

Marek Małek, Marcin Serafin 04.04.2024  
Laboratorium 04  
Efekt Rungego

## 1 Treść zadania

Celem zadania było wyznaczenie wielomianów interpolujących funkcje

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \text{ na przedziale } [-1, 1],$$

$$f_2(x) = \exp(\cos(x)) \text{ na przedziale } [0, 2\pi],$$

używając:

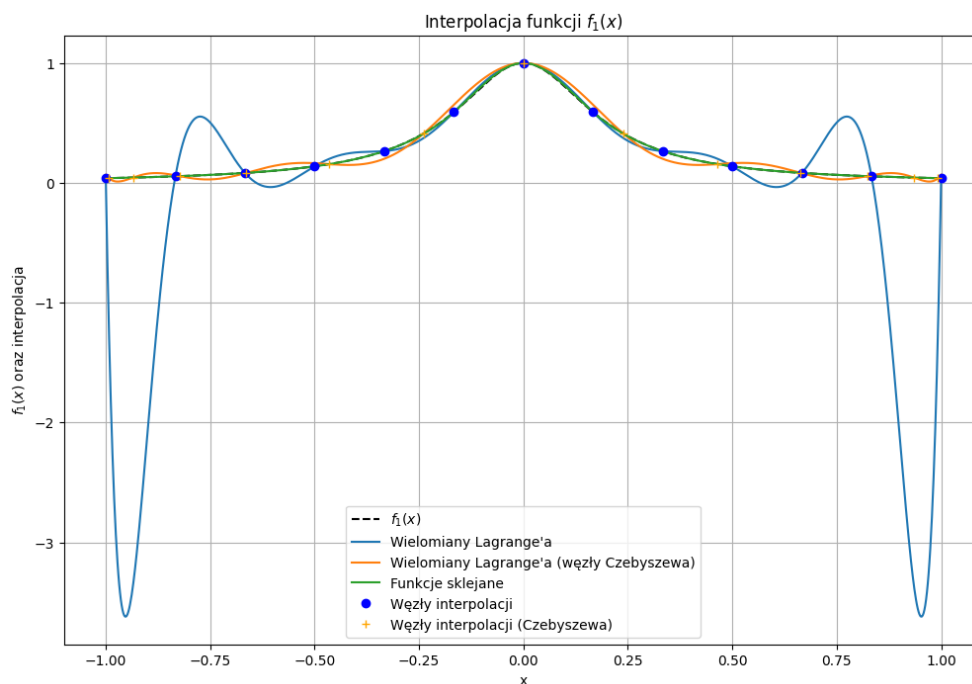
- wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami  $x_j = x_0 + jh, j = 0, 1, \dots, n$ , gdzie  $h = (x_n - x_0)/n$
- kubicznych funkcji sklejanych z równoodległymi węzłami  $x_j = x_0 + jh, j = 0, 1, \dots, n$ , gdzie  $h = (x_n - x_0)/n$
- wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

$$x_j = \cos(\theta_j) \quad \theta_j = \frac{2j+1}{2(n+1)}\pi, 0 \leq j \leq n.$$

## 2 Wykonanie zadania

### 2.1 Interpolacja funkcji Rungego

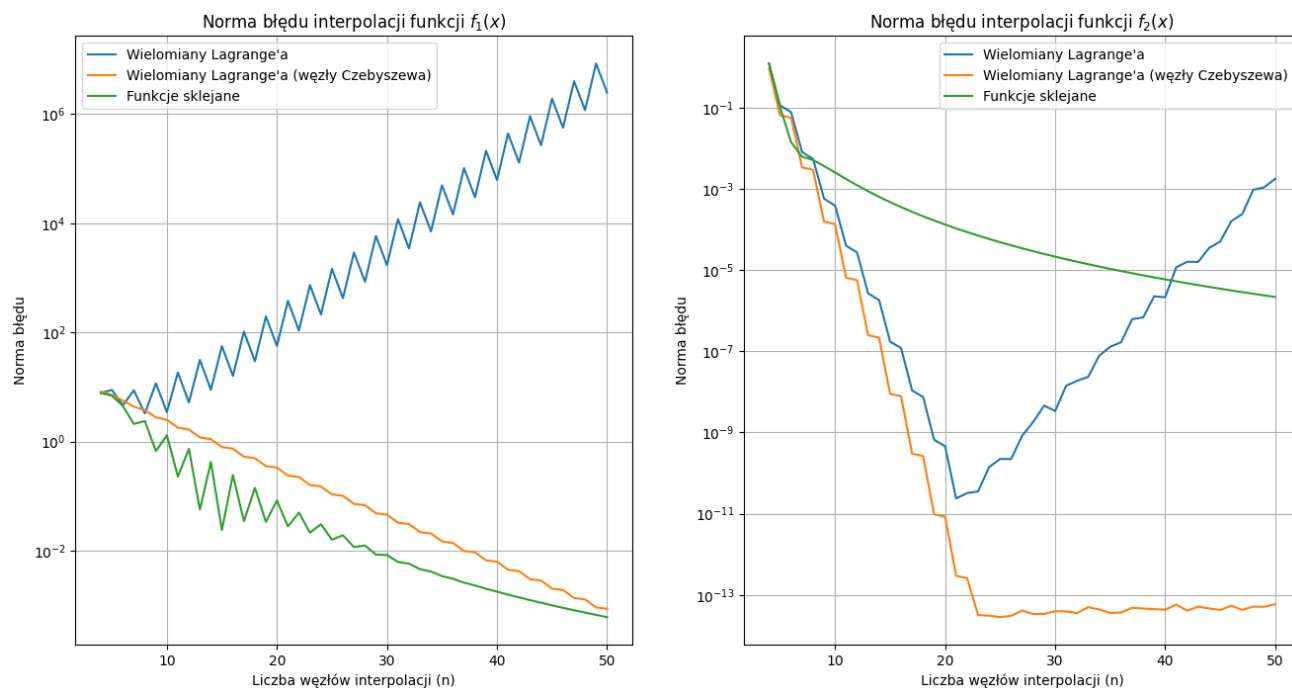
Dla funkcji Rungego ( $f_1$ ) wyznaczono wielomiany interpolacji oraz funkcję sklejaną, z  $n = 12$  węzłami interpolacji. Na potrzeby wykresu wykonano próbkowanie funkcji  $f_1$  na 10 razy gęstszym zbiorze (próbkowanie jednostajne w  $x$  dla węzłów równoodległych oraz jednostajne w  $\theta$  dla węzłów Czebyszewa).



Wizualizacja 1: Wykres funkcji  $f_1$  wraz z wielomianami interpolacyjnymi

## 2.2 Normy wektora błędów

Dla obu funkcji wyznaczono interpolacje dla zmiennej liczby węzłów:  $n = 4, 5, \dots, 50$ . Dla wielomianów interpolacyjnych oraz funkcji sklejanych przeprowadzono ewaluację funkcji na zbiorze 500 losowo wybranych punktów z dziedziny funkcji. Wyliczono normę wektora błędu dla obu funkcji w zależności do  $n$ . Wyniki przedstawiono na wykresie:



Wizualizacja 2: Wykres normy błędów  $f_1$  oraz  $f_2$  w zależności od  $n$  - liczby węzłów interpolacji

## 3 Wnioski

W przypadku  $f_1$ , funkcji Rungego, na krańcach przedziału interpolacja była o wiele mniej dokładna niż w środku przedziału. Użycie węzłów Czebyszewa zredukowało problem niedokładności interpolacji ale było niedokładne na brzegu. Najlepsze dopasowanie dała metoda funkcji sklejanych (Cubic Splines), która okazała się najbardziej stabilna zarówno na krańcach jak i w środku przedziału. Porównując z funkcją  $f_2$ , na podstawie **Wizualizacji 2** z punktu 2.2, normy błędów dla różnych metod znacznie się różnią. Dla wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami, norma błędów funkcji  $f_2$  przy wyższej liczbie węzłów początkowo zbiegała do 0, ale po 20 węzłach zaczęła istotnie rosnąć. W przypadku tej funkcji najlepsze wyniki dały węzły Czebyszewa, a metoda funkcji sklejanych, której błąd był ściśle malejący, początkowo miała największy błąd, ale gdy metoda równoodległych węzłów zaczęła być coraz gorsza, to okazała się drugą najlepszą. W przypadku obu funkcji, na podstawie obu wizualizacji widać, że zwiększenie liczby węzłów nie zawsze jest opłacalne, ale można normę błędów zredukować poprzez zastosowanie innej metody.

## 4 Bibliografia

1. [http://heath.cs.illinois.edu/scicomp/notes/cs450\\_chapt07.pdf](http://heath.cs.illinois.edu/scicomp/notes/cs450_chapt07.pdf)
2. <https://pythonnumericalmethods.berkeley.edu/notebooks/chapter17.00-Interpolation.html>
3. [https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s\\_phenomenon](https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_phenomenon)