Teste A + B 2017/2018

Denis Meireles de Sousa Falcão
2020130403 LEI

2.

a)

para $x \in [-\pi, 0]$, amplitude do intervalo: $b - a = 0 - (-\pi) =$

$y = 3\cos(1/2 \times x)$ $= \pi$

$[a, b] = [-\pi, 0]$

Utilizando a interpoladora de Newton das diferenças divididas,

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - 1)$$

	x_i	$f(x_i)$			
x_0	$= -\pi$	$0 \rightarrow a_0$			
x_1	$= -\pi/2$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$> \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} - 0}{-\pi/2 - \pi} \Rightarrow -\sqrt{2}/\pi \rightarrow a_1$		
x_2	$= 0$	3	$> \frac{3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}}{0 - (-\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow \frac{6 \times 3\sqrt{2}}{\pi}$	$> \frac{6 - 3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{\frac{\pi}{0 - (-\pi)}}$	$\Rightarrow \frac{6 - 2\sqrt{2}}{\pi^2} \rightarrow a_2$

$f(-\pi) = 3\cos(\frac{1}{2} \times \pi) = 3\cos(\frac{\pi}{2}) = 3 \times 0 = 0$

$f(-\pi/2) = 3\cos(\frac{1}{2} \times (-\frac{\pi}{2})) = 3\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - 1) =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(x + \pi) + \frac{6 - 2\sqrt{2}}{\pi^2}(x + \pi)(x + \pi/2)$

3.

a) $y' = y - yt^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y' = y(1 - t^2) \Leftrightarrow \frac{1}{y} \times y' = 1 - t^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = \int 1 - t^2\, dt \Leftrightarrow \ln(y) = \int 1\, dt - \int t^2 dt \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(y) = t - \frac{t^3}{3} + c \Leftrightarrow y = e^{t - \frac{t^3}{3} + c}$, $c \in \mathbb{R}$

$y(0) = 6 \Leftrightarrow 6 = e^{0 - \frac{0^3}{0} + c} \Leftrightarrow 6 = e^c \Leftrightarrow c = \ln(6)$

$y = e^{t - \frac{t^3}{3} + \ln(6)} = 6 \times e^{t - t^3/3}$

b)

0	0	6	6	6	6	6	0	0	0	0
1	1	11,6864	12	9	9	11,5428	0,3136	2,6864	2,6864	0,0927
2	2	13,0805	12	-4,5	-4,5	11,8719	8,9195	7,5005	7,5805	1,2086

4.

a) $h(x,y) = -x^2 - y^2 + 1$

$D_j = D_g \cup D_h$

$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 \geq 0\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$D_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 4\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$

$D_j = D_g \cup D_h =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 \geq 1) \vee (1 < x^2 + y^2 \leq 4)\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

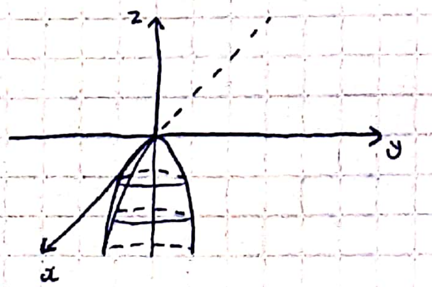
$D_j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$

R: O domínio da função j é fechado.

b)

$z = j(x,y) \Leftrightarrow$ $\qquad$ $S: z = j(x,y)$

$\Leftrightarrow z = -(x^2 + y^2)$ $\qquad$ • Superfície parabólica com vértice em $(0,0,0)$ e concavidade voltada para baixo.



$z = g(x,y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ $\qquad$ • Superfície esférica de $r = 1$.

$z = h(x,y)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = -x^2 - y^2 + 1$

• superfície parabólica com vértice em $(0,0,1)$
• concavidade voltada para baixo.

$z = g(x,y)$ • junção das funções h e g.

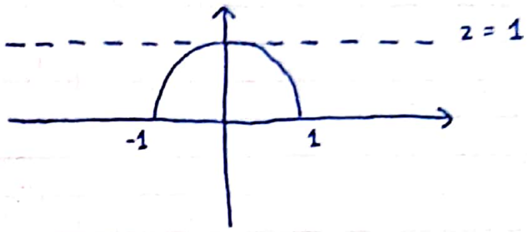
c)

ii) $C = \begin{cases} z = g(x,y) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{1-x^2-y^2} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{1-x^2} \\ x = 0 \end{cases}$

$C \hookrightarrow (0, y, \sqrt{1-y^2})$

$z = \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow z^2 = (\sqrt{1-y^2})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{1-y^2}$



Pela figura, a equação da reta tangente à curva C é uma reta horizontal, $t = [0, y, 1]$, logo a afirmação é falsa.

iii) $x_0^2 + y_0^2 = 1$

$$g_1(x_0, y_0) = \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}$$
$$= \sqrt{1 - (x_0^2 + y_0^2)} =$$
$$= \sqrt{1 - 1} = 0 \neq 1$$, afirmação verdadeira

d)

i) $V = -f(x,y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = -(x^2 - y^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = x^2 + y^2$

$$V_T(x,y) = T_x(x,y)\vec{i} + \frac{y}{y^2+x^2}\vec{j} =$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{y}{y^2+x^2}\vec{j} =$$

$$= \frac{1}{1^2+1^2}\vec{i} + \frac{1}{1^2+1^2}\vec{j} =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \neq \vec{w} = \langle -1, -1 \rangle$$

A taxa de variação em $P(1,1)$, segundo o valor $\vec{u} = \frac{-\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$

$\vec{u} = \frac{-\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{\langle -1, 1 \rangle}{\sqrt{1^2+1^2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{u} = \frac{\langle -1, 1 \rangle}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

$\vec{u} = \cos\frac{\pi}{4}\vec{i} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\vec{j}$

$T_{\vec{u}}(1,1) = \vec{u} \times \Delta_T(1,1) =$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) \times \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

$T_{\vec{u}}(1,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, o potencial cresce à taxa de $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.

a) $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

- S_1 é uma parabolóide de raio 2 e altura 4. A posição em xOy é um círculo centrado na origem.
- S_2 é uma esférica de raio 1. A posição em xOy é um círculo centrado na origem.
- S_3 é um cone de raio 2 e altura 2. A posição em xOy é um círculo centrado na origem.
- S_4 é um cilindro de raio 2 e altura 0,25. A posição em xOy é um círculo centrado na origem.

b) $V_{espumante} = V_{(S_1)} + V_{(S_2)}$

$V_{S_2} = \int_1^2 \int_0^{2\pi} (e^2-1)e \, d\theta de = \int_1^2 \int_0^{2\pi} e^3 - e \, d\theta de =$

$= \int_1^2 e^3 - e \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta de = 2\pi \int_1^2 e^3 - e \, de = 2\pi \times \left[\frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{2}\right]_1^2 =$

$= 2\pi \left(\left(\frac{16}{4} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{4}\right)\right) = \frac{9\pi}{2}$

$$V_{S_2} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} R^2 \operatorname{sen} e \; de\,d\alpha\,dR =$$

$$= \int_0^1 R^2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen} e \; de\,d\alpha\,dR = \int_0^1 R^2 \int_0^{2\pi} [-\cos e]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \; d\alpha\,dR =$$

$$= \int_0^1 R^2 \int_0^{2\pi} -\cos \pi + \cos \frac{\pi}{2} \; d\alpha\,dR = \int_0^1 R^2 \int_0^{2\pi} 1 \; d\alpha\,dR =$$

$$= 2\pi \int_0^1 R^2 \, dR = 2\pi \times \left[\frac{R^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2\pi}{3}$$

$$V_{S_1} + V_{S_2} = \frac{9\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{31\pi}{6}$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge -3 \leq z \leq -\sqrt{x^2+y^2} - 1\} =$$

$$= \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 < \rho \leq 3 \wedge -3 \leq z \leq e - 1\}$$

$$V_{S_3} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} ((e-1) - (-3))\, e \; d\alpha\,de =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} e^2 + 2e \; d\alpha\,de = \int_0^2 e^2 + 2e \int_0^{2\pi} 1 \; d\alpha\,de =$$

$$= 2\pi \int_0^2 e^2 + 2e \; de = 2\pi \times \left[\int_0^2 e^2 de + \int_0^2 2e \, de\right] =$$

$$= 2\pi \times \left[\left[\frac{e^3}{3}\right]_0^2 + 2\left[\frac{e^2}{2}\right]_0^2\right] = 2\pi \times \left(\frac{2^3}{3} + 2 \times \frac{4}{2}\right) =$$

$$= \frac{40\pi}{3}$$

$$V_{S_4} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (-3 - (-3{,}25)) \; d\alpha\,de =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 0{,}25 \; d\alpha\,de = \int_0^2 0{,}25\, e \int_0^{2\pi} 1 \; d\alpha\,de =$$

$$= 2\pi \times 0{,}25 \left[\frac{e^2}{2}\right]_0^2 = \frac{\pi}{2} \times \frac{4}{2} = \frac{4\pi}{4} = \pi$$

$$M = \rho \times V_S = 3 \times \left(\frac{40\pi}{3} + \pi\right) = 43\pi$$

c)

i) $$V_{C_i} = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r 1 \times e \; de\,d\alpha\,dz =$$

$$= \int_0^h \int_0^{2\pi} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^r d\theta dz = \frac{r^2}{2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^r d\theta dz =$$

$$= \frac{r^2}{2} \times \int_0^h [y]_0^{2\pi} dz = 2\pi \times \frac{r^2}{2} \times \int_0^h 1\, dz =$$

$$= \pi \times r^2 \times [x]_0^h = \pi \times r^2 \times h \rightarrow$$ volume do cilindro

$$V_{cone} = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{h/3} 1 \times e \; dz d\theta de =$$

$$= \int_0^r e \int_0^{2\pi} \int_0^{h/3} 1 \; dz d\theta de = \int_0^r e \int_0^{2\pi} \frac{h}{3} d\theta de =$$

$$= \frac{1}{3} \times h \int_0^r e \int_0^{2\pi} 1 \; d\theta de = \frac{1}{3} h \times 2\pi \int_0^r e \; de =$$

$$= \frac{1}{3} h \times 2\pi \left[\frac{e^2}{2}\right]_0^r = \frac{1}{3} x \times \pi \frac{r^2}{2} h =$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h \rightarrow$$ Volume do cone