§4.4 关系的性质 Properties of Relations

特殊的关系

自反和非自反关系 Reflexive and Irreflexive Relations

假定 R 是集合 A 上的关系，$\forall a \in A$，如果 $(a, a) \in R$，则称 R 是自反关系 Reflexive Relations；

$\forall a \in A$，如果 $(a, a) \notin R$，则称 R 是非自反关系 Irreflexive Relations。

例：相等关系，整除关系，小于等于关系是自反关系；小于关系是非自反关系。

§4.4 关系的性质

对称 Symmetric，非对称 asymmetric，反对称 antisymmetric Relations 关系

假定 R 是集合 A 上的关系，$\forall a,b \in A$，如果 $(a,b) \in R$ 则 $(b,a) \in R$，则称 R 是对称关系Symmetric Relations;

假定 R 是集合 A 上的关系，$\forall a,b \in A$，如果 $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R$，则称 R 是非对称关系 asymmetric relations;

假定 R 是集合 A 上的关系，$\forall a,b \in A$，如果 $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$，则称 R 是反对称关系 antisymmetric relations;

例： 相等关系是对称关系，小于关系，真包含关系是非对称关系，小于等于关系，包含关系是反对称关系。

§4.4 关系的性质

R是反对称关系等价于$a \neq b \Rightarrow (a,b) \notin R$ 或者 $(b,a) \notin R$

例：$A = \{1,2,3,4\}$, $R = \{(1,2),(2,2),(3,4),(4,1)\}$ 不是对称关系；否则$(2,1) \in R$，$(4,3) \in R$。
也不是非对称关系；否则$(2,2) \in R$，$(2,2) \notin R$，矛盾。
是反对称关系。因为 $a \neq b \Rightarrow (a,b) \notin R$ 或者$(b,a) \notin R$。

这里 $1 \neq 2$，我们有$(2,1) \notin R$，$1 \neq 3$，我们有$(1,3) \notin R$，$(3,1) \notin R$，$1 \neq 4$，我们有$(1,4) \notin R$，$2 \neq 3$，我们有$(2,3) \notin R$，$(3,2) \notin R$，$2 \neq 4$，我们有$(2,4) \notin R$，$(4,2) \notin R$，$3 \neq 4$，我们有$(4,3) \notin R$。

§4.4 关系的性质

假定 R 是集合 A 上的关系， $\forall a,b,c \in A$，如果$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$，则称 R 是传递关系
Transitive relations

例：大于等于，小于等于，恒等，整除关系，包含关系，兄弟关系等都是传递关系。

显然，数的平方关系不满足传递性。
a 是 b 的平方，b 是 c 的平方，但是 a 不是 c 的平方。

§4.4 关系的性质

根据关系、关系矩阵与图的性质，我们可以总结如下（考虑有限论域）：

自反关系，主对角线元素为 1，图中顶点有环，$I_A \subseteq R$；

非自反关系，主对角线元素为 0，图中顶点没有环，$I_A \nsubseteq R$；

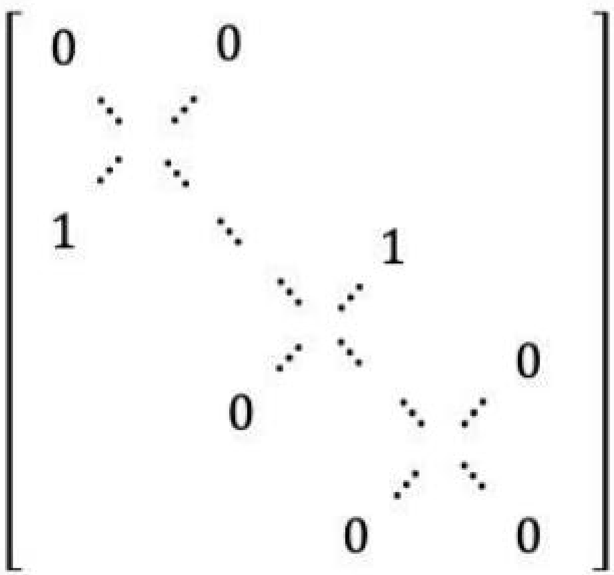
对称关系，矩阵是对称矩阵，图中的两顶点之间如果有边，则一定是一对方向相反的有向边；

非对称关系，矩阵中的元素满足：$r_{ii} = 0, r_{ij} = 1, i \neq j \Rightarrow r_{ji} = 0$

§4.4 关系的性质

图中两顶点之间可能没有边，如果有边，则一定是一条单独的有向边，并且顶点没有环；

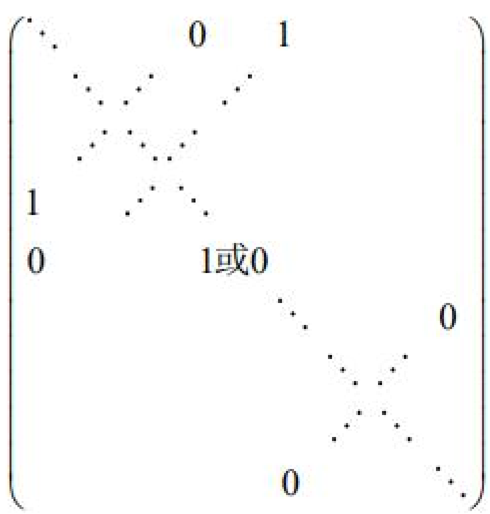
非对称关系的矩阵，如下形式：



§4.4 关系的性质

反对称关系，矩阵中元素的下标满足：$i \to j$且$j \to i \Rightarrow i = j$，即$r_{ij} = 1$且$r_{ji} = 1 \Rightarrow i = j$，$i \neq j \Rightarrow r_{ij} = 0$或$r_{ji} = 0$

反对称关系的矩阵，如下形式：



§4.4 关系的性质

传递关系，图中 1，2 两顶点之间有边，2,3两顶点之间有边，则从 1 到 3 一定有边。称为顶点相连，或足标相连。

引理：关系 R 是传递的当且仅当 $R^2 \subseteq R$ **。**

证明：R 是传递关系，∀a,b,c∈A，如果

(a,b)∈R ∧ (b,c)∈R ⇒ (a,c)∈R，

§4.4 关系的性质

即, R(a,b)=1 且 R(b,c)=1,则 R(a,c)=1,

R(a,b) ∧ R(b,c)≤R(a, c), 对于所有

的 b 均成立, 因此，我们有

$$R^{(2)}(a,c)=\bigvee_{b\in A}(R\ (a,b)\wedge R\ (b,c))\leq R(a,c)$$

即， $R^2\subseteq R$

反之， $R^2\subseteq R$，并且(a,b)∈R ∧ (b,c)∈R,

则有

$$R(a,c)\geq R^{(2)}(a,c)=\bigvee_{x\in A}(R\ (a,x)\wedge R\ (x,c))=1$$

因此， $R(a,c)=1$，即，R 是传递关系。

§4.4 关系的性质

利用关系合成运算“ ∘ ”的性质（单调性）：

1） $R \subseteq S \Rightarrow R \circ T \subseteq S \circ T$；

2） $R \subseteq S \Rightarrow T \circ R \subseteq T \circ S$

因此，我们有：

§4.4 关系的性质

定理 1：如果关系 **R** 是传递的，则对于所有的 n≥1，有 $R \supseteq R^2 \supseteq R^3 \supseteq \cdots R^n \supseteq \cdots$.

证明：1）n=2，根据传递性，有 $R^2 \subseteq R$

2）假设 n=k>2 成立，即 $\boldsymbol{R^k} \subseteq \boldsymbol{R^{k-1}}$,

3）考虑 n=k+1，根据合成运算的单调性：

根据 $R \subseteq S \Rightarrow R \circ T \subseteq S \circ T$，则有 $\boldsymbol{R^{k+1}} \subseteq \boldsymbol{R^k}$,

因此，$R \supseteq R^2 \supseteq R^3 \supseteq \cdots R^n \supseteq \cdots$

§4.4 关系的性质

定理：关系 **R** 是自反关系，则 $R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq \cdots R^n \subseteq \cdots$。

证明：$For\ every\ (i, j),$

$$r_{ij}^{(2)} = \bigvee_{k=1}^{n}(r_{ik} \wedge r_{kj}) \geq r_{ii} \wedge r_{ij} = 1 \wedge r_{ij} = r_{ij}$$

$so,\ we\ have\ R \subseteq R^2$

根据合成运算的单调性和数学归纳法，则

有：$R^n \subseteq R^{n+1},$

因此，$R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq \cdots R^n \subseteq \cdots$

§4.4 关系的性质

$R(A_1)=\{y\in B \mid x\in A_1$ 且 $(x,y)\in R\}$

$A_1=\{x\}$时，$R(x)=\{y\in B \mid (x,y)\in R\}$, x 关于关系 R 的像集。即，R 中的元素(序对)中，第一个元素是 x，其序对中第二个元素所组成的集合。

定理 2　R 是 A 上关系，则

(a) R 自反关系，则$\forall a\in A$, $a\in R(a)$；

(b) R 对称关系，则 $a\in R(b)$ 当且仅当 $b\in R(a)$；

(c) R 传递关系，则 $b\in R(a)$, $c\in R(b) \Rightarrow c\in R(a)$

§4.4 关系的性质

证 明　1) 自 反 关 系 ， $\forall a \in A$, $R(a,a)=1$,

$(a,a) \in R$, 所以 $a \in R(a)$。

2) 对称关系，$\forall a \in A$, $a \in R(b)$，$(b,a) \in R$, 因为 R 是对称关系, 故, $(a,b) \in R$, 即 $b \in R(a)$; 反之，也成立。

3) $b \in R(a)$, $c \in R(b)$，即$(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$, 因为 R 是传递关系，故，$(a,c) \in R$,
因此， $c \in R(a)$.

§4.4 关系的性质

序关系是一个重要的概念

对于集合 A ，偏序关系（ partial order relation）R

1. 自反性 Reflexive：$\forall a \in A$, $(a,a) \in R$

2. 反对称性 antisymmetric：

$(a,b) \in R \land (b,a) \in R \Rightarrow a=b$

3. 传递性 Transitive：

$(a,b) \in R \land (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$.

称（A, R）为偏序集。

例如，对于集合(幂集 P(A)）是偏序关系，(P(A), ⊆)称为偏序集。

≤对于集合（区间 I = [0, 1]）是偏序关系，（I, ≤ ）称为偏序集。（R, ≤ ）是偏序集

进一步，A={a, b, c}，则(P(A), ⊆)可以排列树状结构。而（I, ≤ ）可以排列串型结构。

§4.4 关系的性质

全序关系（线性序关系 linear order relation）

偏序关系中的条件 1, 2, 3, +（ 4. $\forall a, b \in A$, 有$(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$. 可比较性）称为全序关系。

例： ≤对于区间 $I = [0, 1]$是全序关系，（I， ≤ ）称为全序集。另外，实数中的大于等于≥，小于等于≤，是全序关系。

作业： 习题4.4 12，16，20，24