Marek Małek, Marcin Serafin 14.03.2024

Laboratorium 04

Efekt Rungego

1 Treść zadania

Celem zadania było wyznaczenie wielomianów interpolujących funkcje

$$f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2} \text{ na przedziale}[-1,1],$$

$$f_2(x) = \exp(\cos(x)) \text{ na przedziale}[0,2\pi],$$

używając:

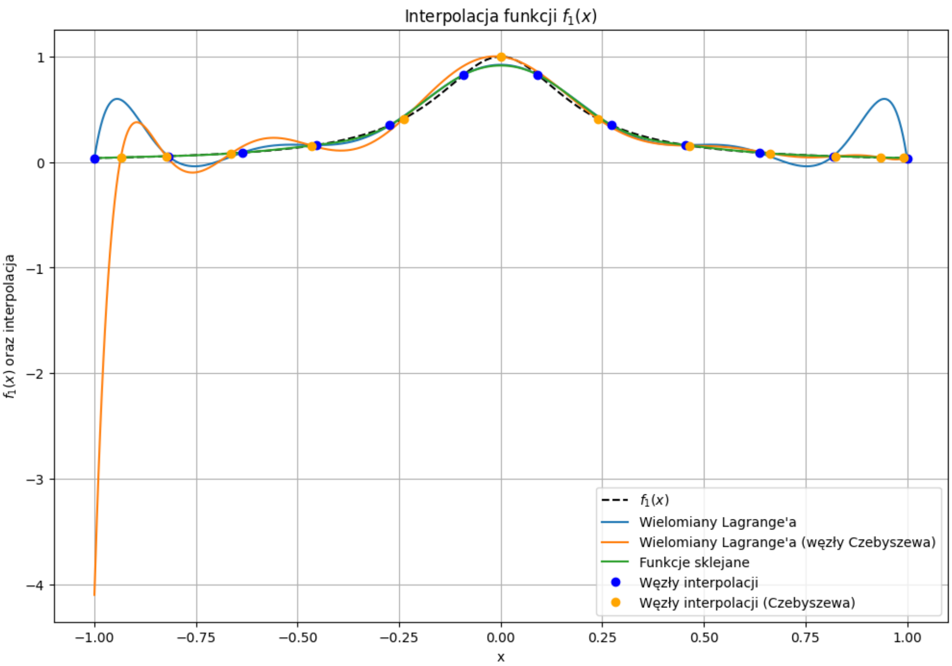
- wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami $x_j = x_o + jh, j = 0, 1, ..., n$, gdzie $h = (x_n - x_0)/n$
- kubicznych funkcji sklejanych z równoodległymi węzłami $x_j = x_o + jh, j = 0, 1, ..., n$, gdzie $h = (x_n - x_0)/n$
- wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

$$x_j = cos(\theta_j)\ \theta_j = \frac{2j+1}{2(n+1)}\pi, 0 \le j \le n.$$

2 Wykonanie zadania

2.1 Interpolacja funkcji Rungego

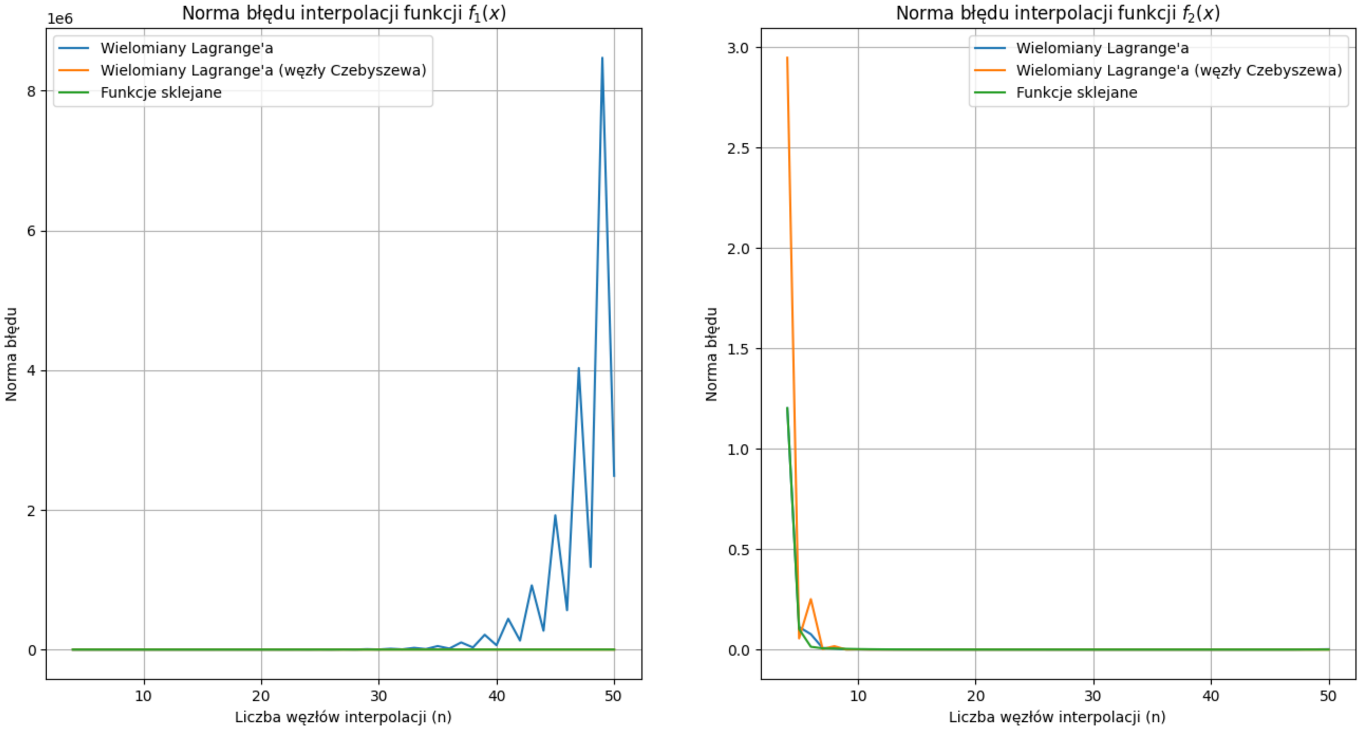
Dla funkcji Rungego (f_1) wyznaczono wielomiany interpolacji oraz funkcję sklejaną, z $n = 12$ węzłami interpolacji. Na potrzeby wykresu wykonano próbkowanie funkcji f_1 na 10 razy gęstszym zbiorze (próbkowanie jednostajne w x dla węzłów równoodległych oraz jednostajne w θ dla węzłów Czebyszewa).



Wizualizacja 1: Wykres funkcji f_1 wraz z wielomianami interpolacyjnymi

2.2 Normy wektora błędów

Dla obu funkcji wyznaczono interpolacje dla zmiennej liczby węzłów: $n = 4, 5, ..., 50$. Dla wielomianów interpolacyjnych oraz funkcji sklejanych przeprowadzono ewaluację funkcji na zbiorze 500 losowo wybranych punktów z dziedziny funkcji. Wyliczono normę wektora błędu dla obu funkcji w zależności do n. Wyniki przedstawiono na wykresie:



Wizualizacja 2: Wykres normy błędy f_1 oraz f_2 w zależności od n - liczby węzłów interpolacji

3 Wnioski

W przypadku f_1, funkcji Rungego, na krańcach przedziału interpolacja była o wiele mniej dokładna niż w środku przedziału. Użycie węzłów czebyszewa zredukowało problem niedokładności intepolacji ale było niestabilne na brzegu. Najlepsze dopasowanie dała metoda funkcji sklejanych (Cubic Splines), która okazała się najbardziej stabilna zarówno na krańcach jak i w środku przedziału. Porównując z funkcją f_2, na podstawie **Wizualizacji 2** z punktu **2.2**, normy błędów dla różnych metod znacznie się różnią. Tak jak się spodziewano, norma błędu funkcji f_2 przy wyższej liczbie węzłów zbiegała do 0, więc liczba węzłów pozytywnie wpływała na dokładność interpolacji. W przypadku funkcji f_1, na podstawie obu wizualizacji widać, że zwiększenie liczby węzłów nie zawsze jest opłacalne, ale można normę błędu zredukować poprzez zastosowanie innej metody.

4 Bibliografia

1. http://heath.cs.illinois.edu/scicomp/notes/cs450_chapt07.pdf
2. https://pythonnumericalmethods.berkeley.edu/notebooks/chapter17.00-Interpolation.html
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_phenomenon