概率的公理化

古典概型假设样本空间含有限个样本点,本节考虑推广到一般的样本空间.

概率的公理化

古典概型假设样本空间含有限个样本点,本节考虑推广到一般的样本空间.
设Ω是试验S的样本空间, 在实际问题中往往并不需要关心Ω的所有子集, 只要把关心的子集称为事件就够了. 但是事件必须是Ω的子集, 并且满足以下三个条件:

概率的公理化

古典概型假设样本空间含有限个样本点,本节考虑推广到一般的样本空间.
设Ω是试验S的样本空间, 在实际问题中往往并不需要关心Ω的所有子集, 只要把关心的子集称为事件就够了. 但是事件必须是Ω的子集, 并且满足以下三个条件:
(a) Ω 是事件,

概率的公理化

古典概型假设样本空间含有限个样本点,本节考虑推广到一般的样本空间.

设Ω是试验S的样本空间, 在实际问题中往往并不需要关心Ω的所有子集, 只要把关心的子集称为事件就够了. 但是事件必须是Ω的子集, 并且满足以下三个条件:

(a) Ω 是事件,

(b) A, B 是事件, 则$A \cup B, A \cap B, A - B, \overline{A}$都是事件,

概率的公理化

古典概型假设样本空间含有限个样本点,本节考虑推广到一般的样本空间.

设Ω是试验S的样本空间,在实际问题中往往并不需要关心Ω的所有子集,只要把关心的子集称为事件就够了.但是事件必须是Ω的子集,并且满足以下三个条件:

(a) Ω 是事件,

(b) A, B 是事件,则$A \cup B, A \cap B, A - B, \overline{A}$都是事件,

(c) 当A_j是事件,则$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$是事件.

概率的公理化

古典概型假设样本空间含有限个样本点,本节考虑推广到一般的样本空间.

设Ω是试验S的样本空间, 在实际问题中往往并不需要关心Ω的所有子集, 只要把关心的子集称为事件就够了. 但是事件必须是Ω的子集, 并且满足以下三个条件:

(a) Ω 是事件,

(b) A, B 是事件, 则$A \cup B, A \cap B, A - B, \overline{A}$都是事件,

(c) 当A_j是事件, 则$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$是事件.

以后总假设上面的条件(a), (b), (c)成立.

概率定义

如果P满足条件

概率定义

如果P满足条件

(a) 非负性: 对于任何事件A, $P(A) \geq 0$,

概率定义

如果P满足条件

(a) 非负性: 对于任何事件A, $P(A) \geq 0$,

(b) 完全性: $P(\Omega) = 1$,

概率定义

如果P满足条件

(a) 非负性: 对于任何事件A, $P(A) \geq 0$,

(b) 完全性: $P(\Omega) = 1$,

(c) 可列可加性: 对于互不相容的事件$A_1, A_2, \ldots$, 有

$$P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

就称P是试验S的概率, 简称为概率, 称$P(A)$是A的**概率**(probability).

概率定义

如果P满足条件

(a) 非负性: 对于任何事件A, $P(A) \geq 0$,

(b) 完全性: $P(\Omega) = 1$,

(c) 可列可加性: 对于互不相容的事件$A_1, A_2, \dots,$ 有

$$P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

就称P是试验S的概率, 简称为概率, 称$P(A)$是A的**概率**(probability).

我们称定义中的(a), (b), (c)为概率的**公理化条件**. 不满足公理化条件的P不是概率.

条件(c)中的"可列", 指集合的个数或运算的次数可以依次排列起来. 从例2.8知道, 古典概率模型中的P是概率.

概率性质

设P是试验S的概率, 则有以下的结果.

概率性质

设P是试验S的概率, 则有以下的结果.

(1) 不可能事件的概率是0: $P(\phi) = 0$,

概率性质

设P是试验S的概率, 则有以下的结果.

(1) 不可能事件的概率是0: $P(\phi) = 0$,

(2) 有限可加性: 如果$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互不相容, 则

$$P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j),$$

概率性质

设P是试验S的概率, 则有以下的结果.

(1) 不可能事件的概率是0: $P(\phi)=0$,

(2) 有限可加性: 如果$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互不相容, 则

$$P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j)=\sum_{j=1}^{n} P(A_j),$$

(3) 单调性: $B \subset A$, 则$P(A)-P(B)=P(A-B)\geq 0$.

性质证明

(1) 由概率的可列可加性得到

$$\begin{aligned} 1 =& P(\Omega + \phi + \phi + \cdots) \\ =& P(\Omega) + P(\phi) + P(\phi) + \cdots \\ =& 1 + \lim_{n\to\infty} nP(\phi) \end{aligned}$$

于是得到$P(\phi) = 0$.

性质证明

(1) 由概率的可列可加性得到

$$
\begin{aligned}
1 =& P(\Omega+\phi+\phi+\cdots) \\
=& P(\Omega)+P(\phi)+P(\phi)+\cdots \\
=& 1+\lim_{n\to\infty} nP(\phi)
\end{aligned}
$$

于是得到$P(\phi)=0$.

(2)当事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相容，由概率的可列可加性得到

$$
\begin{aligned}
& P(A_1+A_2+\cdots+A_n) \\
=& P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\phi+\phi+\cdots) \\
=& P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+P(\phi)+P(\phi)+\cdots \\
=& P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).
\end{aligned}
$$

性质证明

(1) 由概率的可列可加性得到

$$
\begin{aligned}
1 =& P(\Omega+\phi+\phi+\cdots) \\
=& P(\Omega)+P(\phi)+P(\phi)+\cdots \\
=& 1+\lim_{n\to\infty} nP(\phi)
\end{aligned}
$$

于是得到$P(\phi)=0$.

(2)当事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相容，由概率的可列可加性得到

$$
\begin{aligned}
& P(A_1+A_2+\cdots+A_n) \\
=& P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\phi+\phi+\cdots) \\
=& P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+P(\phi)+P(\phi)+\cdots \\
=& P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).
\end{aligned}
$$

(3) 利用(2)和$A=B+(A-B)$得到$P(A)=P(B)+P(A-B)$.
移项后得到$P(A)-P(B)=P(A-B)\geq 0$.

概率的加法公式

概率的有限可加性和可列可加性是概率P的最基本性质，由此推出概率的加法公式.

概率的加法公式

概率的有限可加性和可列可加性是概率P的最基本性质，由此推出概率的加法公式.

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,

概率的加法公式

概率的有限可加性和可列可加性是概率P的最基本性质，由此推出概率的加法公式.

(4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

证明 (4)的证明:

$$\begin{aligned}P(A\cup B)=&P(A+\overline{A}B)\\=&P(A)+P(\overline{A}B)\\=&P(A)+[P(\overline{A}B)+P(AB)]-P(AB)\\=&P(A)+P(B)-P(AB).\end{aligned}$$

Jordan公式

(5) Jordan公式: 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是事件, 记

$$p_k = \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n} P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k})$$

时, 有

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} p_k.$$

Jordan公式

(5) Jordan公式: 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是事件, 记

$$p_k = \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n} P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k})$$

时, 有

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} p_k.$$

例: $P(A\cup B\cup C) =$
$P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC),$

例3.2

m个听众随机走进$n(\leq m)$个会场, 求每个会场都至少有一个听众的概率q_m.

例3.2

m个听众随机走进$n(\leq m)$个会场, 求每个会场都至少有一个听众的概率q_m.

解 用A_i表示第i个会场没有听众, 用B表示至少有一个会场没有听众, 则$B=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. 我们要计算$q_m=P(\overline{B})=1-P(B)$. 对互不相同的$i,j,k$, 利用Jordan公式和

$$P(A_i)=\frac{(n-1)^m}{n^m}, \qquad p_1=C_n^1\frac{(n-1)^m}{n^m},$$

例3.2

m个听众随机走进$n(\leq m)$个会场，求每个会场都至少有一个听众的概率q_m.

解 用A_i表示第i个会场没有听众，用B表示至少有一个会场没有听众，则$B=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$. 我们要计算$q_m=P(\overline{B})=1-P(B)$. 对互不相同的$i,j,k$，利用Jordan公式和

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \tfrac{(n-1)^m}{n^m}, & p_1 &= C_n^1\tfrac{(n-1)^m}{n^m}, \\ P(A_iA_j) &= \tfrac{(n-2)^m}{n^m}, & p_2 &= C_n^2\tfrac{(n-2)^m}{n^m}, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \end{aligned}$$

例3.2

m个听众随机走进$n(\leq m)$个会场, 求每个会场都至少有一个听众的概率q_m.

解 用A_i表示第i个会场没有听众, 用B表示至少有一个会场没有听众, 则$B=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$. 我们要计算$q_m=P(\overline{B})=1-P(B)$. 对互不相同的$i,j,k$, 利用Jordan公式和

$$\begin{aligned}
&P(A_i)=\tfrac{(n-1)^m}{n^m}, && p_1=C_n^1\tfrac{(n-1)^m}{n^m},\\
&P(A_iA_j)=\tfrac{(n-2)^m}{n^m}, && p_2=C_n^2\tfrac{(n-2)^m}{n^m},\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots\\
&P(A_1A_2\cdots A_{n-1})=\tfrac{1}{n^m}, && p_{n-1}=C_n^{n-1}\tfrac{1}{n^m},
\end{aligned}$$

例3.2

m个听众随机走进$n(\leq m)$个会场, 求每个会场都至少有一个听众的概率q_m.

解 用A_i表示第i个会场没有听众, 用B表示至少有一个会场没有听众, 则$B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. 我们要计算$q_m = P(\overline{B}) = 1 - P(B)$. 对互不相同的$i, j, k$, 利用Jordan公式和

$$\begin{aligned}
&P(A_i) = \tfrac{(n-1)^m}{n^m}, && p_1 = C_n^1 \tfrac{(n-1)^m}{n^m},\\
&P(A_i A_j) = \tfrac{(n-2)^m}{n^m}, && p_2 = C_n^2 \tfrac{(n-2)^m}{n^m},\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots\\
&P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) = \tfrac{1}{n^m}, && p_{n-1} = C_n^{n-1} \tfrac{1}{n^m},\\
&P(A_1 A_2 \cdots A_n) = \tfrac{0}{n^m}, && p_n = 0,
\end{aligned}$$

例3.2

m个听众随机走进$n(\le m)$个会场, 求每个会场都至少有一个听众的概率q_m.

解 用A_i表示第i个会场没有听众, 用B表示至少有一个会场没有听众, 则$B=\bigcup_{i=1}^n A_i$. 我们要计算$q_m=P(\overline{B})=1-P(B)$. 对互不相同的$i,j,k$, 利用Jordan公式和

$$\begin{aligned}
&P(A_i)=\frac{(n-1)^m}{n^m}, && p_1=C_n^1\frac{(n-1)^m}{n^m},\\
&P(A_iA_j)=\frac{(n-2)^m}{n^m}, && p_2=C_n^2\frac{(n-2)^m}{n^m},\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots\\
&P(A_1A_2\cdots A_{n-1})=\frac{1}{n^m}, && p_{n-1}=C_n^{n-1}\frac{1}{n^m},\\
&P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{0}{n^m}, && p_n=0,
\end{aligned}$$

得到$P(B)=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}C_n^i\frac{(n-i)^m}{n^m}$.

例3.2

m个听众随机走进$n(\leq m)$个会场，求每个会场都至少有一个听众的概率q_m.

解 用A_i表示第i个会场没有听众，用B表示至少有一个会场没有听众，则$B=\bigcup_{i=1}^n A_i$. 我们要计算$q_m=P(\overline{B})=1-P(B)$. 对互不相同的$i,j,k$，利用Jordan公式和

$$
\begin{aligned}
P(A_i) &= \tfrac{(n-1)^m}{n^m}, & p_1 &= C_n^1\tfrac{(n-1)^m}{n^m},\\
P(A_iA_j) &= \tfrac{(n-2)^m}{n^m}, & p_2 &= C_n^2\tfrac{(n-2)^m}{n^m},\\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots &\\
P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) &= \tfrac{1}{n^m}, & p_{n-1} &= C_n^{n-1}\tfrac{1}{n^m},\\
P(A_1A_2\cdots A_n) &= \tfrac{0}{n^m}, & p_n &= 0,
\end{aligned}
$$

得到$P(B)=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}C_n^i\frac{(n-i)^m}{n^m}$. 最后得到

$$q_m=\sum_{i=0}^n(-1)^iC_n^i\frac{(n-i)^m}{n^m}.$$

概率的连续性

如果$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$，就称事件序列$\{A_j\} \equiv \{A_j \mid j = 1, 2, \cdots\}$是**单调增**的. 如果$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$，就称事件序列$\{A_j\}$是**单调减**的. 我们把单调增序列和单调减序列统称为单调序列.

概率的连续性

如果$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$，就称事件序列$\{A_j\} \equiv \{A_j \mid j=1,2,\cdots\}$是**单调增**的. 如果$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$，就称事件序列$\{A_j\}$是**单调减**的. 我们把单调增序列和单调减序列统称为单调序列.

定理3.1 设$\{A_j\}$ 和$\{B_j\}$是事件列.

(1) 如果$\{A_j\}$是单调增序列，则

$$P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

(2) 如果$\{B_j\}$是单调减序列，则

$$P(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j) = \lim_{n\to\infty} P(B_n).$$

概率的连续性

如果$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$，就称事件序列$\{A_j\} \equiv \{A_j \mid j = 1, 2, \cdots\}$是**单调增**的. 如果$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$，就称事件序列$\{A_j\}$是**单调减**的. 我们把单调增序列和单调减序列统称为单调序列.

定理3.1 设$\{A_j\}$ 和$\{B_j\}$是事件列.

(1) 如果$\{A_j\}$是单调增序列，则

$$P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

(2) 如果$\{B_j\}$是单调减序列，则

$$P(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j) = \lim_{n\to\infty} P(B_n).$$

通常称$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$为单调增序列$\{A_j\}$的极限，称$\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j$为单调减序列$\{B_j\}$的极限.

条件概率

条件概率

例4.1 掷一个骰子, 已知掷出了偶数点,求掷出的是2的概率.

条件概率

例4.1 掷一个骰子, 已知掷出了偶数点,求掷出的是2的概率.

解 用A表示掷出偶数点, B表示掷出2. 已知A发生后试验的条件已经改变. 在新的试验条件下A成为样本空间, A的样本点具有等可能性, B是A的子集, $\#A = 3$, $\#B = 1$. 所以, 用$P(B|A)$表示要求的概率时,

$$P(B|A) = \frac{\#B}{\#A} = \frac{1}{3}.$$

我们称$P(B|A)$是已知A发生的条件下, B发生的概率.

条件概率

例4.1 掷一个骰子，已知掷出了偶数点,求掷出的是2的概率.
解 用A表示掷出偶数点，B表示掷出2. 已知A发生后试验的条件已经改变. 在新的试验条件下A成为样本空间，A的样本点具有等可能性，B是A的子集，$\#A=3$，$\#B=1$. 所以，用$P(B|A)$表示要求的概率时，

$$P(B|A)=\frac{\#B}{\#A}=\frac{1}{3}.$$

我们称$P(B|A)$是已知A发生的条件下，B发生的概率.
例4.2 在52 张扑克中任取一张，已知抽到草花的条件下，求抽到的是草花5的概率.

条件概率

例4.1 掷一个骰子，已知掷出了偶数点,求掷出的是2的概率.

解 用A表示掷出偶数点，B表示掷出2. 已知A发生后试验的条件已经改变. 在新的试验条件下A成为样本空间，A的样本点具有等可能性，B是A的子集，$\#A=3$, $\#B=1$. 所以，用$P(B|A)$表示要求的概率时，

$$P(B|A)=\frac{\#B}{\#A}=\frac{1}{3}.$$

我们称$P(B|A)$是已知A发生的条件下，B发生的概率.

例4.2 在52 张扑克中任取一张，已知抽到草花的条件下，求抽到的是草花5的概率.

解 设A=“抽到草花”，B=“抽到草花5”. 按例4.1的方法有$P(B|A)=\#B/\#A=1/13$.

设A, B是事件, 以后总用$P(B|A)$表示已知A发生的条件下, B发生的条件概率, 简称为**条件概率**(conditional probability). 下面是条件概率的计算公式.

设A, B是事件, 以后总用$P(B|A)$表示已知A发生的条件下, B发生的条件概率, 简称为**条件概率**(conditional probability). 下面是条件概率的计算公式.

条件概率公式: 如果$P(A)>0$, 则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

设A, B是事件, 以后总用$P(B|A)$表示已知A发生的条件下, B发生的条件概率, 简称为**条件概率**(conditional probability). 下面是条件概率的计算公式.

条件概率公式: 如果$P(A)>0$, 则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

对于古典概型, 已知A发生后试验的条件已经改变. 在新的试验条件下A成为样本空间, A的样本点具有等可能性. 已知A发生后, $B=AB$ 是A的子集. 利用古典概型的定义知道

$$P(B|A)=P(AB|A)=\frac{\#(AB)}{\#A}=\frac{\#(AB)/\#\Omega}{\#A/\#\Omega}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

例4.4 设$P(A)>0$, 对于任何事件B, 定义$P_A(B)=P(B|A)$. 则

(1) P_A是概率,

(2) 对于事件B, C, 当$P(AB)>0$时,

$$P_A(C|B)=P(C|AB).$$

例4.4 设$P(A)>0$, 对于任何事件B, 定义$P_A(B)=P(B|A)$. 则
(1) P_A是概率,
(2) 对于事件B, C, 当$P(AB)>0$时,

$$P_A(C|B)=P(C|AB).$$

证 (1) 我们验证概率公理化的三个条件.

例4.4 设$P(A)>0$, 对于任何事件B, 定义$P_A(B)=P(B|A)$. 则
(1) P_A是概率,
(2) 对于事件B, C, 当$P(AB)>0$时,

$$P_A(C|B)=P(C|AB).$$

证 (1) 我们验证概率公理化的三个条件.
(a)非负性: 对事件B,

$$P_A(B)=P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\geq 0,$$

(b)完全性: $P_A(\Omega) = P(\Omega A|A) = P(A)/P(A) = 1,$

(b)完全性: $P_A(\Omega) = P(\Omega A|A) = P(A)/P(A) = 1$,
(c)可列可加性: 对于互不相容的事件$B_1, B_2, \ldots$, 用条件概率公式和概率P的可列可加性得到

(b)完全性: $P_A(\Omega) = P(\Omega A|A) = P(A)/P(A) = 1$,
(c)可列可加性: 对于互不相容的事件$B_1, B_2, \ldots$, 用条件概率公式和概率P的可列可加性得到

$$
\begin{aligned}
P_A(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) =& P(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j|A) \\
=& P(\bigcup_{j=1}^{\infty} AB_j)/P(A) \\
=& \sum_{j=1}^{\infty} P(AB_j)/P(A) \\
=& \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j|A) \\
=& \sum_{j=1}^{\infty} P_A(B_j).
\end{aligned}
$$

(2)　因为P_A是概率, 利用条件概率公式(4.1)得到

(2) 因为P_A是概率, 利用条件概率公式(4.1)得到

$$
\begin{aligned}
P_A(C|B) =& \frac{P_A(CB)}{P_A(B)} \\
=& \frac{P(CB|A)}{P(B|A)} \\
=& \frac{P(ABC)/P(A)}{P(AB)/P(A)} \\
=& \frac{P(ABC)}{P(AB)} \\
=& P(C|AB).
\end{aligned}
$$

乘法公式:

设$A, B, A_1, A_2, \cdots, A_n$是事件, 则

(1) $P(AB) = P(A)P(B|A)$,

(2) 当$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) \neq 0$, 有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

事件的独立性

事件的独立性

设A是试验S_1下的事件, B是试验S_2下的事件, 且A的发生与否不影响B的发生. 用公式表述出来就是$P(B|A) = P(B)$. 再用乘法公式得到$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$. 此式表示事件$A$, B相互独立.

事件的独立性

设A是试验S_1下的事件, B是试验S_2下的事件, 且A的发生与否不影响B的发生. 用公式表述出来就是$P(B|A) = P(B)$. 再用乘法公式得到$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$. 此式表示事件$A$, B相互独立.

定义5.1 如果事件A, B 满足$P(AB) = P(A)P(B)$, 就称A, B **相互独立**, 简称为A, B **独立**(independent).

事件的独立性

设A是试验S_1下的事件, B是试验S_2下的事件, 且A的发生与否不影响B的发生. 用公式表述出来就是$P(B|A)=P(B)$. 再用乘法公式得到$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$. 此式表示事件$A$, B相互独立.

定义5.1 如果事件A, B 满足$P(AB)=P(A)P(B)$, 就称A, B **相互独立**, 简称为A, B **独立**(independent).

不可能事件, 必然事件与任何事件独立. 这是因为$P(\phi A)=P(\phi)P(A)$, $P(\Omega A)=P(\Omega)P(A)$总成立. 又当$P(A)>0$时, A, B独立当且仅当$P(B|A)=P(B)$.

例5.2 两线段将长方形Ω四等分, 得到E_1, E_2, E_3, E_4.

E_1	E_2
E_3	E_4

设$A = \mathsf{E}_1 \cup \mathsf{E}_2$, $B = \mathsf{E}_1 \cup \mathsf{E}_3$, $C = \mathsf{E}_1 \cup \mathsf{E}_4$. 在$\Omega$中任取一点, 则

$$P(AB) = P(A)P(B) = 1/4,$$
$$P(AC) = P(A)P(C) = 1/4,$$
$$P(BC) = P(B)P(C) = 1/4.$$

于是A, B, C 两两独立.

如果三个事件 A、B 和 C 满足以下条件，则称它们**两两独立**：

1. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
2. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
3. $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

这意味着，任意两个事件之间是独立的，但不涉及三个事件同时发生的概率。

例5.2 两线段将长方形Ω四等分，得到E_1, E_2, E_3, E_4.

E_1	E_2
E_3	E_4

设$A = \mathsf{E}_1 \cup \mathsf{E}_2$， $B = \mathsf{E}_1 \cup \mathsf{E}_3$， $C = \mathsf{E}_1 \cup \mathsf{E}_4$. 在$\Omega$中任取一点，则

$$P(AB) = P(A)P(B) = 1/4,$$
$$P(AC) = P(A)P(C) = 1/4,$$
$$P(BC) = P(B)P(C) = 1/4.$$

于是A, B, C 两两独立.

涉及到概率论中“独立性”和“相交”的直观理解，为什么 A 和 B 相交但仍然独立。

即使 A 和 B 有交集，但这个交集的“大小”（概率）恰好符合独立性的定义。这意味着，知道点在 A 内，并不会改变点在 B 内的概率。换句话说，点在 A 内的信息并没有提供关于点在 B 内的额外信息。

独立性并不意味着事件之间没有交集，而是交集的概率恰好符合独立性的定义。

例5.2 两线段将长方形Ω四等分, 得到E_1, E_2, E_3, E_4.

E_1	E_2
E_3	E_4

设$A = \mathsf{E}_1 \cup \mathsf{E}_2$, $B = \mathsf{E}_1 \cup \mathsf{E}_3$, $C = \mathsf{E}_1 \cup \mathsf{E}_4$. 在$\Omega$中任取一点, 则

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) = 1/4, \\ P(AC) &= P(A)P(C) = 1/4, \\ P(BC) &= P(B)P(C) = 1/4. \end{aligned}$$

于是A, B, C 两两独立.

定理5.1 A, B 独立当且仅当$\overline{A}$, B独立.

例5.2 两线段将长方形Ω四等分, 得到E_1, E_2, E_3, E_4.

E_1	E_2
E_3	E_4

设$A = \mathsf{E}_1 \cup \mathsf{E}_2$, $B = \mathsf{E}_1 \cup \mathsf{E}_3$, $C = \mathsf{E}_1 \cup \mathsf{E}_4$. 在$\Omega$中任取一点, 则

$$P(AB) = P(A)P(B) = 1/4,$$
$$P(AC) = P(A)P(C) = 1/4,$$
$$P(BC) = P(B)P(C) = 1/4.$$

于是A, B, C 两两独立.

定理5.1 A, B 独立当且仅当$\overline{A}$, B独立.

证明 只需由A, B 独立证明$\overline{A}$, B独立. 当A, B 独立, 有

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = P(\overline{A})P(B).$$

于是$\overline{A}$, B独立.

定义5.2 (1) 称事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 如果对任何$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$,

$$P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2})\cdots P(A_{j_k}).$$

(2) 称事件$A_1, A_2, \cdots$ 相互独立, 如果对任何$n \geq 2$, 事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

(3) 称$\{A_n\}$是**独立事件列**, 如果$A_1, A_2, \cdots$ 相互独立.

两两独立

如果三个事件 A、B 和 C 满足以下条件，则称它们**两两独立**：

1. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
2. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
3. $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

这意味着，任意两个事件之间是独立的，但不涉及三个事件同时发生的概率。

相互独立

如果三个事件 A、B 和 C 满足以下条件，则称它们**相互独立**：

1. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
2. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
3. $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
4. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

这意味着，任意两个事件之间是独立的，并且三个事件同时发生的概率也符合独立性定义。

定义5.2 (1) 称事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 如果对任何$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$,

$$P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2})\cdots P(A_{j_k}).$$

(2) 称事件$A_1, A_2, \cdots$ 相互独立, 如果对任何$n \ge 2$, 事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.
(3) 称$\{A_n\}$是**独立事件列**, 如果$A_1, A_2, \cdots$ 相互独立.
例5.2 中的事件A, B, C两两独立, 但是不相互独立, 因为

$$P(ABC) = 1/4, \quad P(A)P(B)P(C) = 1/8.$$

例5.3 事件A,B, C相互独立当且仅当他们两两独立,并且$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

例5.3 事件A,B, C相互独立当且仅当他们两两独立,并且$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

例5.4 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则有如下的结果.

(1) 对$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$, $A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_k}$ 相互独立,

(2) 用B_i表示A_i 或$\overline{A}_i$, 则$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 相互独立,

(3) $(A_1A_2), A_3, \cdots, A_n$ 相互独立;

(4) $(A_1 \cup A_2), A_3, \cdots, A_n$ 相互独立.

例5.3 事件A,B, C相互独立当且仅当他们两两独立,并且$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.

例5.4 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则有如下的结果.

(1) 对$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$, A_{j_1}, A_{j_2}, $\cdots$, A_{j_k} 相互独立,

(2) 用B_i表示A_i 或$\overline{A}_i$, 则$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 相互独立,

(3) $(A_1A_2), A_3, \cdots, A_n$ 相互独立;

(4) $(A_1 \cup A_2), A_3, \cdots, A_n$ 相互独立.

例5.6 每门高炮击中飞机的概率是0.3, 要以99%的把握击中飞机, 需要几门高炮.

例5.3 事件A,B, C相互独立当且仅当他们两两独立,并且$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

例5.4 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则有如下的结果.

(1) 对$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$, $A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_k}$ 相互独立,

(2) 用B_i表示A_i 或$\overline{A}_i$, 则$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 相互独立,

(3) $(A_1A_2), A_3, \cdots, A_n$ 相互独立;

(4) $(A_1 \cup A_2), A_3, \cdots, A_n$ 相互独立.

例5.6 每门高炮击中飞机的概率是0.3, 要以99%的把握击中飞机, 需要几门高炮.

解 用A_i表示第i门高炮击中目标. 设需要n门高炮, 则要求n满足

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = 1 - P\Big(\bigcap_{j=1}^{n} \overline{A}_j\Big) = 1 - (0.7)^n \ge 0.99.$$

例5.3 事件A,B, C相互独立当且仅当他们两两独立,并且$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

例5.4 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则有如下的结果.

(1) 对$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$, $A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_k}$ 相互独立,

(2) 用B_i表示A_i 或$\overline{A}_i$, 则$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 相互独立,

(3) $(A_1A_2), A_3, \cdots, A_n$ 相互独立;

(4) $(A_1 \cup A_2), A_3, \cdots, A_n$ 相互独立.

例5.6 每门高炮击中飞机的概率是0.3, 要以99%的把握击中飞机, 需要几门高炮.

解 用A_i表示第i门高炮击中目标. 设需要n门高炮, 则要求n满足

$$P(\bigcup_{j=1}^n A_j) = 1 - P(\bigcap_{j=1}^n \overline{A}_j) = 1 - (0.7)^n \ge 0.99.$$

由$n \ln 0.7 \le \ln(1 - 0.99)$解出$n \ge 12.9114$. 于是取$n = 13$.

全概率公式

全概率公式

定理6.1(全概率公式) 如果事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相容, $B \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, 则

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j).$$

全概率公式

定理6.1(全概率公式) 如果事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相容，$B \subset \bigcup_{j=1}^n A_j$，则

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j).$$

证明 因为$B = B\bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup_{j=1}^n BA_j$，用概率的有限可加性和乘法公式得到

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B\bigcup_{j=1}^n A_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} P(BA_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j). \end{aligned}$$

如果事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相容, $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega$, 则称$A_1, A_2, \cdots,$ A_n 是**完备事件组**. A 和$\overline{A}$总构成完备事件组, 所以总有

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}).$$

如果事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相容, $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega$, 则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是**完备事件组**. A 和$\overline{A}$总构成完备事件组, 所以总有

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}).$$

例6.1 (抽签问题) n 个签中有m个标有“中”，无放回依次随机抽签时, 第j次抽中的概率是m/n.

解 用归纳法. 用A_j表示第j次抽中, 则对一切m,n, 当$m \leq n$时, 有$P(A_1) = m/n$. 设对一切m,n, 当$m \leq n$时, 有$P(A_{j-1}) = m/n$,

解 用归纳法. 用A_j表示第j次抽中, 则对一切m,n, 当$m\le n$时, 有$P(A_1)=m/n$. 设对一切m,n, 当$m\le n$时, 有$P(A_{j-1})=m/n$, 则有

$$P(A_j|A_1)=\frac{m-1}{n-1},\quad P(A_j|\overline{A}_1)=\frac{m}{n-1}.$$

解 用归纳法. 用A_j表示第j次抽中, 则对一切m, n, 当$m \le n$时, 有$P(A_1) = m/n$. 设对一切m, n, 当$m \le n$时, 有$P(A_{j-1}) = m/n$, 则有

$$P(A_j|A_1) = \frac{m-1}{n-1}, \quad P(A_j|\overline{A}_1) = \frac{m}{n-1}.$$

于是有

$$\begin{aligned} P(A_j) =& P(A_1)P(A_j|A_1) + P(\overline{A}_1)P(A_j|\overline{A}_1) \\ =& \frac{m}{n}\,\frac{m-1}{n-1} + \frac{n-m}{n}\,\frac{m}{n-1} \\ =& \frac{m}{n}, \quad 1 \le j \le n. \end{aligned}$$

解 用归纳法. 用A_j表示第j次抽中, 则对一切m,n, 当$m \le n$时, 有$P(A_1)=m/n$. 设对一切m,n, 当$m \le n$时, 有$P(A_{j-1})=m/n$, 则有

$$P(A_j|A_1)=\frac{m-1}{n-1},\quad P(A_j|\overline{A}_1)=\frac{m}{n-1}.$$

于是有

$$\begin{aligned}P(A_j)=&P(A_1)P(A_j|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_j|\overline{A}_1)\\=&\frac{m}{n}\,\frac{m-1}{n-1}+\frac{n-m}{n}\,\frac{m}{n-1}\\=&\frac{m}{n},\quad 1\le j\le n.\end{aligned}$$

(另解: $P(A_j)=m(n-1)!/n!$)

敏感问题调查

例6.2 在调查家庭暴力(或婚外恋、服用兴奋剂、吸毒等敏感问题)所占家庭的比例p时，被调查者往往不愿回答真相，这使得调查数据失真．为得到实际的p同时又不侵犯个人隐私，调查人员将袋中放入比例是p_0的红球和比例是$q_0 = 1 - p_0$的白球．被调查者在袋中任取一球窥视后放回，并承诺取得红球就讲真话，取到白球就讲假话．被调查者只需在匿名调查表中选“是”(有家庭暴力)或“否”，然后将表放入投票箱．没人能知道被调查者是否讲真话和回答的是什么．如果声称有家庭暴力的家庭比例是p_1，求p.

解 对任选的一个家庭, 用B表示回答“是”, 用A表示实际“是”. 利用全概率公式得到

$$\begin{aligned} p_1 =& P(B) \\ =& P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) \\ =& p_0 P(A) + q_0(1 - P(A)) \\ =& q_0 + (p_0 - q_0)P(A). \end{aligned}$$

解 对任选的一个家庭, 用B表示回答“是”, 用A表示实际“是”. 利用全概率公式得到

$$\begin{aligned} p_1 =& P(B) \\ =& P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) \\ =& p_0 P(A) + q_0(1 - P(A)) \\ =& q_0 + (p_0 - q_0)P(A). \end{aligned}$$

于是只要$p_0 \neq q_0$, 则

$$p = P(A) = \frac{p_1 - q_0}{p_0 - q_0}.$$

实际问题中, p_1是未知的, 需要经过调查得到. 假定调查了n个家庭, 其中有k个家庭回答“是”, 则可以用$\hat{p}_1 = k/n$估计p_1, 于是可以用$\hat{p} = \frac{\hat{p}_1 - q_0}{p_0 - q_0}$ 估计p.

实际问题中，p_1是未知的，需要经过调查得到. 假定调查了n个家庭，其中有k个家庭回答“是”，则可以用$\hat{p}_1 = k/n$估计p_1，于是可以用$\hat{p} = \frac{\hat{p}_1 - q_0}{p_0 - q_0}$估计$p$.
如果袋中装有30个红球，50个白球，调查了320个家庭，其中有195个家庭回答“是”，则

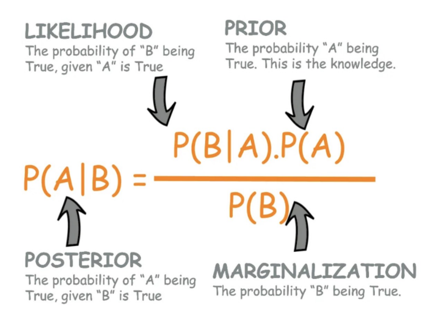
$$
\begin{aligned}
p_0 &= 3/8, \\
q_0 &= 5/8, \\
\hat{p}_1 &= 195/320, \\
\hat{p} &= \frac{195/320 - 5/8}{3/8 - 5/8} = 6.25\%.
\end{aligned}
$$

可以证明$|p_0 - q_0|$越大，得到的结论越可靠. 但是$|p_0 - q_0|$越大，调查方案越不易被被调查者接受.

Bayes 公式

定理6.2 如果事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相容，$B \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j$，则$P(B) > 0$时，有

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}, \quad 1 \le j \le n.$$



贝叶斯公式直观解释:
当我们看到一项新证据之后，应该

Bayes 公式

定理6.2 如果事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相容, $B \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, 则$P(B) > 0$时, 有

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}, \quad 1 \le j \le n.$$

证明 由条件概率公式和全概率公式得到

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_jB)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}, \quad 1 \le j \le n.$$

Bayes 公式

定理6.2 如果事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相容，$B \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j$，则$P(B) > 0$时，有

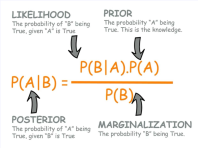
$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}, \quad 1 \le j \le n.$$

证明 由条件概率公式和全概率公式得到

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_jB)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}, \quad 1 \le j \le n.$$

最常用到的Bayes 公式是当$P(B) > 0$,

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})}.$$



疾病普查问题

例6.4　一种新方法对某种特定疾病的诊断准确率是90%(有病被正确诊断和没病被正确诊断的概率都是90%). 如果群体中这种病的发病率是0.1%，甲在身体普查中被诊断患病, 问甲的确患病的概率是多少?

疾病普查问题

例6.4 一种新方法对某种特定疾病的诊断准确率是90%(有病被正确诊断和没病被正确诊断的概率都是90%). 如果群体中这种病的发病率是0.1% , 甲在身体普查中被诊断患病, 问甲的确患病的概率是多少?

解 设A=甲患病, B = 甲被诊断有病. 根据题意, $P(A) = 0.001$,

$$P(B|A) = 0.9, \quad P(B|\overline{A}) = 0.1,$$

疾病普查问题

例6.4 一种新方法对某种特定疾病的诊断准确率是90%(有病被正确诊断和没病被正确诊断的概率都是90%). 如果群体中这种病的发病率是0.1%，甲在身体普查中被诊断患病, 问甲的确患病的概率是多少?

解 设A=甲患病, B = 甲被诊断有病. 根据题意, $P(A) = 0.001$,

$$P(B|A) = 0.9, \quad P(B|\overline{A}) = 0.1,$$

于是

$$\begin{aligned} P(A|B) =& \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})} \\ =& \frac{0.001 \times 0.9}{0.001 \times 0.9 + 0.999 \times 0.1} \\ =& \frac{9}{9 + 999} \\ =& 0.0089 < 1\%. \end{aligned}$$

吸烟与肺癌问题

例6.5　1950年某地区曾对50-60岁的男性公民进行调查. 肺癌病人中吸烟的比例是99.7%, 无肺癌人中吸烟的比例是95.8%. 如果整个人群的发病率是$p = 10^{-4}$. 求吸烟人群中的肺癌发病率和不吸烟人群中的肺癌发病率.

吸烟与肺癌问题

例6.5　1950年某地区曾对50-60岁的男性公民进行调查. 肺癌病人中吸烟的比例是99.7%, 无肺癌人中吸烟的比例是95.8%. 如果整个人群的发病率是$p = 10^{-4}$. 求吸烟人群中的肺癌发病率和不吸烟人群中的肺癌发病率.

解　引入$A =$有肺癌, $B =$吸烟, 则$P(A) = 10^{-4}$,
$P(B|A) = 99.7\%$, $P(B|\overline{A}) = 95.8\%$.

吸烟与肺癌问题

例6.5 1950年某地区曾对50-60岁的男性公民进行调查. 肺癌病人中吸烟的比例是99.7%, 无肺癌人中吸烟的比例是95.8%. 如果整个人群的发病率是$p = 10^{-4}$. 求吸烟人群中的肺癌发病率和不吸烟人群中的肺癌发病率.

解 引入$A =$有肺癌, $B =$吸烟, 则$P(A) = 10^{-4}$, $P(B|A) = 99.7\%$, $P(B|\overline{A}) = 95.8\%$. 利用公式Bayes公式得到:

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})} = 1.0407 \times 10^{-4}.$$

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A)P(\overline{B}|A)}{P(A)P(\overline{B}|A) + P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})} = 7.1438 \times 10^{-6}.$$

吸烟与肺癌问题

例6.5 1950年某地区曾对50-60岁的男性公民进行调查. 肺癌病人中吸烟的比例是99.7%, 无肺癌人中吸烟的比例是95.8%. 如果整个人群的发病率是$p = 10^{-4}$. 求吸烟人群中的肺癌发病率和不吸烟人群中的肺癌发病率.

解 引入A =有肺癌, B =吸烟, 则$P(A) = 10^{-4}$, $P(B|A) = 99.7\%$, $P(B|\overline{A}) = 95.8\%$. 利用公式Bayes公式得到:

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})} = 1.0407 \times 10^{-4}.$$

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A)P(\overline{B}|A)}{P(A)P(\overline{B}|A) + P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})} = 7.1438 \times 10^{-6}.$$

于是,

$$\frac{\text{吸烟人群的发病率}}{\text{不吸烟人群的发病率}} = \frac{P(A|B)}{P(A|\overline{B})} = 14.57.$$

概率与频率

古典概型只对等可能的情况定义了概率，为了能够描述更复杂的试验，很多学者使用概率的频率定义.

设A是试验S的事件. 在相同的条件下将试验S独立地重复N次，我们称

$$f_N = \frac{N\text{次试验中}A\text{发生的次数}}{N}$$

是N次独立重复试验中，事件A发生的频率(frequency).

概率与频率

古典概型只对等可能的情况定义了概率，为了能够描述更复杂的试验，很多学者使用概率的频率定义.

设A是试验S的事件. 在相同的条件下将试验S独立地重复N次，我们称

$$f_N = \frac{N\text{次试验中}A\text{发生的次数}}{N}$$

是N次独立重复试验中，事件A发生的**频率**(frequency).

理论和试验都证明，当$N \to \infty$，f_N会收敛到一个数$P(A)$. 我们称$P(A)$为事件A在试验S下发生的概率，简称为A的概率. 现在的随机试验工作可以在计算机上方便地进行.

例7.1 表1.7.1是用计算机进行的投掷一枚均匀的骰子的试验的总结. 其中N是试验的次数, 表中的百分数是频率. 例如表中第2行第2列的17.00%, 表示试验次数$N = 10^2$时, 点数1出现的频率是17.00%.

表1.7.1

点数	$N = 10^2$	$N = 10^3$	$N = 5000$	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$
1	17.00%	16.50%	16.28%	16.61%	16.72%	16.69%
2	15.00%	15.50%	17.12%	16.62%	16.44%	16.62%
3	18.00%	17.10%	16.78%	16.94%	16.84%	16.69%
4	18.00%	16.00%	16.68%	16.97%	16.76%	16.64%
5	13.00%	16.60%	15.50%	15.94%	16.69%	16.64%
6	19.00%	18.30%	17.64%	16.92%	16.56%	16.71%

从表1.7.2可以看出, 随着试验次数N的增加, 每个点数出现的频率f_N都向概率$1/6 = 16.667\%$收敛.

部分公式总结

贝叶斯公式

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}, i = 1, 2, \cdots, n$$

全概率公式

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)$$

加法公式

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

减法公式

$$P(B - A) = P(B) - P(AB)$$

乘法公式

$$P(AB) = P(B|A) \cdot P(A)$$

概率统计与随机过程课程QQ群

概率统计与随机过程...

群号：914773891

作业

1.3 100 件产品中有 3 件次品.

(a) 从中任取 2 件, 求至少得一件次品的概率;

(b) 从中任取 10 件, 再从这 10 件中任取 2 件, 求至少得一件次品的概率.

1.4 从一副扑克的 52 张牌中任取出 13 张, 再从这 13 张中任取出 3 张. 求这 3 张牌同花色的概率和花色互不相同的概率.

1.6 从标有 1 至 n 的 n 个球中任取 m 个, 记下号码后放回. 再从这 n 个球中任取 k 个, 记下号码. 求两组号码中恰有 c 个号码相同的概率.

2.1 公司 A 和公司 B 负责公司 C 的元件供应. 根据经验, 公司 A 和公司 B 正常供货的概率分别为 0.8 和 0.9. 只要公司 A 和公司 B 之一正常供货, 公司 C 就会正常开工. 如果公司 C 正常开工的概率为 0.99.

(a) 计算公司 A 和公司 B 都能够正常供货的概率;

(b) 计算公司 A 和公司 B 都不能正常供货的概率.

作业

2.5 如果事件 A, B, C 两两独立, $P(A) = P(B) = P(C) = p$, $P(ABC) = p^2$, $P(A \cup B \cup C) = 1$, 求 p.

2.6 6 个人独立破译同一个密码. 当第 j 个人能成功破译密码的概率为 p_j, 计算密码被破译的概率.

2.8 通常认为产品的名称会影响其销量. 对一种新产品现在有两种起名方案备选. 方案 1 是邀请 4 名相关专家起名, 厂家向起名成功者支付 2 万元奖励, 对其余 3 名各支付 5 000 元的酬金. 方案 2 是悬赏 2 万元在互联网上征名. 如果所请的每名专家能独立想出满意名称的概率为 60%, 互联网上的每个人能独立想出满意名称的概率为 1%.

(a) 计算方案 1 成功的概率;

(b) 如果有 500 人在网上参与起名, 计算方案 2 成功的概率.

2.9 一部手机第一次落地摔坏的概率是 0.5. 若第一次没摔坏, 第二次落地摔坏的概率是 0.7. 若第二次没摔坏, 第三次落地摔坏的概率是 0.9. 求该手机三次落地没有摔坏的概率.