Marek Małek, Marcin Serafin 13.06.2024

Laboratorium 11
Optymalizacja

1 Zadanie 1

1.1 $f_1(x,y) = x^2 - 4xy + y^2$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x - 4y = 0 \Rightarrow x = 2y \tag{1}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -4x + 2y = 0 \Rightarrow y = 2x \tag{2}$$

$$\Rightarrow x = y = 0 \tag{3}$$

Punkt Krytyczny: (0,0)

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 2 \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 2 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial xy} = -4 \tag{6}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$det(H) = 4 - 16 = -12 < 0 \Rightarrow \text{Brak ekstremum lokalnego} \Rightarrow \text{Punkt siodłowy} \tag{8}$$

Brak ekstremum globalnego

1.2 $f_2(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \tag{9}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -4x + 4y^3 = 0 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x} \tag{10}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{x^3} \Rightarrow x^3 = x \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \tag{11}$$

$$x = 0 y = 0 \ \vee \ x = \pm 1 y = \pm 1 \tag{12}$$

Punkty Krytyczne: (0,0), (1,1), (-1,-1)

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 12x^2 \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = 12y^2 \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial xy} = -4 \tag{15}$$

$$H = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Dla (0,0)

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$det(H) = -16 < 0 \Rightarrow \text{Brak ekstremum lokalnego} \Rightarrow \text{Punkt siodłowy} \tag{18}$$

Dla (1,1) i (-1,1)

$$H = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$det(H) = 144 - 16 = 128 > 0 \ \wedge \ f_{xx} > 0 \Rightarrow \text{minima lokalne i globalne} \tag{20}$$

1.3 $f_3(x, y) = 2x^3 - 3x^2 - 6xy(x - y - 1)$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = 6x^2 - 6x - 12xy + 6y^2 + 6y = 0 \Rightarrow x = 0 \ \vee \ x = 1 \tag{21}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = -6x^2 + 12xy + 6x = 0 \Rightarrow y = 0 \ \vee y = -1 \tag{22}$$

$x = 0y = 0 \vee \ x = 0y = -1$ Punkty Krytyczne: (0,0), (0,-1) (1,0) (-1,-1)

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} = 12x - 6 - 12y \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} = 12x \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial xy} = -12x + 12y + 6 \tag{25}$$

$$H = \begin{bmatrix} 12x - 6 - 12y & -12x + 12y + 6 \\ -12x + 12y + 6 & 12x \end{bmatrix} \tag{26}$$

Dla (0,0)

$$H = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$det(H) = 0 - 36 = -36 < 0 \Rightarrow \text{Brak ekstremum lokalnego} \Rightarrow \text{Punkt siodłowy} \tag{28}$$

Dla (0,-1)

$$H = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$det(H) = 0 - 36 = -36 < 0 \ \Rightarrow \text{Brak ekstremum lokalnego} \Rightarrow \text{Punkt siodłowy} \tag{30}$$

Dla (1,0)

$$H = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$det(H) = 72 - 36 = 36 > 0 \ \wedge \ f_{xx} > 0 \ \Rightarrow (1, 0) \text{ jest minimum lokalnym} \tag{32}$$

Dla (-1,-1)

$$H = k \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -12 \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$det(H) = 72 - 36 = 36 > 0 \ \wedge \ f_{xx} < 0 \ \Rightarrow (-1, 1) \text{ jest maksiumum lokalnym} \tag{34}$$

1.4 $f_4(x, y) = (x - y)^4 + x^2 - y^2 - 2x + 2y + 1$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = 4(x - y)^3 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow \tag{35}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = -4(x - y)^3 - 2y + 2 \Rightarrow \tag{36}$$

$$x = 0y = 0 \tag{37}$$

Punkty Krytyczne:

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2} = 12(x - y)^2 + 2 \tag{38}$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2} = 12(x - y)^2 - 2 \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial xy} = -12(x - y)^2 \tag{40}$$

$$H = \begin{bmatrix} 12(x - y)^2 + 2 & -12(x - y)^2 \\ -12(x - y)^2 & 12(x - y)^2 - 2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Dla (0,0)

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{42}$$

$$det(H) = -4 - 0 = -4 < 0 \Rightarrow \text{Brak ekstremum lokalnego} \tag{43}$$

2 Zadanie 2

2.1 Wyprowadzenie wyrażenia na gradient funkcji celu F

Funkcja Celu :

$$F(x(0), x(1), \ldots, x(n)) = \lambda_1 \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\epsilon + \|x(i) - r(j)\|_2^2} + \lambda_2 \sum_{i=0}^{n-1} \|x(i+1) - x(i)\|_2^2$$

Gradient funkcji celu F

Gradient funkcji celu względem punktu $x(i)$ składa się z dwóch części:

1. **Część związana z unikaniem przeszkód**:

$$F_{\text{obs}}(x(i)) = \lambda_1 \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\epsilon + \|x(i) - r(j)\|_2^2}$$

Gradient tej części to:

$$\nabla F_{\text{obs}}(x(i)) = -2\lambda_1 \sum_{j=1}^{k} \frac{x(i) - r(j)}{(\epsilon + \|x(i) - r(j)\|_2^2)^2}$$

2. **Część związana z minimalizacją długości ścieżki**:

$$F_{\text{dist}} = \lambda_2 \sum_{i=0}^{n-1} \|x(i+1) - x(i)\|_2^2$$

Gradient tej części to:

$$\nabla F_{\text{dist}}(x(i)) = 2\lambda_2 \left((x(i) - x(i-1)) + (x(i) - x(i+1))\right)$$

Zsumowanie tych dwóch składników daje gradient całkowity:

$$\nabla F(x(i)) = -2\lambda_1 \sum_{j=1}^{k} \frac{x(i) - r(j)}{(\epsilon + \|x(i) - r(j)\|_2^2)^2} + 2\lambda_2 \left((x(i) - x(i-1)) + (x(i) - x(i+1))\right)$$

dla $i = 1, \ldots, n-1$.

Dla punktów końcowych gradienty są zerowane:

$$\nabla F(x(0)) = \nabla F(x(n)) = 0$$

2.2 Algorytm największego spadku z przeszukiwaniem liniowym (metoda złotego podziału)

Algorytm największego spadku (Gradient Descent) z przeszukiwaniem liniowym krok po kroku:

1. **Inicjalizacja**: - Wybierz początkową ścieżkę $X \in R^{(n+1)\times 2}$. - Ustal punkty początkowy $x(0)$ i końcowy $x(n)$. - Wybierz parametry $\lambda_1, \lambda_2, \epsilon$.
2. **Oblicz gradient** $\nabla F(X)$.
3. **Przeszukiwanie liniowe** (metoda złotego podziału): - Znajdź optymalny krok α w kierunku przeciwległym do gradientu, który minimalizuje funkcję celu $F(X - \alpha \nabla F(X))$.
4. **Aktualizacja**: - Zaktualizuj ścieżkę: $X \leftarrow X - \alpha \nabla F(X)$.
5. **Kryterium stopu**: - Powtarzaj kroki 2-4 aż do spełnienia warunku stopu (np. liczba iteracji, zmiana wartości funkcji celu mniejsza niż zadana tolerancja).

2.3 Metoda złotego podziału

1. Ustal początkowy przedział $[a, b]$ dla α. 2. Oblicz α_1 i α_2 wewnątrz przedziału używając złotego podziału:

$$\alpha_1 = b - \frac{b-a}{\varphi}$$

$$\alpha_2 = a + \frac{b-a}{\varphi}$$

gdzie $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (złota liczba). 3. Oblicz wartości funkcji celu $F(X - \alpha_1 \nabla F(X))$ i $F(X - \alpha_2 \nabla F(X))$. 4. Zastąp $[a, b]$ nowym przedziałem w zależności od wartości funkcji celu w punktach α_1 i α_2. 5. Powtarzaj kroki 2-4 aż do osiągnięcia wymaganej dokładności α.

2.4 Znalezienie najkrótszej ścieżki robota

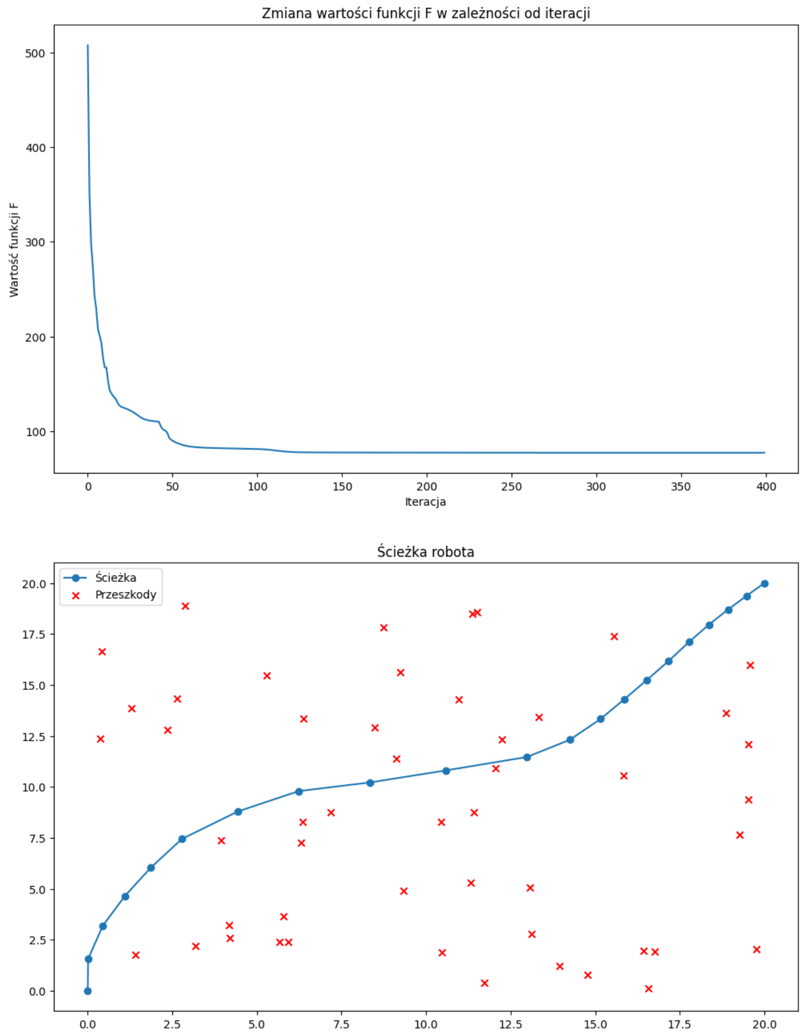
Przyjęto następujące wartości parametrów:

- $n = 20, k = 50$
- $x^{(0)} = [0, 0], x^{(n)} = [20, 20]$
- $r^{(i)} \sim \mathcal{U}(0, 20) \times \mathcal{U}(0, 20)$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
- $\epsilon = 10^{-13}$
- liczba iteracji = 400

Obliczenia przeprowadzono dla 5 różnych incjalizacji punktów wewnątrz ścieżki $x^{(0)}, ..., x^{(n-1)}$.

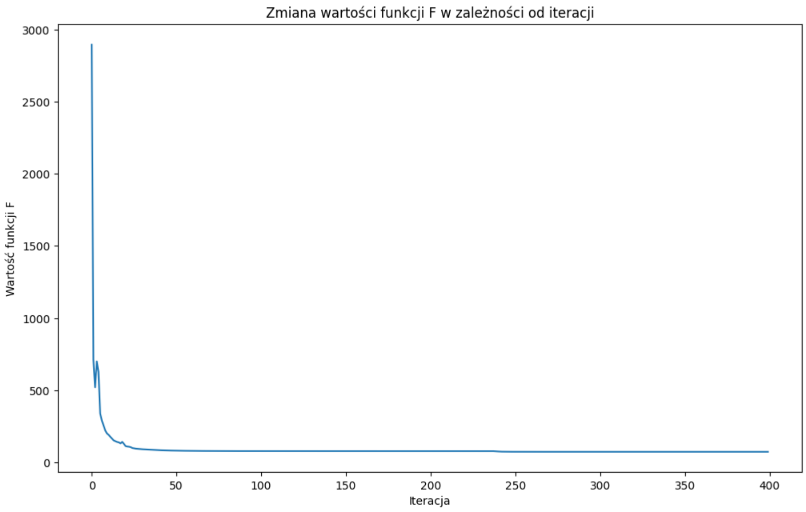
2.4.1 Wyniki w dla poszczególnych inicjalizacji

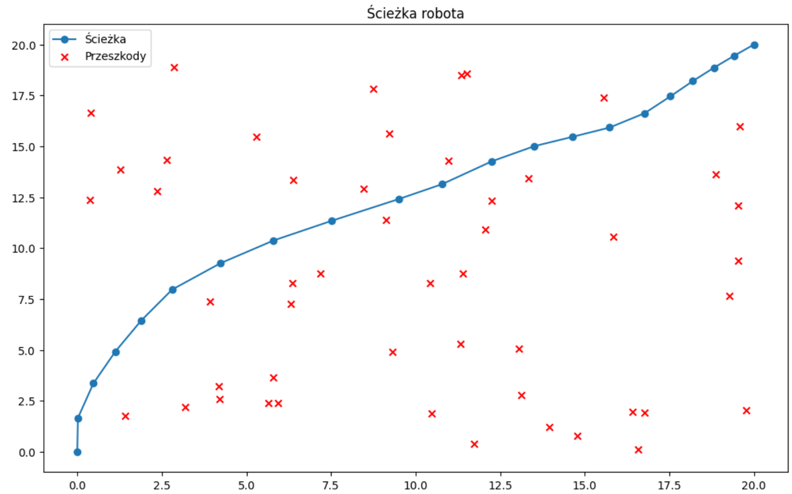
- Inicjalizacja 1.



Wizualizacja 1: Wykresy dla inicjalizacji 1

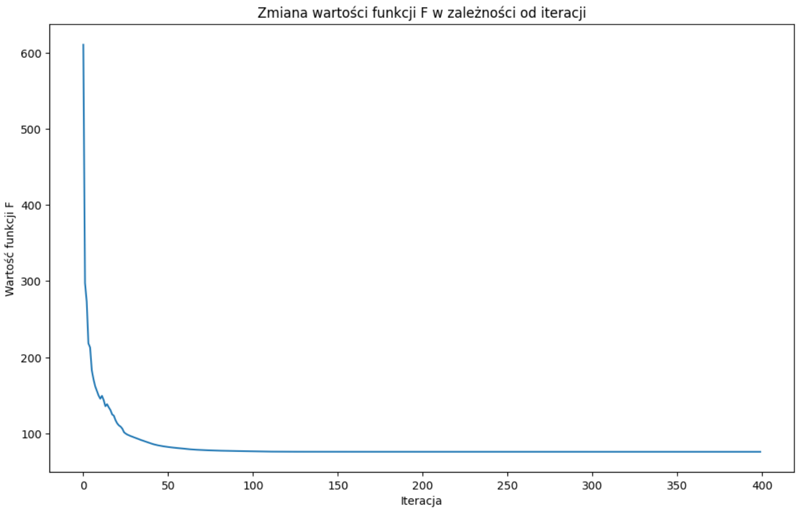
- Inicjalizacja 2.

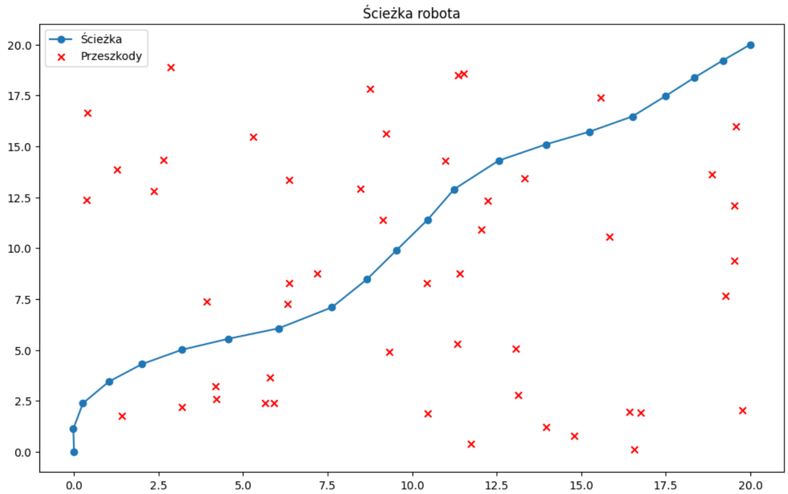




Wizualizacja 2: Wykresy dla inicjalizacji 2

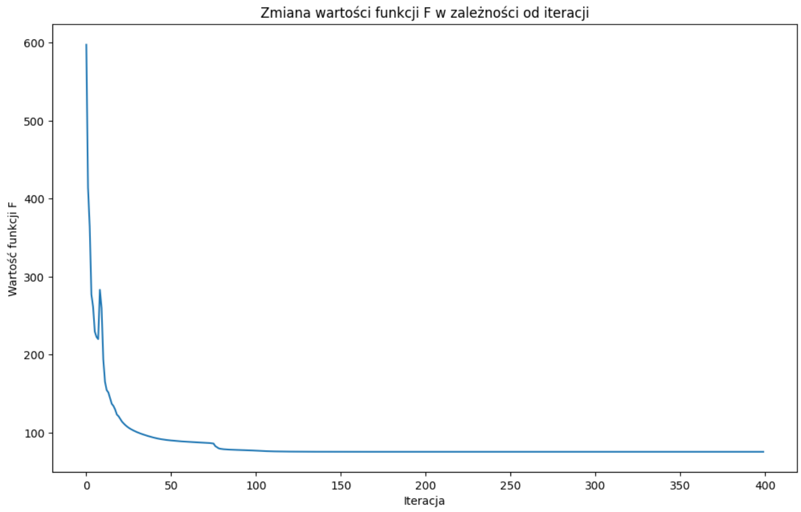
- Inicjalizacja 3.

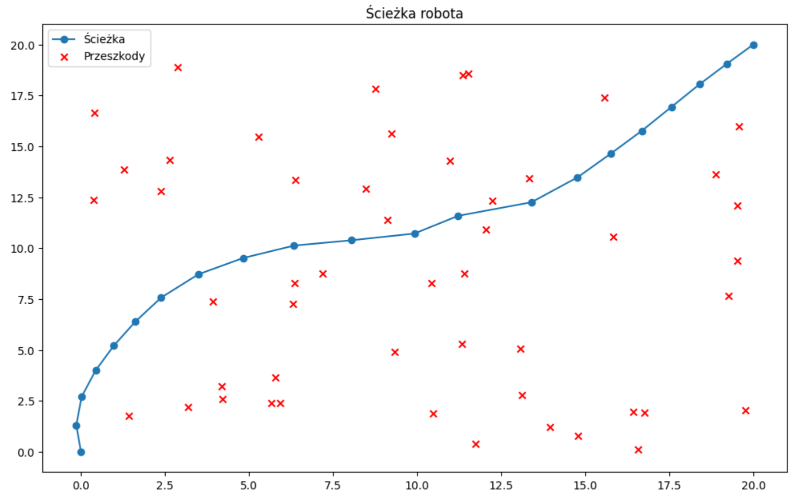




Wizualizacja 3: Wykresy dla inicjalizacji 3

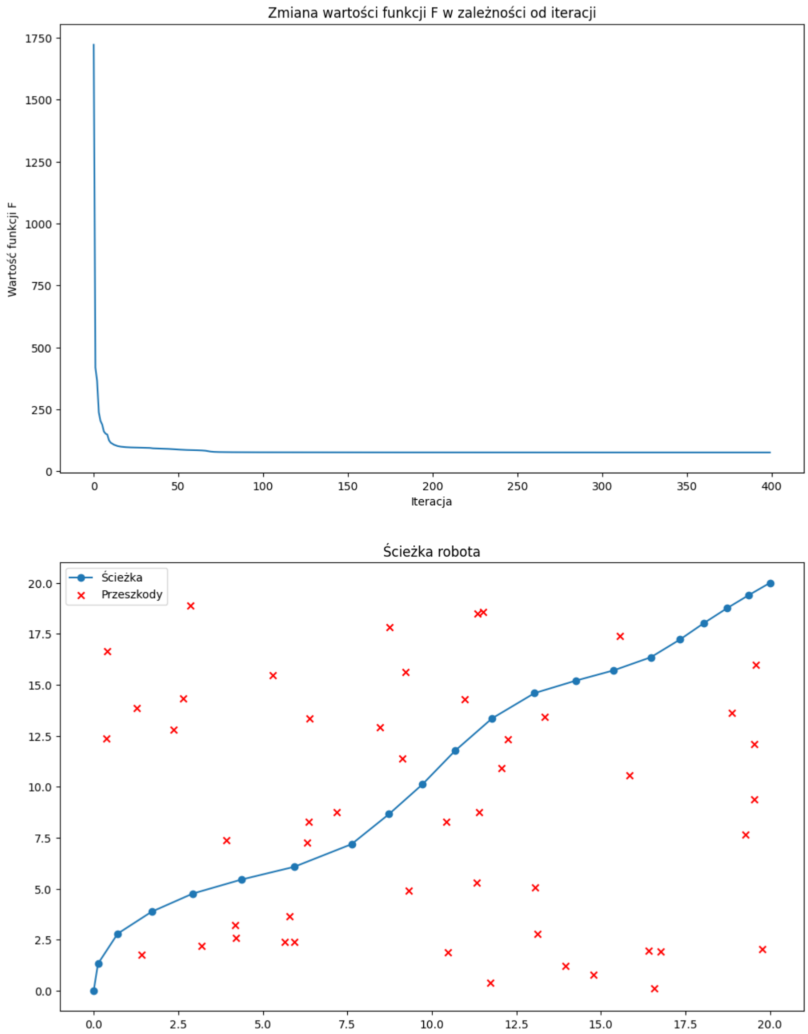
- Inicjalizacja 4.





Wizualizacja 4: Wykresy dla inicjalizacji 4

- Inicjalizacja 5.



Wizualizacja 5: Wykresy dla inicjalizacji 5

Finalne wartości funkcji zostały zestawione w tabeli poniżej:

Numer inicjacji	Finalna wartość funkcji
1	77.53
2	74.40
3	75.82
4	75.57
5	75.98

Tabela 1: Zestawienie finalnej wartości funkcji dla każdej inicjacji

3 Wnioski

- Metoda spadku gradientu pozwala w prosty sposób minimalizować funkcję
- Każde z pięciu wywołan zbiega do 0 już dla bardzo małej liczy iteracji
- W inicjalizacji 2 i 4 możemy zauważyć odbicie wartości w okolicy 20 iteracji, nie zmienia to natomiast ogólnie szybkiej zbieżności

4 Bibliografia

- Line search methods - Cornell University