§ 1.2 集合的运算

1.2.3 并 union

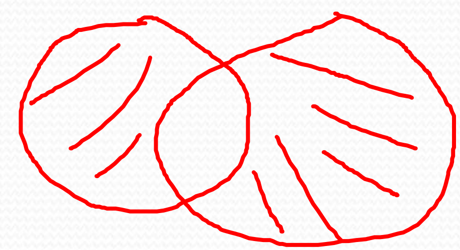
$$A \bigcup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

1.2.4 交 intersection

$$A \bigcap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

1.2.5 余 complement，设 U 为全集，

$$\overline{A} = U - A$$



1.2.6 差 difference

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

1.2.7 对称差 symmetric difference

$$A \oplus B = (A - B) \bigcup (B - A) = \{x \mid x \in A - B \vee x \in B - A\}$$

§1.2 集合的运算

例 U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

A= {1, 2, 3, 4, 5}, B = {4, 5, 6, 7, 8}.

Then

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A \cap B = \{4, 5\}$$

$$\overline{A} = \{0, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\overline{B} = \{0, 1, 2, 3, 9, 10\}$$

$$A - B = \{1, 2, 3\}$$

$$B - A = \{6, 7, 8\}$$

$$A \oplus B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$$

§1.2 集合的运算

现在将并、交、余运算进行推广

$$A \cap B \cap C = \{x \mid x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$$= \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}$$

$$A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$= \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$$

§1.2.8 集合运算的代数性质

Algebraic Properties of Set Operations

Theorem 1. 集合运算满足如下性质：

- 交换律 Commutative Properties

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cup B = B \cup A$

- 结合律 Associative Properties

3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

§1.2.8 集合运算的代数性质
Algebraic Properties of Set Operations

Theorem 1. 集合运算满足如下性质：

- 分配律 Distributive Property

5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- 幂等律 Idempotent Properties

7. $A \cap A = A$
8. $A \cup A = A$

§1.2.8 集合运算的代数性质
Algebraic Properties of Set Operations

Theorem 1. 集合运算满足如下性质：

- 复原律

  9. $\overline{\overline{A}} = A$

- 补余率 Properties of the Complement

  10. $A \cap \overline{A} = \varnothing$

  11. $A \cup \overline{A} = U$

  12. $\overline{\varnothing} = U$

  13. $\overline{U} = \varnothing$

§1.2.8 集合运算的代数性质
Algebraic Properties of Set Operations

Theorem 1. 集合运算满足如下性质：

- 德·摩根律 De Morgan's Law（对偶律）

14. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

15. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

- 0-1 律 Properties of a universal set and the empty set

16. $A \cap U = A$

17. $A \cup U = U$

18. $A \cap \varnothing = \varnothing$

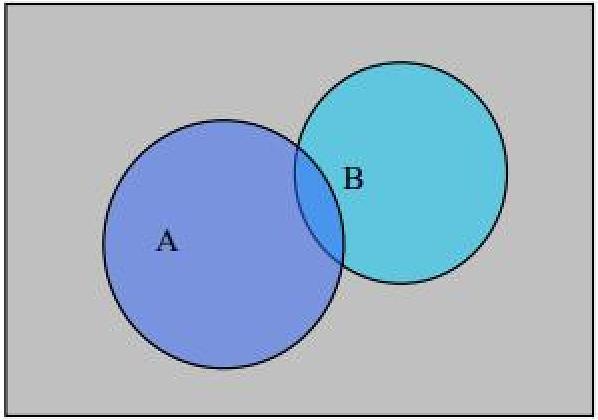
19. $A \cup \varnothing = \mathrm{A}$

§1.2.9集合运算性质的证明

Property 14: 德·摩根律 De Morgan's Law

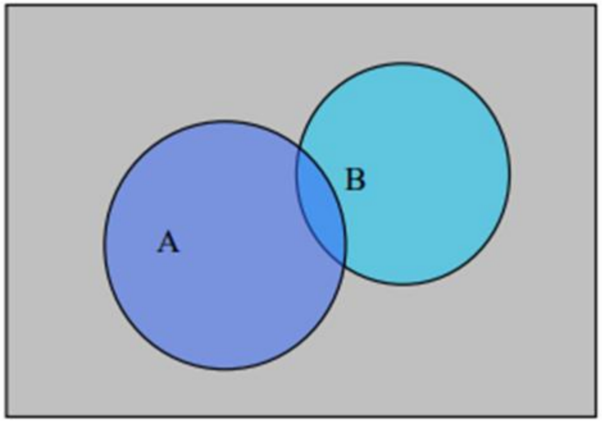
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

证明时可以由文氏图来说明两个集合互相包含， 从而说明他们相等。



§1.2.9集合运算性质的证明

Proof: For any x,



$$x \in \overline{A \cap B}$$
$$\Leftrightarrow x \notin A \cap B$$
$$\Leftrightarrow x \in A - B \vee x \in \bar{A} \vee x \in B - A \vee x \in \bar{B}$$
$$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \vee x \in \bar{B}$$
$$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B}$$

Thus, we have $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$ **and** $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$。

Hence $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

集合运算的一些其它性质

20. $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$

21. $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$

22. $A - B \subseteq A$

23. $A - B = A \cap \overline{B}$

24. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A - B = \phi$

25. $A \oplus B = B \oplus A$

26. $A \oplus A = \phi$

27. $A \oplus \phi = A$

Property 23: $A-B=A\cap\overline{B}$

Proof: **For any x,**

$$
\begin{aligned}
& x\in A-B \\
& \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B \\
& \Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\overline{B} \\
& \Leftrightarrow x\in A\cap\overline{B}
\end{aligned}
$$

Thus, we have $A-B=A\cap\overline{B}$ **.**

Example 1： $A-(B\bigcup C)=(A-B)\bigcap(A-C)$

Proof　1.　(用集合相等的定义)

For any x,

$$
\begin{aligned}
& x\in A-(B\bigcup C)\\
& \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\bigcup C\\
& \Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\\
& \Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\\
& \Leftrightarrow x\in(A-B)\wedge x\in(A-C)\\
& \Leftrightarrow x\in(A-B)\bigcap(A-C)
\end{aligned}
$$

Hence，we have

$$A-(B\bigcup C)=(A-B)\bigcap(A-C)$$

Example 1： $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

Proof 2.（用集合运算的性质）

$$A-(B\cup C)=A\cap\overline{B\cup C}$$
$$=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=(A\cap\overline{B})\cap(A\cap\overline{C})$$
$$=(A-B)\cap(A-C)$$

Example 2： 若$A \subseteq B$，则$\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Proof: Since $A \subseteq B$**, with the property 24, we have:** $A \subseteq B \Leftrightarrow A \bigcup B = B$ **,**
So $\overline{A \bigcup B} = \overline{B}$**. And with De Morgan's Law , we obtain** $\overline{A} \bigcap \overline{B} = \overline{B}$**. Use the property 24,**
$\overline{A} \bigcap \overline{B} = \overline{B} \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$**,** $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ **is gotten.**

上述集合关系和性质的证明主要使用属于（集合互相包含）和集合的运算性质来证明。

下面，我们引进一种新的方法来刻画集合。

复习与归纳：

- 集合的概念，元素，集合及其集合之间的运算，运算性质
- 集合的3种表示方法

§1.2.10 特征函数 Characteristic Function

If A is a subset of a universe U, A的特征函数the characteristic function f_A of A is defined：

$$f_A : U \rightarrow \{0,1\}, x \in U \rightarrow f_A(x) \in \{0,1\}$$

For each $x \in U$，

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

集合与其特征函数之间的对应关系是 一一对应的。

§1.2.10 特征函数 Characteristic Function

例，设 X={1,2,3,4,5}, A={2,3,4}，则

$f_A(1)=0$，$f_A(2)=1= f_A(3)= f_A(4)$，$f_A(5)=0$

§1.2.10 特征函数 Characteristic Function

Theorem 1. 特征函数的性质 Properties of characteristic functions

- 集合的交：$A \cap B$, *that is*

$$f_{A\cap B}(x) = f_A(x) f_B(x), \textbf{ for all } \boldsymbol{x}.$$

- 集合的余：$\bar{A}$, *that is*

$$f_{\bar{A}}(x) = 1 - f_A(x) \quad \textbf{for all } \boldsymbol{x}.$$

- 集合的差：$A - B$, *that is*

$$f_{A-B}(x) = f_A(x) - f_A(x) f_B(x) \textbf{ for all } \boldsymbol{x}.$$

因为$A - B = A \cap \bar{B}$，因此

$$f_{A-B}(x) = f_A(x) f_{\bar{B}}(x) = f_A(x)[1 - f_B(x)] = f_A(x) - f_A(x) f_B(x)$$

§1.2.10 特征函数 Characteristic Function

Theorem 1. 特征函数的性质 Properties of characteristic functions

- 集合的并：$A \cup B$，如果$A \cap B = \emptyset$，则

$$f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) \quad \textbf{for all x}$$

一般来说

$$f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x) \quad \textbf{for all } \boldsymbol{x}\textbf{.}$$

$$A \cup B = A \cup (B - A) = A \cup (B \cap \overline{A})$$

$$\begin{aligned} f_{A\cup B}(x) &= f_A(x) + f_{B\cap \overline{A}}(x) = f_A(x) + f_B(x)[1 - f_A(x)] \\ &= f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x) \end{aligned}$$

§1.2.10 特征函数 Characteristic Function

Theorem 1. 特征函数的性质 Properties of characteristic functions

- 集合的幂运算：$\mathrm{A} = \mathrm{A} \cap A, that\ is$

$$f_A^2(x) = f_A(x),\ \forall A \in P(X), x \in A$$

- 集合的对称差：$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A), that\ is$

$$f_{A \oplus B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - 2 f_A(x) f_B(x)$$

for all *x*.

由于$(A-B) \cap (B-A) = \phi$，故 $f_{A \oplus B}(x) = f_{A-B}(x) + f_{B-A}(x)$

$$= f_A(x) - f_A(x) f_B(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x)$$

$$= f_A(x) + f_B(x) - 2 f_A(x) f_B(x)$$

§1.2.10 特征函数

现在利用特征函数来证明集合的运算性质

例： $A-(B\bigcup C)=(A-B)\bigcap(A-C)$

Proof 1.（使用集合相等的定义）

Proof 2.（使用集合运算的性质）

§1.2.10 特征函数

例： $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

Proof 3.（使用特征函数）

For all x, we have:

$$
\begin{aligned}
f_{A-(B\cup C)}(x) &= f_A(x)-f_A(x)f_{B\cup C}(x) \\
&= f_A(x)[1-f_B(x)-f_C(x)+f_B(x)f_C(x)] \\
&= f_A(x)[1-f_B(x)][1-f_C(x)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{(A-B)\cap(A-C)}(x) &= f_{A-B}(x)f_{A-C}(x) \\
&= f_A(x)[1-f_B(x)]f_A(x)[1-f_C(x)] \\
&= f_A^2(x)[1-f_B(x)][1-f_C(x)] \\
&= f_A(x)[1-f_B(x)][1-f_C(x)]
\end{aligned}
$$

§1.2.10 特征函数

对偶律: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Proof (of the property 14)

For any x,

$$f_{\overline{A \cap B}}(x) = 1 - f_{A \cap B}(x) = 1 - f_A(x) f_B(x)$$
$$= 1 - f_A(x) + 1 - f_B(x) - f_A(x) f_B(x) - 1 + f_A(x)$$
$$+ f_B(x)$$
$$= [1 - f_A(x)] + [1 - f_B(x)] - [1 - f_A(x)][1 - f_B(x)]$$
$$= f_{\overline{A} \cup \overline{B}}(x)$$

Hence $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

§1.2.10 特征函数

分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

证明：

$$f_{A\cap(B\cup C)}(x) = f_A(x)[f_B(x) + f_C(x) - f_B(x)f_C(x)]$$

$$= f_A(x)f_B(x) + f_A(x)f_C(x) - f_A(x)f_B(x)f_C(x)$$

$$f_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x) = f_A(x)f_B(x) + f_A(x)f_C(x)$$

$$- f_A(x)f_B(x)f_A(x)f_C(x)$$

$$= f_{A\cap(B\cup C)}(x)$$

§ 1.2.11 集合的基数与容斥原理

The cardinality of a finite set

If a set A has n distinct elements, $n \in N$, n is called the cardinality of A , is denoted by |A|.

有限集合中含有不同元素的个数。

$$|\{a,b,c,d\}|=4,\ |\{a,\ \{a\}\}|=2\ ,\quad |\varnothing|=0.$$

§1.2.11 集合的基数与容斥原理

(不交集合的)加法原理The Addition Principle (of disjoint sets)

设A,B是论域U的两个有限子集，A,B不交，即$A \cap B = \emptyset$，
$|A \cup B| = |A| + |B|$

由文氏图可以得到

§1.2.11 集合的基数与容斥原理

结论1： 设A, B是论域U的两个有限子集，则

$$|A - B| = |A| - |A \cap B|$$

$$A = (A - B) \cup (A \cap B),\ (A - B) \cap (A \cap B) = \phi$$

结论2： 设A, B是论域U的两个有限子集，则

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$A \cup B = (A - B) \cup B, |A \cup B| = |A - B| + |B| = |A| + |B| - |A \bigcap B|$$

§ 1.2.11 集合的基数与容斥原理

结论3： 设A, B, C是论域U的三个有限子集，A, B, C互不相交，即$A\cap B=\emptyset$，$B\cap C=\emptyset$，$A\cap C=\emptyset$，则

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|$$

§1.2.11 集合的基数与容斥原理

定理（Theorem）　设A, B, C 是有限子集，则

$$
\begin{aligned}
&|A\bigcup B\bigcup C|\\
&=|A|+|B|+|C|-|A\bigcap B|-|A\bigcap C|\\
&\quad -|B\bigcap C|+|A\bigcap B\bigcap C|
\end{aligned}
$$

证明：

因为

$$
\begin{aligned}
&|A\cup B\cup C|=|[(A\cup B)-C]\cup C|\\
&=|A\cup B|-|(A\cup B)\cap C|+|C|\\
&=|A|+|B|-|A\cap B|-|A\cap C|\\
&\quad -|B\cap C|+|(A\cap C)\cap(B\cap C)|+|C|\\
&=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|\\
&\quad -|B\cap C|+|A\cap B\cap C|
\end{aligned}
$$

§1.2.11 集合的基数与容斥原理

思考：

对于有限集合$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，则$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$的计算。

留作思考。

§ 1.2.11 集合的基数与容斥原理

下面，我们用两个实例来验证上述结论。

Example 3: Let $A = \{a, b, c, d, e\}$ and $B = \{c, e, f, h, k, m\}$

Solution:

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, h, k, m\}$ and

$A \cap B = \{c, e\}$

$|A| = 5$, $|B| = 6$, $|A \cup B| = 9$ and

$|A \cap B| = 2$

$|A| + |B| - |A \cap B| = 9$

$|A| + |B| - |A \cap B| = |A \cup B|$

§ 1.2.11 集合的基数与容斥原理

Example 4: Let $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, e, g, h\}$ and
$C = \{b, d, e, g, h, k, m, n\}$

Solution:

$A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, g, h, k, m, n\}$,

$A \cap B = \{a, b, e\}$,

$A \cap C = \{b, d, e\}$,

$B \cap C = \{b, e, g, h\}$,

$A \cap B \cap C = \{b, e\}$

$|A| = 5$, $|B| = 5$, $|C| = 8$, $|A \cup B \cup C| = 10$,

§ 1.2.11 集合的基数与容斥原理

Example 4: Let $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{c, e, f, h, k, m\}$ *and* $C = \{b, d, e, g, h, k, m, n\}$

$|A \cap B| = 3$, $|A \cap C| = 3$, $|B \cap C| = 4$,

$|A \cap B \cap C| = 2$.

$|A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|B \cap C|-|A \cap C|+|A \cap B \cap C|$

$=5+5+8-3-3-4+2=10=|A \cup B \cup C|$

§1.2.11 集合的基数与容斥原理

推论（Corrallory）：如果全集是有限集合，则

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|$$
$$=|U|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|$$

§1.2.11 集合的基数与容斥原理

问题1：1000以内不能被5，6，8整除的整数有多少个？

U: 1,2,3,…,1000 的整数，

A: U 中能被 5 整除的整数，

B: U 中能被 6 整除的整数，

C: U 中能被 8 整除的整数，

则， $|U|=1000$, $|A|=200$, $|B|=166$, $|C|=125$.

$|A\cap B|=33$, $|A\cap C|=25$, $|B\cap C|=41$,

$|A\cap B\cap C|=8$.

$$|\overline{A\cap B\cap C}|$$
$$=1000-200-166-125+33+25+41-8$$
$$=600$$

§1.2.11 集合的基数与容斥原理

问题2：将1, 2, 3, ⋯, n做全排列，计算1不在第一个位置的排列数。

$(n-1)*(n-1)!$

A:1在第一个位置的排列数

思考：进一步，所有i, i=1, 2, . . , n都不在第i个位置的排列数。其排列数是

$$n!\{1-1/1!+1/2!-1/3!+\ldots+(-1)^n*1/n!\}$$

$$e^{-1}=1-1/1!+1/2!-1/3!+\ldots+(-1)^n*1/n!+\ldots$$

作业

- 习题1.1　　29，36
- 习题1.2　　14，24，35，38，40