11.1.1 标准概率采样

假设 z 在 $(0,1)$ 上均匀分布 令 $y=f(z)$

$\therefore p(y)=p(z)\left|\frac{dz}{dy}\right|$ $\because p(z)=1$

$\therefore p(y)=\left|\frac{dz}{dy}\right|$ $\therefore z=h(y)=\int_{-\infty}^{y}p(y)dy$

即 $y=h^{-1}(z)$

例 1. $p(y)=\lambda e^{-\lambda y}$

$\therefore h(y)=1-e^{-\lambda y}=z.$

$\Rightarrow y=-\frac{\ln(1-z)}{\lambda}$ $\because z\sim U(0,1)$

$\therefore y=-\frac{\ln(1-z)}{\lambda}\sim EXP(\lambda)$

局限：只对于非常有限的简单概率可行.（可积的初等函数）

11.1.2 拒绝采样

假设直接从 $p(z)$ 中采样很困难.

但能轻易计算 $p(z)=\frac{1}{Z_p}\tilde{p}(z)$ $\tilde{p}(z)$ 计算简单 Z_p 未知

引入一简单概率分布 $q(z)$（提议分布）引入常数 k 使 $\forall z$ $\underbrace{kq(z)}_{\Downarrow\ \text{比较函数}}\geq\tilde{p}(z)$

① 从 $q(z)$ 中生成 z_0.

② 在 $[0,kq(z_0)]$ 的均匀分布生成 u_0

③ 如果 $u_0>\tilde{p}(z_0)$ 那么样本被拒绝，否则 u_0 被保留.

结论：剩余的点在 $\tilde{p}(z)$ 下方均匀分布. 因此 $z\sim p(z)$

样本被接受的概率 $p(\text{接受})=\int\frac{\tilde{p}(z)}{kq(z)}q(z)dz=\frac{1}{k}\int\tilde{p}(z)dz.$

常数 k 应尽量小，且 $kq(z)$ 一定处处不小于 $\tilde{p}(z)$

11.1.3 可调节的拒绝采样

基于 $p(z)$ 构建 $q(z)$ 的函数形式

$p(z)$ 为对数凹函数.

① $\ln p(z)$ 和它的切线在某些初始的点处进行计算，

② 生成切线的交点被用于构建界限函数

③ 从界线分布中抽取一个样本值.

④ 如果样本被拒绝，那么它被并入格点的集合中，计算出一条新的切线

随着格点数量的增加，界限函数对所求的概率分布的近似效果逐渐变好，拒绝的概率就会减小

局限：所求的概率分布可能是多峰的，并且具有尖峰，

特征：接受率随维度的指数下降.

11.1.4. 重要采样

$$E[f] = \int f(z) p(z) dz.$$

$$= \int f(z) \frac{p(z)}{q(z)} q(z) dz \simeq \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} \underbrace{\frac{p(z^{(l)})}{q(z^{(l)})}}_{\text{重要性权重}} f(z^{(l)})$$

所有生成的样本都将保留