Marek Małek, Marcin Serafin 11.04.2024
Laboratorium 05
Aprokysmacja

1 Zadanie 1

Celem zadania było wykonanie aproksymacji średniokwadratowej punktowej populacji Stanów Zjednoczonych w przedziale [1900,1980] wielomianami stopnia m dla $0 \leq m \leq 6$.

1.1 Wykonanie zadania

1.1.1 Ekstrapolacja wielomianu do roku 1990

Wykonano ekstrapolację wielomianu do roku 1990. Porównano otrzymaną wartość z prawdziwą wartością dla roku 1990, wynoszącą 248 709 873. Wyliczono błędy względne ekstrapolacji dla roku 1990 dla poszczególnych wartości parametru m. Najmniejszy błąd względny równy 2.25 % odnotowano dla wielomianu stopnia 4.

stopień	błąd względny
0	42.35 %
1	5.19 %
2	2.41 %
3	5.12 %
4	2.25 %
5	11.37 %
6	2.55 %

Tabela 1: Błąd względny esktrapolacji wielomianu w zależności od parametru m

1.1.2 Kryterium informacyjne Akaikego

Do optymalnego wyboru stopnia m wielomianu, o $k = m + 1$ parametrach posłużono się kryterium informacyjnym Akaikego:

$$\mathrm{AIC} = 2k + n \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} [y_i - \hat{y}(x_i)]^2}{n} \right) \tag{1}$$

gdzie y_i $(i = 1, ...n)$ oznacza prawdziwą liczbę osób w roku x_i, natomiast $\hat{y}(x_i)$ liczbę osób przewidywaną przez model, czyli wartość $\hat{y}(x)$. Im mniejsza wartość kryterium, tym lepszy model.

Z powodu niewielkiego rozmiaru próbki użyto współczynnika korygującego:

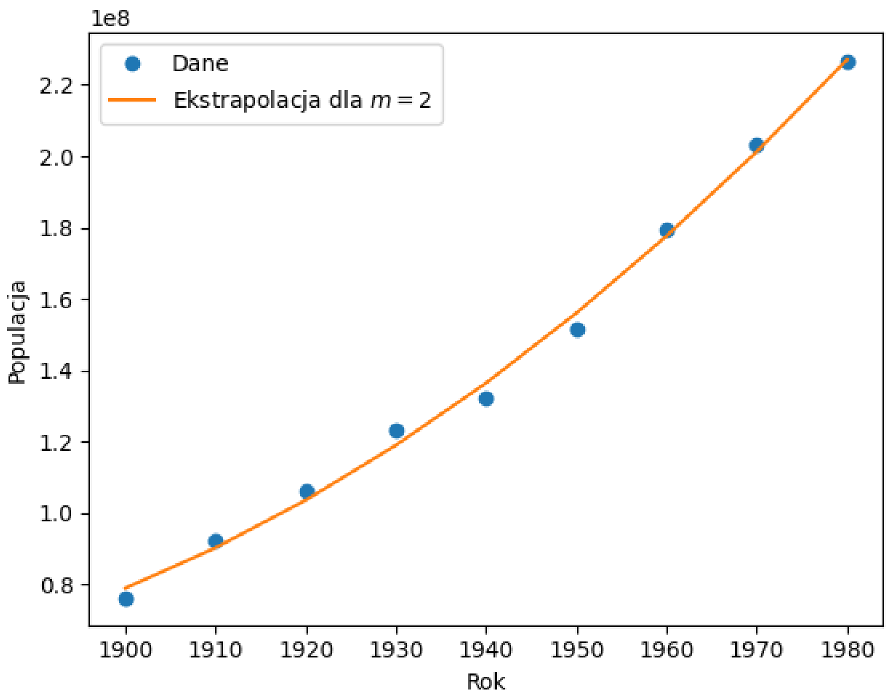
$$\mathrm{AIC}_c = \mathrm{AIC} + \frac{2k(k+1)}{n-k-1} \tag{2}$$

W ten spósób wyznaczono stopień m wielomianu. Wyniki zestawiono w tabeli. Najmniejsza wartość kryterium Akaikego wyniosła 274.65 dla stopnia 2. Zatem wynik **nie** pokrył się z wartością m wyznaczoną w poprzednim podpunkcie.

stopień	wartość kryterium informacyjnego Akaikego
0	318.44
1	285.63
2	274.65
3	277.68
4	278.92
5	287.25
6	309.26

Tabela 2: Wartość kryterium Akaikego w zależności od parametru m

Dla najlepszej wartości m wykonano wykres:

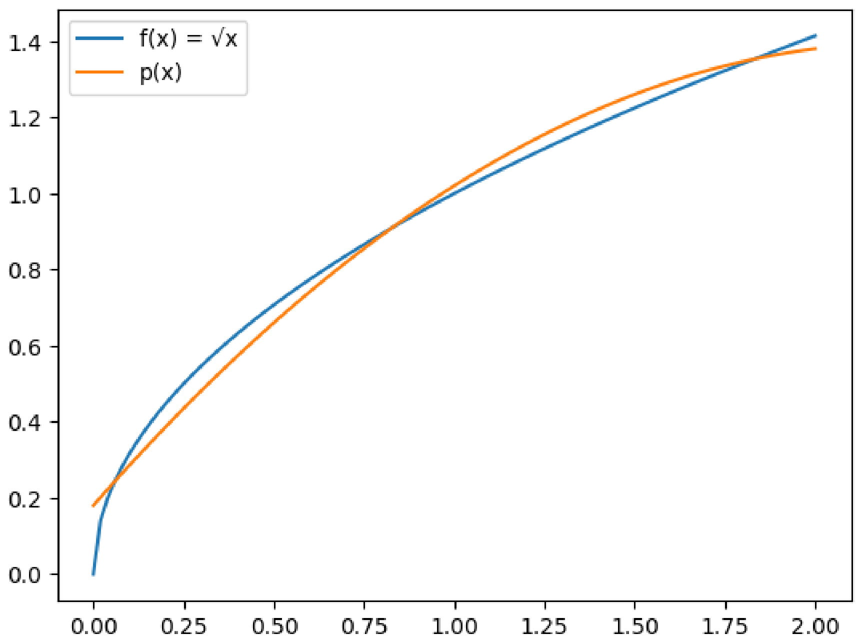


Wizualizacja 1: Ekstrapolacja wielomianu dla m=2

2 Zadanie 2

Celem zadania było Wykonanie aproksymacji średniokwadratowej ciągłej funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w przedziale [0,2] wielomianem drugiego stopnia, używając wielomianów Czebyszewa. Funkcję wielomianu wyznaczono wykorzystując poniższy kod.

```
def f(x):
    return np.sqrt(x)

def w(x):
    t = x - 1
    return (1-t**2)**(-1/2)

def T(k,x):
    x = x - 1
    return np.cos(k*np.arccos(x))

def phi(k):
    return np.pi if k == 0 else np.pi/2

def c(k):
    c, _ = quad(lambda x: T(k,x)*f(x)*w(x), 0, 2)
    c = c/phi(k)
    return c

def p_asterisk(m):
    ck = []
    for k in range(m+1):
        ck.append(c(k))
    p  = Chebyshev(ck, domain = (0,2))
    return p
```



Wizualizacja 2: Aproksymacja średniokwadratowa wielomianem drugiego stopnia, z użyciem wielomianów Czebyszewa

3 Wnioski i obserwacje

Stopień wielomianu aproksymacyjnego jest istotnym czynnikiem w kontekście aproksymacji danego wielomianu. Jeśli jest za duży, to otrzymany wielomian może być podatny na błędne dane lub szum, w przypadku, gdy jest za mały, może on nie uwzględnmić zmienności danych. W dobieraniu odpowiedniego stopnia, przydatne jest kryterium informacyjne Akaikego, które uwzględniono w punkcie **1.1.2**, a dane zebrano w **Tabeli 2**. W punkcie **2** wykonano aproksymajcę średniokwadratową ciągłą, wykorzystując wielomiany Czebyszewa. Jest to dobra oraz w porównaniu do aproksymacji jednostajnej tańsza metoda aproksymacji funkcji.

4 Bibliografia

1. https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.polynomials.chebyshev.html