

Marek Małek, Marcin Serafin 14.03.2024
Laboratorium 03
Interpolacja

1 Treść zadania

Celem zadania było wyznaczanie wielomianu interpolacyjnego metodą Lagrange'a oraz Newtona w oparciu o zestaw danych - populację Stanów Zjednoczonych w latach 1900-1980.

Rok	Populacja
1900	76 212 168
1910	92 228 496
1920	106 021 537
1930	123 202 624
1940	132 164 569
1950	151 325 798
1960	179 323 175
1970	203 302 031
1980	226 542 199

Tabela 1: Zestawienie populacji Stanów Zjednoczonych w latach 1900-1980

W zadaniu należało rozważyć zbiory funkcji bazowych zadane jako $\phi_j(t)$ dla $j \in [1, 9]$

$$\phi_{1j}(t) = t^{j-1} \tag{1}$$

$$\phi_{2j}(t) = (t - 1900)^{j-1} \tag{2}$$

$$\phi_{3j}(t) = (t - 1940)^{j-1} \tag{3}$$

$$\phi_{4j}(t) = ((t - 1940)/40)^{j-1} \tag{4}$$

2 Wykonanie zadania

2.1 Wyznaczenie macierzy Vandermonde'a

Dla każdego z 4 zbiorów funkcji bazowych wyznaczono macierz Vandermonde'a

$$\begin{bmatrix} 1.12 \cdot 10^9 & 1.61 \cdot 10^9 & 2.12 \cdot 10^9 & 1.03 \cdot 10^9 & 1.17 \cdot 10^9 & -1.73 \cdot 10^9 & 3.61 \cdot 10^6 & 1.90 \cdot 10^3 & 1 \\ 9.80 \cdot 10^8 & 1.76 \cdot 10^9 & 1.05 \cdot 10^9 & 1.13 \cdot 10^9 & -1.47 \cdot 10^9 & -1.62 \cdot 10^9 & 3.65 \cdot 10^6 & 1.91 \cdot 10^3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.68 \cdot 10^8 & -1.51 \cdot 10^9 & 3.69 \cdot 10^6 & 1.92 \cdot 10^3 & 1 \\ 1.65 \cdot 10^7 & 1.30 \cdot 10^9 & -1.08 \cdot 10^9 & -1.38 \cdot 10^9 & 2.14 \cdot 10^9 & -1.40 \cdot 10^9 & 3.72 \cdot 10^6 & 1.93 \cdot 10^3 & 1 \\ -2 \cdot 10^9 & 1.79 \cdot 10^9 & 1.76 \cdot 10^9 & 3 \cdot 10^8 & -1.17 \cdot 10^8 & -1.29 \cdot 10^9 & 3.76 \cdot 10^6 & 1.94 \cdot 10^3 & 1 \\ -7.78 \cdot 10^7 & 7.11 \cdot 10^8 & 4.47 \cdot 10^8 & 2.05 \cdot 10^9 & 2.15 \cdot 10^9 & -1.18 \cdot 10^9 & 3.80 \cdot 10^6 & 1.95 \cdot 10^3 & 1 \\ 1.63 \cdot 10^9 & -1.48 \cdot 10^9 & -1.73 \cdot 10^9 & -1.07 \cdot 10^9 & 3.83 \cdot 10^8 & -1.06 \cdot 10^9 & 3.84 \cdot 10^6 & 1.96 \cdot 10^3 & 1 \\ -5.12 \cdot 10^8 & 1.58 \cdot 10^9 & -4.48 \cdot 10^8 & 1.21 \cdot 10^9 & -1.07 \cdot 10^9 & -9.45 \cdot 10^8 & 3.88 \cdot 10^6 & 1.97 \cdot 10^3 & 1 \\ -1.94 \cdot 10^9 & -2.11 \cdot 10^9 & 1.38 \cdot 10^8 & 5.86 \cdot 10^7 & 2.14 \cdot 10^9 & -8.28 \cdot 10^8 & 3.92 \cdot 10^6 & 1.98 \cdot 10^3 & 1 \end{bmatrix}$$

Wizualizacja 1: Macierz Vandermonde'a dla ϕ_1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 \cdot 10^8 & 1 \cdot 10^7 & 1 \cdot 10^6 & 1 \cdot 10^5 & 1 \cdot 10^4 & 1 \cdot 10^3 & 1 \cdot 10^2 & 10 & 1 \\ -1.70 \cdot 10^8 & 1.28 \cdot 10^9 & 6.40 \cdot 10^7 & 3.20 \cdot 10^6 & 1.60 \cdot 10^5 & 8 \cdot 10^3 & 4 \cdot 10^2 & 20 & 1 \\ -1.03 \cdot 10^9 & 3.95 \cdot 10^8 & 7.29 \cdot 10^8 & 2.43 \cdot 10^7 & 8.10 \cdot 10^5 & 2.70 \cdot 10^4 & 9 \cdot 10^2 & 30 & 1 \\ -5.20 \cdot 10^8 & 6.31 \cdot 10^8 & -1.99 \cdot 10^8 & 1.02 \cdot 10^8 & 2.56 \cdot 10^6 & 6.40 \cdot 10^4 & 1.60 \cdot 10^3 & 40 & 1 \\ -2.28 \cdot 10^8 & -4.34 \cdot 10^8 & -1.55 \cdot 10^9 & 3.12 \cdot 10^8 & 6.25 \cdot 10^6 & 1.25 \cdot 10^5 & 2.50 \cdot 10^3 & 50 & 1 \\ -1.69 \cdot 10^9 & -9.59 \cdot 10^8 & -5.89 \cdot 10^8 & 7.78 \cdot 10^8 & 1.30 \cdot 10^7 & 2.16 \cdot 10^5 & 3.60 \cdot 10^3 & 60 & 1 \\ 1 \cdot 10^9 & 1.98 \cdot 10^9 & 1.68 \cdot 10^9 & 1.68 \cdot 10^9 & 2.40 \cdot 10^7 & 3.43 \cdot 10^5 & 4.90 \cdot 10^3 & 70 & 1 \\ 0 & -8.05 \cdot 10^8 & 1.51 \cdot 10^8 & -1.02 \cdot 10^9 & 4.10 \cdot 10^7 & 5.12 \cdot 10^5 & 6.40 \cdot 10^3 & 80 & 1 \end{bmatrix}$$

Wizualizacja 2: Macierz Vandermonde'a dla ϕ_2

$$\begin{bmatrix} -5.20 \cdot 10^8 & -6.31 \cdot 10^8 & -1.99 \cdot 10^8 & -1.02 \cdot 10^8 & 2.56 \cdot 10^6 & -6.40 \cdot 10^4 & 1.60 \cdot 10^3 & -40 & 1 \\ -1.03 \cdot 10^9 & -3.95 \cdot 10^8 & 7.29 \cdot 10^8 & -2.43 \cdot 10^7 & 8.10 \cdot 10^5 & -2.70 \cdot 10^4 & 9.00 \cdot 10^2 & -30 & 1 \\ -1.70 \cdot 10^8 & -1.28 \cdot 10^9 & 6.40 \cdot 10^7 & -3.20 \cdot 10^6 & 1.60 \cdot 10^5 & -8.00 \cdot 10^3 & 4.00 \cdot 10^2 & -20 & 1 \\ 1.00 \cdot 10^8 & -1.00 \cdot 10^7 & 1.00 \cdot 10^6 & -1.00 \cdot 10^5 & 1.00 \cdot 10^4 & -1.00 \cdot 10^3 & 1.00 \cdot 10^2 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.00 \cdot 10^8 & 1.00 \cdot 10^7 & 1.00 \cdot 10^6 & 1.00 \cdot 10^5 & 1.00 \cdot 10^4 & 1.00 \cdot 10^3 & 1.00 \cdot 10^2 & 10 & 1 \\ -1.70 \cdot 10^8 & 1.28 \cdot 10^9 & 6.40 \cdot 10^7 & 3.20 \cdot 10^6 & 1.60 \cdot 10^5 & 8.00 \cdot 10^3 & 4.00 \cdot 10^2 & 20 & 1 \\ -1.03 \cdot 10^9 & 3.95 \cdot 10^8 & 7.29 \cdot 10^8 & 2.43 \cdot 10^7 & 8.10 \cdot 10^5 & 2.70 \cdot 10^4 & 9.00 \cdot 10^2 & 30 & 1 \\ -5.20 \cdot 10^8 & 6.31 \cdot 10^8 & -1.99 \cdot 10^8 & 1.02 \cdot 10^8 & 2.56 \cdot 10^6 & 6.40 \cdot 10^4 & 1.60 \cdot 10^3 & 40 & 1 \end{bmatrix}$$

Wizualizacja 3: Macierz Vandermonde'a dla ϕ_3

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1.00 \cdot 10^{-1} & -1.33 \cdot 10^{-1} & 1.78 \cdot 10^{-1} & -2.37 \cdot 10^{-1} & 3.16 \cdot 10^{-1} & -4.22 \cdot 10^{-1} & 5.62 \cdot 10^{-1} & -7.50 \cdot 10^{-1} & 1 \\ 3.91 \cdot 10^{-3} & -7.81 \cdot 10^{-3} & 1.56 \cdot 10^{-2} & -3.12 \cdot 10^{-2} & 6.25 \cdot 10^{-2} & -1.25 \cdot 10^{-1} & 2.50 \cdot 10^{-1} & -5.00 \cdot 10^{-1} & 1 \\ 1.53 \cdot 10^{-5} & -6.10 \cdot 10^{-5} & 2.44 \cdot 10^{-4} & -9.77 \cdot 10^{-4} & 3.91 \cdot 10^{-3} & -1.56 \cdot 10^{-2} & 6.25 \cdot 10^{-2} & -2.50 \cdot 10^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.53 \cdot 10^{-5} & 6.10 \cdot 10^{-5} & 2.44 \cdot 10^{-4} & 9.77 \cdot 10^{-4} & 3.91 \cdot 10^{-3} & 1.56 \cdot 10^{-2} & 6.25 \cdot 10^{-2} & 2.50 \cdot 10^{-1} & 1 \\ 3.91 \cdot 10^{-3} & 7.81 \cdot 10^{-3} & 1.56 \cdot 10^{-2} & 3.12 \cdot 10^{-2} & 6.25 \cdot 10^{-2} & 1.25 \cdot 10^{-1} & 2.50 \cdot 10^{-1} & 5.00 \cdot 10^{-1} & 1 \\ 1.00 \cdot 10^{-1} & 1.33 \cdot 10^{-1} & 1.78 \cdot 10^{-1} & 2.37 \cdot 10^{-1} & 3.16 \cdot 10^{-1} & 4.22 \cdot 10^{-1} & 5.62 \cdot 10^{-1} & 7.50 \cdot 10^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wizualizacja 4: Macierz Vandermonde'a dla ϕ_4

2.2 Współczynniki uwarunkowania

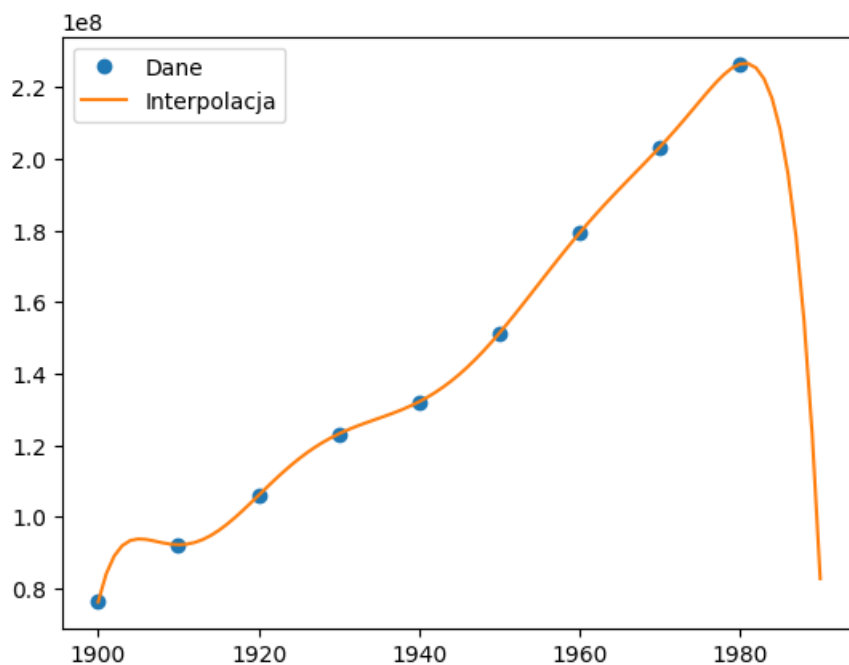
Przy użyciu funkcji `numpy.linalg.cond` obliczono współczynniki uwarunkowania macierzy. Wyniki zestawiono w tabeli.

	Współczynnik uwarunkowania
ϕ_1	$60.74 \cdot 10^{13}$
ϕ_2	$38.95 \cdot 10^8$
ϕ_3	$20.95 \cdot 10^8$
ϕ_4	1605.44

Tabela 2: Współczynniki uwarunkowania macierzy Vandermonde’a dla baz $\phi_1 - \phi_4$

2.3 Znalezienie współczynników wielomianu

Z podpunktu 2.2 wynika, że najlepiej uwarunkowaną macierzą okazała się macierz dla czwartych funkcji bazowych. Zatem tę bazę wybrano do określania współczynników. Wyznaczono współczynniki oraz przy pomocy schematu Hornera obliczono wartości wielomianu na przedziale [1900, 1990]. Wyniki przedstawiono na wykresie.



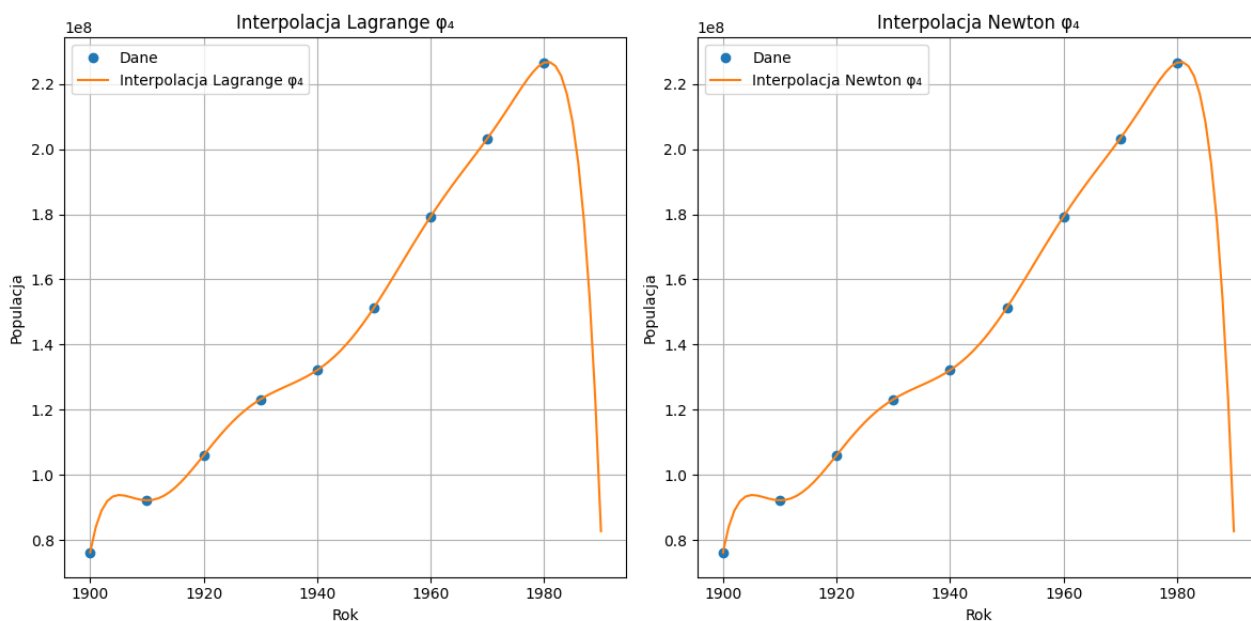
Wizualizacja 5: Wykres wielomianu interpolacyjnego wraz z węzłami interpolacyjnymi

2.4 Ekstrapolacja wielomianu

Wykonano ekstrapolację wielomianu do roku 1990. Wartość porównano z wartością faktyczną z Tabeli 1. Błąd względny ekstrapolacji wyniósł 66%.

2.5 Wielomiany interpolacyjne Lagrange'a oraz Newtona

Wyznaczono wielomiany interpolacyjne Lagrange'a oraz Newtona. Podobnie jak w punkcie 2.3 wykonano wizualizację na wykresie.



Wizualizacja 6: Wykresy wielomianów interpolacyjnych dla metody Lagrange'a oraz Newtona na bazie funkcji ϕ_4

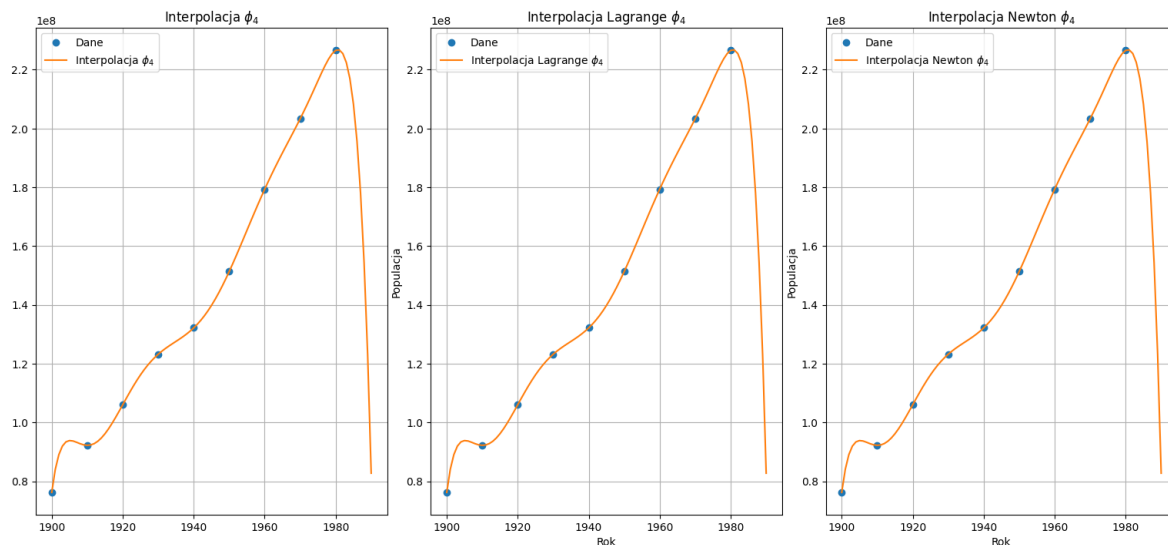
2.6 Porównanie z zaokrąglonymi danymi

Zaokrąglono dane w Tabeli 1 do miliona, a następnie na ich podstawie wyznaczono wielomian interpolacyjny ósmego stopnia na bazie funkcji ϕ_4 - jako najlepiej uwarunkowanej. Otrzymane współczynniki zestawiono ze współczynnikami przed wielomianu z pominięciem zaokrąglenia.

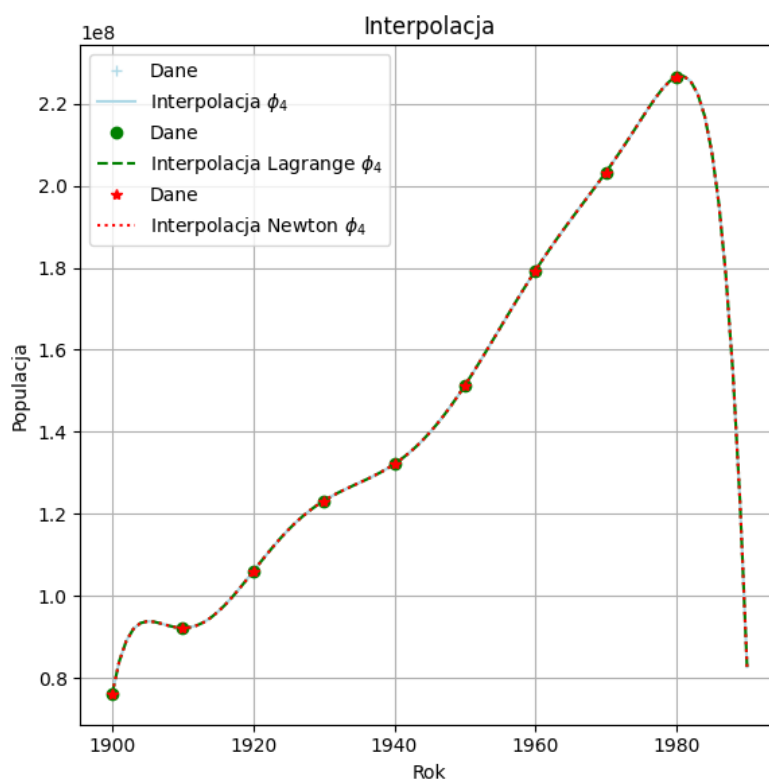
	Współczynniki wielomianu								
po	$-2.94 \cdot 10^8$	$1.86 \cdot 10^8$	$5.70 \cdot 10^8$	$-3.38 \cdot 10^8$	$-3.56 \cdot 10^8$	$1.81 \cdot 10^8$	$1.00 \cdot 10^8$	$4.59 \cdot 10^7$	$1.32 \cdot 10^8$
przed	$-3.15 \cdot 10^8$	$1.89 \cdot 10^8$	$6.06 \cdot 10^8$	$-3.42 \cdot 10^8$	$-3.74 \cdot 10^8$	$1.82 \cdot 10^8$	$1.02 \cdot 10^8$	$4.61 \cdot 10^7$	$1.32 \cdot 10^8$
błąd względny	6.7%	1.2%	5.9%	1.2%	4.8%	0.8%	2.5%	0.4%	0.1%

Tabela 3: Zestawienie współczynników wielomianu przed i po zaokrągleniu danych z Tabeli 1

2.7 Wykres zbiorczy metod



Wizualizacja 7: Wykresy wielomianów interpolacyjnych dla wszystkich trzech metod na bazie funkcji ϕ_4



Wizualizacja 8: Wykresy wielomianów interpolacyjnych dla wszystkich trzech metod na bazie funkcji nałożone na siebie ϕ_4

3 Wnioski

Najlepszą bazą wielomianów okazała się baza ϕ_4 , ponieważ jej macierz była najlepiej uwarunkowana - współczynnik był równy 1605.44, a pozostałe współczynniki były większe o co najmniej kilka rzędów wielkości. Z punktu 2.4

wynika, że ekstrapolacja jest bardzo niestabilna, jako że błąd względny wyniósł 66%. Wielomiany interpolacyjne Lagrange’a oraz Newtona dały bardzo zbliżone wyniki. Zaokrąglenie danych do miliona nieznacznie zmieniło otrzymane współczynniki wielomianu co widać w punkcie **2.6**.

4 Bibliografia

1. http://heath.cs.illinois.edu/scicomp/notes/cs450_chapt07.pdf
2. <https://pythonnumericalmethods.berkeley.edu/notebooks/chapter17.00-Interpolation.html>
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_polynomial