

1-2 什么样的推理是正确的?

Hengfeng Wei

hfwei@nju.edu.cn

Sep 02, 2017

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)



“我有一个梦想 ...”

建立一个能够涵盖人类思维活动的“通用符号演算系统”，
让人们的思维方式变得像数学运算那样清晰。

一旦有争论，不管是科学上的还是哲学上的，人们只要坐下来**算一算**，就可以毫不费力地辨明谁是对的。

Let us calculate [calculemus].

数理逻辑

数理逻辑是一门使用数学的方法研究“推理”的学科。

四个部分 (狭义):

- ▶ 集合论
- ▶ 模型论
- ▶ 递归论
- ▶ 证明论

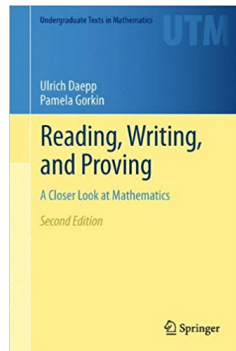
命题逻辑与一阶谓词逻辑:

- ▶ 公理系统
- ▶ **推理规则**
- ▶ 语法与语义
- ▶ 可靠性与完全性

学习数理逻辑的途径



VS



“命题”是什么？

Definition (Statement/Proposition)

A **statement** is a **sentence** that is either true or false (but not both).

“命题”是什么？

Definition (Statement/Proposition)

A **statement** is a **sentence** that is either true or false (but not both).

Exercise 2.1: 以下哪些是命题？

1. $X + 6 = 0$
2. $X = X$
3. 哥德巴赫猜想。
4. 今天是雨天。
5. 明天是晴天。
6. 明天是周二。
7. 这句话是假话。

关于“命题”，我知道些什么？

- ▶ 命题是一个语句 (sentence)，不能含有变量。
- ▶ 目前不知其真假，但本身必可分辨真假的语句也是命题。
- ▶ 悖论不是命题。

“真 (*truth*)”在日常语言中不可定义。

— *Alfred Tarski*

关于“命题究竟是什么”，我的建议是：



暂时忘掉“命题”与“悖论”吧

命题逻辑与一阶谓词逻辑：

- ▶ 引入命题符号：将命题视为原子
- ▶ 关注复合命题：研究命题之间的关系

\wedge \vee \neg \rightarrow \leftrightarrow

- ▶ 形式语言：“真”是“元语言”中的概念。不含悖论

命题逻辑部分习题选讲

题目 2.1: 前提、结论

if

whenever

only if (只有 ..., 才 ...; 除非 ...)

题目 2.1: 前提、结论

if

whenever

only if (只有 ..., 才 ...; 除非 ...)

只有男足夺冠了/游戏打通关了, 我才能安心学习。

题目 2.5: 命题逻辑中的语义

$$(P \rightarrow (\neg R \vee Q)) \wedge R$$

真值表 (truth table) ^a

^a“T/F” 是元语言中的概念，不是命题逻辑中的概念。

题目 2.5: 命题逻辑中的语义

$$(P \rightarrow (\neg R \vee Q)) \wedge R$$

真值表 (truth table) ^a

^a“T/F” 是元语言中的概念，不是命题逻辑中的概念。

$$p \rightarrow q$$

如果男足夺冠了/游戏打通关了，我就安心学习。

题目 2.5: 命题逻辑中的语义

$$(P \rightarrow (\neg R \vee Q)) \wedge R$$

真值表 (truth table) ^a

^a“T/F” 是元语言中的概念，不是命题逻辑中的概念。

$$p \rightarrow q$$

如果男足夺冠了/游戏打通关了，我就安心学习。

题目 2.8: 运算优先级

$$P \wedge Q \vee R$$

题目 2.6: 否定

If the stars are green or white horse is shining, then the world is eleven feet wide.

(Yes or No?)

The stars are green, the white horse is shining, but the world is not eleven feet wide.

题目 2.7: 永真式 (Tautology)

1. $\neg(\neg P)$
2. $\neg(P \vee Q)$
3. $\neg(P \wedge Q)$
4. $P \rightarrow Q$

1. P

题目 2.7: 永真式 (Tautology)

1. $\neg(\neg P)$
2. $\neg(P \vee Q)$
3. $\neg(P \wedge Q)$
4. $P \rightarrow Q$

1. P

- ▶ De Morgan's Law
- ▶ Implication

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

题目 2.7: 永真式 (Tautology)

1. $\neg(\neg P)$
2. $\neg(P \vee Q)$
3. $\neg(P \wedge Q)$
4. $P \rightarrow Q$

1. P

- ▶ De Morgan's Law
- ▶ Implication

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

题目 2.10: 等价

“It snows or it is not sunny.”

题目 3.2: 逆否命题与逆命题

$$P \rightarrow Q$$

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (?)$$

题目 3.6: Breakfast

Matilda always eats at least one of the following for breakfast:

- ▶ cereal, bread, or yogurt.

On Monday, she is especially picky.

- ▶ If she eats cereal and bread, she also eats yogurt.
- ▶ If she eats bread or yogurt, she also eats cereal.
- ▶ She never eats both cereal and yogurt.
- ▶ She always eats bread or cereal.

Can you say what Matilda eats on Monday? If so, what does she eat?

引入命题符号：你觉得这有什么问题吗？

A : Cereal

B : Bread

C : Yogurt

P : Cereal

Q : Bread

R : Yogurt

引入命题符号：你觉得这有什么问题吗？

A : Cereal

B : Bread

C : Yogurt

P : Cereal

Q : Bread

R : Yogurt

Look at the chart and say the COLOUR not the word

YELLOW	BLUE	ORANGE
BLACK	RED	GREEN
PURPLE	YELLOW	RED
ORANGE	GREEN	BLACK
BLUE	RED	PURPLE
GREEN	BLUE	ORANGE

Left - Right Conflict

Your right brain tries to say the colour but
your left brain insists on reading the word.

一个有效的推理：你觉得这有什么问题吗？

Denote C for cereal, B for bread, Y for yogurt. We have

$$(C \wedge B) \implies Y$$

$$(B \vee Y) \implies C$$

$$\neg(C \wedge Y)$$

$$B \vee C$$

We have:

$$\begin{aligned} ((B \vee Y) \implies C) &= (\neg(B \vee Y) \vee C) \\ &= ((\neg B \wedge \neg Y) \vee C) \\ &= ((\neg B \vee C) \wedge (\neg Y \vee C)) \end{aligned}$$

Therefore $\neg B \vee C$ is true, and $\neg Y \vee C$ is true.

Because $B \vee C$ is true, C must be true, i.e., Matilda eats cereal.

Because $\neg(C \wedge Y)$ is true, Y must be false, i.e., Matilda doesn't eat yogurt.

From $(C \wedge B) \implies Y$ we can also get that B is false.

So Matilda eats only cereal on Monday.

Let us calculate [calculamus].

题目 3.7: 四类命题

1. 原命题
2. 逆否命题
3. 逆命题
4. 否命题

原命题与其逆否命题等价。

题目 3.7: 四类命题

1. 原命题
2. 逆否命题
3. 逆命题
4. 否命题

原命题与其逆否命题等价。

问题：逆命题与否命题等价吗？

题目 3.11: 利用逆否命题作证明

Prove that if x is odd, then $\sqrt{2x}$ is not an integer.

一阶谓词逻辑部分习题选讲

题目 4.1: 量词 \forall 、 \exists

- (d) There exists an x such that for some y the equality $x = 2y$ holds.
- (e) There exists an x and a y such that $x = 2y$.

题目 4.1: 量词 \forall 、 \exists

- (d) There exists an x such that for some y the equality $x = 2y$ holds.
- (e) There exists an x and a y such that $x = 2y$.

对于 (d), 这个公式正确吗?

$$\exists x \rightarrow \exists y, x = 2y$$

题目 4.1: 量词 \forall 、 \exists

- (d) There exists an x such that for some y the equality $x = 2y$ holds.
- (e) There exists an x and a y such that $x = 2y$.

对于 (d), 这个公式正确吗?

$$\exists x \rightarrow \exists y, x = 2y$$

对于 (e), 以下两个公式正确吗?

$$\exists(x, y), x = 2y$$

$$\exists x, y, x = 2y$$

题目 4.5: 量词的否定

(j)

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, (x \in R \wedge |x - 1| < \delta) \rightarrow |x^2 - 1| < \epsilon.$$

(k)

$$\forall M \in R, \exists N \in R, \forall n > N, |f(n)| > M.$$

题目 4.5: 量词的否定

(j)

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, (x \in R \wedge |x - 1| < \delta) \rightarrow |x^2 - 1| < \epsilon.$$

(k)

$$\forall M \in R, \exists N \in R, \forall n > N, |f(n)| > M.$$

对于 (j), 以下否定形式正确吗?

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, (x \in R \wedge |x - 1| \geq \delta) \wedge |x^2 - 1| < \epsilon.$$

题目 4.5: 量词的否定

(j)

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, (x \in R \wedge |x - 1| < \delta) \rightarrow |x^2 - 1| < \epsilon.$$

(k)

$$\forall M \in R, \exists N \in R, \forall n > N, |f(n)| > M.$$

对于 (j), 以下否定形式正确吗?

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, (x \in R \wedge |x - 1| \geq \delta) \wedge |x^2 - 1| < \epsilon.$$

对于 (k), 以下否定形式正确吗?

$$\exists M \in R, \forall N \in R, \exists n > N, |f(n)| > M.$$

题目 4.7: 量词与蕴含的否定

$$\forall x, \left(x \in \mathbb{Z} \wedge \neg(\exists y, (y \in \mathbb{Z} \wedge x = 7y)) \wedge (\forall z, (z \in \mathbb{Z} \wedge x = 2z)) \right).$$

题目 4.7: 量词与蕴含的否定

$$\forall x, \left(x \in \mathbb{Z} \wedge \neg(\exists y, (y \in \mathbb{Z} \wedge x = 7y)) \wedge (\forall z, (z \in \mathbb{Z} \wedge x = 2z)) \right).$$

以下否定形式正确吗?

题目 4.7: 量词与蕴含的否定

$$\forall x, \left(x \in \mathbb{Z} \wedge \neg(\exists y, (y \in \mathbb{Z} \wedge x = 7y)) \wedge (\forall z, (z \in \mathbb{Z} \wedge x = 2z)) \right).$$

(c) Which statement is **true**, the original one or the negation?

以下否定形式正确吗?

题目 4.7: 量词与蕴含的否定

$$\forall x, \left(x \in \mathbb{Z} \wedge \neg(\exists y, (y \in \mathbb{Z} \wedge x = 7y)) \wedge (\forall z, (z \in \mathbb{Z} \wedge x = 2z)) \right).$$

(c) Which statement is **true**, the original one or the negation?

以下否定形式正确吗?

一阶谓词逻辑公式的**语义**: 如何定义“真假值”?

