第一章 基础知识

Fundamentals

§1 集合论基础

- 集合论起源于1874年，29岁的德国数学家康托(Cantor)在“数学杂志”发表关于无穷集合论的第一篇革命性文章，奠定了集合论的思想。
- 英国哲学家、数学家、逻辑学家罗素称之为“可能是这个时代所能夸耀的最巨大的工作”，是现代数学的基础。
- 集合语言是描述现代数学知识的必不可少的工具。

§1.1 集合与子集Sets and Subsets

康托描述集合：所谓集合是指人们思想中将一些确定的、彼此完全不同的客体看作为一个整体，这些客体称为该集合的元素。

简单来说，具有某种特性的全体对象，构成一个整体，这个整体称为集合；集合中的对象称为该集合的元素。

例：英文 26 个字母， $x^2-1=0$ 的根。

表示方法

- 枚举(穷举)
- 文氏图
- 谓词表示(描述)

谓词表示(描述)

A = {x | P(x)}

P(x)是谓词Predicate，表示元素x具有某种属性, A是具有性质P的全体对象的集合，x是集合A的元素。

例：

$$A = \{x \mid 0 \le x \le 3 \wedge x\text{是实数}\}$$

约定，$\wedge$：并且，and，$\vee$：或者，or

$\exists$：存在，exist，$\forall$:一切，any

具有某种属性的全体对象,称之为集合。记号(英文大写字母,A,表示集合，英文小写字母,a,表示元素)和记法(元素可以列举，也可以满足某种性质)，元素与集合是属于或者不属于的关系。用符号∈ , ∉表示。

$a \in A$, ***a* is in *A*, *a* is an element of *A*.**

$f \notin A$

一般来说，集合A={a,b,c,d}中的元素不考虑先后次序(无序性)，也没有重复元素(无重复性)。

§1.1.2 集合的例子

自然数集：The set of positive integers and zero

$$N = \{0,1,2,3,\ldots\}$$

整数集：The set of all integers(positive and negative Integers and zero)

$$Z = \{\ldots, -2, -1,0,1,2\ldots\}$$

正整数集：The set of all positive integers

$$\mathrm{Z}^{+} = \{1,2,3,\ldots\}$$

有理数集：The set of all rational numbers

$$\mathrm{Q} = \{\frac{n}{m} | m,n \in Z, m \neq 0\}$$

实数集：The set of real numbers

$$R = \{x | x\text{是实数}\}$$

空集：The empty set， $\emptyset$

§ 1.1.3 子集

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

集合相等（互相包含）

$A = B$ **if and only if** **for every** $\boldsymbol{x}$**,**
$x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

§ 1.1.3 子集

例　**For any set** A, $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$,

$\{a,c\} \subseteq \{a,b,c\}$, $\{\{a\}\} \subseteq \{a,\{a\}\}$

$Z^{+} \subseteq N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$

空集Ø是任何集合的子集

§1.1.4 真子集 proper subset （真包含关系）

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

$$\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

$$Z^{+} \subset N \subset Z \subset Q \subset R$$

§1.1.5全集universe(论域)U

讨论对象的范围

We always assume that for each discussion there is a universal set U , for any set A in the discussion , A$\subseteq$U, for any element x in the discussion， x$\in$U。

思考：子集（包含关系），真子集（真包含关系）

- 对于集合来说，似乎构成一种序关系（大小关系）？
- 相比于实数的大小序关系，这种序关系有什么性质？

§1.1.6 Venn diagrams（文氏图）

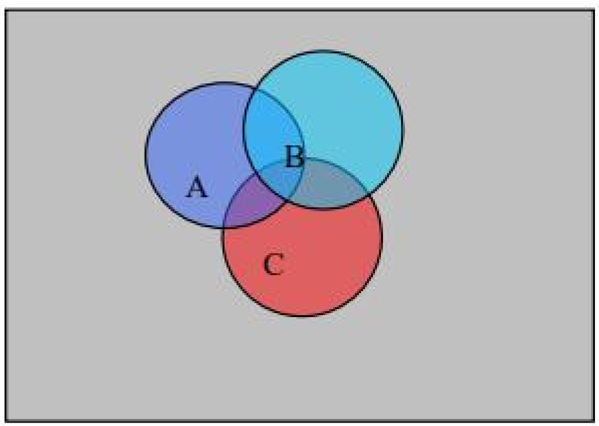
使用几何图形来形象地描述集合之间的关系

JohnVenn是十九世纪英国的哲学家和数学家，1880年，维恩（Venn）在《论命题和推理的图表化和机械化表现》一文中首次采用固定位置的交叉环形式，封闭曲线（内部区域），来表示集合及其关系。1881年，称这样的图形为文氏图，也叫韦恩图或维恩图。

Diagrams used to show relationships between sets after the British logician John Venn.

§1.1.6 Venn diagrams （文氏图）

例如：The Universe U is the rectangular box. Each set is represented by a circle and its interior. All possible combinations of the sets must be represented



§ 1.1.7 幂集 powerset 与集合族

$$P(A)=\{B \mid B\subseteq A\}$$

由集合A的全体子集所组成的集合。

$$P(\{a\})=\{\varnothing,\{a\}\}$$

$$P(\{a,b\})=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$

$$P(\{a,b,c\})=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

$$P(\{a,\{a\}\})=\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$$

$$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$$

§1.1.7 幂集 powerset 与集合族

C是一个集合，若C中的元素都是集合，则称C为集合族，若C={ S_d | d∈D}，则称D为集合族C的标志集（指标集）。

基数：有限集合A中所包含元素的个数，称为该集合的基数，记为|A|。因此，我们有：

$$\text{If } |A| = n, \quad \text{then } |P(A)| = 2^n.$$