§4.3 关系和图的路径

Paths in Relations and Digraphs

假定 R 是集合 A 上的一个关系，从顶点 a 到顶点 b 的长度为 n 的路径指的是，存在一个序列 π： a, x_1, x_2, ……, x_{n-1}, b

即，以顶点 a 为起点，顶点 b 为终点，中间有 n-1 个不同的顶点 x_1, x_2, ……, x_{n-1} 且满足 aRx_1， x_1Rx_2, ……， $x_{n-1}Rb$，因此，它们构成一条链（路）。

例：1, 2, 5, 4, 3 是长度为 4 的路径； 1, 2, 5, 1 是长度为 3 的路径。

特别地，起点和终点为同一个顶点的路径称之为环。如上述中的 1, 2, 5, 1.

§4.3 关系和图的路径

设 π_1: $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$, 和 π_2: $b_1, b_2, \cdots, b_{m+1}$,

分别是长度为 n 和 m 的两条路径，如果 $b_1 = a_{n+1}$ （首尾相连），则其合成

$\pi_2 \circ \pi_1$: $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}, b_2, \cdots, b_{m+1}$, 就是长度为n+m 的路径。

§4.3 关系和图的路径

接下来，我们定义关系的合成运算“∘”，关系的合成运算又被称为关系的乘法，在有限论域中，就构成矩阵的乘法。

设R是A到B的一个关系，S是B到C的一个关系，则称$R \circ S$是 A 到 C 的复合（合成）关系，指的是

$$(x,z) \in R \circ S \Leftrightarrow \exists y \in B \ \textit{such that} \ (x,y) \in R \ \textit{and} \ (y,z) \in S$$

§4.3 关系和图的路径

例如：$A=\{1,2,3,4\},B=\{3,5,7\},C=\{1,2,3\},R=\{(2,7),(3,5),(4,3)\},S=\{(3,3),(7,2)\}$,则换成矩阵表示，有：

$$R=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\text{则}\ R\circ S=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

即

$R\circ S\subseteq A\times C$,是乘积集合$A\times C$的子集，并且

$A=\{1,2,3,4\},C=\{1,2,3\}$

$(R\circ S)_{22}=1,\ (R\circ S)_{43}=1$, 故，$R\circ S=\{(2,2),(4,3)\}$

§4.3 关系和图的路径

另外，我们也可以在 R，S 中来寻找中间桥梁(节点)，使得 x, y, z 连接起来(顺起来)。

例如，$(2,7)\in R$, $(7,2)\in S$, $2\to7\to2$，即 $(2,2)\in R\circ S$

$(4,3)\in R$, $(3,3)\in S$, $4\to3\to3$，即 $(4,3)\in R\circ S$

因此，$R\circ S=\{(2,2),(4,3)\}$，

有限论域上的关系合成变成关系矩阵的乘法。

例如：A={1,2,3,4},R,S 是 A 上的关系，
R={(1,2),(1,3),(3,4)},S={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)},则
$R\circ S=S\circ R=R$

§4.3 关系和图的路径

$$R=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

则 $R\circ S=S\circ R=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=R$

上述关系矩阵 S 就是 4 阶单位矩阵（单位元），关于矩阵乘法“∘”

§4.3 关系和图的路径

实例：

设 $A=\{\mathrm{App}_1,\mathrm{App}_2,\mathrm{App}_3,\mathrm{App}_4\}$ 是 4 款手机应用软件的集合，$B=\{\mathrm{OS}_1,\mathrm{OS}_2,\mathrm{OS}_3,\mathrm{OS}_4\}$ 是 4 个移动操作系统的集合，$C=\{M_1,M_2,M_3\}$ 是 3 款手机的集合. 从 A 到 B 的关系

$$\begin{aligned}R=\{&(\mathrm{App}_1,\mathrm{OS}_1),(\mathrm{App}_1,\mathrm{OS}_2),(\mathrm{App}_2,\mathrm{OS}_1),(\mathrm{App}_2,\mathrm{OS}_3),\\&(\mathrm{App}_3,\mathrm{OS}_2),(\mathrm{App}_3,\mathrm{OS}_3),(\mathrm{App}_3,\mathrm{OS}_4),(\mathrm{App}_4,\mathrm{OS}_4)\},\end{aligned}$$

其中 $(\mathrm{App}_i,\mathrm{OS}_j)$ 表示应用软件 App_i 可运行于操作系统 OS_j 中；从 B 到 C 的关系

$$S=\{(\mathrm{OS}_1,M_1),(\mathrm{OS}_1,M_2),(\mathrm{OS}_2,M_2),(\mathrm{OS}_3,M_3),(\mathrm{OS}_4,M_2),(\mathrm{OS}_4,M_3)\},$$

其中 (OS_i,M_j) 表示 M_j 款手机安装了操作系统 OS_i. 考虑 R 和 S 的复合，有

$$\begin{aligned}R\circ S=\{&(\mathrm{App}_1,M_1),(\mathrm{App}_1,M_2),(\mathrm{App}_2,M_1),(\mathrm{App}_2,M_2),(\mathrm{App}_2,M_3),\\&(\mathrm{App}_3,M_2),(\mathrm{App}_3,M_3),(\mathrm{App}_4,M_2),(\mathrm{App}_4,M_3)\},\end{aligned}$$

该复合关系正好表明每款应用软件可以安装到哪几款手机上.

§4.3 关系和图的路径

关系合成的性质：

单调性：$S \subseteq T \Rightarrow \begin{cases} R \circ S \subseteq R \circ T; \\ S \circ R \subseteq T \circ R; \end{cases}$

分配律：$\begin{cases} R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T); \\ R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T); \end{cases}$

$\begin{cases} (S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R); \\ (S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R); \end{cases}$

结合律：$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T;$

§4.3 关系和图的路径

我们可以由R出发，来定义关系R的幂运算，如，$R^2, R^3, \ldots, R^n$

关系的幂运算（有限集合）定义如下：

$$R^2 = R \circ R,$$

$$R^n = R^{n-1} \circ R$$

$$xR^2y \Leftrightarrow \exists x_1, xRx_1, x_1Ry,$$

$$xR^3y \Leftrightarrow \exists x_2, xR^2x_2, x_2Ry \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, xRx_1, x_1Rx_2, x_2Ry \ \ldots\ldots$$

$$xR^ny \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}, xRx_1, x_1Rx_2,\ x_2Rx_3, \cdots\cdots, x_{n-1}Ry$$

§4.3 关系和图的路径

进一步，有

约定：$R^0=I$(恒等关系)，则对于自然数$m.n$,有 $R^n\circ R^m=R^{n+m},(R^n)^m=R^{nm}$

给定自然数 m，关于 n 可以使用数学归纳法进行证明。

针对有限论域,我们可以进行布尔矩阵的幂运算计算，即，R 的幂次方。

例：$A=\{a,b,c,d,e\}$，R 是 A 上的关系，

$R=\{(a,a),(a,b),(b,c),(c,d),(c,e),(d,e)\}$,

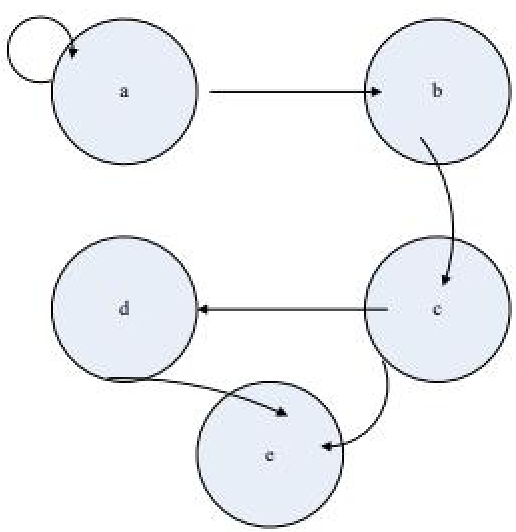
关系 R 的图表示如下。

§4.3 关系和图的路径

例：$A=\{a,b,c,d,e\}$，R 是 A 上的关系，

$$R=\{(a,a),(a,b),(b,c),(c,d),(c,e),(d,e)\},$$

关系 R 的图表示如下：



一方面，我们可以从图中来寻找路径。

因为 aRa 和 aRa, 所以 aR^2a,

因为 aRa 和 aRb, 所以 aR^2b,

因为 aRb 和 bRc, 所以 aR^2c,

因为 bRc 和 cRd, 所以 bR^2d,

因为 bRc 和 cRe, 所以 bR^2e,

因为 cRd 和 dRe, 所以 cR^2e.

于是，我们有，

$$R^2=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,d),(b,e),(c,e)\}$$

§4.3 关系和图的路径

另一方面，我们也可以通过计算来得到。

我们知道，关系 R 可以由矩阵 R 来表示, 即，

$$R=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad R^2=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$R^2=R\circ R,\ \ r_{ij}^{(2)}=\bigvee^{n}(r_{ik}\wedge r_{kj})$$

这样，我们有， $R^2=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,d),(b,e),(c,e)\}$

§4.3 关系和图的路径

显然，相对于看图来说，代数计算显然更方便一些。因为有时图形复杂，看图容易出现偏差。

进一步，定义 R 的关联关系(R^{∞})， connectivity relation for R 如下：

x R^{∞}y 表示在 R 中存在从 x 到 y 的某条路径。

因此，我们有 $R^{\infty}=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^{n}$

§4.3 关系和图的路径

假定 R 是集合 A 上的关系，R^* 是 R 的可达关系，x R^* y 指的是 x=y 或 x R^∞y，即，x=y 或存在从 x 到 y 的某条路径。

因此，用矩阵的语言来表示，我们有

$R^* = I_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，其中 I_n是 n 阶单位矩阵。

§4.3 关系和图的路径

复习与归纳：

1. 关系的合成运算
设R是A到B的一个关系，S是B到C的一个关系，则$R \circ S$是 A 到 C 的复合（合成）关系。

2. 合成运算的性质（单调性）

3. 关系的幂运算及性质
可以由 R 出发，来定义关系 R 的乘幂运算 $R^2, R^3, \cdots, R^n$,

约定：$R^0 = I$(恒等关系)，则对于自然数$m.n$,有

$$R^n \circ R^m = R^{n+m}, (R^n)^m = R^{nm}$$

作业

习题4.3　　10，14，20，26，30，32