Marek Małek, Marcin Serafin 23.05.2024

Laboratorium 09

Równania różniczkowe zwyczajne

1 Zadanie 1

W zadaniu 1 należało przedstawić poniższe równania różniczkowe zwyczajne jako równoważne układy równania pierwszego rzędu.

1.1 $y'' = y'(1 - y^2) - y$

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ y_2' = y'' = y'(1 - y^2) - y \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_2(1 - y^2) - y_1 \end{cases} \tag{2}$$

1.2 $y''' = -yy''$

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ y_3 = y'' \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y'' = y_3 \\ y_3' = y''' = -yy'' \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \frac{dy_3}{dx} = -y_1 y_2 \end{cases} \tag{5}$$

1.3 $\begin{cases} \mathbf{y}_1'' = \frac{-GMy_1}{(y_1^2+y_2^2)^{(1.5)}} \\ \mathbf{y}_1'' = \frac{-GMy_2}{(y_1^2+y_2^2)^{(1.5)}} \end{cases}$

$$\begin{cases} y_1 \\ y_2 \\ y_3 = y_1' \\ y_4 = y_2' \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_3 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_4 \\ \frac{dy_3}{dx} = \frac{-GMy_1}{(y_1^2+y_2^2)^{(1.5)}} \\ \frac{dy_4}{dx} = \frac{-GMy_2}{(y_1^2+y_2^2)^{(1.5)}} \end{cases} \tag{7}$$

2 Zadanie 2

W zadaniu drugim dla podane równanie różniczkowego zwyczajne:

$$y' = -5y \tag{8}$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$, należało rozwiązać numerycznie z krokiekm $h = 0.5$

2.1 $y' = -5y$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y \\ \frac{dy}{y} &= -5dx \\ ln(y) &= -5x + C \\ y &= C \cdot e^{-5x} \\ y(0) = 1 \Rightarrow 1 &= C \cdot 1 \Rightarrow C = 1 \\ y(t) &= e^{-5x} \\ \lim_{t->\infty} e^{-5x} &= 0 \Rightarrow \text{stabline} \end{aligned}$$

2.2 Jawna metoda Eulera

2.2.1 Stabilność

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_{n(1-5h} \\ y' = \lambda y \text{ Stabilny} \Leftrightarrow |1 - h\lambda| &< 1 \\ \lambda &= -5 \\ |1 - 5h| &< 1 \\ -5h < 0 \wedge -5h &> -2 \\ h > 0 \wedge h &< 2/5 \\ \text{h należy do } \left(0, \frac{2}{5}\right) \text{ do czego nie należy } \frac{1}{2} &= 0.5 \\ &\text{niestabilne} \end{aligned}$$

2.2.2 Obliczenie

$$\begin{aligned} h &= 1/2 \\ n &= 0 \\ y_0 &= 1 \\ y_{n+1} &= y_n - 5hy_{n+1} \\ y_1 &= y_0(1 - 5/2) \\ y_1 &= -3/2 \end{aligned} \tag{9}$$

2.3 Niejawna Metoda Eulera

2.3.1 Stabilność

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1} \\
y' = \lambda y \text{ stabilny} &\Leftrightarrow |1/(1 - h\lambda)| < 1 \\
\lambda &= -5 \\
|1/(1 - h\lambda)| < 1 \text{ dla dowolnego } h > 0, &\text{ a } 0.5 \text{ jest większe od } 0 \Rightarrow \text{stabilne}
\end{aligned} \tag{10}
$$

2.3.2 Obliczenie

$$
\begin{aligned}
h &= 1/2 \\
n &= 0 \\
y_0 &= 1 \\
y_1 = y_0 &- 5/2y_{(n+1)} \\
y_1(1 + 5/2) &= y_0 \\
y_1(7/2) &= 1 \\
y_1 &= 2/7
\end{aligned} \tag{11}
$$

3 Zadanie 3

W zadaniu 3 dany był model Kermack'a-McKendrick'a przebiegu epidemii w populacji opisany układem równań różnicznkowych:

$$
\begin{aligned}
S' &= -\beta IS \\
I' &= \beta IS - \gamma I \\
R' &= \gamma I
\end{aligned} \tag{12}
$$

gdzie:

- S reprezentuje liczbę osób zdrowych, podatnych na zainfekowanie,
- I reprezentuje liczbę osób zainfekowanych i roznoszących infekcję,
- R reprezentuje liczbę osób ozdrowiałych

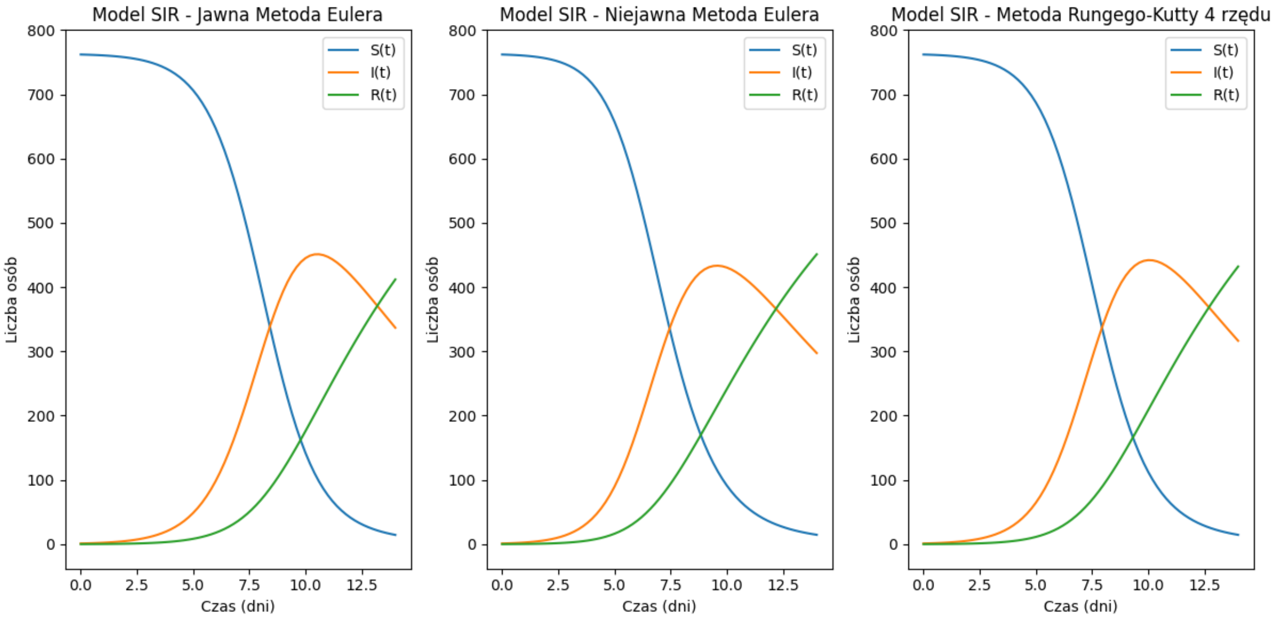
Parametr β reprezentuje współczynnik zakaźności. Parametr β reprezentuje współczynnik wyzdrowień. Wartość $1/\gamma$ reprezentuje średni czas choroby.
Założenia modelu:

- Przyrost liczby osób zakażonych jest proporcjonalny do liczby osób zakażonych oraz do liczby osób podatnych.
- Przyrost liczby osób odppornych lub zmarłych jest wprost proporcjonalny do liczby aktualnie chorych.
- Okres inkubacji choroby jest zaniedbywalnie krótki
- Populacja jest wymieszana

Za wartości początkowe zgodnie z poleceniem przyjęto: $S(0) = 762, I(0) = 1, R(0) = 0$. Ponadto przyjęto też $N = S(0) + I(0) + R(0) = 763$ oraz $\beta = 1$, a średni czas trwania grypy: $1/\gamma = 7$ dni, przyjmij $\gamma = 1/7$.

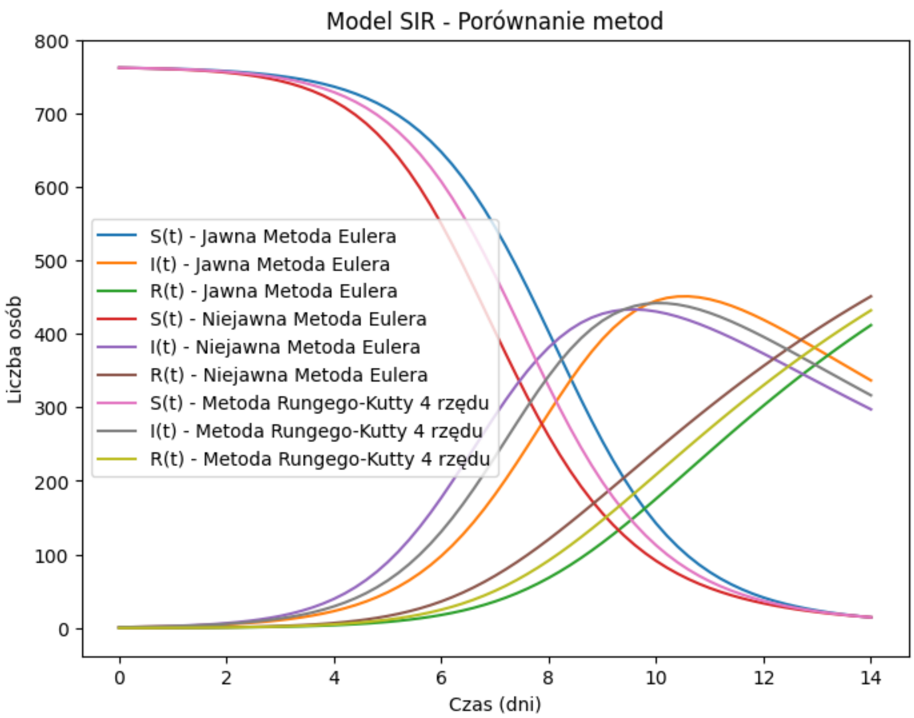
3.1 Wykresy

Dla każdej metody przedstawiono na wspólnym rysunku wykresy komponentów rozwiązania (S, I, R) jako funkcję t



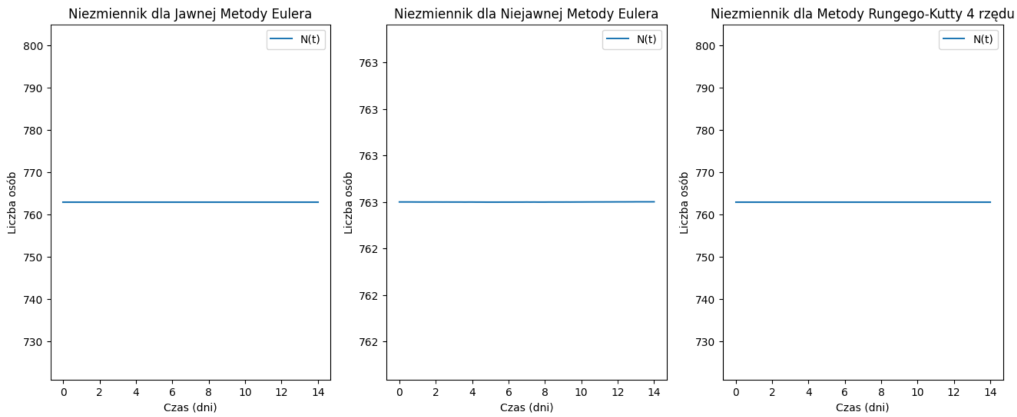
Wizualizacja 1: Wykresy komponentów rozwiązania dla każdej metody

Wykres nałożonych współczynników



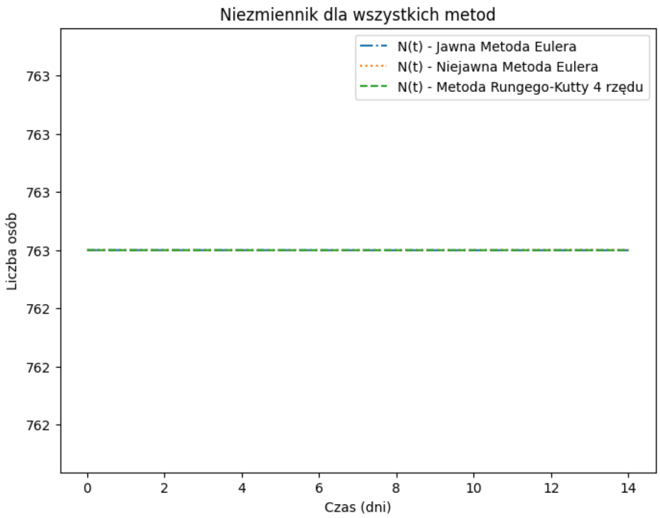
Wizualizacja 2: Wykres nałożonych współczynników metod

Niezmiennik $S(t) + I(t) + R(t)$ dla metod przedstawiono na wykresie:



Wizualizacja 3: Wykresy niezmienników metod

Wykres nałożonych niezmienników



Wizualizacja 4: Wykres nałożonych niezmienników metod

3.2 Szacowanie prawdziwych wartości współczynników

Dzień, t	Zakażeni, I
0	1
1	3
2	6
3	25
4	73
5	222
6	294
7	258
8	237
9	191
10	125
11	69
12	27
13	11
14	4

Tabela 1: Kształtowanie się liczby zarażonych osób w pewnej szkole

Wybrano metodę Rungego-Kutty i oszacowano prawdziwe wartości wspólczynników $\theta = [\beta, \gamma]$. W tym celu wykonano minimalizację funkcji kosztu:

$$L(\theta) = \sum_{i=0}^{T} (I_i - \hat{I}_i)^2 \tag{13}$$

gdzie I_i oznacza prawdziwą liczbę zakażonych, a $\hat{I}_i$ oznacza liczbę zakażonych wyznaczonych metodą numeryczną. Do minimalizacji wykorzystano metodę Nelder-Meada.

Następnie powtórzono obliczenia przyjmując za funkcję kosztu:

$$L(\theta) = -\sum_{i=0}^{T} I_i \ln \hat{I}_i + \sum_{i=0}^{T} \hat{I}_i \tag{14}$$

Wyznaczono współczynnik reprodukcji $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$. Wyniki obu metod zestawiono w tabeli:

Metoda	β	γ	R_0
1	1.0	0.143	7.0
2	1.0	0.143	7.0

Tabela 2: Kształtowanie się liczby zarażonych osób w pewnej szkole

4 Wnioski

- Wykorzystane metody są podobne, ale nie identyczne, co widać na Wizualizacji 2.
- Niezmienniki metod są identyczne, co widać na Wizualizacji 4.
- Metoda Rungego-Kutty zajęła najwięcej czasu do obliczenia.