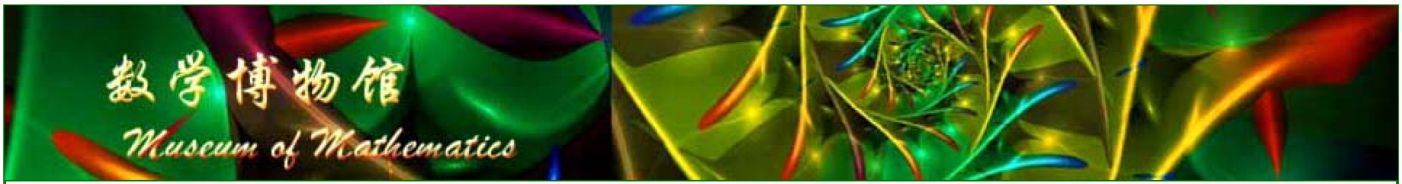

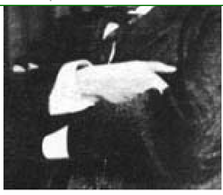

2、1930年数理逻辑的状况

1930年前，整个数学界是非常乐观的：希尔伯特的思想占统治地位；数学是建立在集合论和数理逻辑两块基石之上；康托尔的朴素集合论已被公理集合论所代替，从而消除了悖论；选择公理是一个很好的工具，数学中许多部门都要用到它；连续统假设仍然是悬案，不过希尔伯特多次觉得自己已接近解决这个难题，看来前景是乐观的。

大部分数学可以建立在谓词演算的基础上，而一阶谓词演算的公理系统是无矛盾的，尽管其完全性仍有待证明；整个数学的基本理论是自然数的算术和实数理论，它们都已经公理化。

这些公理系统应该是无矛盾的、完全的，如果它们能够得证，并且集合论公理系统也能得到同样的结果，那么整个数学就比较牢靠了。

为了不使一小撮直觉主义者指手划脚、评头品足，希尔伯特提出他的计划：把理论系统形式化，然后通过有限多步证明它们没有矛盾。他信心十足，在1930年9月东普鲁士哥尼斯堡的科学会会议上，他批判了不可知论。

1928年希尔伯特提出四个问题：

1、分析的无矛盾性。1924年阿克曼和1927年冯·诺依曼的工作使希尔伯特相信只要一些纯算术的初等引理即可证明。1930年夏天，哥德尔开始研究这个问题，他不理解希尔伯特为什么要直接证明分析的无矛盾性。哥德尔认为应该把困难分解：用有限主义的算术证明算术的无矛盾性，再用算术的无矛盾性证明分析的无矛盾性，哥德尔由此出发去证明算术的无矛盾性而得出不完全性定理。

2、更高级数学的无矛盾性，特别是选择公理的无矛盾性。这个问题后来被哥德尔在1938年以相对的方式解决。

3、算术及分析形式系统的完全性。这个问题在1930年秋天哥尼斯堡的会议上，哥德尔已经提出了一个否定的解决，这个问题的否定成为数理逻辑发展的转折点。

4、一阶谓词逻辑的完全性。这个问题已被哥德尔在1930年完全解决。

这样一来，哥德尔的工作把希尔伯特的方向扭转，使数理逻辑走上全新的道路。

3、1930年哥德尔的两项主要贡献

(1) 完全性定理：哥德尔的学位论文《逻辑函数演算的公理的完全性》解决了一阶谓词演算的完全性问题。罗素与怀德海建立了逻辑演算的公理系统的无矛盾性及完全性(也许还包括不那么重要的独立性)。所谓完全性就是，每一个真的逻辑数学命题都可以由这个公理系统导出，也就是可证明。

命题演算的完全性已由美国数学家波斯特在1921年给出证明，而一阶谓词演算的完全性一直到1929年才由哥德尔给出证明。但是哥德尔认为，斯柯仑在1922年的文章中已隐含证明了命题演算的完全性，但是他没有陈述这个结果，可能是他本人并没有意识到这一点。

(2) 哥德尔的不完全性定理：这是数理逻辑最重大的成就之一，是数理逻辑发展的一个里程碑和转折点。哥德尔在研究过程中直接考虑悖论及解决悖论的方法，从而把第三次数学危机引导至另外一个方向上。

哥德尔证明不完全性定理是从考虑数学分析的协调性问题开始的。1930年秋在哥尼斯堡会议上，他宣布了第一不完全性定理：一个包括初等数论的形式系统，如果是协调的，那就是不完全的。不久之后他又宣布：如果初等算术系统是协调的，则协调性在算术系统内不可证明。

哥德尔的证明使用了“算术化”的方法。哥德尔说：“一个系统的公式……从外观上看是原始符号的有穷序列……。不难严格地陈述，哪些原始符号的序列是合适公式，哪些不是；类似地，从形式观点看来，证明也只不过是(具有某种确定性质的)一串公式的有穷序列”。因此，研究一个形式系统实际上就是研究可数个对象的集合。我们给每个对象配上一个数，这种把每一个对象配上一个数的方法称为“哥德尔配数法”。哥德尔通过这些数反过来看原来形式系统的性质。

哥德尔研究了46种函数和谓词，哥德尔证明了他的前45个函数和谓词都是原始递归的。但第46个谓词为“X是一个可证公式的哥德尔数”。在对哥德尔配数的系统中，可以得到一个公式，它相当于：我是不可证的。所以这个句子是不可证的且是真的。所以系统中存在真语句而又不可证，也就是系统不完全。

哥德尔的论文在1931年发表之后，立即引起逻辑学家的莫大兴趣。它开始虽然使人们感到惊异不解，不久即得到广泛承认，并且产生巨大的影响。

哥德尔的证明对希尔伯特原来的计划是一个巨大的打击，因此把整个数学形式化的打算是注定要失败的，因而逻辑主义和形式主义的原则是不能贯彻到底的；“希尔伯特计划”中证明论的有限主义观点必须修正，从而使证明论的要求稍稍放宽。1936年甘岑在容许超穷归纳的条件下证明了算术的无矛盾性，而倡导有限构造主义的直觉主义也不能解决问题；哥德尔的工具递归函数促进了递归函数论的系统研究，同时推动了不可判定问题的研究，开始出现递归论的新分支。

哥德尔不完全定理的证明结束了关于数学基础的争论不休的时期，数学基础的危机不那么突出表现出来。数理逻辑形成了一个带有强技巧性的独立学科，而绝大部分数学家仍然把自己的研究建立在朴素集合论或ZF公理集合论的基础上。

尽管集合论中存在矛盾，但这些矛盾大部分均可回避。研究这些矛盾，特别是集合论的矛盾变成数理逻辑学家的事业。另外一方面，直觉主义和构造主义数学虽然也有发展，但终究是一小部分，半个世纪以来，在数学中始终不占统治地位。因为矛盾也好、危机也好，根源在于无穷，但是数学中毕竟少不了无穷。归根结蒂，数学终究是研究无穷的科学。