Численное моделирование нестационарного течения газа с использованием неявных разностных схем

Земцов Сергей

410 группа

Содержание

1 Постановка дифференциальной задачи

Нестационарное двумерное движение вязкого баротропного газа описывается системой уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\rho u_2}{\partial x_2}=0,\\
&\frac{\partial\rho u_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho u_1^2}{\partial x_1}+\frac{\partial\rho u_1u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial p}{\partial x_1}=\mu\Big(\frac{4}{3}\frac{\partial^2u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u_1}{\partial x_2^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1\partial x_2}\Big)+\rho f_1,\\
&\frac{\partial\rho u_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho u_1u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\rho u_2^2}{\partial x_2}+\frac{\partial p}{\partial x_2}=\mu\Big(\frac{1}{3}\frac{\partial^2u_1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1^2}+\frac{4}{3}\frac{\partial^2u_2}{\partial^2x_2}\Big)+\rho f_2,\\
&p=p(\rho),
\end{aligned}
$$

где μ - коэффициент вязкости газа (известная неотрицательная константа), p - давление газа (известная функция), f - вектор внешних сил (также известная функция от переменных Эйлера, см. ниже).

Неизвестные функции: плотность ρ и вектор скорости u являются функциями переменных Эйлера

$$(t,x)\in Q=[0,T]\times\Omega.$$

Граничные условия для неизвестного решения: $\rho|_{\Gamma^-}=\rho_\gamma=1,\quad u_1|_{\Gamma^-}=\omega\in\{0,1;\ 1\},\quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|_{\Gamma^+}=0$. На оставшейся границе компоненты скорости равны нулю, а функция плотности считается неизвестной.

Для решения задачи вводится равномерная сетка с шагом h_x по оси X, h_y по оси Y, τ по времени.

2 Схема для $\log(\rho)$ с центральными разностями

Для автоматического обеспечения условия положительности функции плотности систему дифференциальных уравнений можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\Big(u_k\frac{\partial g}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k g}{\partial x_k} + (2-g)\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\Big) = f_0,$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{1}{3}(u_k\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^2}{\partial x_k}) + \frac{1}{2}\sum_{m=1, m\neq k}^{2}\Big(u_m\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m u_k}{\partial x_m} - u_k\frac{\partial u_m}{\partial x_m}\Big) + p'_\rho\frac{\partial g}{\partial x_k} =$$

$$= \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} + \sum_{m=1, m\neq k}^{2}\Big(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_m}\Big)\right) + f_k,\ k = 1..s,$$

$$p = p(\rho), \quad g = ln\ \rho.$$

Сеточную функцию, разностное приближение для плотности ρ, обозначим H. Аналогично, разностные аналоги g и u обозначим через G и V. Для поиска численного решения задачи используется следующая разностная схема:

$$
\begin{aligned}
& G_t + 0.5\sum_{k=1}^{2}\Big(V_k\hat{G}_{\overset{0}{x}_k} + (V_k\hat{G})_{\overset{0}{x}_k} + 2(\hat{V}_k)_{\overset{0}{x}_k} - G(V_k)_{\overset{0}{x}_k}\Big) = f_0,\ x\in\Omega_{\bar{h}};\\
& G_t + 0.5\Big((V_k\hat{G})_{x_k} + 2(\hat{V}_k)_{x_k} - G(V_k)_{x_k}\Big) - \\
& - 0.5h_k\Big((GV_k)^{+1_k}_{x_k\bar{x}_k} - 0.5(GV_k)^{+2_k}_{x_k\bar{x}_k} + (2-G)((V_k)^{+1_k}_{x_k\bar{x}_k} - 0.5(V_k)^{+2_k}_{x_k\bar{x}_k})\Big) = \\
& \qquad = f_0, \qquad x\in\gamma_k^-, k=1,\ 2;\\
& G_t + 0.5\Big((V_k\hat{G})_{\bar{x}_k} + 2(\hat{V}_k)_{\bar{x}_k} - G(V_k)_{\bar{x}_k}\Big) + \\
& + 0.5h_k\Big((GV_k)^{-1_k}_{x_k\bar{x}_k} - 0.5(GV_k)^{-2_k}_{x_k\bar{x}_k} + (2-G)((V_k)^{-1_k}_{x_k\bar{x}_k} - 0.5(V_k)^{-2_k}_{x_k\bar{x}_k})\Big) = \\
& \qquad = f_0, \qquad x\in\gamma_k^+, k=1,\ 2;\\
& (V_k)_t + \frac{1}{3}\Big(V_k(\hat{V}_k)_{\overset{0}{x}_k} + (V_k\hat{V}_k)_{\overset{0}{x}_k}\Big) + \\
& + \frac{1}{2}\sum_{m=1,m\neq k}^{2}\Big(V_m(\hat{V}_k)_{\overset{0}{x}_m} + (V_m\hat{V}_k)_{\overset{0}{x}_m} - V_k(\hat{V}_m)_{\overset{0}{x}_m}\Big) + \\
& + p'_\rho(e^G)\hat{G}_{\overset{0}{x}_m} = \tilde{\mu}\left(\frac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1,m\neq k}^{2}(\hat{V}_k)_{x_m\bar{x}_m}\right) - \\
& - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})\left(\frac{4}{3}(V_k)_{x_k\bar{x}_k} + \sum_{m=1,m\neq k}^{2}(V_k)_{x_m\bar{x}_m}\right) + \\
& + \frac{\mu e^{-G}}{3}\sum_{m=1,m\neq k}^{2}(V_m)_{\overset{0}{x}_k\overset{0}{x}_m} + f_k, \quad x\in\Omega_{\bar{h}};\\
& \hat{V}_k = 0, \qquad x\in\gamma_{\bar{h}}, \qquad k=1,\ 2.
\end{aligned}
$$

Распишем уравнения схемы в поточечном виде и преобразуем их, приведя подобные слагаемые при неизвестных значениях с верхнего слоя.

Получим:

$$
\begin{aligned}
&4G^{n+1}_{m_1,m_2} - \frac{\tau}{h_x}G^{n+1}_{m_1-1,m_2}(V1^n_{m_1,m_2} + V1^n_{m_1-1,m_2}) + \frac{\tau}{h_x}G^{n+1}_{m_1+1,m_2}(V1^n_{m_1,m_2} + V1^n_{m_1+1,m_2})\\
&- \frac{\tau}{h_y}G^{n+1}_{m_1,m_2-1}(V2^n_{m_1,m_2} + V2^n_{m_1,m_2-1}) + \frac{\tau}{h_y}G^{n+1}_{m_1,m_2+1}(V2^n_{m_1,m_2} + V2^n_{m_1,m_2+1})\\
&- \frac{2\tau}{h_x}V1^{n+1}_{m_1-1,m_2} + \frac{2\tau}{h_x}V1^{n+1}_{m_1+1,m_2} - \frac{2\tau}{h_y}V2^{n+1}_{m_1,m_2-1} + \frac{2\tau}{h_y}V2^{n+1}_{m_1,m_2+1} =\\
&= 4G^n_{m_1,m_2} + \tau G^n_{m_1,m_2}\left(\frac{V1^n_{m_1+1,m_2} - V1^n_{m_1-1,m_2}}{h_x} + \frac{V2^n_{m_1,m_2+1} - V2^n_{m_1,m_2-1}}{h_y}\right)\\
&+ 4\tau f_0, \qquad x \in \Omega_h
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&G^{n+1}_{0,m_2}(2 - \frac{\tau}{h_x}V1^n_{0,m_2}) + G^{n+1}_{1,m_2}\frac{\tau}{h_x}V1^n_{1,m_2} +\\
&+ \frac{2\tau}{h_x}V1^{n+1}_{1,m_2} - \frac{2\tau}{h_x}V1^{n+1}_{0,m_2} = 2G^n_{0,m_2} + \frac{\tau}{h_x}G^n_{0,m_2}(V1^n_{1,m_2} - V1^n_{0,m_2}) + 2\tau f_0 +\\
&+ \frac{\tau}{h_x}\Big(G^n_{0,m_2}V1^n_{0,m_2} - 2.5G^n_{1,m_2}V1^n_{1,m_2} + 2G^n_{2,m_2}V1^n_{2,m_2} - 0.5G^n_{3,m_2}V1^n_{3,m_2} +\\
&+ (2 - G^n_{0,m_2})(V1^n_{0,m_2} - 2.5V1^n_{1,m_2} + 2V1^n_{2,m_2} - 0.5V1^n_{3,m_2})\Big), \qquad x \in \gamma_k^-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&G^{n+1}_{M,m_2}(2 + \frac{\tau}{h_x}V1^n_{M,m_2}) - G^{n+1}_{M-1,m_2}\frac{\tau}{h_x}V1^n_{M-1,m_2} +\\
&+ \frac{2\tau}{h_x}V1^{n+1}_{M,m_2} - \frac{2\tau}{h_x}V1^{n+1}_{M-1,m_2} = 2G^n_{M,m_2} + \frac{\tau}{h_x}G^n_{M,m_2}(V1^n_{M,m_2} - V1^n_{M-1,m_2}) + 2\tau f_0 -\\
&- \frac{\tau}{h_x}\Big(G^n_{M,m_2}V1^n_{M,m_2} - 2.5G^n_{M-1,m_2}V1^n_{M-1,m_2} + 2G^n_{M-2,m_2}V1^n_{M-2,m_2} - 0.5G^n_{M-3,m_2}V1^n_{M-3,m_2} +\\
&+ (2 - G^n_{M,m_2})(V1^n_{M,m_2} - 2.5V1^n_{M-1,m_2} + 2V1^n_{M-2,m_2} - 0.5V1^n_{M-3,m_2})\Big), \qquad x \in \gamma_k^+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&V1^{n+1}_{m_1,m_2}(6+4\tau\tilde{\mu}(\frac{4}{h_x^2}+\frac{3}{h_y^2}))+\\
&V1^{n+1}_{m_1-1,m_2}(-\frac{\tau}{h_x}(V1^{n}_{m_1,m_2}+V1^{n}_{m_1-1,m_2})-\tilde{\mu}\frac{8\tau}{h_x^2})+\\
&V1^{n+1}_{m_1+1,m_2}(\frac{\tau}{h_x}(V1^{n}_{m_1,m_2}+V1^{n}_{m_1+1,m_2})-\tilde{\mu}\frac{8\tau}{h_x^2})+\\
&V1^{n+1}_{m_1,m_2-1}(-\frac{3\tau}{2h_y}(V2^{n}_{m_1,m_2}+V2^{n}_{m_1,m_2-1})-\tilde{\mu}\frac{6\tau}{h_y^2})+\\
&V1^{n+1}_{m_1,m_2+1}(\frac{3\tau}{2h_y}(V2^{n}_{m_1,m_2}+V2^{n}_{m_1,m_2+1})-\tilde{\mu}\frac{6\tau}{h_y^2})-\\
&-3\frac{\tau}{h_x}p'_\rho G^{n+1}_{m_1-1,m_2}+3\frac{\tau}{h_x}p'_\rho G^{n+1}_{m_1+1,m_2}=\\
&=6V1^{n}_{m_1,m_2}+6\tau f_1+\frac{3\tau}{2h_y}V1^{n}_{m_1,m_2}(V2_{m_1,m_2+1}-V2_{m_1,m_2-1})-\\
&-(\tilde{\mu}-\mu e^{-G})6\tau\big(\frac{4}{3h_x^2}(V1^{n}_{m_1+1,m_2}-2V1^{n}_{m_1,m_2}+V1^{n}_{m_1-1,m_2})+\\
&+\frac{1}{h_y^2}(V1^{n}_{m_1,m_2+1}-2V1^{n}_{m_1,m_2}+V1^{n}_{m_1,m_2-1})\big)+\\
&+\mu e^{-G}\frac{\tau}{2h_xh_y}(V2^{n}_{m_1+1,m_2+1}-V2^{n}_{m_1-1,m_2+1}-V2^{n}_{m_1+1,m_2-1}+V2^{n}_{m_1-1,m_2-1}),\\
&\tilde{\mu}=\mu||e^{-G}||.
\end{aligned}
$$

3 Тестирование на гладком решении

Рассмотрим функции:

$$u_1(t, x_1, x_2) = \sin(x_1)\sin(x_2)\exp^t$$

$$u_2(t, x_1, x_2) = \sin(x_1)\sin(x_2)\exp^{-t}$$

$$\rho(t, x_1, x_2) = (\cos(x_1) + 1.5)(\cos(x_2) + 1.5)\exp^t$$

Сделаем эти функции решением задачи, путем определения функций f_0, f_1, f_2.

3.1 Тест №1

Посмотрим на нормы отклонения решения новой задачи от известного ответа. Параметры $\mu = 0.1$

$||G - g||_c$

N M	20	40	80
20	2.226118e-001	2.229332e-001	2.227963e-001
40	1.625185e-001	1.490928e-001	1.470278e-001
80	1.183744e-001	9.780931e-002	9.399656e-002

$||G - g||_{L2}$

N M	20	40	80
20	7.881502e-001	7.760840e-001	7.732262e-001
40	4.415166e-001	4.242142e-001	4.205404e-001
80	2.506339e-001	2.275291e-001	2.231311e-001

$||G - g||_2^1$

N M	20	40	80
20	1.084773e+000	9.429816e-001	8.630577e-001
40	8.963833e-001	6.988282e-001	5.777637e-001
80	8.348985e-001	6.072825e-001	4.586836e-001

$||V1 - u1||_c$

N M	20	40	80
20	3.587106e-001	3.571893e-001	3.567833e-001
40	2.256584e-001	2.184677e-001	2.163800e-001
80	1.369765e-001	1.258933e-001	1.232229e-001

$||V1 - u1||_{L2}$

N M	20	40	80
20	1.134281e+000	1.140679e+000	1.141334e+000
40	6.427172e-001	6.415121e-001	6.406866e-001
80	3.519757e-001	3.443347e-001	3.429484e-001

$||V1-u1||_2^1$

N M	20	40	80
20	3.280914e+000	2.436311e+000	1.895991e+000
40	3.259879e+000	2.327238e+000	1.699085e+000
80	3.289118e+000	2.316687e+000	1.647871e+000

$||V2-u2||_c$

N M	20	40	80
20	1.371596e-001	1.369522e-001	1.368953e-001
40	8.303557e-002	8.094133e-002	8.068471e-002
80	4.801745e-002	4.463771e-002	4.431233e-002

$||V2-u2||_{L2}$

N M	20	40	80
20	4.394355e-001	4.301333e-001	4.274454e-001
40	2.549795e-001	2.423606e-001	2.393553e-001
80	1.468379e-001	1.316099e-001	1.282802e-001

$||V2-u2||_2^1$

N M	20	40	80
20	7.274666e-001	5.903824e-001	5.133909e-001
40	5.846181e-001	4.389401e-001	3.513036e-001
80	5.165372e-001	3.677427e-001	2.729441e-001

TIME

N M	20	40	80
20	1.052000e+000	2.323400e+001	7.398490e+002
40	1.314000e+000	1.189100e+001	3.979780e+002
80	2.237000e+000	1.377600e+001	1.624820e+002

Также для $\mu = 0.001$

$||G-g||_c$

N M	20	40	80
20	2.295651e-001	2.296185e-001	2.295576e-001
40	1.734755e-001	1.582878e-001	1.558701e-001
80	1.294093e-001	1.058871e-001	1.014020e-001

$||G-g||_{L2}$

N M	20	40	80
20	8.093506e-001	7.970034e-001	7.940868e-001
40	4.560944e-001	4.381071e-001	4.343242e-001
80	2.609654e-001	2.362643e-001	2.316317e-001

$||G-g||_2^1$

N M	20	40	80
20	1.100853e+000	9.602130e-001	8.817495e-001
40	9.064776e-001	7.080743e-001	5.882787e-001
80	8.435808e-001	6.122108e-001	4.637969e-001

$||V1-u1||_c$

N M	20	40	80
20	3.671916e-001	3.653109e-001	3.647147e-001
40	2.335176e-001	2.258276e-001	2.236546e-001
80	1.449530e-001	1.317125e-001	1.289101e-001

$||V1-u1||_{L2}$

N M	20	40	80
20	1.175211e+000	1.180273e+000	1.180626e+000
40	6.724330e-001	6.690932e-001	6.678500e-001
80	3.722931e-001	3.617727e-001	3.598263e-001

$||V1-u1||_2^1$

N M	20	40	80
20	3.285783e+000	2.448737e+000	1.915902e+000
40	3.257332e+000	2.329246e+000	1.705743e+000
80	3.283435e+000	2.314672e+000	1.648520e+000

$||V2-u2||_c$

N M	20	40	80
20	1.486234e-001	1.483809e-001	1.484719e-001
40	9.080801e-002	8.918637e-002	8.901185e-002
80	5.265125e-002	4.970741e-002	4.947207e-002

$||V2-u2||_{L2}$

N M	20	40	80
20	4.566881e-001	4.476253e-001	4.450511e-001
40	2.665928e-001	2.540846e-001	2.511399e-001
80	1.540339e-001	1.387124e-001	1.354231e-001

$||V2-u2||_2^1$

N M	20	40	80
20	7.422675e-001	6.059374e-001	5.297091e-001
40	5.925206e-001	4.476225e-001	3.608399e-001
80	5.197034e-001	3.715334e-001	2.773302e-001

TIME

N M	20	40	80
20	1.061000e+000	2.376200e+001	7.503460e+002
40	1.327000e+000	1.200800e+001	3.707330e+002
80	2.211000e+000	1.397100e+001	1.627290e+002