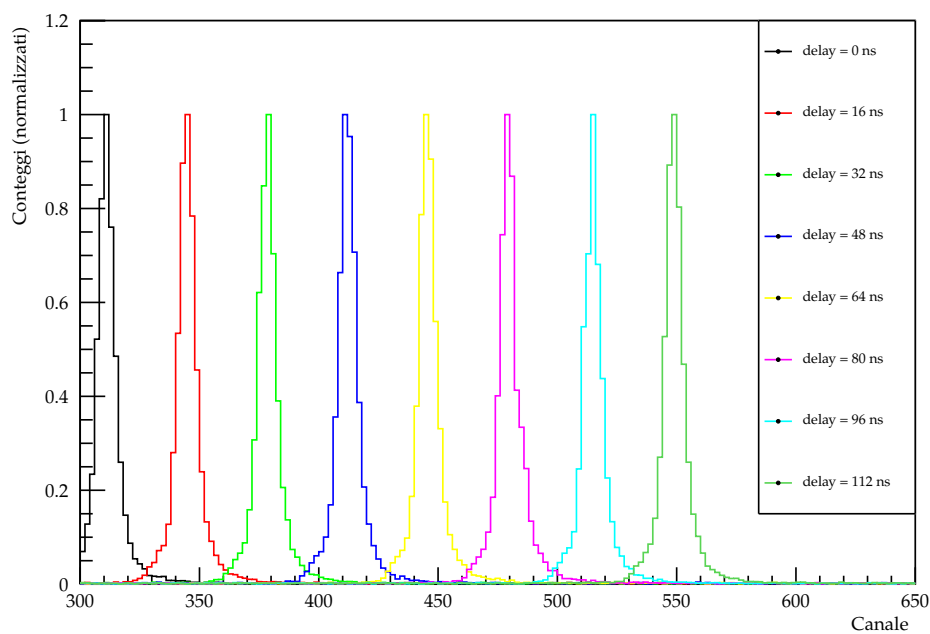
Una volta noti i parametri delle gaussiane, con una regressione lineare, che si può vedere nel Grafico 4, si può andare a calibrare il sistema di acquisizione, andando a trovare i coefficienti di tale retta. I risultati sono:

$$m = 2.1256 \pm 0.00041/\text{ns}$$

$$q = 311.22 \pm 0.03$$

Una volta calibrato tutto il sistema di acquisizione, si è arrivati al vero e proprio studio del positronio: in particolare si vuole misurare il rapporto tra il decadimento a due e a tre fotoni del positronio e la distribuzione temporale degli eventi.

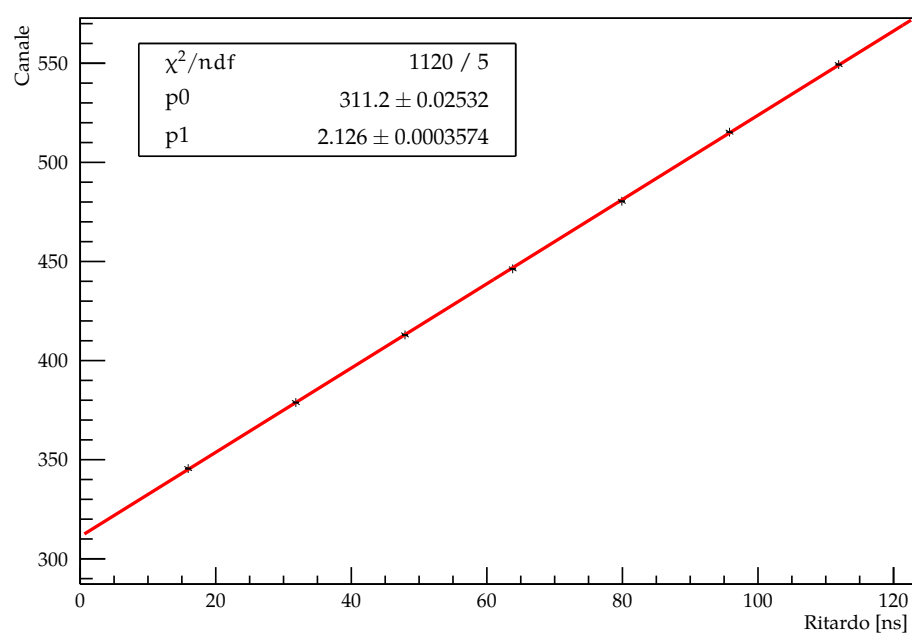




**Figura 3:** Gli spettri del TAC al variare del ritardo inserito

Ritardo [ns]	Centroide	Errore	Sigma	Errore
0	311.06	0.03	4.24	0.03
16	344.81	0.03	4.22	0.04
32	378.42	0.03	4.23	0.03
48	412.20	0.03	4.33	0.04
64	445.75	0.03	4.13	0.03
80	479.72	0.04	4.45	0.04
96	514.89	0.03	4.24	0.03
112	548.93	0.03	4.19	0.03

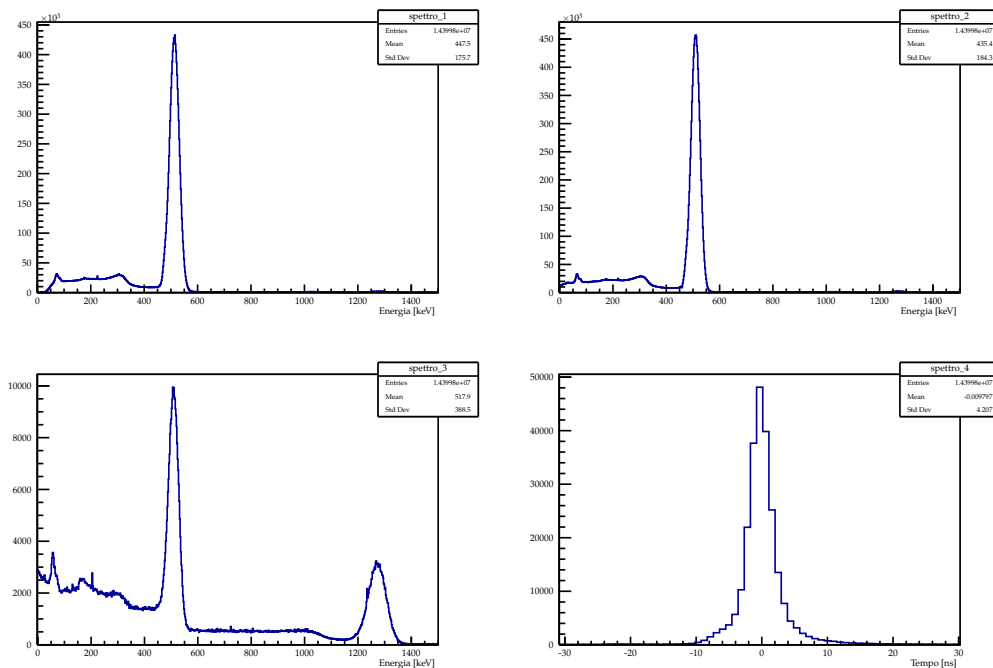
**Tabella 4:** Calibrazione in tempo del sistema di acquisizione.



**Figura 4:** La calibrazione temporale del sistema di acquisizione

## 2.4 Decadimento a due fotoni

Si iniziò dal decadimento a due fotoni: la misura è stata fatta andando a registrare gli spettri dei tre rivelatori complanari assieme allo spettro del TAC. Il trigger è stato impostato sulla coincidenza tra R1 ed R2, ed a tale valore è stato impostato anche lo stop del TAC, mentre lo start del TAC è stato dato da R4 che visualizza un segnale (si ricorda che la soglia di R4 è stata regolata in modo da vedere solo segnali di energia uguale o superiore al fotopico da 1275 keV). Gli spettri calibrati che si sono visti si possono vedere nella Figura 5.



**Figura 5:** Presentazione degli spettri della misura in coincidenza collineare (lo spettro temporale è riferito ad uno zero arbitrario ed è stato tagliato lo zero)

Da questa Figura è possibile vedere come, effettivamente, negli spettri dei primi due rivelatori si abbiano solo i valori legati al primo fotopico e all'effetto Compton ad esso associato, mentre lo spettro del terzo rivelatore somiglia ad uno degli spettri inizialmente presentati. Per presentare questi spettri è stato rimosso il bin zero dallo spettro del TAC, che è associato ad una coincidenza tra il primo ed il secondo rivelatore, ma quando il quarto rivelatore non ha visto il fotone da 1275 keV. A partire da questi spettri si possono ricavare varie informazioni, come per esempio il rate di decadimento in due fotoni. Dato che tale spettro è stato regolato in modo che l'acquisizione durasse un'ora, e il programma di acquisizione ha registrato 14399800 eventi, vuol dire che sono stati acquisiti in media eventi con una frequenza di 4 kHz. Affinché sia possibile avere una stima attendibile del rate di acquisizione, però, è necessario considerare il dead time dei rivelatori: il modulo di conteggio ha mostrato come il rate di acquisizione per i due rivelatori complanari fosse di circa 15 kHz, e il rate di coincidenze fosse di circa 5.5 kHz. Quindi ci aspettiamo l'ADC abbia registrato 4 kHz su un input reale di circa 5.5 kHz. Effettivamente si sa che MCA per un segnale con un rate di circa 5.5 kHz registra solamente tra il 65 e

l'80% dei dati effettivi, perciò è plausibile un simile rate.

Inoltre con questo campione di dati si può fare un'ulteriore analisi: si possono contare quanti degli eventi registrati sono successivi all'ingresso del fotone energetico nel quarto rivelatore. Per contare questi fotoni è necessario andare a integrare il picco del TAC: infatti si è ottenuto un segnale diverso da zero in uscita dal TAC solo se è partito lo *start*, cioè solo se è entrato un fotone nel rivelatore quattro. Si ha che il TAC ha rivelato circa  $2.685 \times 10^5$  eventi differenti, il che vuol dire che, rispetto al totale, solo nell'1.86% dei casi l'emissione del fotone più energetico è avvenuta in maniera da esser rivelata da R4. Tutti questi risultati sono presentati senza errore in quanto l'errore poissoniano associato alle misure è molto basso (si ha un grande numero di dati a disposizione), ma sul dead time risulta difficile andare a stimare il reale errore.

## 2.5 Decadimento a tre fotoni

Per il decadimento a tre fotoni, la configurazione dell'apparato strumentale è analoga a quella utilizzata per il decadimento in due fotoni, con l'unica differenza che si sono spostati i tre rivelatori complanari in modo che formassero angoli di 120 gradi l'uno con l'altro e il master trigger è stato impostato sulla coincidenza tra tutti e tre i rivelatori al posto che sulla coincidenza solo tra il primo e il secondo. Il TAC è stato mantenuto analogamente (cioè come start si è usato un segnale nel quarto rivelatore e come stop la coincidenza tra i tre rivelatori complanari). Lo spettro visualizzato si può vedere nella Figura 6.

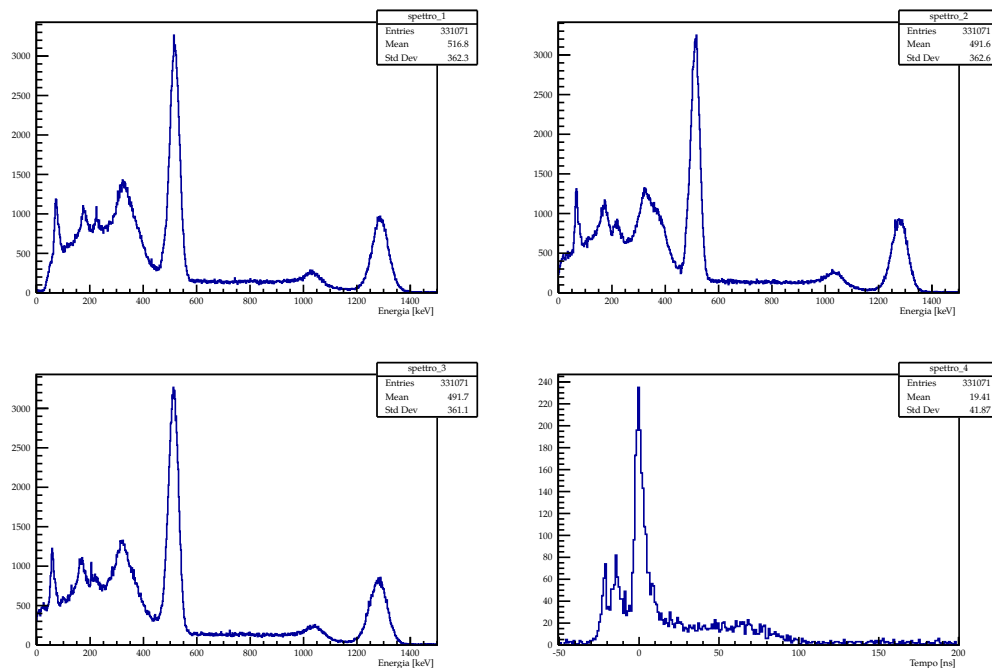


Figura 6: Gli spettri del decadimento in tre fotoni opportunamente calibrati.

Questi spettri però, non vanno bene, e questo si vede dal fatto che, a differenza da quelli a due fotoni, si continuano a distinguere tutti i picchi. Questo fenomeno è conseguenza del fatto che nella versione con tre coincidenze hanno rilevanza statistica anche dei casi "spuri", come per esempio l'ingresso del fotone da 1275 keV in uno dei tre rivelatori, di un fotone legato a un decadimento a due corpi in un secondo rivelatore e di un fotone ambientale nel terzo. Per pulire questi fenomeni si può, per esempio, andare a richiedere che il fotone più energetico sia effettivamente stato rivelato da R4 (che si vede imponendo che il segnale del TAC riveli un valore maggiore di zero). Facendolo, si trovano i quattro spettri che si possono vedere nella Figura 7.

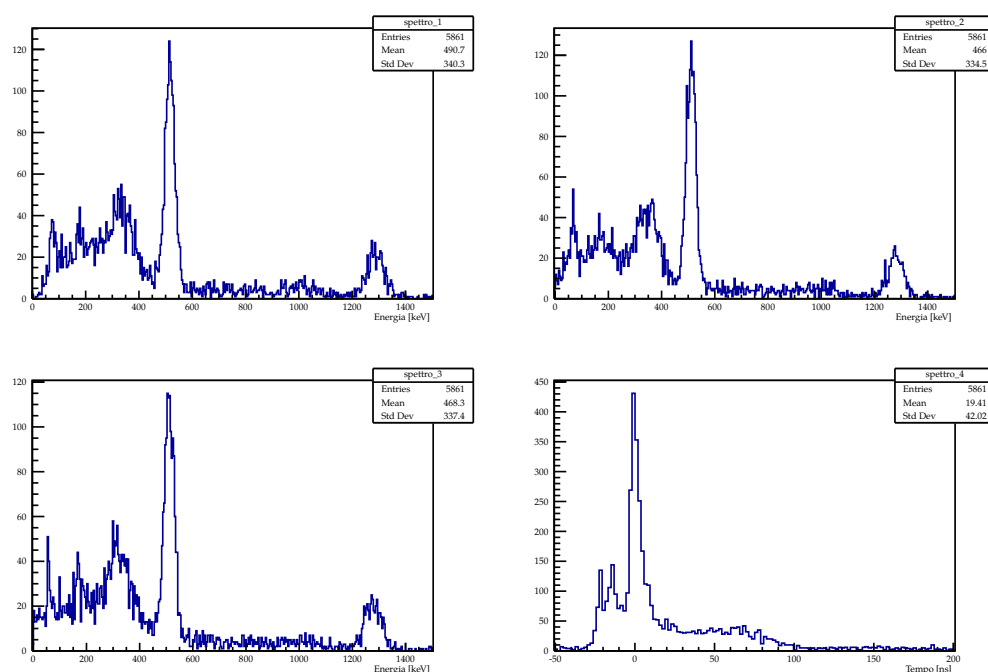
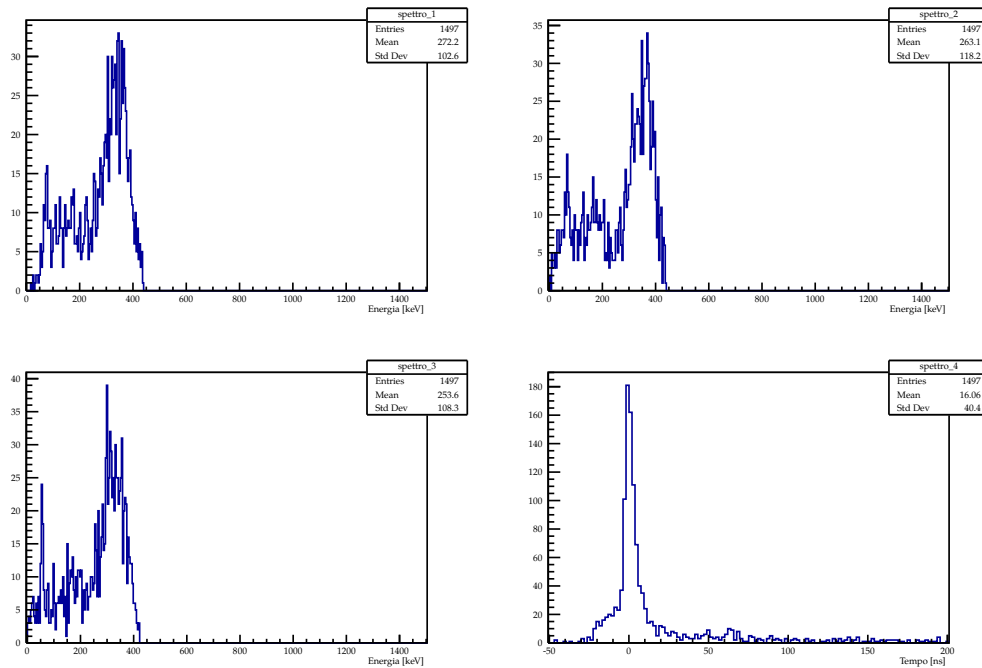


Figura 7: Gli spettri una volta imposto che il TAC rivelasse un segnale valido.

Effettivamente da questi spettri è riconoscibile il fotopicco legato al decadimento in tre fotoni, ma il campione di dati risulta decisamente scarso, nonostante si abbia preso dati per 1220 minuti. Inoltre sono ancora ben riconoscibili i fotopicchi legati al fotone da 1275 keV e al fotone da 511 keV, il che vuol dire che è necessaria un'ulteriore scrematura per poter vedere i decadimenti a tre fotoni a cui si è realmente interessati. Per farlo ci sono diversi modi possibili. Un primo tentativo consisteva nel taglio in base al valore in uscita dal TAC, ma è risultato troppo difficile trovare effettivamente un intervallo che permettesse di vedere solamente il picco a cui si è interessati, e si è perciò trascurato. Una seconda prova è stata fatta andando a imporre che sul rivelatore 4 fosse stato visto il fotone da 1275 keV, e che sui tre rivelatori complanari l'energia fosse per ognuno inferiore al valore dopo il quale ci si aspetta di vedere i primi effetti degli altri due fotopicchi. I risultati di questa scrematura si possono vedere nella Figura 8, dove effettivamente si nota come i tagli sulle energie siano al punto giusto e lo spettro del TAC sia perfettamente in linea con ciò che si aspetta (gaussiana convoluta con decadimento esponenziale).



**Figura 8:** Spettri con il vincolo sul TAC maggiore di zero e sull'energia dei singoli spettri.

Una diversa scrematura può essere fatta richiedendo che la somma delle energie sui vari rivelatori sia inferiore all'energia data dall'annichilazione del positronio, cioè si mette un vincolo a sulla somma totale affinché sia tra i 950 e i 1100 keV. In questa maniera si arriva agli spettri che si possono vedere nella Figura 9.

In questo grafico si vede che effettivamente si sono puliti abbastanza bene i dati, nonostante se ne siano persi una buona quantità, inoltre è quello fisicamente più sensato tra i filtri inseriti. Questo vuol dire che si è ottenuto un rate di decadimento in tre fotoni decisamente molto basso (e quindi sul quale c'è un errore poissoniano decisamente molto alto), cioè di circa  $1.1 \times 10^{-2}$  Hz. Questo perché si è comunque chiesto che il quarto rivelatore rivelasse un segnale valido per il TAC. Si è provato a mantenere i filtri sulla somma delle energie rivelate e si sono aggiunti dei filtri affinché l'energia nei singoli rivelatori non sia nulla e non superi i 450 keV rimuovendo il filtro sul segnale valido del TAC. Questa selezione ha senso in quanto il filtro sul TAC era necessario ad escludere gli eventi in cui il fotone da 1275 keV era stato rilevato in uno dei rivelatori sul piano, ma i restanti filtri ci assicurano che questi eventi sono in ogni caso scartati. In questo modo si ottengono gli spettri che si possono vedere nella Figura 10.

Questi spettri si considerano in assoluto i più attendibili, e rivelano come ci sia una rate di circa 0.29 Hz. Non è necessario correggere questo valore per dead time perché si vede dagli spettri nella Figura 6 che il rate è sufficientemente basso.

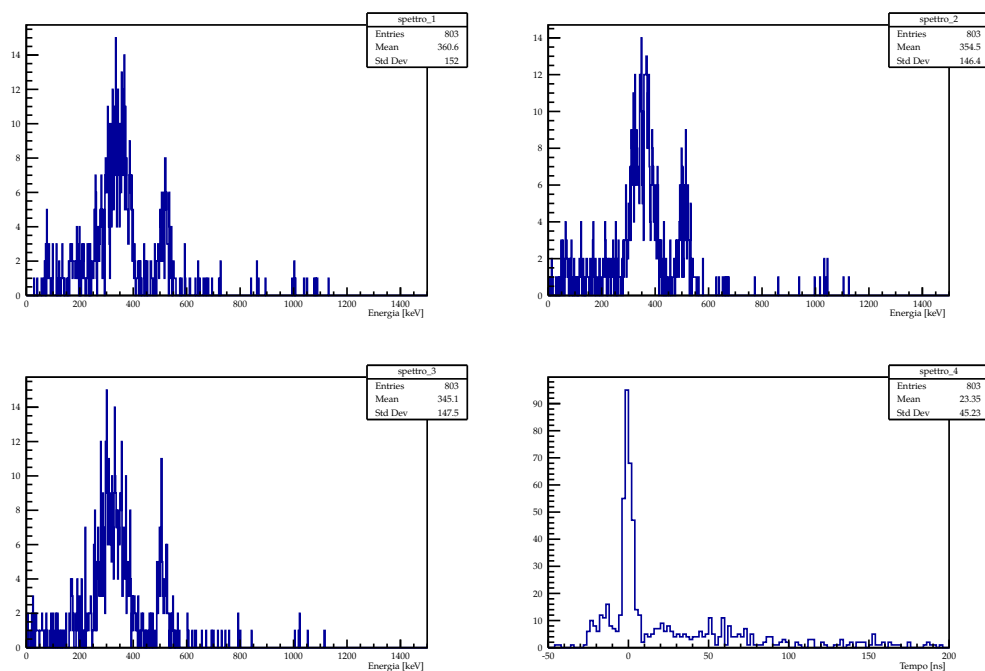


Figura 9: Spettri con la richiesta che la somma delle energie fosse nella zona che ci si aspetta.

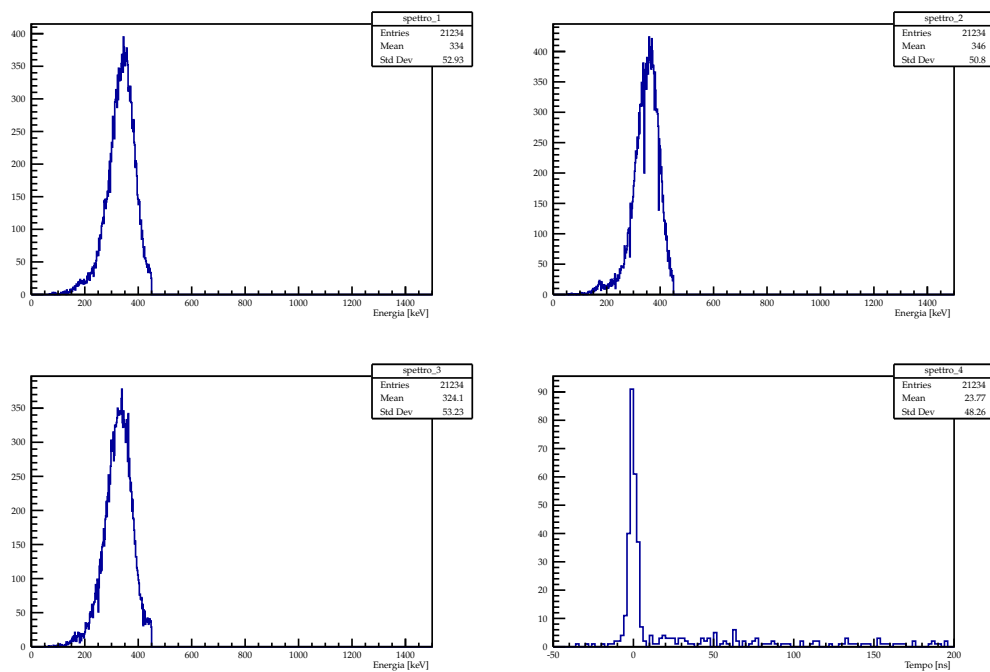


Figura 10: Gli spettri "puliti" senza richiedere il segnale sul rivelatore 4. Evidente che picco che si vede è quello relativo al decadimento in 3 fotoni.

## 2.6 Confronto tra le rate

Come si vedrà nella sezione successiva, per poter confrontare le rate di decadimento del positronio è necessario effettuare delle correzioni di natura geometrica. Per poterlo fare, è necessario conoscere le grandezze fisiche caratteristiche dell'esperimento. Si sono misurati (e saranno definiti in seguito):

$$R = 17.9\text{cm} \qquad r = 5.08\text{cm}$$

Per quanto riguarda il parapositronio, si sono visti eventi con una frequenza di 5.5 kHz, ma gli eventi visti sono circa il 4.03% dei totali. Questo vuol dire che ci sono stati eventi con un rate di circa 136.5 kHz. Per l'ortopositronio, invece, si sono visti circa il 2.52% degli eventi a 120 gradi, perciò considerando che si è visto un rate di 0.29 Hz, il rate effettivo è di circa 11,5 Hz. Considerando ora che nel decadimento dell'ortopositronio solamente circa il 3.5% degli eventi decade con un angolo che l'apparato strumentale vede<sup>1</sup>, si ha che si è creato l'ortopositronio con un rate di circa 328.8 Hz. Questo vuol dire che il rapporto tra i due rate è di circa 1/415, abbastanza in linea con le previsioni teoriche<sup>2</sup>

## 2.7 Il tempo di decadimento dell'ortopositronio

Dato l'esperimento, si è voluto anche andare a stimare il tempo di vita medio delle specie prodotte. Per quanto riguarda il parapositronio, però, questo non è possibile in quanto il tempo di vita è troppo basso, ed effettivamente si vede nello spettro del TAC della Figura 5 come si abbia una gaussiana semplice, mentre dalla Figura 8 si vede che c'è un decadimento esponenziale più marcato. Perciò si studi questo grafico.

Si è provato a studiare i dati con molti filtri, ma in nessun caso si è arrivati a vedere un'esponenziale sufficientemente "buono" per essere interpolato. Questo probabilmente è conseguenza del fatto che non si hanno molti dati una volta imposti i vari filtri per isolare l'ortopositronio. Quindi, in definitiva, si vede che l'ortopositronio ha un tempo di vita più alto di quello del parapositronio (in quanto si hanno effettivamente più dati fuori e, più precisamente, a tempi maggiori, dalla gaussiana), ma non è possibile, con i dati presi, andare a stimare la pendenza dell'esponenziale con cui decresce effettivamente lo spettro del TAC.

# 3. Simulazioni del decadimento

## 3.1 Stima teorica dell'accettanza del rivelatore

In questa sezione, come suggerito dal titolo, si procederà con il calcolo della stima teorica dell'accettanza del sistema di acquisizione nelle due configurazioni usate nell'esperienza. Tali stime verranno effettuate usando fondamentalmente 2 ipotesi, più una aggiuntiva per il caso del decadimento a 3 fotoni. Le 2 ipotesi comuni consistono nell'assumere che il decadimento avvenga al centro di una

<sup>1</sup>Si considera la distribuzione di probabilità trovata al link: ?? (confrontata con il grafico trovato nell'articolo ??). Si trova che integrando numericamente tale funzione facendo variare l'angolo tra le traiettorie di 10 gradi attorno al valore 120 usato per la stima teorica

<sup>2</sup>Nel considerare questo rapporto si sono fatte molte approssimazioni: il calcolo teorico è frutto di uno sviluppo al primo ordine, la correzione per il dead time non è molto precisa e la pulizia degli eventi non è perfettamente univoca. Oltretutto gli intervalli di integrazione sono stati presi in modo da essere fisicamente sensati, ma non per questo oggettivi, si è scelto 10 gradi per avere un'area simile a quella effettiva del rivelatore. La distribuzione di probabilità è quasi costante attorno a quei valori.



sfera di raggio  $R$  sulla cui superficie sono situati i rivelatori di raggio  $r$  e nel considerare il rapporto  $\frac{r}{R} \ll 1$  in maniera tale che  $\arctan\left(\frac{r}{R}\right) \approx \frac{r}{R}$ . Quest'ultima ipotesi implica che i rivelatori, che verranno rappresentati come circonferenze, sono equivalentemente rappresentati da cerchi sulla superficie sferica e viceversa. Partiamo quindi dal caso più semplice. La stima fatta vuole discutere l'angolo solido in senso lato coperto dai rivelatori rispetto all'evento analizzato, e non si prefigge di studiare la possibilità che il fotone non interagisca con il rivelatore.

### 3.1.1 Angolo solido sotteso da un singolo rivelatore

Si calcola come prima cosa l'angolo sotteso da un singolo rivelatore di raggio  $r$  a distanza  $R$  dalla sorgente, in rapporto con l'angolo solido totale. Considerando le coordinate sferiche tale rapporto è dato da

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan\left(\frac{r}{R}\right)} \sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2+r^2}{R^2}}} \right)$$

Si può confrontare questa stima con la misura degli eventi registrati da R4. Considerando che esso era a una distanza di  $R = 11.2$  cm e aveva un raggio di  $r = 5.08$  cm si ha che tale rivelatore dovrebbe vedere il 4.45% dei fotoni, quando sperimentalmente ne vede meno del 2%. Questo è probabilmente conseguenza dell'efficienza del rivelatore stesso, attestabile a circa il 50%.

### 3.1.2 Decadimento a due corpi, rivelatori a 180 gradi

Avendo a che fare con un decadimento a due corpi con momento iniziale nullo i due fotoni emessi avranno momento uguale ed opposto e di conseguenza, posizionando due rivelatori a  $180^\circ$ , se un fotone colpisce un rivelatore automaticamente l'altro interagirà con il secondo rivelatore facendo sì che l'evento venga effettivamente rivelato. La probabilità che un generico decadimento a 2 fotoni venga rivelato corrisponde alla probabilità che un fotone interagisca con uno dei due rivelatori, pari al rapporto tra la somma tra le aree dei due rivelatori e la superficie della sfera di raggio  $R$ , essendo per isotropia la probabilità di emissione uguale per tutte le direzioni. Quindi  $P(2\gamma) = \frac{r^2}{2R^2}$ .

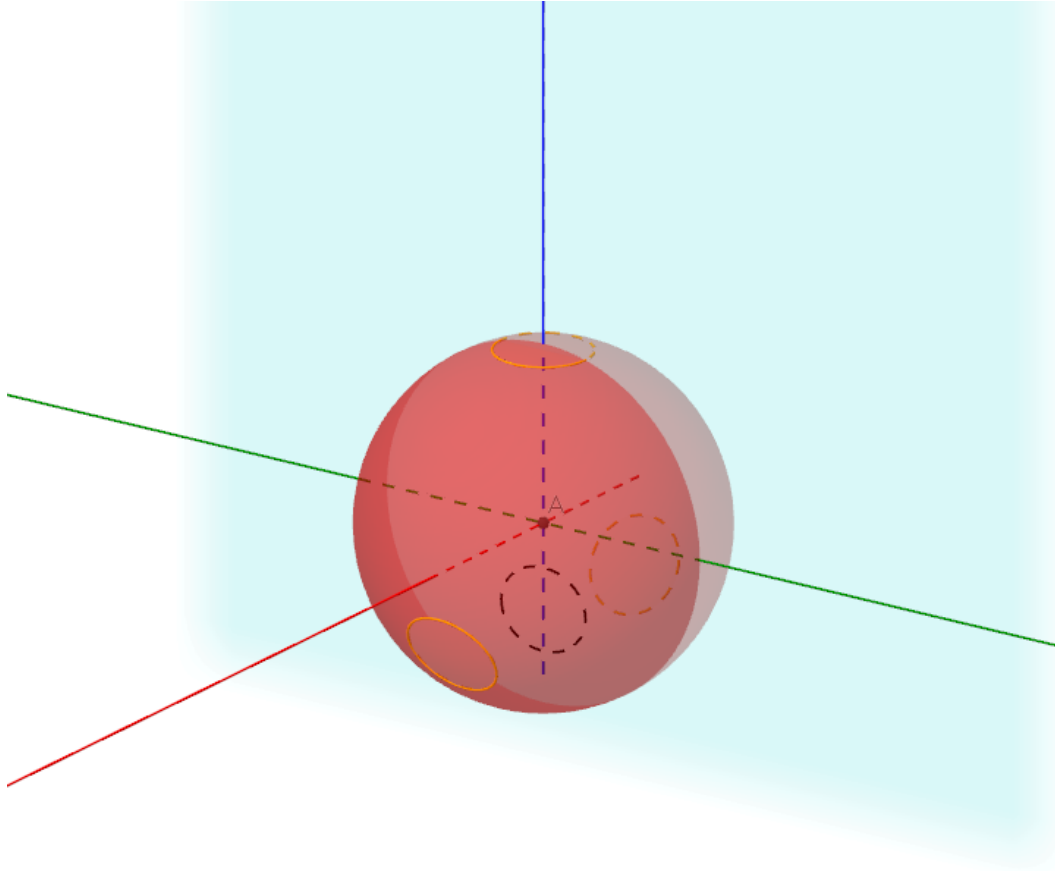
### 3.1.3 Decadimento a tre corpi, rivelatori a 120 gradi

Il caso del decadimento a tre fotoni è molto più delicato, essendo un decadimento a tre corpi lo spettro dell'energia è continuo e dipende dall'angolo di emissione. Ciò che però si può dire è che i tre fotoni vengono emessi complanari, per effetto sempre della conservazione del momento lineare. In questo caso i tre scintillatori vengono posti a  $120^\circ$  l'uno dall'altro sullo stesso piano. Introduciamo a questo punto una nuova ipotesi al fine di semplificare il calcolo, ovvero che anche i tre fotoni vengano emessi ad un angolo di  $120^\circ$  l'uno dall'altro<sup>3</sup>, cosicché se due fotoni interagiscono con due rivelatori anche il terzo interagirà con l'ultimo rivelatore.

Al fine di calcolare la probabilità che un evento venga rivelato conviene fissare un sistema di riferimento con origine nel centro della sfera di raggio  $R$  e con asse  $z$  che passa per il centro del rivelatore interagente con il primo fotone. Gli altri due assi si scelgono in maniera tale che i centri degli altri due rivelatori giacciono sul piano  $xz$ .

Il passo successivo consiste nel parametrizzare le traiettorie dei singoli fotoni. È necessario parametrizzarne soltanto due, poichè il terzo interagisce automaticamente con il sistema di acquisizione una

<sup>3</sup>per ottenere la probabilità finale integreremo la distribuzione degli angoli attorno a questo valore



**Figura 11:** Collocazione dei rivelatori nel sistema di riferimento scelto.

volta che i primi due lo hanno fatto. E' molto comodo utilizzare le coordinate sferico polari, in maniera tale che la traiettoria del primo fotone sia nella direzione del versore  $n_1 = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$  con  $\theta$  angolo azimutale, e similmente per il secondo fotone  $n_2 = (\cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \beta)$  con questa volta  $\beta$  come angolo azimutale. Poichè per ipotesi il primo fotone interagisce con il rivelatore posto al polo  $(0, 0, R)$ , l'angolo  $\theta$  è vincolato ad essere minore di  $\arctan\left(\frac{r}{R}\right) \approx \frac{r}{R} \ll 1$  e di conseguenza  $\sin \theta \approx \theta$  e  $\cos \theta \approx 1$ . Si userà questo risultato a breve. A questo punto bisogna imporre che l'angolo tra i due versori sopra definiti sia di  $120^\circ$ , ovvero  $n_1 \cdot n_2 = \cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$ . Questa condizione si traduce nell'espressione

$$\sin \theta \sin \beta (\cos \phi \cos \alpha + \sin \phi \sin \alpha) + \cos \theta \cos \beta = \mu \sin \theta \sin \beta + \cos \theta \cos \beta = -\frac{1}{2}$$

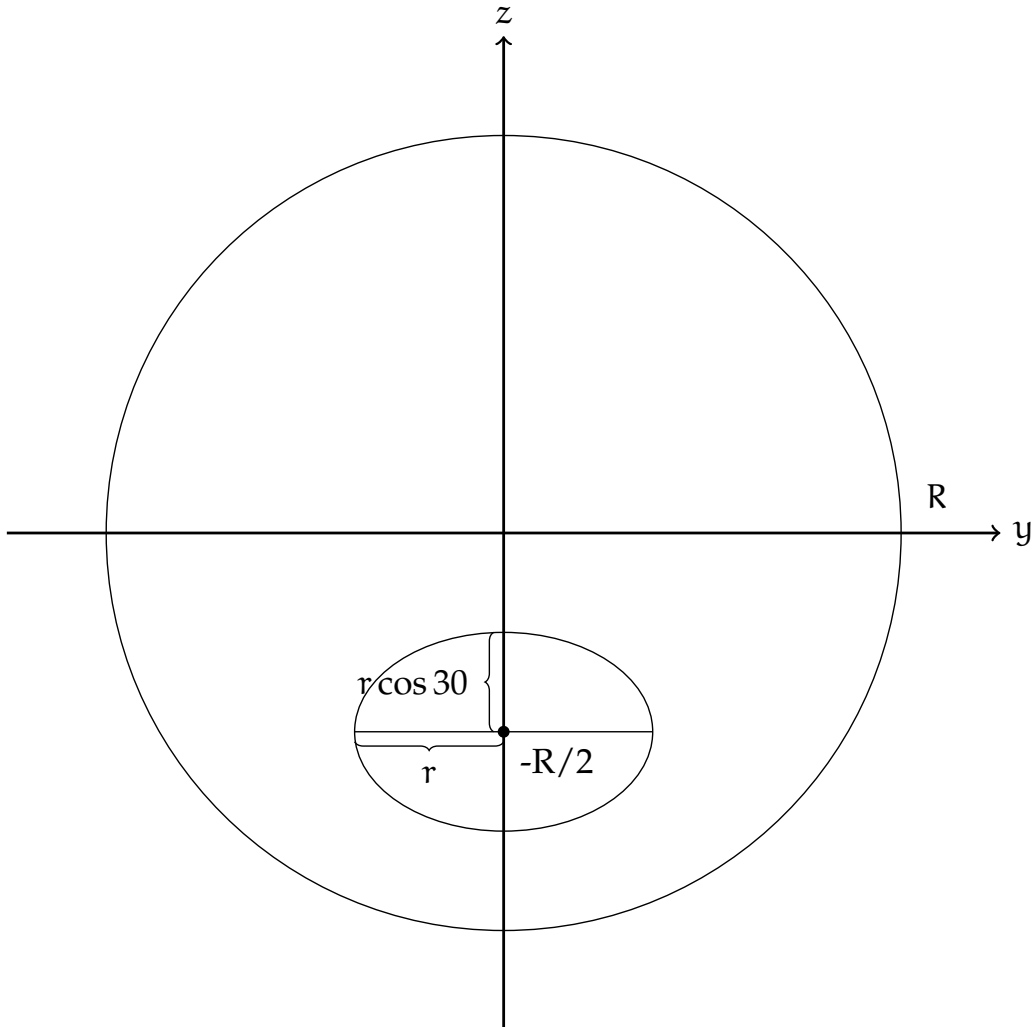
con  $\mu := (\cos \phi \cos \alpha + \sin \phi \sin \alpha) = \cos(\alpha - \phi)$ . Al fine di risolvere tale equazione si ricorre alla sopracitata approssimazione, ottenendo quindi  $\mu \theta \sin \beta + \cos \beta = -\frac{1}{2}$ , risolvibile utilizzando l'identità fondamentale della trigonometria  $\sin \beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$ , per cui  $\mu^2 \theta^2 \left(\sqrt{1 - \cos^2 \beta}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2} - \cos \beta\right)^2$  ed usando la variabile ausiliaria  $t = \cos \beta$  ci si riconduce a risolvere l'equazione  $t^2 (1 + \mu^2 \theta^2) + t + \frac{1}{4} - \mu^2 \theta^2 = 0$  che ha come soluzioni :

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \mu \theta \sqrt{3} \sqrt{1 + \frac{4}{3} \mu^2 \theta^2}}{2(1 + \mu^2 \theta^2)} \approx$$

$$\frac{1}{2} \left( -1 \pm \mu\theta\sqrt{3} \left( 1 + \frac{2}{3}\mu^2\theta^2 \right) \right) (1 - \mu^2\theta^2) \approx \frac{1}{2} (-1 \pm \mu\theta\sqrt{3})$$

dove si sono trascurati gli ordini superiori al primo in  $\theta$  poichè quest'ultimo è piccolo per ipotesi. Per decidere quale tra i due segni prendere si pensi di porsi a  $\phi = \alpha$  per cui  $\cos(\phi - \alpha) = 1$ , ad un aumento di  $\theta$  deve corrispondere un aumento di  $\beta$ , ovvero una diminuzione del  $\cos \beta$ , quindi in definitiva:  $t = \cos \beta \approx -\frac{1}{2} (1 + \mu\theta\sqrt{3})$ . A questo punto si cerchi la condizione per cui il secondo fotone interagisca con uno dei due rivelatori rimanenti, supponiamo questo sia quello con centro nel terzo quadrante del piano  $xz$ . La proiezione di quest'ultimo sul piano  $yz$  è un'ellisse di centro  $(0, 0, -R \sin 30^\circ)$ , asse maggiore parallelo all'asse  $y$  di lunghezza  $r$  e asse minore invece parallelo all'asse  $z$  di lunghezza  $r \cos 30^\circ$ . L'equazione di questa ellisse sul piano  $yz$  è:

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{(z + R \sin 30^\circ)^2}{(r \cos 30^\circ)^2} = 1 = \frac{1}{r^2} \left( y^2 + \frac{4}{3} \left( z + \frac{R}{2} \right)^2 \right)$$



**Figura 12:** Grafico dell'ellisse.

Si noti che se le coordinate  $x$  e  $y$  appartenenti al vettore  $Rn_2 = (x, y, z)$  che parametrizza l'intersezione tra la traiettoria del secondo fotone e la superficie sferica di raggio  $R$  sono interne all'ellisse, allora il fotone ha interagito con il rivelatore. Prima di procedere calcoliamo il  $\sin \beta$  in funzione di  $\theta$  in base a ciò che sappiamo di  $\cos \beta$ . Infatti:

$$\sin \beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \approx \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4} (1 + \mu\theta\sqrt{3})^2} = \pm \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \mu\theta - \frac{3}{4} \mu^2 \theta^2}$$

Poichè  $0 \leq \beta \leq \pi$ , allora  $\sin \beta \geq 0$ , si prenderà il segno  $+$  nell'equazione sopra. Inoltre si trascurano nuovamente i termini del secondo ordine in  $\theta$ . Quindi:

$$\sin \beta \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \mu\theta} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \mu\theta\right)$$

di nuovo nell'ultimo passaggio si è usata l'ipotesi di  $\theta$  piccolo, condizione che impedisce al radicando della espressione sopra di diventare negativo. Con questo risultato si può efficacemente parametrizzare  $Rn_2 = R(\cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \beta) = R\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \mu\theta\right) \cos \alpha, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \mu\theta\right) \sin \alpha, -\frac{1}{2} (1 + \mu\theta\sqrt{3})\right)$ , ed imponendo che  $y^2 + \frac{4}{3} \left(z + \frac{R}{2}\right)^2 \leq r^2$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{R^2} &\geq \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \mu\theta\right)^2 \sin^2 \alpha + \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2} (1 + \mu\theta\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\right)^2 \approx \\ &\frac{3}{4} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \mu\theta + \frac{1}{3} \mu^2 \theta^2\right) \sin^2 \alpha + \mu^2 \theta^2 \end{aligned}$$

trascurando nuovamente i termini del secondo ordine si giunge alla seguente:

$$\frac{3}{4} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \mu\theta\right) \sin^2 \alpha \leq \frac{r^2}{R^2}$$

ovvero

$$\sin^2 \alpha \leq \frac{4r^2}{3R^2} \frac{1}{1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \mu\theta} \approx \frac{4r^2}{3R^2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \mu\theta\right)$$

Si noti che l'espressione  $1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \mu\theta \geq 0$  per le ipotesi fatte su  $\theta$ .

Per ricavare una condizione su  $\alpha$  bisogna ora fare un'ulteriore osservazione. Da considerazioni legate alla geometria del problema, si nota che l'angolo  $\alpha$  è anch'esso minore in modulo di  $\arctan\left(\frac{r}{R}\right)$  e può essere quindi considerato piccolo. Di conseguenza  $\mu = \cos \phi \cos \alpha + \sin \phi \sin \alpha = \cos \phi + \alpha \sin \phi$  e  $\sin^2 \alpha \approx \alpha^2$ . La condizione qui sopra può quindi essere riscritta:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &\leq \frac{4r^2}{3R^2} \left(1 + \frac{2\theta}{\sqrt{3}} (\cos \phi + \alpha \sin \phi)\right) \rightarrow \\ \alpha^2 - \frac{8r^2\theta}{3\sqrt{3}R^2} \sin \phi \alpha - \frac{4r^2}{3R^2} \left(1 + \frac{2\theta}{\sqrt{3}} \cos \phi\right) &\leq 0 \end{aligned}$$

risolviamo l'equazione di secondo grado associata alla disequazione appena ricavata.

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \frac{8r^2\theta}{3\sqrt{3}R^2} \sin \phi \pm \sqrt{\left(\frac{8r^2\theta}{3\sqrt{3}R^2} \sin \phi\right)^2 + \frac{16r^2}{3R^2} \left(1 + \frac{2\theta}{\sqrt{3}} \cos \phi\right)} \approx \\ \frac{8r^2\theta}{3\sqrt{3}R^2} \sin \phi \pm \frac{4r}{\sqrt{3}R} \sqrt{1 + \frac{2\theta}{\sqrt{3}} \cos \phi} &\approx \frac{8r^2\theta}{3\sqrt{3}R^2} \sin \phi \pm \frac{4r}{\sqrt{3}R} \left(1 + \frac{\theta}{\sqrt{3}} \cos \phi\right) =: A \pm B \end{aligned}$$

Di conseguenza la precedente disequazione è soddisfatta per  $A - B \leq \alpha \leq A + B$ .

L'ultimo passo per determinare la probabilità che il secondo fotone interagisca con uno dei due rivelatori consiste nel notare che tale probabilità è equivalente a quella che lo stesso fotone interagisca con un solo rivelatore ed imponendo  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , ovvero che interagisca con il rivelatore per cui abbiamo fatto tutti i precedenti ragionamenti. Tale probabilità si può esprimere nella seguente maniera, integrando sull'angolo solido definito da  $\theta$  e  $\phi$  e sull'angolo definito da  $\alpha$  (la varietà delle configurazioni è infatti data da  $S^2 \times S^1$ , da cui la misura su questa varietà è data da  $\sin \theta \, d\phi \, d\theta \, d\alpha$ ) e normalizzando il tutto tramite i fattori  $4\pi$  e  $\pi$ :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\arctan(\frac{r}{R}) \approx \frac{r}{R}} d\theta \sin \theta \int_{A-B}^{A+B} d\alpha = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{r}{R}} d\theta \sin \theta 2B = \\ &= \frac{2r}{\sqrt{3}R\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{r}{R}} d\theta \sin \theta \left( 1 + \frac{\theta}{\sqrt{3}} \cos \phi \right) = \frac{2r}{\sqrt{3}R\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi [-\cos \theta]_0^{\frac{r}{R}} = \\ &= -\frac{2r}{\sqrt{3}R\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \left( \cos \left( \frac{r}{R} \right) - 1 \right) \approx \frac{2r}{\sqrt{3}R\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \left( \frac{r^2}{2R^2} \right) = \frac{2r^3}{\sqrt{3}R^3} \end{aligned}$$

A questo punto la probabilità che un generico evento venga rivelato è dato dal prodotto della probabilità appena ricavata moltiplicata per 3, poichè il primo fotone può interagire con uno qualunque dei tre rivelatori e nel calcolo è stato supposto che ne venisse colpito uno in particolare, ovvero:

$$P(3\gamma) = \frac{2\sqrt{3}r^3}{\pi R^3}$$

### 3.2 Simulazione degli eventi tramite metodo Monte Carlo

Per avere una migliore stima della frazione accettata di eventi si è ricorsi ad una simulazione Monte Carlo. Si è perciò simulato un numero molto grande di eventi ( $10^9$ ) e si è contato quanti di questi hanno interagito con tutti e tre i rivelatori, considerati dei dischi con efficienza 100%.

Per ogni evento sono stati simulati separatamente la  $\phi$  del primo fotone, la  $\theta$  del primo fotone, i due angoli tra i fotoni all'interno del piano, e la direzione del piano su cui giace il decadimento (che ruota intorno alla direzione del primo fotone).

Dato che vogliamo che il primo fotone sia isotropo, è necessario che

$$\frac{dp}{d\Omega} = \frac{d^2p}{d\theta \, d\phi \, \sin(\theta)} = \text{const} \rightarrow \frac{d^2p}{d\theta \, d\phi} \propto \sin(\theta) \quad (1)$$

quindi, dato che le probabilità di  $\phi$  e  $\theta$  sono indipendenti

$$\frac{dp}{d\phi} = \frac{1}{2\pi} \quad (2)$$

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{\sin(\theta)}{2} \quad (3)$$

distribuzioni facilmente campionabili tramite il metodo della trasformata inversa.

Per la simulazione degli angoli tra i due fotoni si è applicato *rejection method* alla funzione

$$\frac{d^3p}{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3} = \frac{\left(\sum_{i=1}^3 (1 - \cos(\alpha_i))^2\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^3 \sin(\alpha_i)\right)}{\left(\sum_{i=1}^3 \sin(\alpha_i)\right)} \quad (4)$$

dove  $\alpha_3 = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2$ .

La direzione del piano è più delicata da generare. Per generare eventi sensati si vorrebbe infatti che tale direzione sia isotropa. Chiamate  $\theta_p$  e  $\phi_p$  le coordinate sferiche della perpendicolare al piano, si ha che devono soddisfare le equazioni 2 e 3. L'equazione in phi è banalmente soddisfatta causa dell'isotropia della phi del primo fotone, mentre la theta è più delicata. L'espressione di  $\theta_p$  in funzione di  $\theta$  direzione del primo fotone e  $\alpha$  angolo di rotazione del piano è

$$\cos(\theta_p) = \cos(\alpha) \cdot \sin(\theta) \quad (5)$$

si ha che la funzione di ripartizione di  $\cos(\theta_p)$  è

$$F(\cos(\bar{\theta}_p)) = P(\cos(\theta_p) < \cos(\bar{\theta}_p)) = 2 \int_{\arcsin(\cos(\bar{\theta}_p))}^{1/2\pi} \int_0^{\pi - \arccos\left(\frac{\cos(\bar{\theta}_p)}{\sin(\theta)}\right)} f(\alpha, \theta) \sin(\theta) d\alpha d\theta + 2 \int_0^{\arcsin(\cos(\bar{\theta}_p))} \int_0^\pi f(\alpha, \theta) \sin(\theta) d\alpha d\theta \quad (6)$$

dove  $f(\alpha|\theta)$  è la densità di probabilità di  $\alpha$  dato  $\theta$ , la nostra incognita.

La densità di probabilità di  $\cos(\theta_p)$  è perciò

$$\frac{dF(\cos(\theta_p))}{d\cos(\theta_p)} = 2 \int_{\arcsin(\cos(\theta_p))}^{1/2\pi} f\left(\pi - \arccos\left(\frac{\cos(\theta_p)}{\sin(\theta)}\right), \theta\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\cos(\theta_p)^2}{\sin(\theta)^2}}} d\theta \quad (7)$$

Si è preferito ricavare la densità di  $\cos(\theta_p)$  per semplificare i conti, dato che se  $\theta_p$  ha densità pari a  $\sin(\theta_p)$ ,  $\cos(\theta_p)$  ha una distribuzione uniforme tra -1 e 1.

Richiedendo tale condizione si ottiene per  $f(\alpha|\theta)$  l'espressione

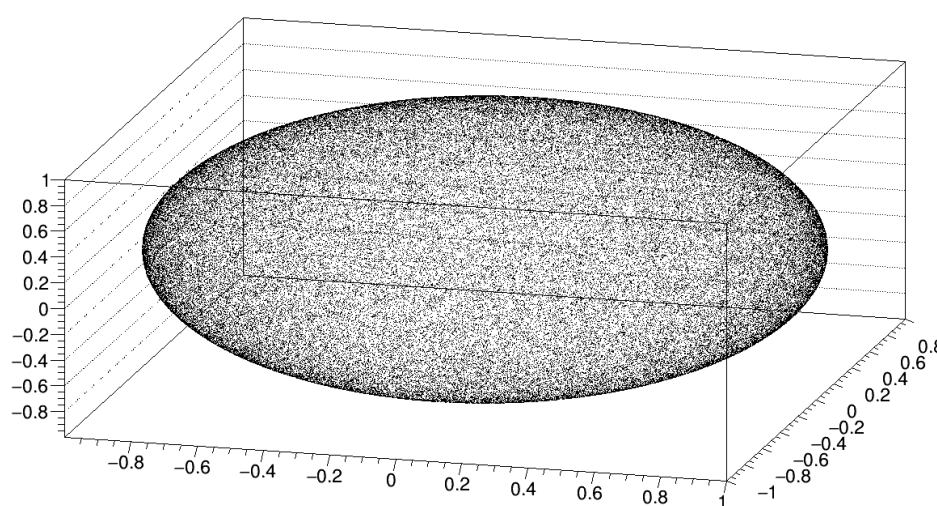
$$f(\alpha|\theta) = \frac{|\sin(\theta) \sin(\alpha)|}{(\pi + 2 \arcsin(\cos(\alpha) \sin(\theta))) \sin(\theta)} \quad (8)$$

che simuliamo sempre tramite *rejection method*.

Come si può vedere dalla Figura 13, tale distribuzione risulta in una direzione del piano effettivamente isotropa.

Simulando  $1 \times 10^{10}$  eventi di questo tipo considerando tre rivelatori a  $120^\circ$  l'uno dall'altro, si ottiene una frazione di eventi accettati di

$$\nu = 0.00065797$$



**Figura 13:** Distribuzione delle direzioni della perpendicolare al piano di decadimento. Come si può vedere, la distribuzione è effettivamente isotropa.

## A. Interpolazioni gaussiane

Si presentano i grafici di interpolazione gaussiana che non sono stati riportati nella relazione per motivi di fluidità.

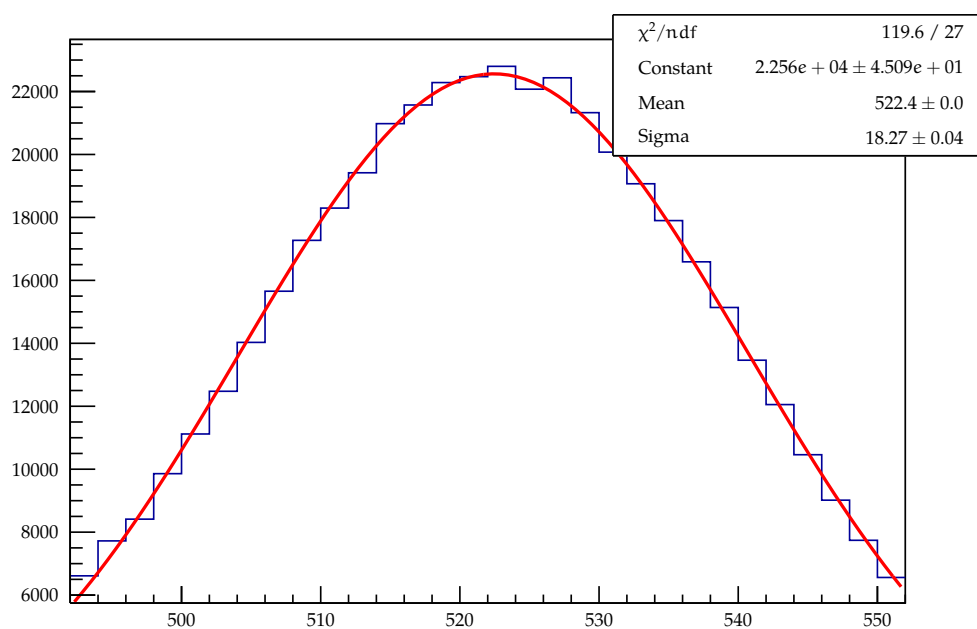
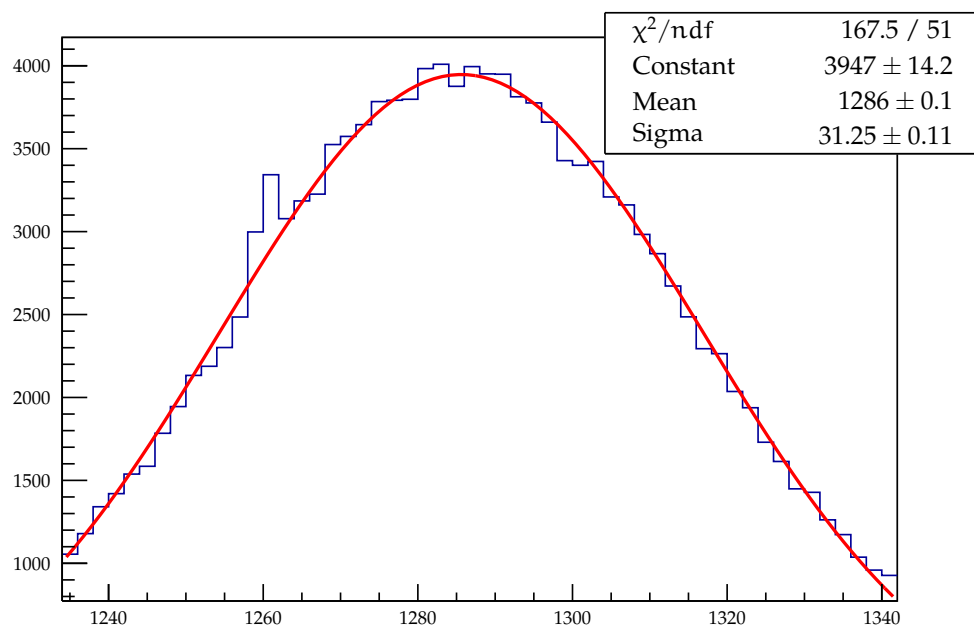
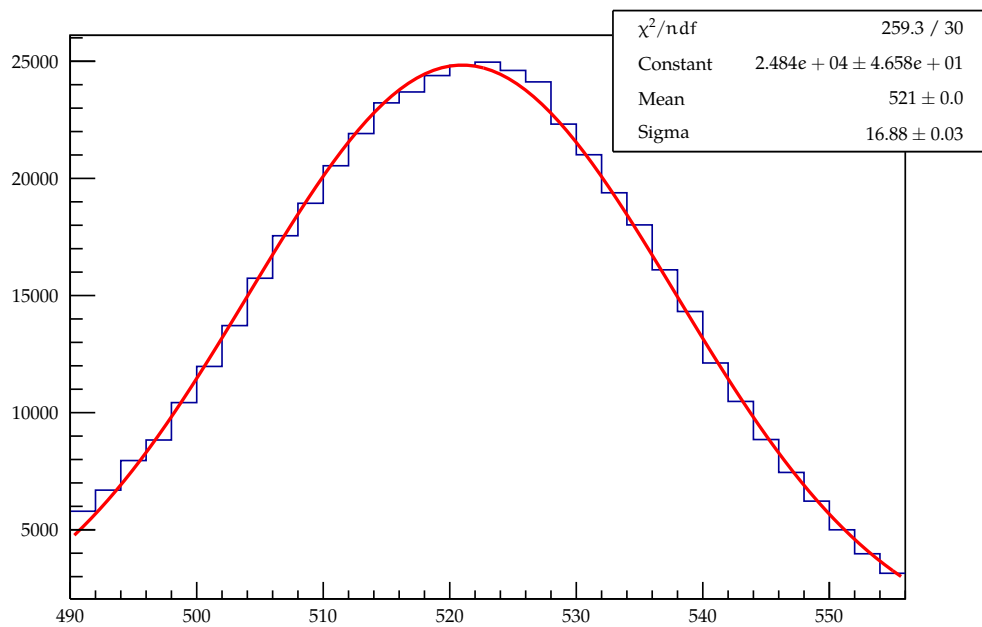
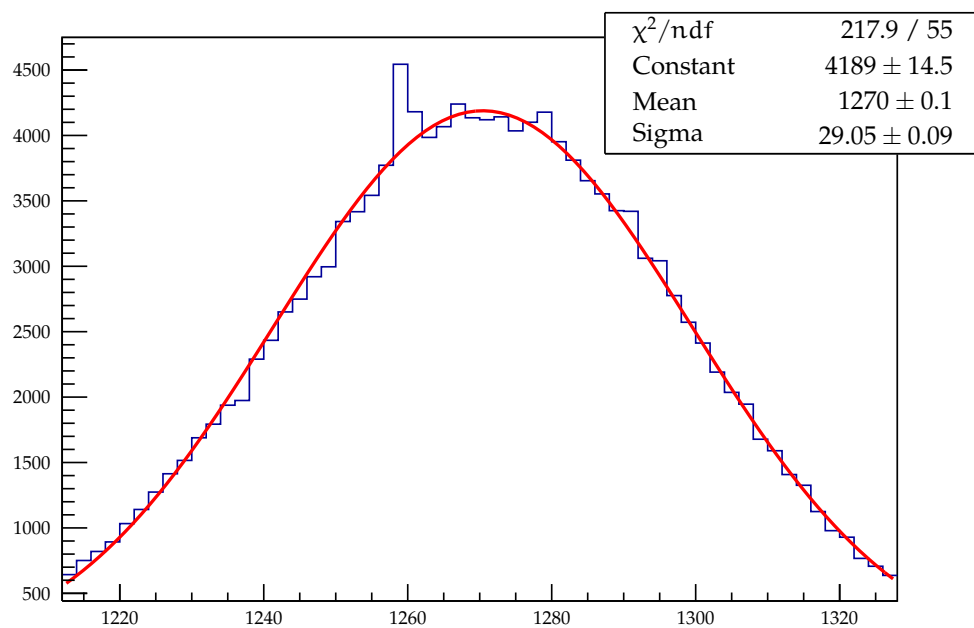
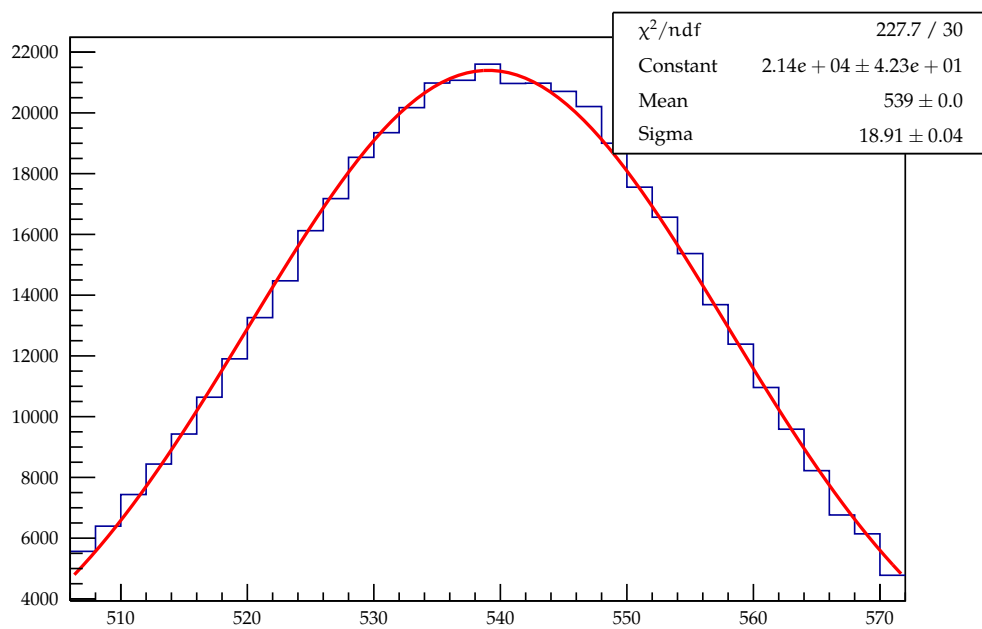
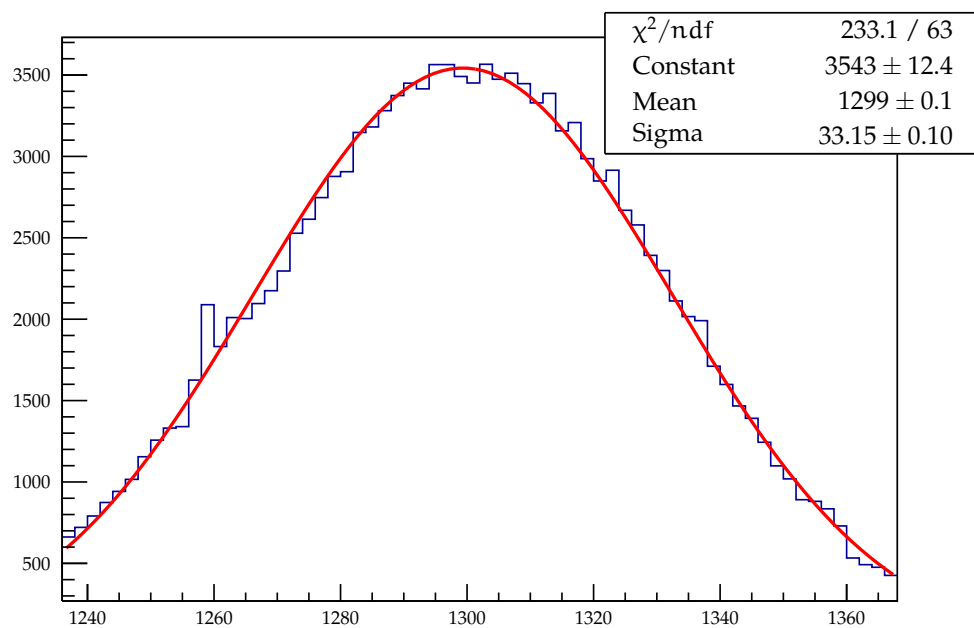
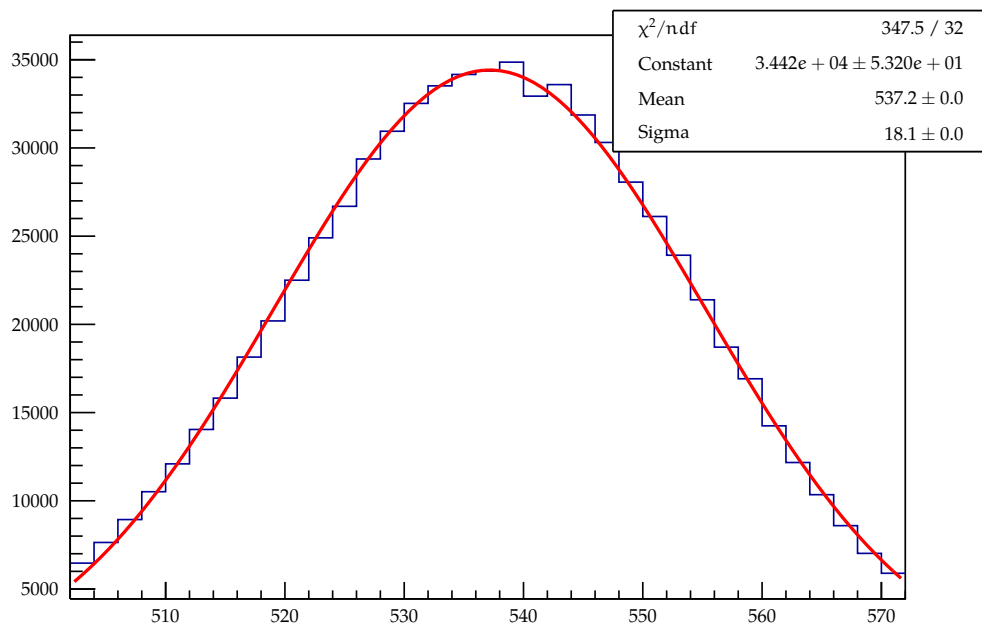


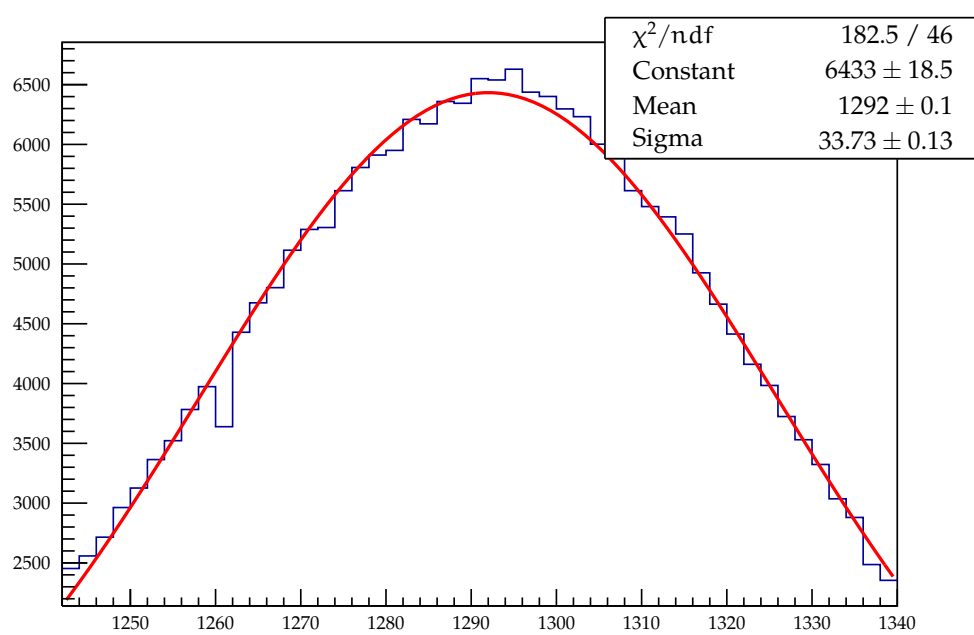
Figura 14: *picco1 R1*



Figura 15: *picco2 R1*Figura 16: *picco1 R2*

Figura 17: *picco2* R2Figura 18: *picco1* R3

Figura 19: *picco2 R3*Figura 20: *picco1 R4*

**Figura 21:** *picco2 R4*

## Riferimenti bibliografici

- [1] [Symmetry Tests in Positronium Decay]
- [2] [A feasibility study of ortho-positronium decays measurement with the J-PET scanner based on plastic scintillators]