第四章 关系和有向图

Relations and Digraphs

关系是计算机科学和离散数学中的一个重要的概念，可分为二元，三元，多元关系。

需要指出的是，关系也是一种集合。因此，集合的诸多运算也对应着关系的相应运算，关系还对应着映射（变换、函数）等概念，故，关系在理论和应用上具有十分重要的意义。其中，De Morgan 和 Russell 做了很多工作。

§4.1 乘积集合和划分

Product sets and Partitions

乘积集合 Product sets

以 n=2 为例。

设 A, B 是两个非空集合，称集合

$$A\times B=\{(a,b)\mid \text{其中 } a\in A,\ b\in B\}$$

为集合 A 与 B 的乘积集合或笛卡尔乘积。

例如，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{d,e\}$，则

$$A\times B=\{(a,d),(a,e),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e)\}$$

§4.1 乘积集合和划分

Product sets and Partions

乘积集合的特征函数表示

$$(A\times B)(x,y)=A(x)\wedge B(y)$$

一般来说，我们可以用列表或矩阵的形式来表示乘积集合。其每一个元素, 如，(a, d) 就构成一个序对，n=2, 称为二元序对，或者二元组。

反之，$B\times A=\{(d,a),(e,a),(d,b),(e,b),(d,c),\ (e,c)\}$

考虑到元素的有序性，一般来说，$AB\neq BA$

当 A，B 是有限的非空集合时，则我们有 $|A\times B|=|A|\times|B|$

§4.1 乘积集合和划分

Product sets and Partions

注：

1)元素的有序性，不能颠倒。

2)如何定义序对的序关系？“>=”，Open problem

(a, b)=(x, y) if and only if a=x and b=y.

其实，(乘积集合)这个概念并不新鲜。

平面直角坐标系（笛卡尔坐标），X Y，点 P（x, y）

§4.1 乘积集合和划分

Product sets and Partions

空间直角坐标系，n 维空间。进一步，我们考虑一般情形，

$A_1 \times A_2 \times \cdots\cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n) \mid$ 其中，$a_i \in A_i$, $i=1, 2, \cdots\cdots, n\}$

称为 n 元组

多元乘积集合的特征函数表示

$$(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)$$

§4.1 乘积集合和划分

Product sets and Partions

有序对，元素 a_1， a_2, ……, a_n 根据一定的顺序的元素组合，又称为序偶（序对），记为（a_1, a_2, ……, a_n）。

其中，a_1 是第一元素，a_2 是第二元素，依次类推。

§4.1 乘积集合和划分
Product sets and Partions

接下来，我们考虑乘积集合的运算性质

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

注记：

$(A\cup B)\times(C\cup D)\neq(A\times C)\cup(B\times D)$

$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times D)$

数据库是关系（n 元组）的一个重要应用。

§4.1 乘积集合和划分

Product sets and Partions

划分 Partion

设 A 为一个非空集合，A 的划分 $P=\{A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n\}$，指的是由 A 的一些非空子集 A_i 所组成的一个集合，A_i 满足：

$A= A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n$, $A_i \neq \varnothing$ ，$A_i \cap A_j=\varnothing$, $i, j=1, 2, \cdots\cdots, n$. 记 $P=\{A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n\}$，称 P 是 A 的一个划分。（不交不漏）

其中，$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ 称为 A 的分块。显然，A 的划分 P 是 A 的幂集 P(A) 的子集。

§4.1 乘积集合和划分

Product sets and Partions

例如，$A=\{a, b, c, d, e, f, g\}$，若

$A_1=\{a, b, c\}$，$A_2=\{d, e\}$，$A_3=\{f, g\}$，则 $P=\{A_1, A_2, A_3\}$ 是 A 的一个划分。

另外，$A_1=\{a, b\}$，$A_2=\{c, d, e, f\}$，$A_3=\{g\}$，则 $P=\{A_1, A_2, A_3\}$ 也是 A 的一个划分。

注释：划分不是唯一的（根据不同的要求、目的、目标、想法、作用，可以得到不同的划分）。对于一个集合来说，我们允许有多种划分。每种划分完全取决于其划分的要求和目的。

§4.2 关系与关系矩阵
Relations and Matrix

概述：关系指的是集合中元素之间的某种相关性。显然，两个元素之间的相关称为二元关系，三个元素之间的相关称为三元关系n个元素之间的相关称为n元关系。
对于关系，我们用符号 R 来表示。以二元关系为例。

关系 $R \subseteq A \times B$, R 称为 A 到 B 上的一个关系，a Relation from A to B. 指的是$A \times B$的一个子集。

$R \subseteq A \times A$, R 称为 A 上的一个的关系， a Relation on A. 指的是$A \times A$的一个子集.

特殊情形，空关系 $R = \Phi$（空集），全关系$R = A \times A$（全集）

§4.2 关系与关系矩阵

Relations and Matrix

显然，关系 R 是一个特殊的集合（乘积集合的子集），它的论域(全集)是乘积集合。因此，集合的运算、性质对于关系全部适用，所以 R 或者称为关系或者称为乘积集合的子集，因此，关系具有集合的属性,有交、并、余等运算。

$(a, b) \in R$, 称 a 与 b 是 R 相关的，记作 aRb；

否则，$(a, b) \notin R$，称 a 与 b 不是 R 相关的，

记作 $a\not{R}b$.

按照特征函数的记法，我们简记为，

$R(a, b)=1$ 或 0。

§4.2 关系与关系矩阵

Relations and Matrix

例 1：设 $A=\{1,2,3,4\}$，

$I_A=\{(a,b)\mid a,b\in A, a=b\}$，

$I_A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$是 A 上的相等关系。

例 2　设 $A=\{1,2,3,4\}$,

$Q=\{(a,b)\mid a,b\in A, a<b\}$是 A 上的小于关系,

则

$Q=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$。

例3　设 $A=\{1,2,3,4\}$,

$P=\{(a,b)\mid a,b\in A, a\mid b\}$是 A 上的整除关系，

则 $P=I_A\cup\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,4)\}$。

§4.2 关系与关系矩阵
Relations and Matrix

类似于第一章，集合可以由特征函数来刻画(集合与特征函数的等价性)，针对有限论域，其可以用向量(其元素值可用0, 1 表示)来表示。

显然，关系也可以由其特征函数来表示，针对有限论域的乘积集合，其特征函数，我们可以使用矩阵来表示，称该矩阵为关系矩阵。矩阵中的元素就是其特征函数值，1 或0，满足关系为 1，不满足关系为 0，故构成布尔矩阵（见第一章）。

§4.2 关系与关系矩阵

Relations and Matrix

一般来说，元素 a_i 与 b_j 满足关系 R，则有 $R(a_i,b_j)=1$，简记为 $r_{ij}=1$，否则 $R(a_i,b_j)=0$，简记为 $r_{ij}=0$。

因此，关于有限论域（A 和 B 是有限集合），根据关系 R，我们有关系矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$。

§4.2 关系与关系矩阵 Relations and Matrix

关系矩阵 M_R The Matrix of a Relation，

由关系 R 诱导的矩阵，称为关系矩阵 M_R 。

（有限论域上的关系 R 的特征函数表示）

设 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\},B=\{b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n\}$

关系 R⊆A×B，关系 R 可以用矩阵 $M_R=[m_{ij}]$来表示，

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & (a_i,b_j)\in R\\0 & (a_i,b_j)\notin R\end{cases}$$

$$M_{I_A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

§4.2 关系与关系矩阵
Relations and Matrix

$$M_Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

反之，给定一个矩阵 M，我们可以得到一个关系，记为 R_M。

§4.2 关系与关系矩阵

Relations and Matrix

例如，设 $A=\{a_1,a_2,a_3\},B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

则

$$R=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_1,b_4),(a_2,b_2),(a_2,b_4),(a_3,b_3)\}$$

因此，以后我们就不再区分关系R与关系矩阵M_R，统一使用R来表示关系或有限论域上的关系矩阵。

§4.2 关系与关系矩阵 Relations and Matrix

由关系派生的集合 Sets Arising from Relations:

定义域 Dom(R) domain of R

假定关系 $R \subseteq A \times B$,

$\mathrm{Dom}(R)=\{x \mid \exists y \in B, (x,y) \in R\} \subseteq A$，即，关系 R 中的元素（序对）的第一个元素所组成的集合；

$\mathrm{Dom}(I_A)=\{1,2,3,4\}=A$

$\mathrm{Dom}(Q)=\{1,2,3\}=A-\{4\}$

$\mathrm{Dom}(P)=\{1,2,3,4\}=A$

§4.2 关系与关系矩阵 Relations and Matrix

值域 Ran(R)　range of R

$Ran(R)=\{y \mid \exists x \in A, (x, y) \in R\} \subseteq B$，即，关系 R 中的元素（序对）的第二个元素所组成的集合。

$Ran(I_A)=\{1, 2, 3, 4\}=A$

$Ran(Q)=\{2, 3, 4\}=A-\{1\}$

$Ran(P)=\{1, 2, 3, 4\}=A$

§4.2 关系与关系矩阵

Relations and Matrix

设 R 是 A 到 B 的一个关系，$R\subseteq A\times B$，$A_1\subseteq A$，

则 A_1 关于关系 R 的像集 $R(A_1)$ 为

$R(A_1)=\{y \mid \exists x\in A_1, (x, y)\in R\}\subseteq B$, the R-relative set of A_1.

即，关系 R 中的元素（序对）的第一个元素属于 A_1，其序对所对应的第二个元素所组成的集合。

特别地，

$A_1=\{x\}$, $R(\{x\})=R(x)=\{y\in B \mid (x, y)\in R\}$，称为 x 关于关系 R 的像集。同时，记 $R(x)=R(\{x\})=\{y\in B \mid (x, y)\in R\}$。

§4.2 关系与关系矩阵 Relations and Matrix

例如，$A=\{a, b, c\}$, $B=\{u, v, w\}$, R 是 A 到 B 的关系，则 $A\times B=\{(a, u), (a, v), (a, w), (b, u), (b, v), (b, w), (c, u), (c, v), (c, w)\}$，

R 是 $A\times B$ 的一个子集合。假设

$$R=\{(a, u), (a, v), (b, u), (c, v), (c, w)\},$$

如果 $A_1=\{a, c\}$, 则 $R(A_1)=\{u, v, w\}$。

§4.2 关系与关系矩阵
Relations and Matrix

实例：

设 $A=\{$北京, 山西, 吉林, 江西$\}$ 是由我国部分省或直辖市构成的集合, $B=\{$故宫博物院, 天坛公园, 颐和园, 八达岭长城, 云冈石窟, 五台山, 伪满皇宫博物院, 长白山, 庐山, 井冈山$\}$ 是 2007 年荣膺为首批国家 5A 级旅游景区的部分景区构成的集合. 对于下面的省市与辖区内景区关系

$$\begin{aligned}R=\{&(\text{北京},\text{故宫博物院}),(\text{北京},\text{天坛公园}),(\text{北京},\text{颐和园}),(\text{北京},\text{八达岭长城}),\\&(\text{山西},\text{云冈石窟}),(\text{山西},\text{五台山}),(\text{吉林},\text{伪满皇宫博物院}),\\&(\text{吉林},\text{长白山}),(\text{江西},\text{庐山}),(\text{江西},\text{井冈山})\},\end{aligned}$$

有

$R(\text{北京})=\{$故宫博物院, 天坛公园, 颐和园, 八达岭长城$\}$, 该集合表示北京市的首批国家 5A 级景区;
$R(\text{吉林})=\{$伪满皇宫博物院, 长白山$\}$, 该集合表示吉林省的首批国家 5A 级景区;
$R(\{\text{山西},\text{江西}\})=\{$云冈石窟, 五台山, 庐山, 井冈山$\}$,
该集合表示山西和江西两省的首批国家 5A 级景区.

§4.2 关系与关系矩阵

Relations and Matrix

定理 1 假定关系 $R \subseteq A \times B$, $A_1 \subseteq A$, $A_2 \subseteq A$, 则

(a) If $A_1 \subseteq A_2$, then $R(A_1) \subseteq R(A_2)$.

(b) $R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$.

(c) $R(A_1 \cap A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2)$.

证明：（a）$\forall\ y \in R(A_1)$, *then there exists* $x \in A_1$ *such that*

$(x, y) \in R$, *so we have* $x \in A_2$ *and* $(x, y) \in R$

therefore, we have $y \in R(A_2)$

§4.2 关系与关系矩阵 Relations and Matrix

定理 2　假定关系 $R \subseteq A \times B$，$S \subseteq A \times B$. 如果 $\forall a \in A, R(a)=S(a)$，则 $R=S$.

证明：

$\forall (a,b) \in R$, $and\ R(a) = \{y \mid (a,y) \in R\} = S(a)$

$then\ b \in R(a) = S(a)$, $thus\ we\ have\ (a,b) \in S$,

$we\ have\ R \subseteq S$.

$Similarly,\ we\ have\ S \subseteq R$.

$Therefore,\ we\ have\ R = S$

§4.2 关系与关系矩阵 Relations and Matrix

关系与有向图 The Digraph of a Relation

设 A 是一个有限集合，R 是 A 上的一个关系， $R \subseteq A \times A$，我们可以使用图来表达。

称序对 $G = (V, E)$为图。其中，V 表示顶点集合，E 表示边集合（顶点之间的连线，称之为边）。进一步，如果顶点之间的连线具有方向性，则称该图为有向图。

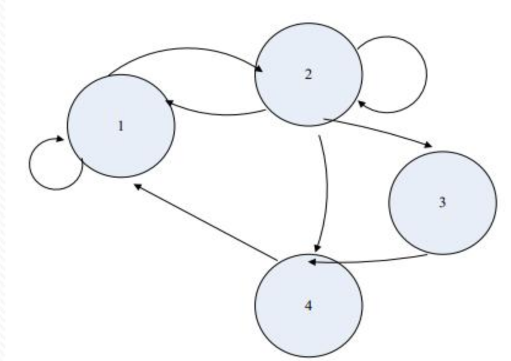
§4.2 关系与关系矩阵

例如，设 $A=\{1,2,3,4\}$，R 是 A 上的一个关系，记

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),\ (2,4),(3,4),(4,1)\}$$

则由关系 R 可以得到如下的关系矩阵

$$R=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$



同时，设顶点为 1, 2, 3, 4，R 中的元素就构成顶点之间的边，于是就可以得到如上图

R中的元素(a_i, a_j)表示在图中存在从顶点 i 到顶点 j 的一条边，特别地，若 a_i=a_j，则表示在顶点 i 处存在一条环路。

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),\ (2,4),(3,4),(4,1)\}$$

顶点的入度：进入该顶点的边数；

顶点的出度：离开该顶点的边数。

§4.2 关系与关系矩阵

由上述可知，针对有限论域，关系、矩阵和图是相互等价的。即，

由关系可以确定矩阵和图，由矩阵可以确定关系和图，由图可以确定关系和矩阵，三者相互之间等价。

作业： 习题4.1　　34，36

习题4.2　　8，18，24，26