曲阜师范大学学报自然科学版一九八六年第三期
Natural Sciences Edition
Journal of Qufu Normal University(3), 1986

从求根公式到群论的产生

张 素 亮

探索代数方程求解问题，特别是方程求根公式，经历了一个漫长的历史阶段，最后这一问题终于完满地解决了，同时也产生了一门现代应用十分广泛的学科——群论。简单回顾一下这一历史过程，对我们教学和科学研究都有一定的启发意义。

方程——代数中古老而又活跃的一个分支，几千年来深深地吸引了人们对它的注意。世界上保存下来的最古老的数学文献——阿赫美斯纸草（属于公元前一千八百五十年前后的文献）中，就记载了解一次方程的问题了。

二次方程求根公式有着漫长的历史，我国的《九章算术》中就出现过二次方程的例子，三世纪我国数学家赵君卿在注《周髀算经》时对二次方程$x^2-2c_1x+a_1=0$给出公式

$$x_1=\frac{2c_1-\sqrt{(2c_1)^2-4a_1}}{2}$$

完全二次方程的求根公式直到公元九世纪才在乌兹别克的著名学者阿尔花拉子摸的代数中出现。

三次方程比二次方程晚一些世纪才出现，我国七世纪初（唐）的数学家王孝通所著的《辑古算经》一书中记载了不少的三次方程问题。阿拉伯人也很早研究过三次方程，但是对于一般的三次方程，一直没有统一的解法，1494年有一位名叫帕克里的数学家还宣布一般的三次方程是不可能解的。

1500年意大利的玻伦亚大学教授达费罗（Delferro）找到了形如

$$x^3+px+q=0$$

的一般解法。但是达费罗没有发表他的方法。

1535年数学家达达利亚（Tartaglia）也找到了三次方程的解法，但他也不愿把他的发现公诸于世。后来在数学家卡当（Cardan）的恳切要求之下，并发誓对此保守秘密，达达利亚才把他的方法写成一首诗告诉给卡当，卡当根据这个方法，自已找到了它的证明，并不顾自已的誓言，把这个方法发表在他的"重要的艺术"一书中，由于卡当的工作结束了人们长期以来对这个公式的探索，后人常称三次方程求根公式为卡当公式。

为了以后叙述的需要，让我们介绍一个与卡当大同小异的做法，是法国数学家韦达（Vieta）在1591年给的。解$x^3+mx=n$，设$x=T-U$，故

$(T-U)^3+m(T-U)=n$，即是

$T^3-U^3+(m-3TU)(T-U)=n$。

再设$m=3TU$便得$T^3-(m/3T)^3-n=0$，即是

$$T^6-nT^3-(m/3)^3=0,$$

称作原方程的预解方程，虽然它看来是个六次方程，但实质上却只是T^3的二次方程，故有根

$$T^3=(n/2)\pm\sqrt{(n/2)^2+(m/2)^3}.$$

如果取T为

$$\sqrt{(n/2)^2+(m/2)^3}+(n/2)$$

的一个立方根，则从原解方程中可知$U=m/3T$是$\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}-(n/2)$

的一个立方根，因此得到卡当公式。到了1732年端士数学家歐拉（Euler）才指出三次方程应有三个根，并把它们全部写出来。令

$$t=\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}+(n/2),$$

$$u=\sqrt{(n/2)^2+(m/3)^3}-(n/2),$$

它们的立方根分别是

$$T,\omega T,\omega^2T\text{和}U,\omega U,\omega^2U,$$

其中$\omega=(-1+\sqrt{-3})/2$是本原单位立方根。要写下三次方程的三个根，必须从每组选一个，使两者的乘积是$m/3$，共有三对，即是

$$x_1=T-U,$$

$$x_2=\omega^2T-\omega U,$$

$$x_3=\omega T-\omega^2U.$$

在找到三次方程的求根公式以后，人们开始了对四次方程和更高次方程的研究。卡当的学生费拉利（Ferrari）把四次方程转化为两个二次方程，得到了四次方程的求根公式，发表在卡当的“重要的艺术”一书中，1637年笛卡尔（Descartes）用待定系数法也得到了四次方程的求根公式。

在人们寻求五次和更高次方程求根公式的过程中，各种偿试都失败了．十七世纪数学家格里高利（Gregory）曾提出猜测：对于$n>4$的一般n次方程不能用代数方法求解的。但长时间内没有人能够证明这个结论。

1770年德国数学家拉格朗日（Lagrange），采用了一种新颖的观点和方法，考察了解二次、三次、四次方程的办法，以找出成功的关键。

让我们以$x^3+mx=n$为例，它的三个根是

$$x_1=T-U,$$

$$x_2=\omega^2T-\omega U,$$

$$x_3=\omega T-\omega^2U,$$

T和U分别是某数的立方根。拉格朗日正确地意识到预解方程$T^6-nT^3-(m/3)^3=0$的重要性（注意这个方程的六个根是$T,\omega T,\omega^2T,-U,-\omega U,-\omega^2U$）。他独具慧眼，知道重要的倒不是如何把$x_1,x_2,x_3$写成那六个根的关系式，而是如何把那六个根写成$x_1,x_2,x_3$的关系式。他发觉那是办得到的，就是$T=(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)/3$（由于$\omega^2+\omega+1=0$），而且只要把那三个根调换，便可以得到预解方程的全部六个根了。例如把x_1换成x_3，x_2换成x_1，x_3换成x_2，便把$(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)/3$变成$(x_3+\omega x_1+\omega^2x_2)/3=\omega T$了。我们把以上的置换记作

$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_3 & x_1 & x_2\end{pmatrix}$，类似的置换共有六个．拉格朗日也指出要考虑各置换把$(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)^3/2T$变成什么？虽然有六个置换，

（下转39页）

Structure of Strong π Regular Ring

Zhou Shi-fan

(Department of Mathematics, Suzhou University)

Abstract

A ring R is called a strong π regular ring, if for every $x \in R$ there exists a positive tnteger n(x) such that $x^{n(x)} \in x^{n(x)+1} R \cap R$ (cf. [1]). particularly if $n(x)=1$ for any $x \in R$, then this one is called a strong regular ring (cf. [2]).

In this paper, some structures of strong π regular ring are given. i.e.

Theorem 1 Let R be a strong π regular ring with no nilpotent elements, the following are equivalent。

(1) R is direct sum of a finite number of division ring R_i which is an ideal of R.

(2) R has only a finite number of idempotent elements.

(3) R has only a finite number of primitive idempotent elements a_i $(i=1,\cdots,n)$, and $R=(a_1,\cdots,a_n)$.

(4) $R=Re_1$ $e=a_1+\cdots+a_n$, where a_i is a primitive idempotent element $(i=1,\cdots,n)$, and $a_i a_j=0$ $(i,j=1,\cdots,n, i\neq j)$.

Theorem 2 Let R be a strong π regular ring with no nilpotent elements, then R is a subdirect sum of division rings。

Theorem 3 Let R be a strong π regular ring, then Jacobson radieal J(R) of R is a Koetheradical K(R) of R, and R/J(R) is a subdirect sum of primitive rings R_i which is a strong π regular ring

---

（上接74页） 但上式变来变去却只有两个不同的值，即是T^3和U^3，这解释了为何预解方程虽然是T的六次方程，却其实T^3的二次方程。方程可解，道理在此。他以同样想法，考虑四个根的24个置换来解释四次方程可解的道理。他发现虽然预解方程是x的二十四次方程，却其实是x^4的六次方程，而且还可以进一步化为两个三次方程，故可解。由此他拟就了一套一般程序，希望逐步解高次方程。但当他实施于五次方程上，却碰到一个x的一百廿次方程，实质是x^5的二十四次方程，他不懂得怎样做下去。不过，他却由此而产生了高次方程不一定可解的想法。

1813年鲁非尼发表了一般的五次方程不可解的证明，但证明是不完满的，到了1826年挪威数学家阿贝耳（Abel）才给出一个正确的证明。

我们说一般的五次方程不可解，却不是说所有的五次方程不可解，例如可以证明$2x^5-5x^4+5$是不可解的，但x^5-1却是可解的。最终的答案由法国数学奇才伽瓦（Galois）在1832年给出，理论上他总可以决定一个给定的N次方程是否可解。

伽罗瓦和阿贝尔的贡献，主要倒不在于答复了高次方程可解与否，而是在于为了解答这个问题引入了思想，撒下了群论的种子，它终于成为非常重要的数学概念。而这一概念给二十世纪迅速发展的通讯事业、近代化学打上了深刻的印记。