

Marek Małek, Marcin Serafin 23.05.2024

Laboratorium 09

Równania różniczkowe zwyczajne

## 1 Zadanie 1

W zadaniu 1 należało przedstawić poniższe równania różniczkowe zwyczajne jako równoważne układy równania pierwszego rzędu.

1.1  $y'' = y'(1 - y^2) - y$

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ y_2' = y'' = y'(1 - y^2) - y \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_2(1 - y_1^2) - y_1 \end{cases} \quad (2)$$

1.2  $y''' = -yy''$

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ y_3 = y'' \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y'' = y_3 \\ y_3' = y''' = -yy'' \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \frac{dy_3}{dx} = -y_1 y_2 \end{cases} \quad (5)$$

1.3  $\begin{cases} y_1'' = \frac{-GM y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{1.5}} \\ y_2'' = \frac{-GM y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{1.5}} \end{cases}$

$$\begin{cases} y_1 \\ y_2 \\ y_3 = y_1' \\ y_4 = y_2' \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_3 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_4 \\ \frac{dy_3}{dx} = \frac{-GM y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{1.5}} \\ \frac{dy_4}{dx} = \frac{-GM y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{1.5}} \end{cases} \quad (7)$$

## 2 Zadanie 2

W zadaniu drugim dla podane równanie różniczkowego zwyczajne:

$$y' = -5y \quad (8)$$

z warunkiem początkowym  $y(0) = 1$ , należało rozwiązać numerycznie z krokiem  $h = 0.5$

### 2.1 $y' = -5y$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y \\ \frac{dy}{y} &= -5dx \\ \ln(y) &= -5x + C \\ y &= C \cdot e^{-5x} \\ y(0) = 1 &\Rightarrow 1 = C \cdot 1 \Rightarrow C = 1 \\ y(t) &= e^{-5x} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-5x} &= 0 \Rightarrow \text{stabilne} \end{aligned}$$

### 2.2 Jawną metodą Eulera

#### 2.2.1 Stabilność

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n(1-5h) \\ y' = \lambda y \text{ Stabilny} &\Leftrightarrow |1 - h\lambda| < 1 \\ \lambda &= -5 \\ |1 - 5h| &< 1 \\ -5h < 0 \wedge -5h &> -2 \\ h &> 0 \wedge h < 2/5 \\ h \text{ należy do } \left(0, \frac{2}{5}\right) &\text{ do czego nie należy } \frac{1}{2} = 0.5 \\ &\text{niestabilne} \end{aligned}$$

#### 2.2.2 Obliczenie

$$\begin{aligned} h &= 1/2 \\ n &= 0 \\ y_0 &= 1 \\ y_{n+1} &= y_n - 5hy_{n+1} \\ y_1 &= y_0(1 - 5/2) \\ y_1 &= -3/2 \end{aligned} \quad (9)$$

## 2.3 Niejawna Metoda Eulera

### 2.3.1 Stabilność

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ y' = \lambda y \text{ stabilny} &\Leftrightarrow |1/(1 - h\lambda)| < 1 \\ \lambda &= -5 \end{aligned} \tag{10}$$

$|1/(1 - h\lambda)| < 1$  dla dowolnego  $h > 0$ , a 0.5 jest większe od 0  $\Rightarrow$  stabilne

### 2.3.2 Obliczenie

$$\begin{aligned} h &= 1/2 \\ n &= 0 \\ y_0 &= 1 \\ y_1 &= y_0 - 5/2 y_{(n+1)} \\ y_1(1 + 5/2) &= y_0 \\ y_1(7/2) &= 1 \\ y_1 &= 2/7 \end{aligned} \tag{11}$$

## 3 Zadanie 3

W zadaniu 3 dany był model Kermack'a-McKendrick'a przebiegu epidemii w populacji opisany układem równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} S' &= -\beta IS \\ I' &= \beta IS - \gamma I \\ R' &= \gamma I \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie:

- S reprezentuje liczbę osób zdrowych, podatnych na zainfekowanie,
- I reprezentuje liczbę osób zainfekowanych i roznoszących infekcję,
- R reprezentuje liczbę osób ozdrowiałych

Parametr  $\beta$  reprezentuje współczynnik zakaźności. Parametr  $\gamma$  reprezentuje współczynnik wyzdrowień. Wartość  $1/\gamma$  reprezentuje średni czas choroby.

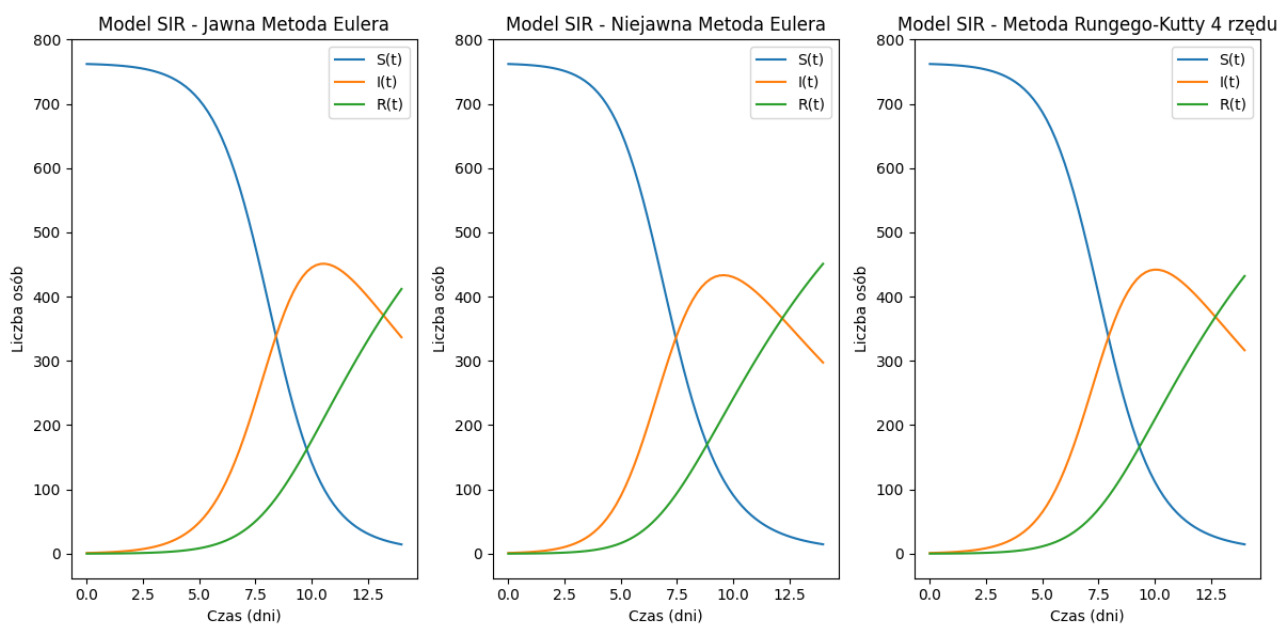
Założenia modelu:

- Przyrost liczby osób zakażonych jest proporcjonalny do liczby osób zakażonych oraz do liczby osób podatnych.
- Przyrost liczby osób odpornych lub zmarłych jest wprost proporcjonalny do liczby aktualnie chorych.
- Okres inkubacji choroby jest zanedbywalnie krótki
- Populacja jest wymieszana

Za wartości początkowe zgodnie z poleceniem przyjęto:  $S(0) = 762, I(0) = 1, R(0) = 0$ . Ponadto przyjęto też  $N = S(0) + I(0) + R(0) = 763$  oraz  $\beta = 1$ , a średni czas trwania grypy:  $1/\gamma = 7$  dni, przyjmij  $\gamma = 1/7$ .

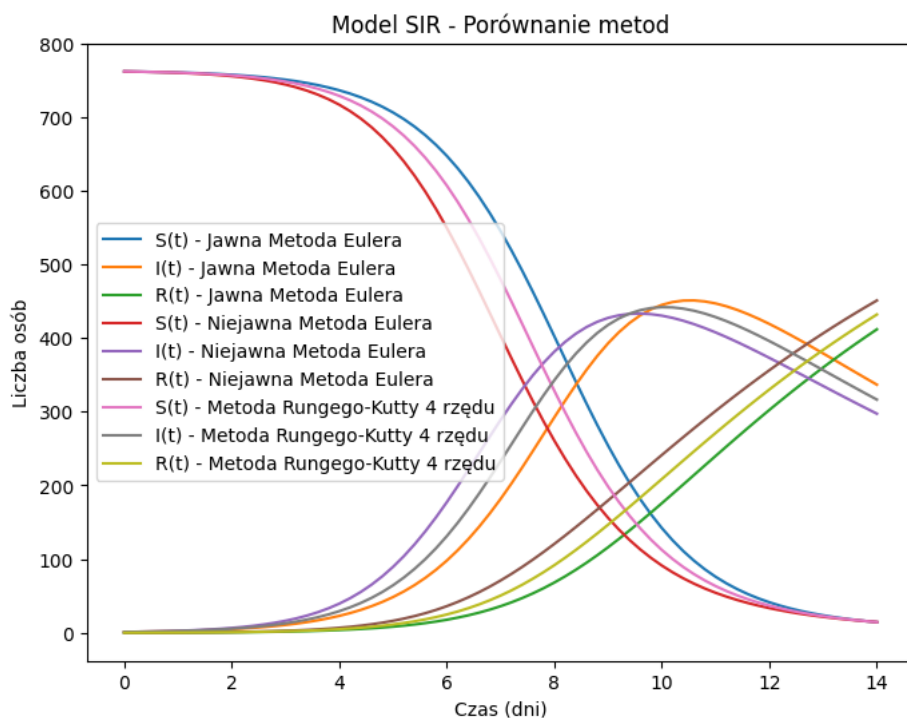
### 3.1 Wykresy

Dla każdej metody przedstawiono na wspólnym rysunku wykresy komponentów rozwiązania ( $S, I, R$ ) jako funkcję  $t$



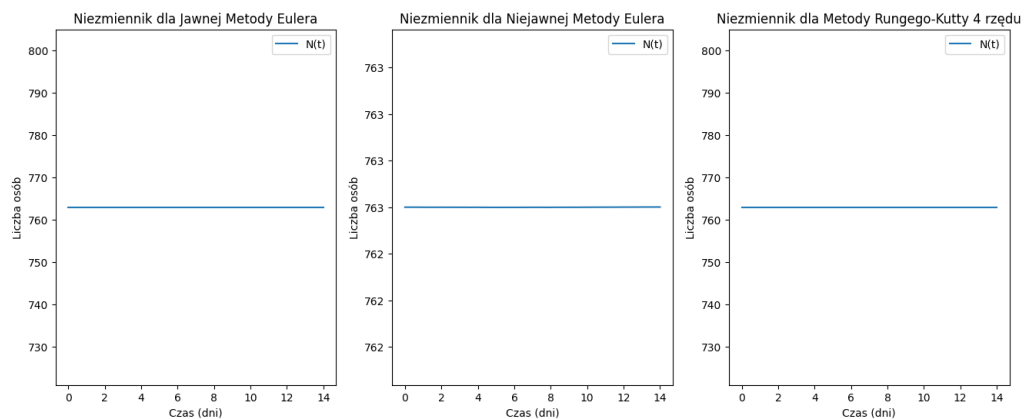
**Wizualizacja 1:** Wykresy komponentów rozwiązania dla każdej metody

Wykres nałożonych współczynników



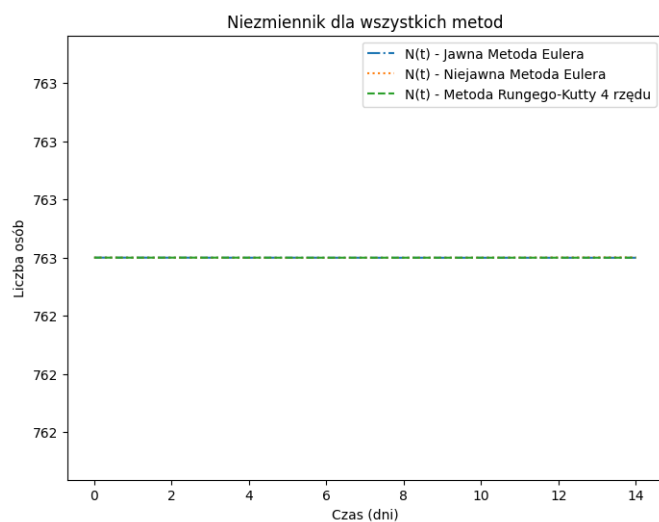
**Wizualizacja 2:** Wykres nałożonych współczynników metod

Niezmiennik  $S(t) + I(t) + R(t)$  dla metod przedstawiono na wykresie:



**Wizualizacja 3:** Wykresy niezmienników metod

Wykres nałożonych niezmienników



**Wizualizacja 4:** Wykres nałożonych niezmienników metod

### 3.2 Szacowanie prawdziwych wartości współczynników

Dzień, $t$	Zakażeni, $I$
0	1
1	3
2	6
3	25
4	73
5	222
6	294
7	258
8	237
9	191
10	125
11	69
12	27
13	11
14	4

**Tabela 1:** Kształtowanie się liczby zarażonych osób w pewnej szkole

Wybrano metodę Rungego-Kutty i oszacowano prawdziwe wartości współczynników  $\theta = [\beta, \gamma]$ . W tym celu wykonano minimalizację funkcji kosztu:

$$L(\theta) = \sum_{i=0}^T (I_i - \hat{I}_i)^2 \quad (13)$$

gdzie  $I_i$  oznacza prawdziwą liczbę zakażonych, a  $\hat{I}_i$  oznacza liczbę zakażonych wyznaczonych metodą numeryczną. Do minimalizacji wykorzystano metodę Nelder-Meada.

Następnie powtórzono obliczenia przyjmując za funkcję kosztu:

$$L(\theta) = - \sum_{i=0}^T I_i \ln \hat{I}_i + \sum_{i=0}^T \hat{I}_i \quad (14)$$

Wyznaczono współczynnik reprodukcji  $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ . Wyniki obu metod zestawiono w tabeli:

Metoda	$\beta$	$\gamma$	$R_0$
1	1.0	0.143	7.0
2	1.0	0.143	7.0

**Tabela 2:** Kształtowanie się liczby zarażonych osób w pewnej szkole

## 4 Wnioski

- Wykorzystane metody są podobne, ale nie identyczne, co widać na Wizualizacji 2.
- Niezmienniki metod są identyczne, co widać na Wizualizacji 4.