

Università degli Studi di Padova

RELAZIONE DI LABORATORIO: POSITRONIO

Laboratorio di fisica, primo anno LM

Davide Chiappara

Università di Padova, facoltà di fisica,
davide.chiappara@studenti.unipd.it
Matricola: 1153465

Ivan Di Terlizzi

Università di Padova, facoltà di fisica,
ivan.diterlizzi@studenti.unipd.it
Matricola: 1155188

Enrico Lusiani

Università di Padova, facoltà di fisica,
enrico.lusiani@studenti.unipd.it
Matricola: 1153399

Anno accademico 2016-2017

Sommario

La seguente è la relazione sull'esperimento di decadimento del positronio eseguito da Chiappara Davide, Di Terlizzi Ivan e Lusiani Enrico facenti parte del gruppo 8. I dati sono stati raccolti presso il laboratorio di fisica in via Loredan in data 14-15-16 Novembre 2016, e sono stati successivamente analizzati durante lo stesso anno accademico.

L'esperienza consiste nello studio del decadimento del positrone prodotto da un atomo di ^{22}Na con la produzione di orto-positronio o di para-positronio, andando a verificare il rapporto tra il decadimento a due fotoni e quello a tre fotoni e andando a misurare la distribuzione temporale degli eventi.

Indice

1	Esecuzione esperimento	1
2	Analisi dati	2
2.1	Analisi preliminare dei segnali	2
2.2	Calibrazione in energia dei rivelatori	3
2.3	Calibrazione in tempo del TAC	4
2.4	Decadimento a due fotoni	8
2.5	Decadimento a tre fotoni	9
3	Simulazioni del decadimento	13
3.1	Stima teorica dell'accettanza del rivelatore	13
3.1.1	Decadimento a due corpi, rivelatori a 180°	13
3.1.2	Decadimento a tre corpi, rivelatori a 120°	13

1. Esecuzione esperimento

L'apparato strumentale consiste in quattro rivelatori a scintillazione NaI(Tl), di cui uno montato verticalmente sopra il supporto per la sorgente di ^{22}Na , e tre montati orizzontalmente su un goniometro a bracci che ne permette lo spostamento. Inoltre si ha accesso ad una serie di moduli elettronici (un amplificatore ad alto voltaggio, un fan in-out, un CFTD, uno shaping amplifier, una coincidence unit, un TAC, una delay unit e un modulo scaler rate). Per quanto riguarda l'acquisizione, si ha accesso ad un oscilloscopio e ad un ADC.

Il primo giorno ci si è focalizzati sullo studio dei segnali dei rivelatori e sulla calibrazione dell'apparato. Come prima cosa, si è visualizzato il segnale di ogni rivelatore, separatamente, sull'oscilloscopio, e si è caratterizzato tale segnale misurandone le caratteristiche. Dopo aver preso nota di tali segnali si è collegato all'amplificatore il rivelatore, e si sono guardati i segnali ad oscilloscopio, riconoscendo quali di questi fossero associati a segnali del tipo fotone da 511 keV e quali invece fotone da 1275 keV. Per fare questo si è semplicemente utilizzato il rate indicato dall'oscilloscopio stesso in fase di visualizzazione del segnale. Infatti, alzando il trigger dell'oscilloscopio, si vedono solo i segnali più energetici, e quindi si vede il rate diminuire, questo ha permesso di vedere effettivamente quale fosse l'ampiezza caratteristica dei segnali associati ai diversi fotoni emessi dalla sorgente. Tale operazione è stata ripetuta per tutti e 4 i rivelatori per verificare che non ci fossero problemi di alcuna natura nella rivelazione dei fotoni emessi dal sodio. Dopo aver visualizzato i segnali in uscita dall'amplificatore si è voluto comprendere il funzionamento del CFTD: per farlo si è utilizzata un'uscita del fan in-out come input e si è visualizzata sull'oscilloscopio l'uscita prompt e, triggherando su di essa, l'uscita delayed, dopodiché si è visto il funzionamento dei vari micro-switch andando a modificarli e guardando il segnale all'oscilloscopio. Successivamente si è settata la soglia di tutti e quattro i rivelatori: per i tre rivelatori complanari (quindi i rivelatori 1, 2 e 3) si è impostata la soglia in modo da non vedere il rumore elettronico, mentre per il quarto rivelatore la soglia è stata impostata in modo da non vedere nemmeno il fotone da 511 keV. Per fare questo si è collegato all'oscilloscopio l'uscita amplificata del rivelatore, e si è triggherato il segnale sul segnale prompt del CFTD con input sempre un'uscita del rivelatore stesso. Andando a modificare un trimmer sul CFTD stesso si è potuto vedere come alzando la soglia scomparissero dal rivelatore via via i segnali meno energetici. Continuando ad agire su tale trimmer è stato possibile rimuovere il rumore elettronico per i tre rivelatori complanari e il fotone da 511 keV per il quarto (si era precedentemente riconosciuta l'ampiezza del segnale legato alla rivelazione di tale fotone). Una volta compreso il funzionamento dei vari moduli e impostata la soglia del CFTD in modo che potesse visualizzare il segnale a cui si è interessati, si è passati alla vera e propria calibrazione dei rivelatori. Per farlo si è attaccato il rivelatore in questione all'amplificatore e quest'ultimo al sistema di acquisizione digitale, e si è dato a tale sistema il trigger utilizzando l'uscita delayed del CFTD a cui è stato attaccato lo stesso rivelatore (per poter calibrare è stata abbassata la soglia di tutti i rivelatori precedentemente impostata, poi è stata ripristinata per le misure successive alla calibrazione). Fatto questo si sono cambiati i parametri dell'amplificatore in modo che i due fotopicchi fossero visualizzati il primo circa al canale 500 e il secondo circa al canale 1300. Dopo aver calibrato, è risultato più semplice agire sul trimmer per la regolazione della soglia del quarto rivelatore (infatti è stato sufficiente alzare la soglia fino alla scomparsa del primo fotopicco). Sistemate tutte le soglie come richiesto si è passati alla vera e propria presa dati che sono stati successivamente analizzati, e per preparare l'apparato si sono regolate le width in modo da essere circa di 100 ns e si sono messi i delay in modo che ci fosse sovrapposizione tra i segnali dei rivelatori 1 e 2 e ci fosse un ritardo di circa 20 ns tra il segnale del rivelatore 1 e quello del rivelatore 2. Successivamente si è verificata la coincidenza tra i segnali del rivelatore 1 e del rivelatore 3, e si è agito sui microswitch di quest'ultimo per fare in modo che questa fosse buona.

Durante la seconda sessione di laboratorio si sono presi i dati, sfruttando l'apparato sistemato e studiato durante la sessione precedente. Come prima cosa si è verificato che i rivelatori fossero nella configurazione 1, cioè con i rivelatori 1 e 2 collineari e il rivelatore 3 che forma un angolo di $\pi/3$ con il rivelatore 2. Fatto questo, si è collegata la prima uscita della coincidence unit (cioè quella che genera un segnale quando arrivano in coincidenza i segnali dal primo e dal secondo rivelatore al Master Gate del segnale di acquisizione. Poi, verificato che tutti i rivelatori fossero collegati all'ADC, si è preso un file di prova andando a vedere se effettivamente si sono visti solamente i picchi a 511 keV. Successivamente a questo si è calibrato il TAC, andando ad aggiungere i ritardi tramite l'apposita cassetta; poi si è passati alla vera e propria acquisizione dati. Come prima cosa si è posto il sistema nella configurazione a 180 gradi, cioè con due rivelatori collineari e il terzo che forma un angolo di 60 gradi con il secondo, e si è collegato il modulo scaler/rate per avere una visione il tempo reale del rate di acquisizione dei rivelatori. Per questa prima misura si è utilizzato come master trigger la coincidenza nel rivelatore 1 e nel rivelatore due, in modo che venissero registrati esclusivamente gli eventi in cui il positronio è decaduto lungo la linea formata dai rivelatori, e che poi si potessero selezionare via software i dati in cui il primo fotone da 1275 keV è entrato nel quarto rivelatore. Infine si è preparato il sistema per la misura del decadimento del positronio in tre fotoni (cioè con i tre rivelatori complanari distanziati da angoli di 120 gradi) e si è messo il master gate di acquisizione sulla coincidenza tra i tre rivelatori complanari. Tale misura è stata fatta per tutta la durata tra la seconda e la terza sessione (cioè per circa 20 ore).

Durante la terza sessione di laboratorio si sono prese le misure fisiche dei rivelatori (in particolare si è guardato il datasheet e si è misurata la distanza tra i rivelatori e la sorgente e le dimensioni fisiche dei rivelatori stessi, dopodiché si è presa un'ulteriore misura nel caso dei due rivelatori collineari e si è iniziata l'analisi dati.

2. Analisi dati

2.2.1 Analisi preliminare dei segnali

Come prima cosa si è voluto caratterizzare il segnale in uscita direttamente dai rivelatori, oppure dal fan in-out. Per fare ciò si sono semplicemente collegati all'oscilloscopio i rivelatori e si è preso nota delle caratteristiche del segnale stesso. I valori misurati sono riassunti nella Tabella 1. Tutti i segnali sono risultati di polarità negativa e si è misurata l'ampiezza di un segnale tipico, se ne è misurato il tempo di salita e il tempo di discesa (visti come i tempi impiegati dal segnale per raggiungere dal 10% al 90% dell'ampiezza massima e viceversa) e si è misurato il rumore utilizzando una latenza di 5 s per il segnale. Alle prime misure si è associato un errore calcolato come errore dati i parametri costruttivi dell'oscilloscopio, mentre al rumore non si è voluto associare un errore in quanto si è interessati solo all'entità di tale grandezza. Collegando tra il rivelatore il fan in-out non si è vista alcuna differenza sostanziale nei segnali visti. A scopo di semplice confronto dei rivelatori, si è voluto anche andare a leggere le ampiezze medie dei segnali in uscita dai rivelatori. Si è rivelato che, effettivamente, le ampiezze medie fossero tra loro molto vicine per i rivelatori 1, 2 e 4, mentre particolarmente basse per il rivelatore 3. Questo effetto è probabilmente conseguenza di effetti strumentali da imputare all'apparato stesso. Non si riportano i valori in quanto è stato fatto solamente un confronto qualitativo.

Andando a spostare il trigger dell'oscilloscopio è stato possibile andare ad identificare le ampiezze caratteristiche dei segnali associati ai due diversi fotoni emessi dalla sorgente di sodio. Alzando

Rivelatore	Ampiezza [mV]	Errore [mV]	tempo salita [ns]	Errore [ns]	tempo discesa [ns]	Errore [ns]	Rumore [mV]
1	103	2	33	2	524	6	1.6
2	152	3	34	2	528	6	1.3
3	33	1	34.8	0.6	480	6	1.2
4	84	2	35.6	0.6	480	6	1.4

Tabella 1: Misura preliminare dei segnali in uscita dai rivelatori

il trigger si è notato un primo abbassamento repentino nella rate appena si è superata la soglia del rumore elettronico, poi si è visto un secondo abbassamento repentino superando il fotopicco da 511 keV e un terzo abbassamento molto rapido superato il fotopicco a 1275 keV, dopo il quale il rate si attestava a qualche decina di Hertz, legati a fotoni di natura ambientale o cosmica.

2.2.2 Calibrazione in energia dei rivelatori

Successivamente si è passati alla vera e propria calibrazione dei quattro rivelatori che sono stati utilizzati, per effettuare la quale si è semplicemente fatta la regressione lineare dei centroidi dei fotopicchi rivelati tramite il programma di acquisizione. Nella Tabella 2 si possono vedere i valori dei parametri interpolanti ottenuti, mentre si rimanda alle appendici per vedere le singole interpolazioni.

Rivelatore	Centroide	Errore	Sigma	Errore
1	522.45	0.03	18.27	0.04
	1285.6	0.1	31.3	0.1
2	520.99	0.03	16.88	0.03
	1270.42	0.09	29.05	0.09
3	539.04	0.03	18.91	0.04
	1299.3	0.1	33.1	0.1
4	537.17	0.02	18.10	0.02
	1292.0	0.1	33.7	0.1

Tabella 2: Parametri dell'interpolazione dei singoli picchi degli spettri.

Partendo da questi dati è stato possibile andare a stimare i parametri di calibrazione m e q (dato che si conoscono solo due punti per i quali questa retta passa, non si è fatta una vera e propria interpolazione ma si sono calcolati i coefficienti delle rette passanti per tali punti, non si associa quindi alcun errore a queste grandezze, che comunque successivamente non verranno usate). I risultati si possono vedere nella Tabella 3.

Rivelatore	m [keV]	q [keV]
1	1.001	-12.02
2	1.019	-19.72
3	1.006	-31.69
4	1.012	-32.56

Tabella 3: Parametri di calibrazione dei rivelatori.

A scopo di presentare il lavoro fatto, nella Figura 1 si possono vedere gli spettri calibrati di tutti e quattro i rivelatori.

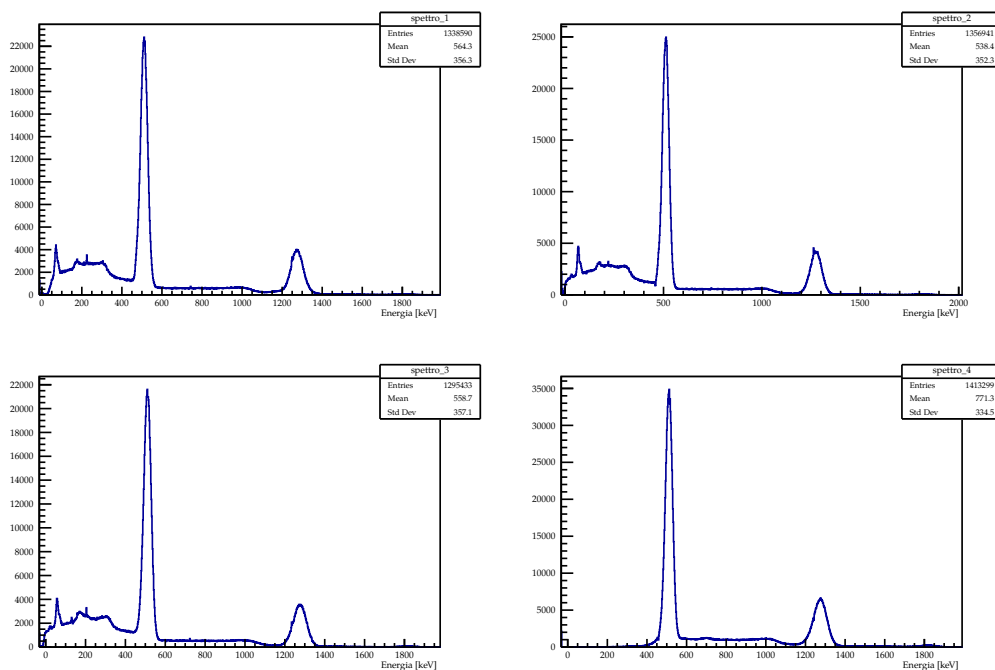


Figura 1: Gli spettri dei quattro rivelatori opportunamente calibrati

Poi si è preso un primo file di prove con le coincidenze, e si è visto che effettivamente si sono visti solamente i picchi a 511 keV. Questi spettri si possono vedere nella Figura 2. Effettivamente da questi spettri si vede che a meno di effetti ambientali si sono raccolti solamente i dati sul primo fotopico e la spalla Compton associata a tale picco.

2.2.3 Calibrazione in tempo del TAC

Successivamente si è passati alla calibrazione temporale del sistema di acquisizione, andando ad utilizzare la cassetta dei ritardi per vedere lo spostamento del segnale in uscita dal TAC al variare dei

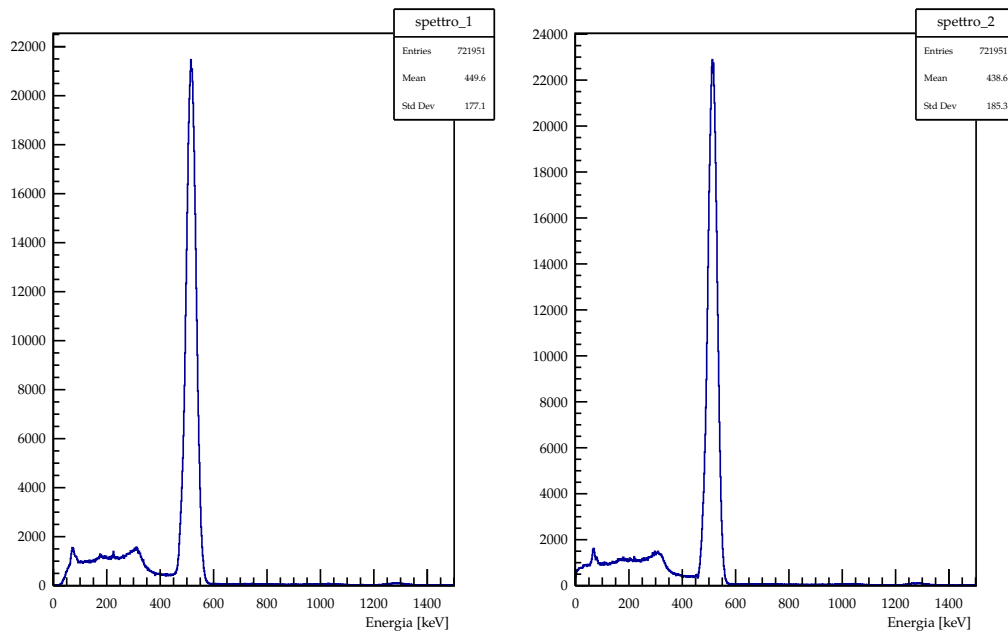


Figura 2: Prima prova della verifica della coincidenza con i due rivelatori collineari

ritardi inseriti. Sono stati fatti dei fit gaussiani del segnale in uscita dal TAC e tutti i grafici trovati si possono vedere nella Figura 3. Inoltre nella Tabella 4 si possono vedere i parametri interpolanti tali segnali al variare del ritardo introdotto.

Una volta noti i parametri delle gaussiane, con una regressione lineare, che si può vedere nel Grafico 4, si può andare a calibrare il sistema di acquisizione, andando a trovare i coefficienti di tale retta. I risultati sono:

$$m = 2.1256 \pm 0.0004$$

$$q = 311.220.03$$

Una volta calibrato tutto il sistema di acquisizione, si è arrivati al vero e proprio studio del positronio: in particolare si vuole misurare il rapporto tra il decadimento a due e a tre fotoni del positronio e la distribuzione temporale degli eventi.

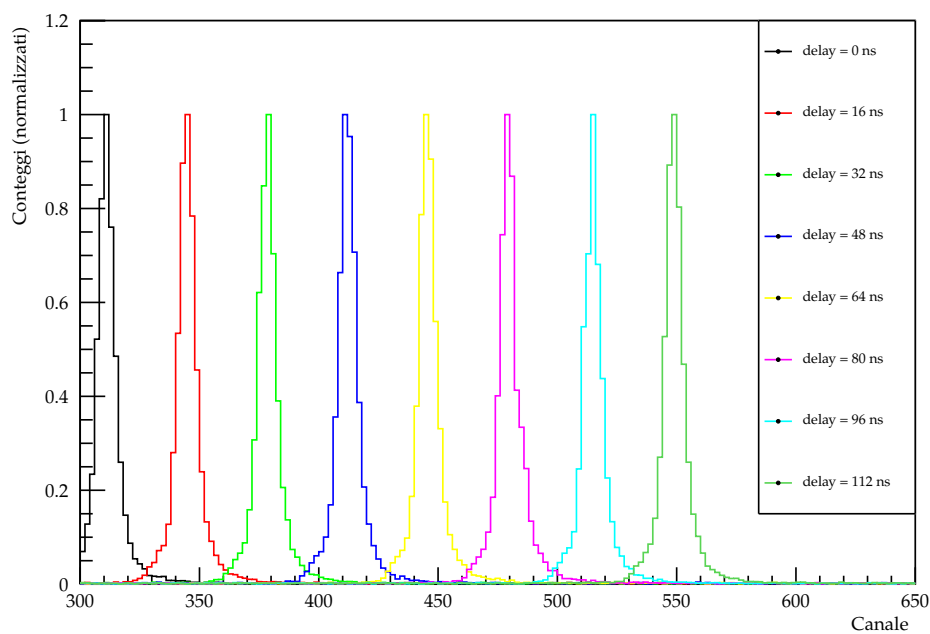


Figura 3: Gli spettri del TAC al variare del ritardo inserito

Ritardo	Centroide	Errore	Sigma	Errore
0	311.06	0.03	4.24	0.03
16	344.81	0.03	4.22	0.04
32	378.42	0.03	4.23	0.03
48	412.20	0.03	4.33	0.04
64	445.75	0.03	4.13	0.03
80	479.72	0.04	4.45	0.04
96	514.89	0.03	4.24	0.03
112	548.93	0.03	4.19	0.03

Tabella 4: Calibrazione in tempo del sistema di acquisizione.

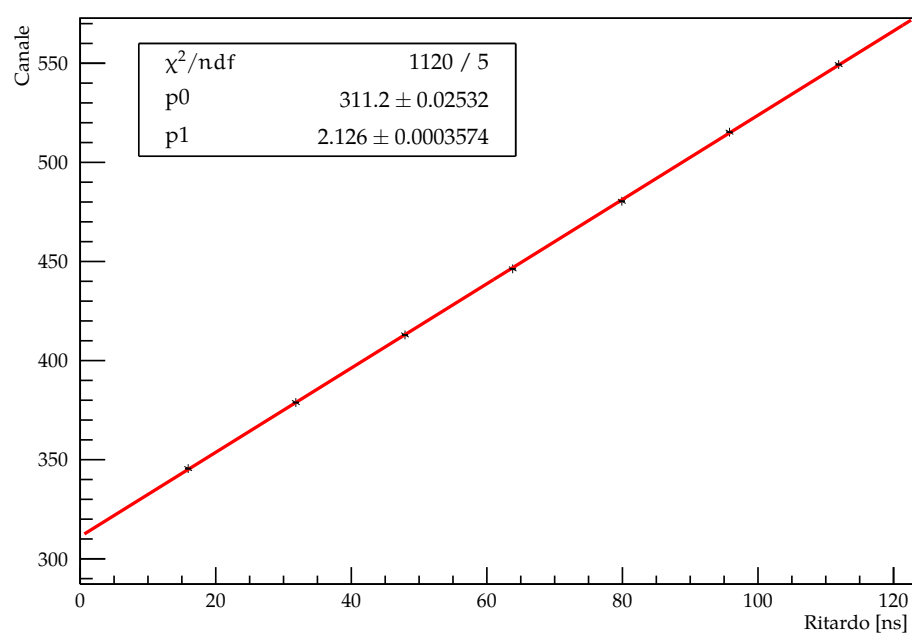


Figura 4: La calibrazione temporale del sistema di acquisizione

2.2.4 Decadimento a due fotoni

Si iniziò dal decadimento a due fotoni: la misura è stata fatta andando a registrare gli spettri dei tre rivelatori complanari assieme allo spettro del TAC. Il trigger è stato impostato sulla coincidenza tra R1 ed R2, ed a tale valore è stato impostato anche lo stop del TAC, mentre lo start del TAC è stato dato da R4 che visualizza un segnale (si ricorda che la soglia di R4 è stata regolata in modo da vedere solo segnali di energia uguale o superiore al fotopicco da 1275 keV). Gli spettri calibrati che si sono visti si possono vedere nella Figura 5.

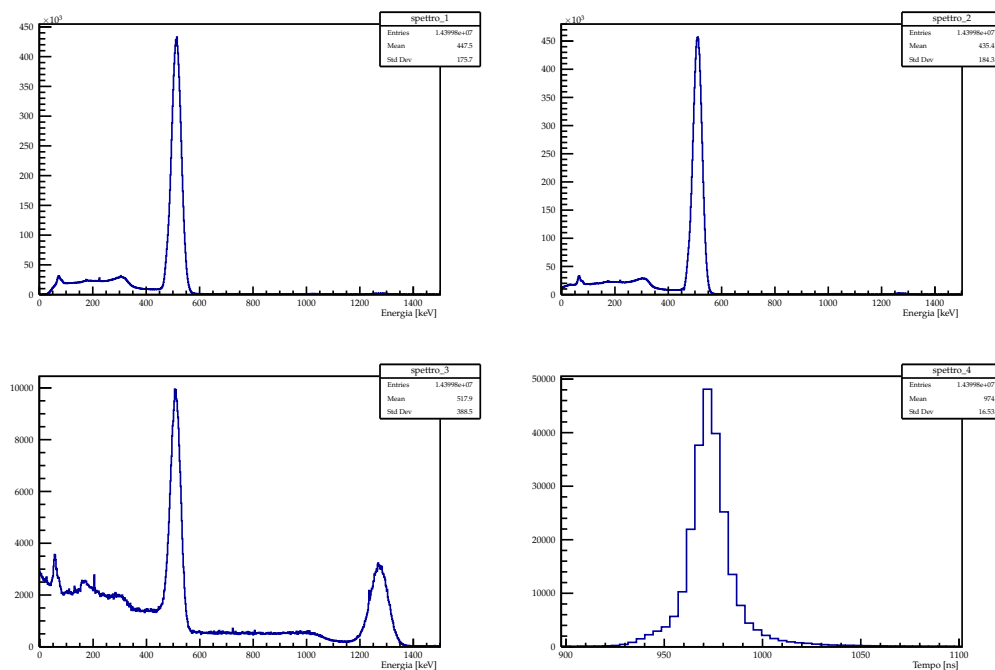


Figura 5: Presentazione degli spettri della misura in coincidenza collineare (lo spettro temporale è riferito ad uno zero arbitrario ed è stato tagliato lo zero)

Da questa figura è possibile vedere come, effettivamente, negli spettri dei primi due rivelatori si abbiano solo i valori legati al primo fotopicco e all'effetto Compton ad esso associato, mentre lo spettro del terzo rivelatore somiglia ad uno degli spettri inizialmente presentati. Per presentare questi spettri è stato rimosso il bin zero dallo spettro del TAC, che è associato ad una coincidenza tra il primo ed il secondo rivelatore, ma quando il quarto rivelatore non ha visto il fotone da 1275 keV. A partire da questi spettri si possono ricavare varie informazioni, come per esempio il rate di decadimento in due fotoni. Dato che tale spettro è stato regolato in modo che l'acquisizione durasse un'ora, e il programma di acquisizione ha registrato 14399800 eventi, vuol dire che sono stati acquisiti in media eventi con una frequenza di 4 kHz. Affinché sia possibile avere una stima attendibile del rate di acquisizione, però, è necessario considerare il dead time dei rivelatori: il modulo di conteggio ha mostrato come il rate di acquisizione per i due rivelatori complanari fosse di circa 15 kHz, e il rate di coincidenze fosse di circa 5.5 kHz. Quindi ci aspettiamo l'ADC abbia registrato 4 kHz su un input reale di circa 5.5 kHz. Effettivamente si sa che MCA per un segnale con un rate di circa 5.5 kHz registra solamente tra il 65 e

l'80% dei dati effettivi, perciò è plausibile un simile rate.

Inoltre con questo campione di dati si può fare un'ulteriore analisi: si possono contare quanti degli eventi registrati sono successivi all'ingresso del fotone energetico nel quarto rivelatore. Per contare questi fotoni è necessario andare a integrare il picco del TAC: infatti si è ottenuto un segnale diverso da zero in uscita dal TAC solo se è partito lo *start*, cioè solo se è entrato un fotone nel rivelatore quattro. Si ha che il TAC ha rivelato circa 2.685×10^5 eventi differenti, il che vuol dire che, rispetto al totale, solo nell'1.86% dei casi l'emissione del fotone più energetico è avvenuta in maniera da esser rivelata da R4. Andando a correggere anche questo valore per il dead time, considerando che R4 aveva un rate di acquisizione visualizzato di circa 6.3 kHz, si ha che si sono acquisiti circa il 65% dei segnali del rivelatore, quindi si considera che circa nel 2.87% dei casi il fotone è entrato nel rivelatore 4. Tutti questi risultati sono presentati senza errore in quanto l'errore poissoniano associato alle misure è molto basso (si ha un grande numero di dati a disposizione), ma sul dead time risulta difficile andare a stimare il reale errore.

2.2.5 Decadimento a tre fotoni

Per il decadimento a tre fotoni, la configurazione dell'apparato strumentale è analoga a quella utilizzata per il decadimento in due fotoni, con l'unica differenza che si sono spostati i tre rivelatori complanari in modo che formassero angoli di 120 gradi l'uno dall'altro, e il master trigger è stato impostato sulla coincidenza tra tutti e tre i rivelatori al posto che sulla coincidenza solo tra il primo e il secondo. Il TAC è stato mantenuto analogamente (cioè come *start* si è usato un segnale nel quarto rivelatore e come *stop* la coincidenza tra i tre rivelatori complanari). Lo spettro visualizzato si può vedere nella figura 6.

Questi spettri però, non vanno bene, e questo si vede dal fatto che, a differenza da quelli a due fotoni, si continuano a distinguere tutti i picchi. Questo fenomeno è conseguenza del fatto che nella versione con tre coincidenze si vedono anche dei casi "spuri", come per esempio l'ingresso del fotone da 1275 keV in uno dei tre rivelatori, di un fotone legato a un decadimento a due corpi in un secondo rivelatore e di un fotone ambientale nel terzo. Per pulire questi fenomeni si può, per esempio, andare a richiedere che il fotone più energetico sia effettivamente stato rivelato da R4 (che si vede imponendo che il segnale del TAC riveli un valore maggiore di zero). Facendolo, si trovano i quattro spettri che si possono vedere nella figura 7.

Effettivamente da questi spettri è riconoscibile il fotopicco legato al decadimento in tre fotoni, ma il campione di dati risulta decisamente scarno, nonostante si abbia preso dati per 1220 minuti. Inoltre sono ancora ben riconoscibili i fotopicchi legati al fotone da 1275 keV e al fotone da 511 keV, il che vuol dire che è necessaria un'ulteriore scrematura per poter vedere i decadimenti a tre fotoni a cui si è realmente interessati. Per farlo ci sono diversi modi possibili. Un primo tentativo consisteva nel taglio in bse al valore in uscita dal TAC, ma è risultato troppo difficile trovare effettivamente un intervallo che permettesse di vedere solamente il picco a cui si è interessati, e si è perciò trascurato. Una seconda prova è stata fatta andando a imporre che sul rivelatore 4 fosse stato visto il fotone da 1275 keV, e che sui tre rivelatori complanari l'energia fosse per ognuno inferiore al valore dopo il quale ci si aspetta di vedere i primi effetti degli altri due fotopicchi. I risultati di questa scrematura si possono vedere nella figura 8, dove effettivamente si nota come i tagli sulle energie siano al punto giusto e lo spettro del TAC sia perfettamente in linea con ciò che si aspetta (gaussiana convoluta con decadimento esponenziale).

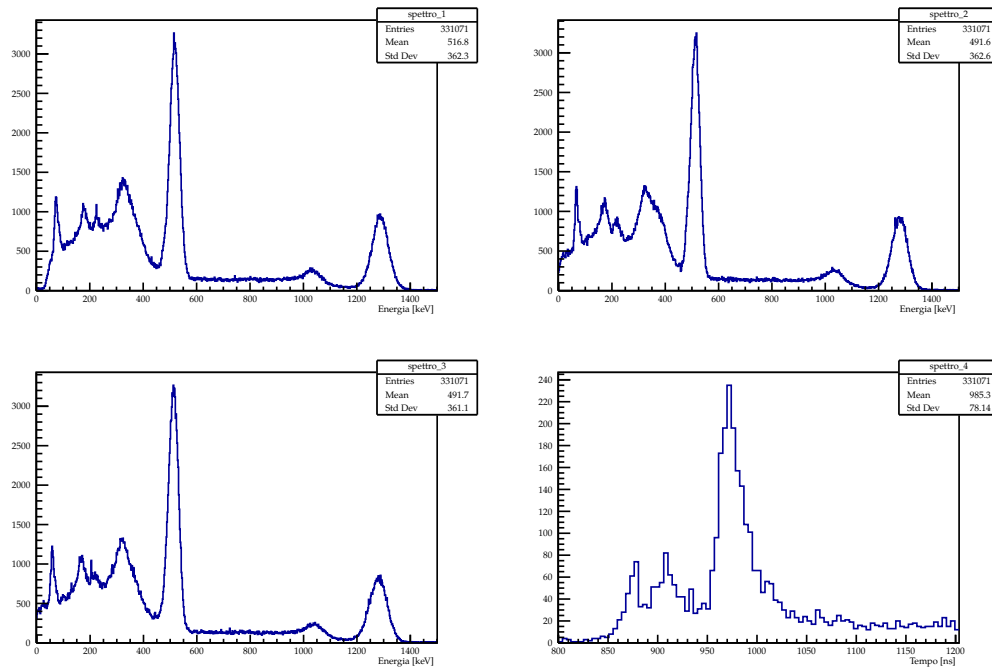


Figura 6: Gli spettri del decadimento in tre fotoni opportunamente calibrati.

Una diversa scrematura può essere fatta richiedendo che la somma delle energie sui vari rivelatori sia inferiore all'energia data dall'annichilazione del positronio, cioè si mette un vincolo a sulla somma totale affinché sia tra i 950 e i 1100 keV. In questa maniera si arriva agli spettri che si possono vedere nella Figura 9.

In questo grafico si vede che effettivamente si sono puliti abbastanza bene i dati, nonostante se ne siano persi una buona quantità, inoltre è quello fisicamente più sensato tra i filtri inseriti. Questo vuol dire che si è ottenuto un rate di decadimento in tre fotoni decisamente molto basso (e quindi sul quale c'è un errore poissoniano decisamente molto alto), cioè di circa 1.2×10^{-2} Hz, decisamente molto molto basso. Questo perché si è comunque chiesto che il quarto rivelatore rivelasse un segnale valido per il TAC. Dato che il calcolo per i due fotoni è stato fatto senza richiedere questo, si può cercare di pulire diversamente i dati: si mantengono i filtri sulla somma delle energie rivelate, si aggiungono dei filtri affinché l'energia nei singoli rivelatori non sia nulla e non superi i 450 keV e si rimuove il filtro sul segnale valido del TAC. In questo modo si ottengono gli spettri che si possono vedere nella Figura 10.

Questi spettri si considerano in assoluto i più attendibili, e rivelano come ci sia una rate di circa 0.29 Hz. Non è necessario correggere questo valore per dead time perché si vede dagli spettri nella Figura 6 che il rate è sufficientemente basso.

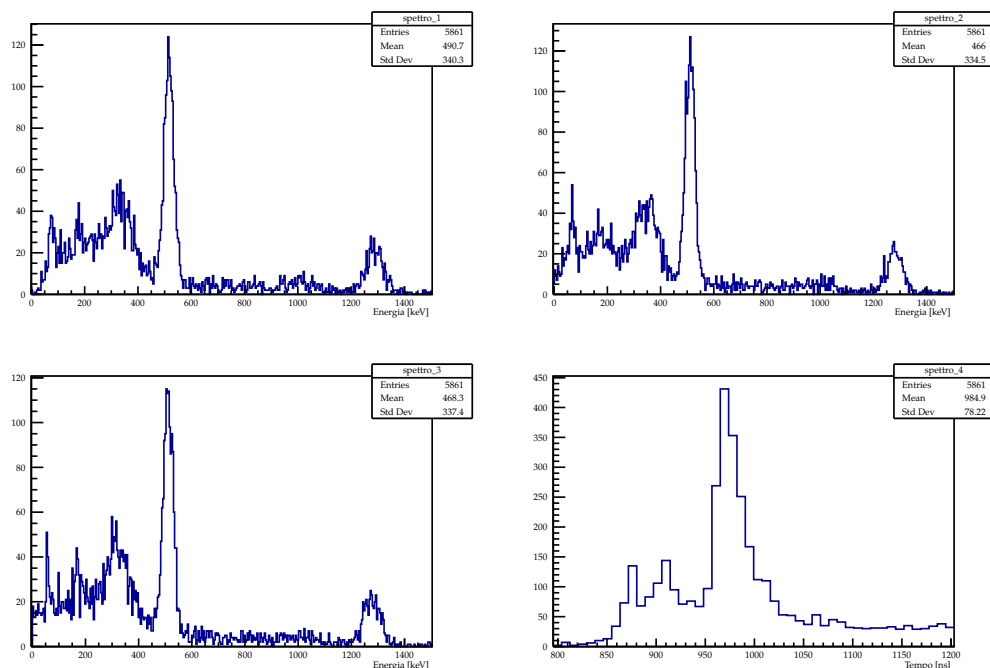


Figura 7: Gli spettri una volta imposto che il TAC rivelasse un segnale valido.

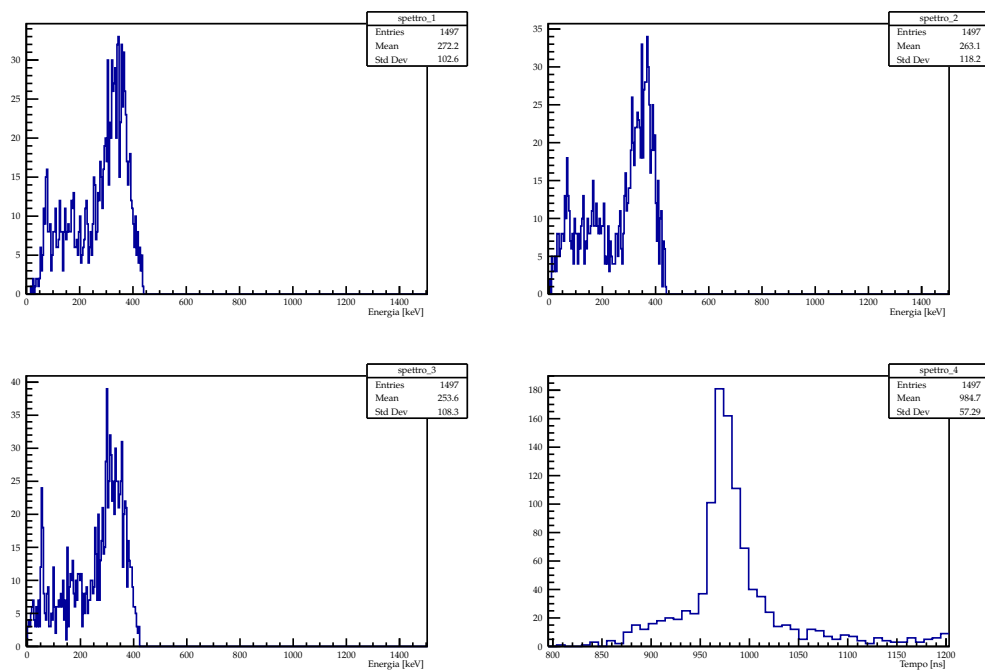


Figura 8: Spettri con il vincolo sul TAC maggiore di zero e sull'energia dei singoli spettri.

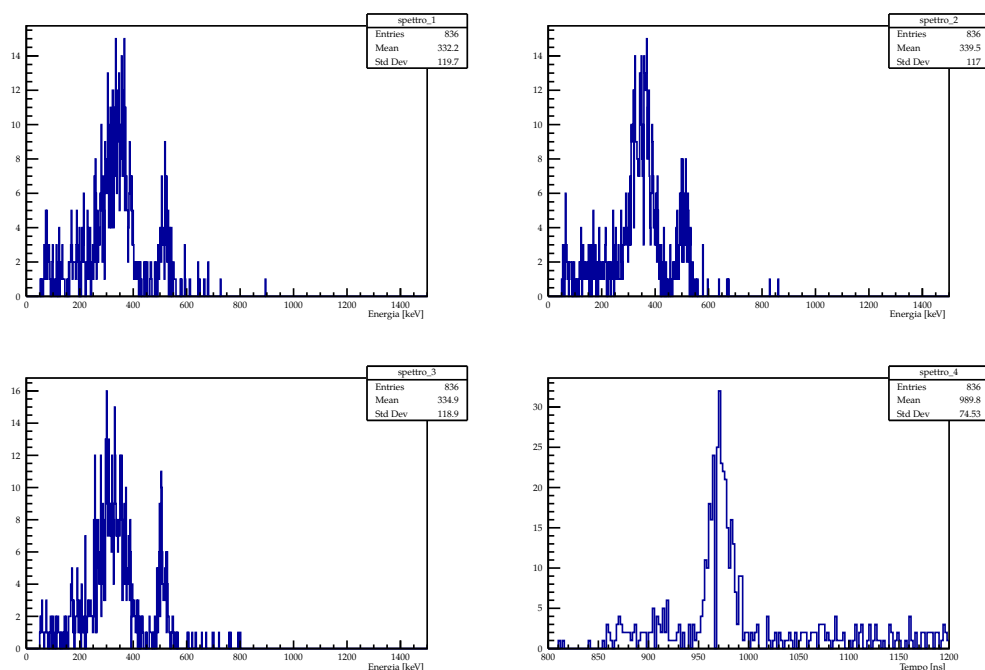


Figura 9: Spettri con la richiesta che la somma delle energie fosse nella zona che ci si aspetta.

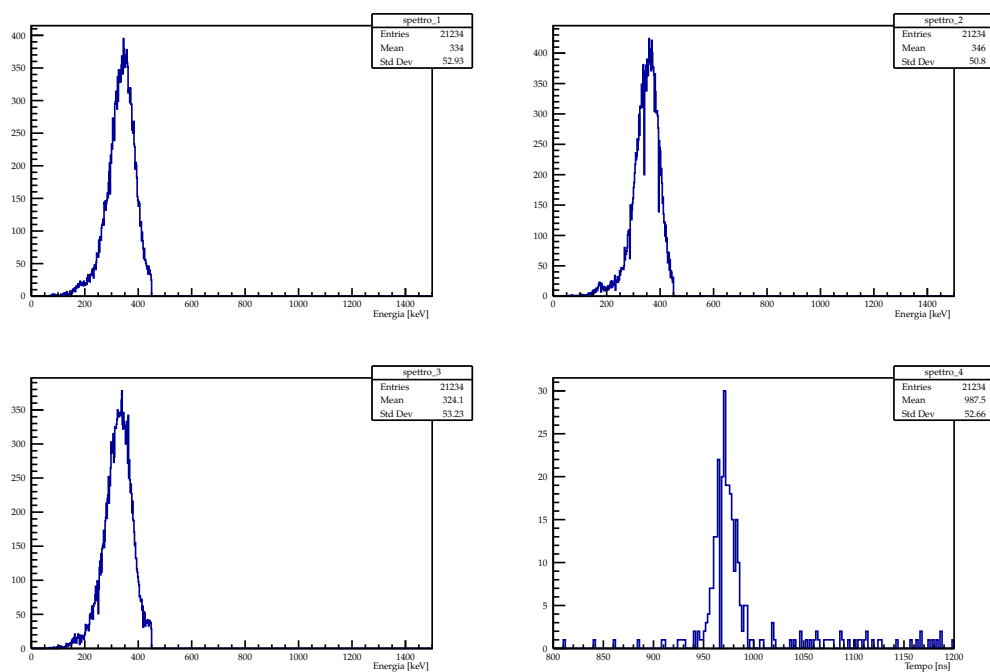


Figura 10: Gli spettri "puliti" senza richiedere il segnale sul rivelatore 4.

3. Simulazioni del decadimento

3.3.1 Stima teorica dell'accettanza del rivelatore

In questa sezione, come suggerito dal titolo, si procederà con il calcolo della stima teorica dell'accettanza del sistema di acquisizione nelle due configurazioni usate nell'esperienza. Tali stime verranno effettuate usando fondamentalmente 2 ipotesi, più una aggiuntiva per il caso del decadimento a 3 fotoni. Le 2 ipotesi comuni consistono nell'assumere che il decadimento avvenga al centro di una sfera di raggio R sulla cui superficie sono situati i rivelatori di raggio r e nel considerare il rapporto $\frac{r}{R} \ll 1$ in maniera tale che $\arctan\left(\frac{r}{R}\right) \approx \frac{r}{R}$. Quest'ultima ipotesi implica che i rivelatori, che verranno rappresentati come circonferenze, sono equivalentemente rappresentati da cerchi sulla superficie sferica e viceversa. Partiamo quindi dal caso più semplice. La stima fatta vuole discutere l'angolo solido in senso lato coperto dai rivelatori rispetto all'evento analizzato, e non si prefigge di studiare la possibilità che il fotone non interagisca con il rivelatore.

Decadimento a due corpi, rivelatori a 180°

Avendo a che fare con un decadimento a due corpi con momento iniziale nullo i due fotoni emessi avranno momento uguale ed opposto e di conseguenza, posizionando due rivelatori a 180° , se un fotone colpisce un rivelatore automaticamente l'altro interagirà con il secondo rivelatore facendo sì che l'evento venga effettivamente rivelato. La probabilità che un generico decadimento a 2 fotoni venga rivelato corrisponde alla probabilità che un fotone interagisca con uno dei due rivelatori, pari al rapporto tra la somma tra le aree dei due rivelatori e la superficie della sfera di raggio R , essendo per isotropia la probabilità di emissione uguale per tutte le direzioni. Quindi $P(2\gamma) = \frac{r^2}{2R^2}$.

Decadimento a tre corpi, rivelatori a 120°

Il caso del decadimento a tre fotoni è molto più delicato, essendo un decadimento a tre corpi lo spettro dell'energia è continuo e dipende dall'angolo di emissione. Ciò che però si può dire è che i tre fotoni vengono emessi complanari, per effetto sempre della conservazione del momento lineare. In questo caso i tre scintillatori vengono posti a 120° l'uno dall'altro sullo stesso piano. Introduciamo a questo punto una nuova ipotesi al fine di semplificare il calcolo, ovvero che anche i tre fotoni vengano emessi ad un angolo di 120° l'uno dall'altro, cosicché se due fotoni interagiscono con due rivelatori anche il terzo interagirà con l'ultimo rivelatore.

Al fine di calcolare la probabilità che un evento venga rivelato conviene fissare un sistema di riferimento con origine nel centro della sfera di raggio R e con asse z che passa per il centro del rivelatore interagente con il primo fotone. Gli altri due assi si scelgono in maniera tale che i centri degli altri due rivelatori giacciono sul piano xz . [mettere immagine]

Il passo successivo consiste nel parametrizzare le traiettorie dei singoli fotoni. È necessario parametrizzarne soltanto due, poichè il terzo interagisce automaticamente con il sistema di acquisizione una volta che i primi due lo hanno fatto. È molto comodo utilizzare le coordinate sferiche polari, in maniera tale che la traiettoria del primo fotone sia nella direzione del versore $n_1 = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$ con θ angolo azimutale, e similmente per il secondo fotone $n_2 = (\cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \beta)$ con questa volta β come angolo azimutale. Poichè per ipotesi il primo fotone interagisce con il rivelatore posto al polo $(0, 0, R)$, l'angolo θ è vincolato ad essere minore a

$\arctan\left(\frac{r}{R}\right) \approx \frac{r}{R} \ll 1$ e di conseguenza
 $\sin \theta \approx \theta$ e

$\cos\theta \approx 1$. Si userà questo risultato a breve. A questo punto bisogna imporre che l'angolo tra i due versori sopra definiti sia di 120° , ovvero $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$. Questa condizione si traduce nell'espressione

$$\sin\theta \sin\beta (\cos\phi \cos\alpha + \sin\phi \sin\alpha) + \cos\theta \cos\beta = \mu \sin\theta \sin\beta + \cos\theta \cos\beta = -\frac{1}{2}$$

con $\mu := (\cos\phi \cos\alpha + \sin\phi \sin\alpha) = \cos(\alpha - \phi)$. Al fine di risolvere tale equazione si ricorre alla sopracitata approssimazione, ottenendo quindi $\mu\theta \sin\beta + \cos\beta = -\frac{1}{2}$, risolvibile utilizzando l'identità fondamentale della trigonometria $\sin\beta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\beta}$, per cui $\mu^2\theta^2 (\sqrt{1 - \cos^2\beta})^2 = (-\frac{1}{2} - \cos\beta)^2$ ed usando la variabile ausiliaria $t = \cos\beta$ ci si riconduce a risolvere l'equazione $t^2(1 + \mu^2\theta^2) + t + \frac{1}{4} - \mu^2\theta^2 = 0$ che ha come soluzioni:

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \mu\theta\sqrt{3}\sqrt{1 + \frac{4}{3}\mu^2\theta^2}}{2(1 + \mu^2\theta^2)} \approx$$

$$\frac{1}{2} \left(-1 \pm \mu\theta\sqrt{3} \left(1 + \frac{2}{3}\mu^2\theta^2 \right) \right) (1 - \mu^2\theta^2) \approx \frac{1}{2} (-1 \pm \mu\theta\sqrt{3})$$

dove si sono trascurati gli ordini superiori al primo in θ poichè quest'ultimo è piccolo per ipotesi. Per decidere quale tra i due segni prendere si pensi di porsi a $\phi = \alpha$ per cui $\cos(\phi - \alpha) = 1$, ad un aumento di θ deve corrispondere un aumento di β , ovvero una diminuzione del $\cos\beta$, quindi in definitiva: $t = \cos\beta \approx -\frac{1}{2} (1 + \mu\theta\sqrt{3})$. A questo punto si cerchi la condizione per cui il secondo fotone interagisca con uno dei due rivelatori rimanenti, supponiamo questo sia quello con centro nel terzo quadrante del piano xz . La proiezione di quest'ultimo sul piano yz è un'ellisse di centro $(0, 0, -R \sin 30^\circ)$, asse maggiore parallelo all'asse y di lunghezza r e asse minore invece parallelo all'asse z di lunghezza $r \cos 30^\circ$. L'equazione di questa ellisse è sul piano yz :

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{(z + R \sin 30^\circ)^2}{(r \cos 30^\circ)^2} = 1 = \frac{1}{r^2} \left(y^2 + \frac{4}{3} \left(z + \frac{R}{2} \right)^2 \right)$$

Si noti che se le coordinate x e y appartenenti al vettore $R\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$ che parametrizza l'intersezione tra la traiettoria del secondo fotone e la superficie sferica di raggio R sono interne all'ellisse, allora il fotone ha interagito con il rivelatore. Prima di procedere calcoliamo il $\sin\beta$ in funzione di θ in base a ciò che sappiamo di $\cos\beta$. Infatti:

$$\sin\beta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\beta} \approx \pm\sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(1 + \mu\theta\sqrt{3} \right)^2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu\theta - \frac{3}{4}\mu^2\theta^2}$$

Poichè $0 \leq \beta \leq \pi$, allora $\sin\beta \geq 0$, si prenderà il segno $+$ nell'equazione sopra. Inoltre si trascurano nuovamente i termini del secondo ordine in θ . Quindi:

$$\sin\beta \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\mu\theta} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\mu\theta \right)$$

di nuovo nell'ultimo passaggio si è usata l'ipotesi di θ piccolo, condizione che impedisce al radicando della espressione sopra di diventare negativo. Con questo risultato si può efficacemente parametrizzare $R\mathbf{n}_2 = R(\cos\alpha \sin\beta, \sin\alpha \sin\beta, \cos\beta) = R\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\mu\theta \right) \cos\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\mu\theta \right) \sin\alpha, -\frac{1}{2} (1 + \mu\theta\sqrt{3})\right)$, ed imponendo che $y^2 + \frac{4}{3} \left(z + \frac{R}{2} \right)^2 \leq r^2$ si ottiene:

$$\frac{r^2}{R^2} \geq \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\mu\theta \right)^2 \sin^2\alpha + \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2} (1 + \mu\theta\sqrt{3}) + \frac{1}{2} \right)^2 \approx$$

$$\frac{3}{4} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \mu \theta + \frac{1}{3} \mu^2 \theta^2 \right) \sin^2 \alpha + \mu^2 \theta^2$$

trascurando nuovamente i termini del secondo ordine si giunge alla seguente:

$$\frac{3}{4} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \mu \theta \right) \sin^2 \alpha \leq \frac{r^2}{R^2}$$

ovvero

$$\sin^2 \alpha \leq \frac{4r^2}{3R^2} \frac{1}{1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \mu \theta} \approx \frac{4r^2}{3R^2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \mu \theta \right)$$

Si noti che l'espressione $1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \mu \theta \geq 0$ per le ipotesi fatte su θ .

Per ricavare una condizione su α bisogna ora fare un'ulteriore osservazione. Da considerazioni legate alla geometria del problema, si nota che l'angolo α è anch'esso minore in modulo di $\arctan \left(\frac{r}{R} \right)$ e può essere quindi considerato piccolo. Di conseguenza $\mu = \cos \phi \cos \alpha + \sin \phi \sin \alpha = \cos \phi + \alpha \sin \phi$ e $\sin^2 \alpha \approx \alpha^2$. La condizione qui sopra può quindi essere riscritta:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &\leq \frac{4r^2}{3R^2} \left(1 + \frac{2\theta}{\sqrt{3}} (\cos \phi + \alpha \sin \phi) \right) \rightarrow \\ \alpha^2 - \frac{8r^2\theta}{3\sqrt{3}R^2} \sin \phi \alpha - \frac{4r^2}{3R^2} \left(1 + \frac{2\theta}{\sqrt{3}} \cos \phi \right) &\leq 0 \end{aligned}$$

risolviamo l'equazione di secondo grado associata alla disequazione appena ricavata.

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \frac{8r^2\theta}{3\sqrt{3}R^2} \sin \phi \pm \sqrt{\left(\frac{8r^2\theta}{3\sqrt{3}R^2} \sin \phi \right)^2 + \frac{16r^2}{3R^2} \left(1 + \frac{2\theta}{\sqrt{3}} \cos \phi \right)} \approx \\ \frac{8r^2\theta}{3\sqrt{3}R^2} \sin \phi \pm \frac{4r}{\sqrt{3}R} \sqrt{1 + \frac{2\theta}{\sqrt{3}} \cos \phi} &\approx \frac{8r^2\theta}{3\sqrt{3}R^2} \sin \phi \pm \frac{4r}{\sqrt{3}R} \left(1 + \frac{\theta}{\sqrt{3}} \cos \phi \right) =: A \pm B \end{aligned}$$

Di conseguenza la precedente disequazione è soddisfatta per $A - B \leq \alpha \leq A + B$.

L'ultimo passo per determinare la probabilità che il secondo fotone interagisca con uno dei due rivelatori consiste nel notare che tale probabilità è equivalente a quella che lo stesso fotone interagisca con un solo rivelatore ed imponendo $0 \leq \alpha \leq \pi$, ovvero che interagisca con il rivelatore per cui abbiamo fatto tutti i precedenti ragionamenti. Tale probabilità si può esprimere nella seguente maniera, integrando sull'angolo solido definito da θ e ϕ e sull'angolo definito da α (la varietà delle configurazioni è infatti data da $S^2 \times S^1$, da cui la misura su questa varietà è data da $\sin \theta \, d\phi \, d\theta \, d\alpha$) e normalizzando il tutto tramite i fattori 4π e π :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\arctan(\frac{r}{R}) \approx \frac{r}{R}} d\theta \sin \theta \int_{A-B}^{A+B} d\alpha = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{r}{R}} d\theta \sin \theta 2B = \\ \frac{2r}{\sqrt{3}R\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{r}{R}} d\theta \sin \theta \left(1 + \frac{\theta}{\sqrt{3}} \cos \phi \right) &= \frac{2r}{\sqrt{3}R\pi^3} \int_0^{2\pi} d\phi [-\cos \theta]_0^{\frac{r}{R}} = \\ -\frac{2r}{\sqrt{3}R\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \left(\cos \left(\frac{r}{R} \right) - 1 \right) &\approx \frac{2r}{\sqrt{3}R\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{r^2}{2R^2} \right) = \frac{2r^3}{\sqrt{3}\pi R^3} \end{aligned}$$

A questo punto la probabilità che un generico evento venga rivelato è dato dal prodotto della probabilità appena ricavata moltiplicata per 3, poichè il primo fotone può interagire con uno qualunque dei tre rivelatori e nel calcolo è stato supposto che ne venisse colpito uno in particolare, ovvero:

$$P(3\gamma) = \frac{2\sqrt{3}r^3}{\pi R^3}$$