

Численное моделирование нестационарного
течения газа с использованием неявных
разностных схем

Земцов Сергей

410 группа

Содержание

1	Постановка дифференциальной задачи	3
2	Схема для $\log(\rho)$ с центральными разностями	4
3	Тестирование на гладком решении	8
3.1	Тест №1	8
4	Численные эксперименты	11

1 Постановка дифференциальной задачи

Нестационарное двумерное движение вязкого баротропного газа описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_1 u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \rho f_1, \\ \frac{\partial \rho u_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1 u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2^2}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} &= \mu \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + \rho f_2, \\ p &= p(\rho),\end{aligned}$$

где μ - коэффициент вязкости газа (известная неотрицательная константа), p - давление газа (известная функция), f - вектор внешних сил (также известная функция от переменных Эйлера, см. ниже).

Неизвестные функции: плотность ρ и вектор скорости u являются функциями переменных Эйлера

$$(t, x) \in Q = [0, T] \times \Omega.$$

Граничные условия для неизвестного решения: $\rho|_{\Gamma^-} = \rho_\gamma = 1$, $u_1|_{\Gamma^-} = \omega \in \{0, 1; 1\}$, $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}|_{\Gamma^+} = 0$. На оставшейся границе компоненты скорости равны нулю, а функция плотности считается неизвестной.

Для решения задачи вводится равномерная сетка с шагом h_x по оси X , h_y по оси Y , τ по времени.

2 Схема для $\log(\rho)$ с центральными разностями

Для автоматического обеспечения условия положительности функции плотности систему дифференциальных уравнений можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left(u_k \frac{\partial g}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k g}{\partial x_k} + (2 - g) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) &= f_0, \\ \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{1}{3} \left(u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^2}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^2 \left(u_m \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m u_k}{\partial x_m} - u_k \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) + p'_\rho \frac{\partial g}{\partial x_k} &= \\ = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_m} \right) \right) + f_k, \quad k = 1..s, \\ p &= p(\rho), \quad g = \ln \rho. \end{aligned}$$

Сеточную функцию, разностное приближение для плотности ρ , обозначим H . Аналогично, разностные аналоги g и u обозначим через G и V . Для поиска численного решения задачи используется следующая

разностная схема:

$$\begin{aligned}
& G_t + 0.5 \sum_{k=1}^2 \left(V_k \hat{G}_{x_k}^0 + (V_k \hat{G})_{x_k}^0 + 2(\hat{V}_k)_{x_k}^0 - G(V_k)_{x_k}^0 \right) = f_0, \quad x \in \Omega_{\bar{h}}; \\
& G_t + 0.5 \left((V_k \hat{G})_{x_k} + 2(\hat{V}_k)_{x_k} - G(V_k)_{x_k} \right) - \\
& - 0.5 h_k \left((GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+1_k} - 0.5 (GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+2_k} + (2 - G)((V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+1_k} - 0.5 (V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{+2_k}) \right) = \\
& = f_0, \quad x \in \gamma_k^-, k = 1, 2; \\
& G_t + 0.5 \left((V_k \hat{G})_{\bar{x}_k} + 2(\hat{V}_k)_{\bar{x}_k} - G(V_k)_{\bar{x}_k} \right) + \\
& + 0.5 h_k \left((GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-1_k} - 0.5 (GV_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-2_k} + (2 - G)((V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-1_k} - 0.5 (V_k)_{x_k \bar{x}_k}^{-2_k}) \right) = \\
& = f_0, \quad x \in \gamma_k^+, k = 1, 2; \\
& (V_k)_t + \frac{1}{3} \left(V_k (\hat{V}_k)_{x_k}^0 + (V_k \hat{V}_k)_{x_k}^0 \right) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=1, m \neq k}^2 \left(V_m (\hat{V}_k)_{x_m}^0 + (V_m \hat{V}_k)_{x_m}^0 - V_k (\hat{V}_m)_{x_m}^0 \right) + \\
& + p'_\rho(e^G) \hat{G}_{x_m}^0 = \tilde{\mu} \left(\frac{4}{3} (\hat{V}_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (\hat{V}_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) - \\
& - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G}) \left(\frac{4}{3} (V_k)_{x_k \bar{x}_k} + \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_k)_{x_m \bar{x}_m} \right) + \\
& + \frac{\mu e^{-G}}{3} \sum_{m=1, m \neq k}^2 (V_m)_{x_k x_m}^0 + f_k, \quad x \in \Omega_{\bar{h}}; \\
& \hat{V}_k = 0, \quad x \in \gamma_{\bar{h}}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned}$$

Распишем уравнения схемы в поточечном виде и преобразуем их, приводя подобные слагаемые при неизвестных значениях с верхнего слоя.

Получим:

$$\begin{aligned}
& 4G_{m_1, m_2}^{n+1} - \frac{\tau}{h_x} G_{m_1-1, m_2}^{n+1} (V1_{m_1, m_2}^n + V1_{m_1-1, m_2}^n) + \frac{\tau}{h_x} G_{m_1+1, m_2}^{n+1} (V1_{m_1, m_2}^n + V1_{m_1+1, m_2}^n) \\
& - \frac{\tau}{h_y} G_{m_1, m_2-1}^{n+1} (V2_{m_1, m_2}^n + V2_{m_1, m_2-1}^n) + \frac{\tau}{h_y} G_{m_1, m_2+1}^{n+1} (V2_{m_1, m_2}^n + V2_{m_1, m_2+1}^n) \\
& - \frac{2\tau}{h_x} V1_{m_1-1, m_2}^{n+1} + \frac{2\tau}{h_x} V1_{m_1+1, m_2}^{n+1} - \frac{2\tau}{h_y} V2_{m_1, m_2-1}^{n+1} + \frac{2\tau}{h_y} V2_{m_1, m_2+1}^{n+1} = \\
& = 4G_{m_1, m_2}^n + \tau G_{m_1, m_2}^n \left(\frac{V1_{m_1+1, m_2}^n - V1_{m_1-1, m_2}^n}{h_x} + \frac{V2_{m_1, m_2+1}^n - V2_{m_1, m_2-1}^n}{h_y} \right) \\
& + 4\tau f_0, \quad x \in \Omega_h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& G_{0, m_2}^{n+1} (2 - \frac{\tau}{h_x} V1_{0, m_2}^n) + G_{1, m_2}^{n+1} \frac{\tau}{h_x} V1_{1, m_2}^n + \\
& + \frac{2\tau}{h_x} V1_{1, m_2}^{n+1} - \frac{2\tau}{h_x} V1_{0, m_2}^{n+1} = 2G_{0, m_2}^n + \frac{\tau}{h_x} G_{0, m_2}^n (V1_{1, m_2}^n - V1_{0, m_2}^n) + 2\tau f_0 + \\
& + \frac{\tau}{h_x} \left(G_{0, m_2}^n V1_{0, m_2}^n - 2.5G_{1, m_2}^n V1_{1, m_2}^n + 2G_{2, m_2}^n V1_{2, m_2}^n - 0.5G_{3, m_2}^n V1_{3, m_2}^n + \right. \\
& \left. + (2 - G_{0, m_2}^n)(V1_{0, m_2}^n - 2.5V1_{1, m_2}^n + 2V1_{2, m_2}^n - 0.5V1_{3, m_2}^n) \right), \quad x \in \gamma_k^-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& G_{M, m_2}^{n+1} (2 + \frac{\tau}{h_x} V1_{M, m_2}^n) - G_{M-1, m_2}^{n+1} \frac{\tau}{h_x} V1_{M-1, m_2}^n + \\
& + \frac{2\tau}{h_x} V1_{M, m_2}^{n+1} - \frac{2\tau}{h_x} V1_{M-1, m_2}^{n+1} = 2G_{M, m_2}^n + \frac{\tau}{h_x} G_{M, m_2}^n (V1_{M, m_2}^n - V1_{M-1, m_2}^n) + 2\tau f_0 - \\
& - \frac{\tau}{h_x} \left(G_{M, m_2}^n V1_{M, m_2}^n - 2.5G_{M-1, m_2}^n V1_{M-1, m_2}^n + 2G_{M-2, m_2}^n V1_{M-2, m_2}^n - 0.5G_{M-3, m_2}^n V1_{M-3, m_2}^n + \right. \\
& \left. + (2 - G_{M, m_2}^n)(V1_{M, m_2}^n - 2.5V1_{M-1, m_2}^n + 2V1_{M-2, m_2}^n - 0.5V1_{M-3, m_2}^n) \right), \quad x \in \gamma_k^+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V1_{m_1, m_2}^{n+1} (6 + 4\tau \tilde{\mu} (\frac{4}{h_x^2} + \frac{3}{h_y^2})) + \\
& V1_{m_1-1, m_2}^{n+1} (-\frac{\tau}{h_x} (V1_{m_1, m_2}^n + V1_{m_1-1, m_2}^n) - \tilde{\mu} \frac{8\tau}{h_x^2}) + \\
& V1_{m_1+1, m_2}^{n+1} (\frac{\tau}{h_x} (V1_{m_1, m_2}^n + V1_{m_1+1, m_2}^n) - \tilde{\mu} \frac{8\tau}{h_x^2}) + \\
& V1_{m_1, m_2-1}^{n+1} (-\frac{3\tau}{2h_y} (V2_{m_1, m_2}^n + V2_{m_1, m_2-1}^n) - \tilde{\mu} \frac{6\tau}{h_y^2}) + \\
& V1_{m_1, m_2+1}^{n+1} (\frac{3\tau}{2h_y} (V2_{m_1, m_2}^n + V2_{m_1, m_2+1}^n) - \tilde{\mu} \frac{6\tau}{h_y^2}) - \\
& - 3\frac{\tau}{h_x} p'_\rho G_{m_1-1, m_2}^{n+1} + 3\frac{\tau}{h_x} p'_\rho G_{m_1+1, m_2}^{n+1} = \\
& = 6V1_{m_1, m_2}^n + 6\tau f_1 + \frac{3\tau}{2h_y} V1_{m_1, m_2}^n (V2_{m_1, m_2+1} - V2_{m_1, m_2-1}) - \\
& - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G}) 6\tau (\frac{4}{3h_x^2} (V1_{m_1+1, m_2}^n - 2V1_{m_1, m_2}^n + V1_{m_1-1, m_2}^n) + \\
& + \frac{1}{h_y^2} (V1_{m_1, m_2+1}^n - 2V1_{m_1, m_2}^n + V1_{m_1, m_2-1}^n)) + \\
& + \mu e^{-G} \frac{\tau}{2h_x h_y} (V2_{m_1+1, m_2+1}^n - V2_{m_1-1, m_2+1}^n - V2_{m_1+1, m_2-1}^n + V2_{m_1-1, m_2-1}^n), \\
& \tilde{\mu} = \mu ||e^{-G}||.
\end{aligned}$$

3 Тестирование на гладком решении

Рассмотрим функции:

$$u_1(t, x_1, x_2) = \sin(x_1) \sin(x_2) \exp^t$$

$$u_2(t, x_1, x_2) = \sin(x_1) \sin(x_2) \exp^{-t}$$

$$\rho(t, x_1, x_2) = (\cos(x_1) + 1.5)(\cos(x_2) + 1.5) \exp^t$$

Сделаем эти функции решением задачи, путем определения функций f_0, f_1, f_2 .

3.1 Тест №1

Посмотрим на нормы отклонения решения новой задачи от известного ответа. Параметры $\mu = 0.1$

N M	20	40	80
$\ G - g\ _c$	20	2.226118e-001	2.229332e-001
	40	1.625185e-001	1.490928e-001
	80	1.183744e-001	9.780931e-002

N M	20	40	80
$\ G - g\ _{L2}$	20	7.881502e-001	7.760840e-001
	40	4.415166e-001	4.242142e-001
	80	2.506339e-001	2.275291e-001

N M	20	40	80
$\ G - g\ _2^1$	20	1.084773e+000	9.429816e-001
	40	8.963833e-001	6.988282e-001
	80	8.348985e-001	6.072825e-001

N M	20	40	80
$\ V1 - u1\ _c$	20	3.587106e-001	3.571893e-001
	40	2.256584e-001	2.184677e-001
	80	1.369765e-001	1.258933e-001

N M	20	40	80
$\ V1 - u1\ _{L2}$	20	1.134281e+000	1.140679e+000
	40	6.427172e-001	6.415121e-001
	80	3.519757e-001	3.443347e-001

$\ V1 - u1\ _2^1$	N M	20	40	80
	20	3.280914e+000	2.436311e+000	1.895991e+000
	40	3.259879e+000	2.327238e+000	1.699085e+000
	80	3.289118e+000	2.316687e+000	1.647871e+000

$\ V2 - u2\ _c$	N M	20	40	80
	20	1.371596e-001	1.369522e-001	1.368953e-001
	40	8.303557e-002	8.094133e-002	8.068471e-002
	80	4.801745e-002	4.463771e-002	4.431233e-002

$\ V2 - u2\ _{L2}$	N M	20	40	80
	20	4.394355e-001	4.301333e-001	4.274454e-001
	40	2.549795e-001	2.423606e-001	2.393553e-001
	80	1.468379e-001	1.316099e-001	1.282802e-001

$\ V2 - u2\ _2^1$	N M	20	40	80
	20	7.274666e-001	5.903824e-001	5.133909e-001
	40	5.846181e-001	4.389401e-001	3.513036e-001
	80	5.165372e-001	3.677427e-001	2.729441e-001

TIME	N M	20	40	80
	20	1.052000e+000	2.323400e+001	7.398490e+002
	40	1.314000e+000	1.189100e+001	3.979780e+002
	80	2.237000e+000	1.377600e+001	1.624820e+002

Также для $\mu = 0.001$

$\ G - g\ _c$	N M	20	40	80
	20	2.295651e-001	2.296185e-001	2.295576e-001
	40	1.734755e-001	1.582878e-001	1.558701e-001
	80	1.294093e-001	1.058871e-001	1.014020e-001

$\ G - g\ _{L2}$	N M	20	40	80
	20	8.093506e-001	7.970034e-001	7.940868e-001
	40	4.560944e-001	4.381071e-001	4.343242e-001
	80	2.609654e-001	2.362643e-001	2.316317e-001

$\ G - g\ _2^1$	N M	20	40	80
	20	1.100853e+000	9.602130e-001	8.817495e-001
	40	9.064776e-001	7.080743e-001	5.882787e-001
	80	8.435808e-001	6.122108e-001	4.637969e-001

$ V1 - u1 _c$	N M	20	40	80
	20	3.671916e-001	3.653109e-001	3.647147e-001
	40	2.335176e-001	2.258276e-001	2.236546e-001
	80	1.449530e-001	1.317125e-001	1.289101e-001

$ V1 - u1 _{L_2}$	N M	20	40	80
	20	1.175211e+000	1.180273e+000	1.180626e+000
	40	6.724330e-001	6.690932e-001	6.678500e-001
	80	3.722931e-001	3.617727e-001	3.598263e-001

$ V1 - u1 _2^1$	N M	20	40	80
	20	3.285783e+000	2.448737e+000	1.915902e+000
	40	3.257332e+000	2.329246e+000	1.705743e+000
	80	3.283435e+000	2.314672e+000	1.648520e+000

$ V2 - u2 _c$	N M	20	40	80
	20	1.486234e-001	1.483809e-001	1.484719e-001
	40	9.080801e-002	8.918637e-002	8.901185e-002
	80	5.265125e-002	4.970741e-002	4.947207e-002

$ V2 - u2 _{L_2}$	N M	20	40	80
	20	4.566881e-001	4.476253e-001	4.450511e-001
	40	2.665928e-001	2.540846e-001	2.511399e-001
	80	1.540339e-001	1.387124e-001	1.354231e-001

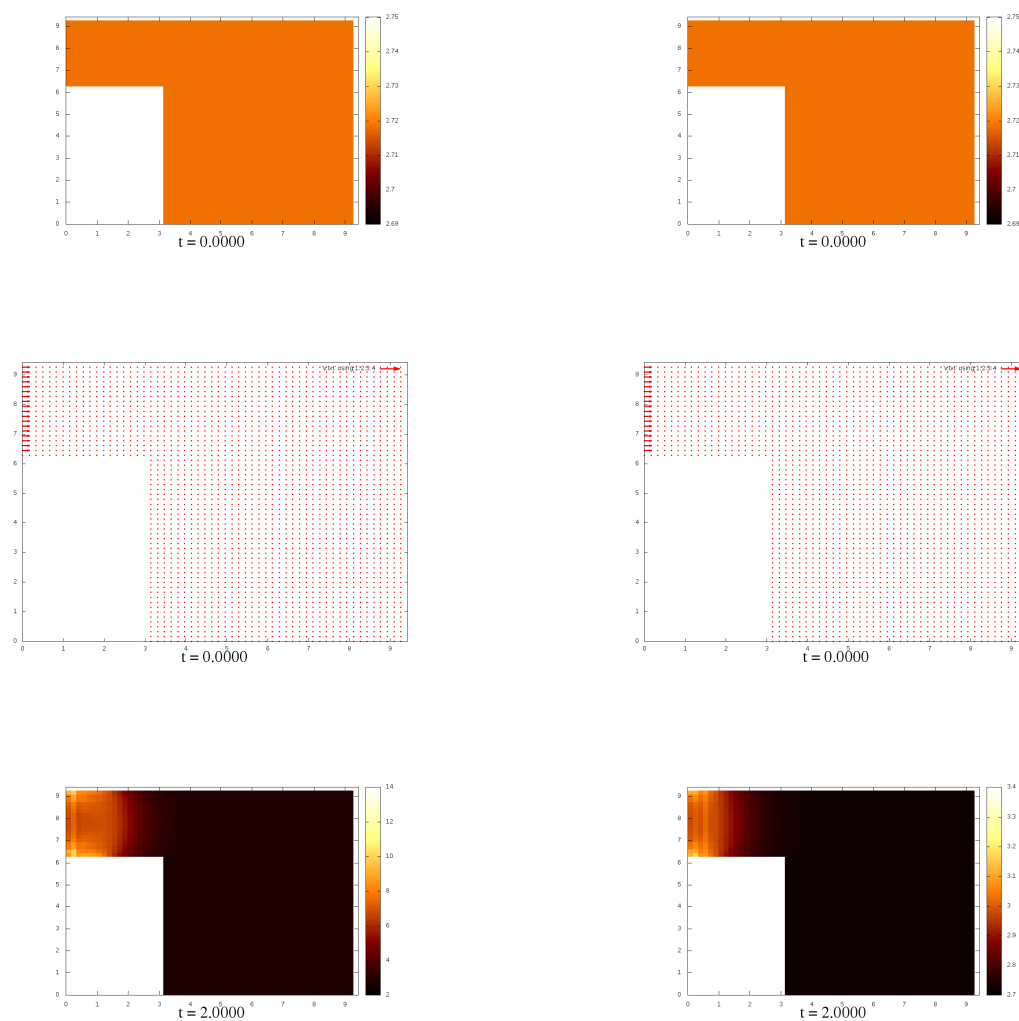
$ V2 - u2 _2^1$	N M	20	40	80
	20	7.422675e-001	6.059374e-001	5.297091e-001
	40	5.925206e-001	4.476225e-001	3.608399e-001
	80	5.197034e-001	3.715334e-001	2.773302e-001

TIME	N M	20	40	80
	20	1.061000e+000	2.376200e+001	7.503460e+002
	40	1.327000e+000	1.200800e+001	3.707330e+002
	80	2.211000e+000	1.397100e+001	1.627290e+002

По данным таблицам можно видеть, что уменьшение вязкости немного ухудшает расчет. Также по L_2 норме хорошо виден порядок схемы $\tau + h^2$.

4 Численные эксперименты

Слева показаны графики для входной скорости 1, справа - 0.1



На графиках хорошо видно, что при относительно большой скорости возникают вихри. При относительно маленькой скорости течение газа происходит гладко.

