Marek Małek, Marcin Serafin 16.05.2024

Laboratorium 08

Rozwiązywanie równań nieliniowych

1 Zadanie 1

Dla poniższych funkcji znaleziono pierwiastki metodą scipy.optimize.newton oraz scipy.optimize.root. Metoda w porównianiu do metody scipy.optimize.root zawiodła i dawała niedokładne wyniki lub nie była zbieżna.

1.1 $f_1(x) = x^3 - 5, x_0 = 1$

Wynik funkcji scipy.optimze.newton: $4.74 \cdot 10^{-24}$
Wynik funckji scipy.optimze.root: 0

Wynik nie jest dokładny, co może być spowodowane błędem numercznym

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 5 \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'x_n} \end{aligned} \tag{1}$$

Dla $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 1^3 - 5 \cdot 1 = -4 \\ f'(x_0) &= 3 \cdot 1^2 - 5 = -2 \\ x_1 &= 1 - \frac{-4}{-2} = 1 - 2 = -1 \end{aligned} \tag{2}$$

Dla $x_1 = -1$:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= (-1)^3 - 5 \cdot (-1) = -1 + 5 = -4 \\ f'(x_0) &= 3 \cdot (-1)^2 - 5 = 3 - 5 = -2 \\ x_1 &= -1 - \frac{4}{-2} = -1 + 2 = 1 \end{aligned} \tag{3}$$

W tej funkcji metoda Newtona zawodzi gdyż punkty oscylują między 1 a -1 zamiast zbiegać do miejsca zerowego

1.2 $f_2(x) = x^3 - 3x + 1, x_0 = 1$

Wynik funkcji scipy.optimze.newton: 1.0000007188230098
Wynik funckji scipy.optimze.root: 1.002

Wynik pierwszej pochodnej funkcji jest równy 0, co jest problemem w obliczaniu kolejnych iteracji metody Newtona, wiadomość funkcji scipy.optimze.root: The iteration is not making good progress, as measured by the improvement from the last ten iterations.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \tag{4}$$

Dla $x_0 = 1$:

$$f'(x_0) = 0 \tag{5}$$

W tym wypadku Metoda Newtona nie zadziała gdyż Pochodna zeruje sie przez co nie można przez nią podzielić. Ten problem można rozwiązać przez modyfikację punktu startowego.

1.3 $f_3(x) = 2 - x^5, x_0 = 0.01$

$$f_3'(x) = -5x^4 \tag{6}$$

Dla $x_0 = 0.01$:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 2 - (0.01)^5 \approx 2 \\ f'(x_0) &= -5 \cdot (0.01)^4 = -5 \cdot 10^{-8} \end{aligned} \tag{7}$$

Następny przybliżony punkt:

$$x_1 = 0.01 - \frac{2}{-5 \cdot 10^{-8}} \approx 4 \cdot 10^7 \tag{8}$$

Wynik funkcji scipy.optimze.newton: 0.01
Wynik funckji scipy.optimze.root: 1.149

Punkt startowy iteracji jest blisko ekstremum funkcji, co może powodować błąd.
Tutaj metoda Newtona nie zadziała gdyż kolejny punkt będzie bardzo dużą wartość co prowadzi do nierealistycznego wyniku.

1.4 $f_4(x) = x^4 - 4.29x^2 - 5.29, x_0 = 0.81$

$$f'(x) = 4x^{-}8.58x \tag{9}$$

Dla $x_0 = 0.8$:

$$\begin{aligned} f(0.8) &= (0.8)^4 - 4.29 \cdot (0.8)^2 - 5.29 \approx -7.2064 \\ f'(0.8) &= 4 \cdot (0.8)^3 - 8.58 \cdot 0.8 \approx -5.312 \end{aligned} \tag{10}$$

Następny przybliżony punkt: $x_1 = 0.8 - \frac{7.2064}{5.312} \approx -0.556$
Analogicznie dla kolejnych punktów, wtedy: $x_2 \approx 1.495$, $x_3 \approx 0.938$. Kolejne przybliżenia nie przybliżają się do żadnego z miejsc zerowych funkcji, zatem metoda znów zwodzi.

Wynik funkcji scipy.optimze.newton: -0.7870232540616441
Wynik funckji scipy.optimze.root: $2.079 \cdot 10^{-}3$

Punkt startowy znajduje się za daleko, wiadomość funkcji scipy.optimze.root: The iteration is not making good progress, as measured by the improvement from the last five Jacobian evaluations.

2 Zadanie 2

Dla danego równania $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ przeanalizowano schematy iteracyjne funkcji. Przeanalizowano zbieżność schematów iteracyjnych dla pierwiastka $x = 2$.

$$g_1(x) = (x^2 + 2)/3 \tag{11}$$

$$g_2(x) = \sqrt{(3x - 2)} \tag{12}$$

$$g_3(x) = 3 - 2/x \tag{13}$$

$$g_4(x) = (x^2 - 2)/(2x - 3) \tag{14}$$

2.1 Zbieżność oraz rząd zbieżności

2.1.1 Funkcja $g_1(x)$

$$g_1'(x) = \frac{2x}{3}$$

$$g_1'(2) = \frac{4}{3} > 1 \Rightarrow \text{rozbieżny}$$

2.1.2 Funkcja $g_2(x)$

$$g_2'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 2}}$$

$$g_2'(2) = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \text{zbieżny liniowo}$$

2.1.3 Funkcja $g_3(x)$

$$g_3'(x) = \frac{2}{x^2}$$

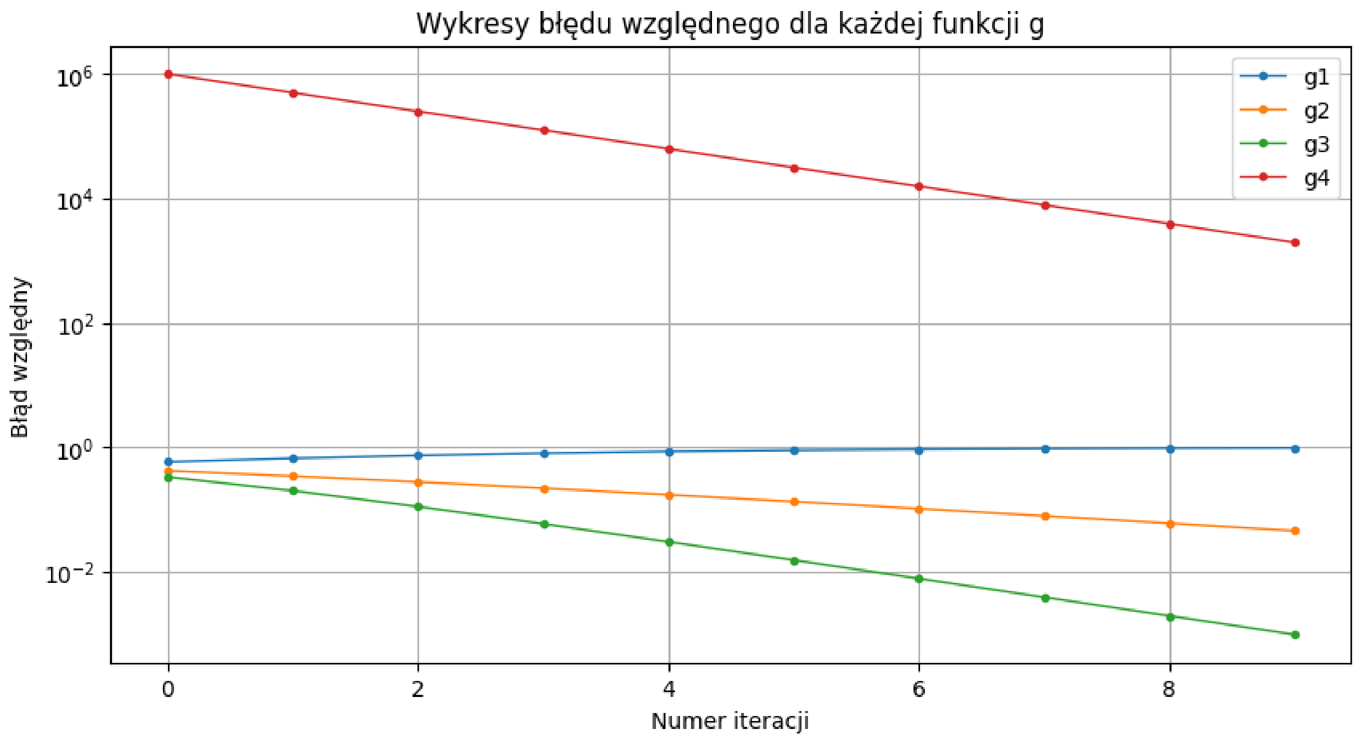
$$g_3'(2) = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{zbieżny liniowo}$$

2.1.4 Funkcja $g_4(x)$

$$g_4'(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{(2x + 3)^2}$$

$$g_4'(2) = 0 \Rightarrow \text{zbieżny kwadratowo}$$

2.2 Wykres błędu względnego



Wizualizacja 1: Zależność błędu względnego od liczby iteracji

3 Schematy iteracji metody Newtona

Wyznaczono schematy iteracji metody Newtona dla poszczególnych równań:

- $x^3 - 2x - 5 = 0$
- $e^{-x} - x = 0$
- $x\sin(x) - 1 = 0$

3.1 Równanie a)

$$\begin{aligned} a(x) &= x^3 - 2x - 5 \\ a'(x) &= 3x^2 - 2 \\ x_{n+1} = x_n - &\frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2} \end{aligned} \tag{15}$$

3.2 Równanie b)

$$\begin{aligned} b(x) &= e^{-x} - x \\ b'(x) &= -e^{-x} - 1 \\ x_{n+1} = x_n - &\frac{e^{-x_n} - x_n}{-e^{-x_n} - 1} \end{aligned} \tag{16}$$

3.3 Równanie c)

$$\begin{aligned} c(x) &= x\sin(x) - 1 \\ c'(x) &= \sin(x) + x\cos(x) \\ x_{n+1} = x_n - &\frac{x_n\sin(x_n) - 1}{\sin(x_n) + x_n\cos(x_n)} \end{aligned} \tag{17}$$

3.4 Wyznaczenie liczby iteracji

Wyznaczono liczbę iteracji, jaką należy wykonać w celu osiągnięcia dokładności 24-bitowej oraz 53-bitowej.

Ponieważ metoda Newtona-Raphsona podwaja liczbę poprawnych bitów przy każdej iteracji, możemy wyliczyć liczbę iteracji potrzebnych do osiągnięcia 24-bitowej dokładności.

1. Iteracja: 4 bity $\rightarrow$ 8 bitów
2. Iteracja: 8 bitów $\rightarrow$ 16 bitów
3. Iteracja: 16 bitów $\rightarrow$ 32 bity

Po 3 iteracjach mamy 32-bitową dokładność, co przekracza 24-bitową dokładność. Dlatego potrzeba 3 iteracji, aby osiągnąć 24-bitową dokładność.

Analogicznie dla 53-bitowej dokładności $\rightarrow$ 4 iteracje.

Wyznaczono również wartości eksperymentalnie:

Dla dokładności 24-bitowej

Funkcja	Liczba iteracji	Wartość funkcji
$a(x)$	8	2.09
$b(x)$	3	0.57
$c(x)$	2	1.11

Tabela 1: Zestawienie liczby iteracji oraz wartości funkcji w celu osiągnięcia dokładności 24-bitowej

Dla dokładności 53-bitowej

Funkcja	Liczba iteracji	Wartość funkcji
$a(x)$	100	2.09
$b(x)$	4	0.57
$c(x)$	100	1.11

Tabela 2: Zestawienie liczby iteracji oraz wartości funkcji w celu osiągnięcia dokładności 53-bitowej

4 Zadanie 4

Wyliczono rozwiązanie układu równań korzystając z metody Newtona, wyznaczono liczbę iteracji oraz porównano wynik z prawdziwymi wartościami rozwiązania:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 = 0 \end{cases} \tag{18}$$

Rozwiązanie układu metodą Newtona = [0.78615136 0.61803402]
Prawdziwe wartości rozwiązania układu = [0.7861513777574233 0.6180339887498949]
Liczba iteracji: 7
Błąd względny x_1: $2.86 \cdot 10^{-8}$
Błąd względny x_2: $4.63 \cdot 10^{-8}$

5 Wnioski

Metoda Newtona pozwala sprawnie obliczać pierwiastki w małej liczbie kroków, natomiast wybór punktu początkowego ma duże znaczenie, co widać w punkcie **1.4**. Problemy w zadaniu 1 można rozwiązać poprzez dobranie innego punktu startowego.