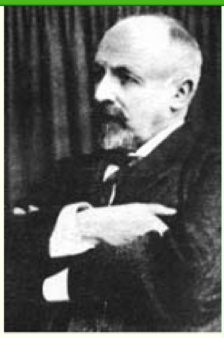



# 康托尔与他创立的集合论



康托尔（G.Cantor，1845－1918）是19世纪末20世纪初德国的数学家。康托尔创立了集合论作为实数理论，以至整个微积分理论体系的基础。

作为集合论的创立者，康托尔是数学史上最富有想象力，也最有争议的人物之一。19世纪末他所从事的关于连续性和无穷的研究从根本上背离了数学中关于无穷的使用和解释的传统，从而引起了激烈的争论乃至严厉的谴责。

然而数学的发展最终证明康托是正确的。康托创立的集合论被誉为20世纪最伟大的数学创造，集合概念大大扩充了数学的研究领域，给数学结构提供了一个基础，集合论不仅影响了现代数学，而且也深深影响了现代哲学和逻辑。

## 康托尔就对数学的特殊敏感

1845年3月3日，乔治·康托生于俄国的一个丹麦—犹太血统的家庭。1856年康托和他的父母一起迁到德国的法兰克福。像许多优秀的数学家一样，他在中学阶段就表现出一种对数学的特殊敏感，并不时得出令人惊奇的结论。他的父亲力促他学工，因而康托在1863年带着这个目地进入了柏林大学。这时柏林大学正在形成一个数学教学与研究的中心。康托很早就向往这所由外尔斯托拉斯占据着的世界数学中心之一。所以在柏林大学，康托受了外尔斯特拉斯的影响而转到纯粹的数学。他在1869年取得在哈勒大学任教的资格，不久后就升为副教授，并在1879年被升为正教授。

1874年康托在克列勒的《数学杂志》上发表了关于无穷集合理论的第一篇革命性文章。数学史上一般认为这篇文章的发表标志着集合论的诞生。这篇文章的创造性引起人们的注意。在以后的研究中，集合论和超限数成为康托研究的主流，他一直在这方面发表论文直到1897年，过度的思维劳累以及强列的外界刺激曾使康托患了精神分裂症。这一难以消除的病根在他后来30多年间一直断断续续影响着他的生活。1918年1月6日，康托在哈勒大学的精神病院中去世。

## 集合论的背景

为了比较清楚地了解康托在集合论上的工作，先介绍一下集合论产生的背景。

集合论在19世纪诞生的基本原因，来自数学分析基础的批判运动。数学分析的发展必然涉及到无穷过程，无穷小和无穷大这些无穷概念。在18世纪，由于无穷概念没有精确的定义，使微积分理论不仅遇到严重的逻辑困难，而且还使实无穷概念在数学中信誉扫地。19世纪上半叶，柯西给出了极限概念的精确描述。在这基础上建立起连续、导数、微分、积分以及无穷级数的理论。正是这19世纪发展起来的极限理论相当完美的解决了微积分理论所遇到的逻辑困难。但是，柯西并没有彻底完成微积分的严密化。柯西思想有一定的模糊性，甚至产生逻辑矛盾。

19世纪后期的数学家们发现使柯西产生逻辑矛盾的问题的原因在奠定微积分基础的极限概念上。严格地说柯西的极限概念并没有真正地摆脱几何直观，确实地建立在纯粹严密的算术的基础上。于是，许多受分析基础危机影响的数学家致力与分析的严格化。在这一过程中，都涉及到对微积分的基本研究对象—连续函数的描述。在数与连续性的定义中，有涉及关于无限的理论。因此，无限集合在数学上的存在问题又被提出来了。这自然也就导致寻求无限集合的理论基础的工作。总之，为寻求微积分彻底严密的算术化倾向，成了集合论产生的一个重要原因。

## 集合论的建立

康托在柏林大学的导师是外尔斯托拉斯，库曼和克罗内克。库曼教授是数论专家，他以引进理想数并大大推动费马大定理的研究而举世闻名是。克罗内克是一位大数学家，当时许多人都以得到他的赞许为荣。外尔斯托拉斯是一位优秀教师也是一位大数学家。他的演讲给数学分析奠定了一个精确而稳定的基础。例如，微积分中著名的观念就是他首先引进的。正是由于这些人的影响，康托对数论较早产生兴趣，并集中精力对高斯所留下的问题作了深入的研究。他的毕业论文就是关于++=0的素数问题的。这是高斯在《算术研究》中提出而未解决的问题。这片论文写得相当出色，它足以证明作者具有深刻的洞察力和对优秀思想的继承能力。

然而，他的超穷集合论的创立，并没有受惠于早期对数论的研究。相反，他很快接受了数学家海涅的建议转向了其他领域。海涅鼓励康托研究一个十分有趣，也是较困难的问题：任意函数的三角级数的表达式是否唯一？对康托来说这个问题是促使他建立集合论的最直接原因。函数可用三角级数表示，最早是1822年傅立叶提出来的。此后对于间断点的研究，越来越成为分析领域中引人注目的问题，从19世纪30年代起，不少杰出的数学家从事着对不连续函数的研究，并且都在一定程度上与集合这一概念挂起了钩。这就为康托最终建立集合论创造了条件。

1870年，海涅证明，如果表示一个函数的三角级数在区间[-π,π]中去掉函数间断点的任意小邻域后剩下的部分上是一致收敛的，那么级数是唯一的。至于间断点的函数情况如何，海涅没有解决。康托开始着手解决这个以如此简洁的方式表达的唯一性问题。他跨出了集合论的第一步。

康托一下子就表现出比海涅更强的研究能力。他决定尽可能多地取消限制，当然这会使问题本身增加难度。为了给出最有普遍性的解，康托引进了一些新的概念。在其后的三年中，康托先后发表了五篇有关这一题目的文章。1872年当康托将海涅提出的一致收敛的条件减弱为函数具有无穷个间断点的情况时，他已经将唯一性结果推广到允许例外值是无穷集的情况。康托1872年的论文是从间断点问题过度到点集论的极为重要的环节，使无穷点集成为明确的研究对象。

集合论里的中心，难点是无穷集合这个概念本身。从希腊时代以来，无穷集合很自然地引起数学家们和哲学家们的注意。而这种集合的本质以及看来是矛盾的性质，很难象有穷集合那样来把握它。所以对这种集合的理解没有任何进展。早在中世纪，人们已经注意到这样的事实：如果从两个同心圆出发画射线，那么射线就在这两个圆的点与点之间建立了一一对应，然而两圆的周长是不一样的。

在康托之前的数学家大多不赞成在无穷集之间使用一一对应的比较手段，因为它将出现部分等于全体的矛盾.高斯明确表态："我反对把一个无穷量当作实体，这在数学中是从来不允许的。无穷只是一种说话的方式… …"柯西也不承认无穷集合的存在。他不能允许部分同整体构成一一对应这件事。当然，潜无穷在一定条件下是便于使用的，但若把它作为无穷观则是片面的。数学的发展表明，只承认潜无穷，否认实无穷是不行的。康托把时间用到对研究对象的深沉思考中。他要用事实来说明问题，说服大家。康托认为，一个无穷集合能够和它的部分构成一一对应不是什么坏事，它恰恰反应了无穷集合的一个本质特征。对康托来说，如果一个集合能够和它的一部分构成一一对应，它就是无穷的。它定义了基数,可数集合等概念。并且证明了实数集是不可数的代数数是可数的.康托最初的证明发表在1874年的一篇题为《关于全体实代数数的特征》的文章中,它标志着集合论的诞生。

随着实数不可数性质的确立，康托又提出一个新的，更大胆的问题。1874年，他考虑了能否建立平面上的点和直线上的点之间的一一对应。从直观上说，平面上的点显然要比线上的点要多得多。康托自己起初也是这样认识的。但三年后，康托宣布：不仅平面和直线之间可以建立一一对应，而且一般的n维连续空间也可以建立一一对应！这一结果是出人意外的。就连康托本人也觉得"简直不能相信"。然而这又是明摆着的事实，它说明直观是靠不住的，只有靠理性才能发现真理，避免谬误。

既然n维连续空间与一维连续统具有相同的基数，于是，康托在1879到1884年间集中于线性连续统的研究，相继发表了六篇系列文章，汇集成《关于无穷的线性点集》。前四篇直接建立了集合论的一些重要结果，包括集合论在函数论等方面的应用。其中第五篇发表于1883年，它的篇幅最长，内容也最丰富。它不仅超出了线性点集的研究范围，而且给出了超穷数的一个完全一般的理论，其中借助良序集的序型引进了超穷序数的整个谱系。同时还专门讨论了由集合论产生的哲学问题，包括回答反对者们对康托所采取的实无穷立场的非难。这篇文章对康托是极为重要的。1883年，康托将它以《集合论基础》为题作为专著单独出版。

《集合论基础》的出版，是康托数学研究的里程碑。其主要成果是引进了作为自然数系的独立和系统扩充的超穷数。康托清醒地认识到，他这样做是一种大胆的冒进。"我很了解这样做将使我自己处于某种与数学中关于无穷和自然数性质的传统观念相对立的地位，但我深信，超穷数终将被承认是对数概念最简单、最适当和最自然的扩充。"《集合论基础》是康托关于早期集合理论的系统阐述，也是他将做出具有深远影响的特殊贡献的开端。

康托于1895年和1897年先后发表了两篇对超限数理论具有决定意义的论文。在该文中,他改变了早期用公理定义(序)数的方法，采用集合作为基本概念。他给出了超限基数和超限序数的定义，引进了它们的符号；依势的大小把它们排成一个"序列"；规定了它们的加法，乘法和乘方… …。

到此为止，康托所能做的关于超限基数和超限序数理论已臻于完成。但是集合论的内在矛盾开始暴露出来。康托自己首先发现了集合论的内在矛盾。他在1895年的文章中遗留下两个悬而未决的问题：一个是连续统假说；另一个是所有超穷基数的可比较性。他虽然认为无穷基数有最小数而没有最大数，但没有明显叙述其矛盾之处。一直到1903年罗素发表了他的著名悖论。集合论的内在矛盾才突出出来，成为20世纪集合论和数学基础研究的出发点。

对康托集合论的不同评价

康托的集合论是数学上最具有革命性的理论。他处理了数学上最棘手的对象---无穷集合。因此，他的发展道路也自然很不平坦。他抛弃了一切经验和直观，用彻底的理论来论证，因此他所得出的结论既高度地令人吃惊，难以置信，又确确实实，毋庸置疑。数学史上没有比康托更大胆的设想和采取的步骤了。因此，它不可避免地遭到了传统思想的反对。

一位德国的知觉主义者魏尔认为，康托把无穷分成等级是雾上之雾。法国数学界的权威人物庞加莱曾预言：我们的"后一代将把（康托的）集合论当作一种疾病"等等。由于两千年来无穷概念数学带来的困难，也由于反对派的权威地位,康托的成就不仅没有得到应有的评价，反而受到排斥。1891年，克罗内克去世之后，康托的处境开始好转。

另一方面，许多大数学家支持康托的集合论。除了狄德金以外，瑞典的数学家米大格---列夫勒在自己创办的国际性数学杂志上把康托的集合论的论文用法文转载，从而大大促进了集合论在国际上的传播。1897年在第一次国际数学家大会上，霍尔维次在对解析函数的最新进展进行概括时，就对康托的集合论的贡献进行了阐述。

三年后的第二次国际数学大会上，为了捍卫集合论而勇敢战斗的希尔伯特又进一步强调了康托工作的重要性。他把连续统假设列为20世纪初有待解决的23个主要数学问题之首。希尔伯特宣称"没有人能把我们从康托为我们创造的乐园中驱逐出去"。特别自1901年勒贝格积分产生以及勒贝格的测度理论充实了集合论之后，集合论得到了公认，康托的工作获得崇高的评价。当第三次国际数学大会于1904年召开时，"现代数学不能没有集合论"已成为大家的看法。康托的声望已经得到举世公认。

集合论最激烈的反对者是克罗内克，他认为只有他研究的数论及代数才最可靠。因为自然数是上帝创造的，其余的是人的工作。他对康托的研究对象和论证手段都表示强烈的反对。由于柏林是当时的数学中心，克罗内克又是柏林学派的领袖人物，所以他对康托及其集合论的发展前途的阻碍作用是非常大的。

**5.**集合论的意义

集合论是现代数学中重要的基础理论。它的概念和方法已经渗透到代数、拓扑和分析等许多数学分支以及物理学和质点力学等一些自然科学部门，为这些学科提供了奠基的方法，改变了这些学科的面貌。几乎可以说，如果没有集合论的观点，很难对现代数学获得一个深刻的理解。所以集合论的创立不仅对数学基础的研究有重要意义，而且对现代数学的发展也有深远的影响。

今天集合论已成为整个数学大厦的基础，康托也因此成为世纪之交的最伟大的数学家之一。