Esercitazione di Informatica A

Codifiche numeriche: Rappresentazioni binarie

Stefano Cherubin
<nome>.<cognome>@polimi.it

Esercitazione 2
22 Ottobre 2015

Conversione da decimale a binario

Algoritmo

Dividere ripetutamente per la base (2). Scrivere i resti della divisione in ordine inverso.

Conversione da base n a decimale

Algoritmo

Moltiplicare il valore di ciascuno dei bit di modulo per la base (2) elevata alla rispettiva posizione. Sommare il tutto.

0	0	1	0	1	0	1	0
	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
$\pm$	modulo						

Numeri binari relativi (1/2)

$+42$

Modulo e segno

0	0	1	0	1	0	1	0
$\pm$	modulo						

Complemento a 2

0	0	1	0	1	0	1	0

Numeri binari relativi (2/2)

-42

Modulo e segno

1	0	1	0	1	0	1	0
$\pm$	modulo						

Cambiare il bit di segno, mantenendo uguale il modulo.

Complemento a 2

1	1	0	1	0	1	1	0

Invertire tutti i bit. Poi sommare 1

Conversione da binario a decimale (C2)

Algoritmo per la rappresentazione in complemento a 2

Moltiplicare il valore di ciascuno dei bit per la base (2) elevata alla rispettiva posizione. Solo il bit più significativo (più a sinistra) avrà contributo negativo. Sommare il tutto.

0	0	1	0	1	0	1	0
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
$\pm$	modulo						

Intervallo di rappresentazione

Su N bit si possono avere 2^N rappresentazioni di numeri binari. Il dominio di dimensione 2^N può essere usato per rappresentare numeri

$$\left[0; 2^N - 1\right]$$

Se introduciamo i numeri negativi occorre rappresentare in qualche modo l'informazione sul segno del numero. Per fare ciò si utilizza un bit, per convenzione il più significativo. Resta un bit in meno per rappresentare il modulo. Quindi il dominio sarà

$$\left[-\left(2^{N-1} - 1\right); 2^{N-1} - 1\right]$$

Con la rappresentazione in complemento a due, il valore che in modulo e segno sarebbe uno 0 di segno negativo (10000000...) rappresenta invece -2^{N-1}. Il dominio diventa quindi

$$\left[-2^{N-1}; 2^{N-1} - 1\right]$$

Carry, overflow, underflow

Carry bit

Il bit di carry si porta a 1 quando la somma tra due numeri (positivi o negativi) supera il numero di bit del risultato.

Overflow bit

Il bit di overflow si porta a 1 quando:

- la somma di due numeri negativi fornisce in output un numero positivo (*underflow*)
- la somma di due numeri positivi fornisce in output un numero negativo (*overflow*)

Sono bit indipendenti.
Approfondimento consigliato[1]

[1] `http://teaching.idallen.com/dat2343/10f/notes/040_overflow.txt`

Complemento a 2

Trova la rappresentazione in complemento a 2 di lunghezza fissa 8 bit dei seguenti numeri espressi in decimale

- $+14$
- -66
- -31

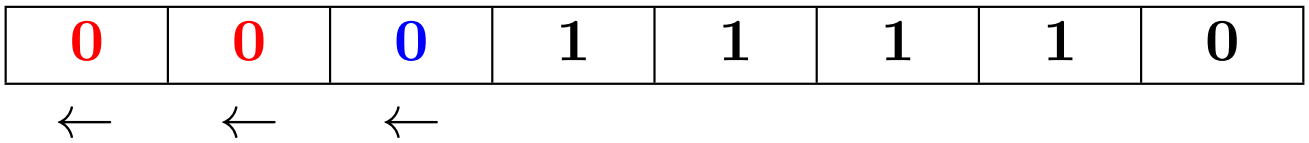
Complemento a 2: +14

Trova la rappresentazione in complemento a 2 di lunghezza fissa 8 bit di

- +14

$$
|+14| = \begin{array}{r|l|l} 14 & 2 & \\ \hline 7 & \mathbf{0} & \uparrow \\ 3 & \mathbf{1} & \uparrow \\ 1 & \mathbf{1} & \uparrow \\ 0 & \mathbf{1} & \uparrow \end{array} = 1110
$$

Applichiamo un bit in più per il segno: 01110
Estendiamo in segno fino a raggiungere 8 bit



Complemento a 2: -66

$$|-66| = \begin{array}{r|l} 66 & 2 \\ \hline 33 & \mathbf{0} \uparrow \\ 16 & \mathbf{1} \uparrow \\ 8 & \mathbf{0} \uparrow \\ 4 & \mathbf{0} \uparrow \\ 2 & \mathbf{0} \uparrow \\ 1 & \mathbf{0} \uparrow \\ 0 & \mathbf{1} \uparrow \end{array} = 1000010$$

Applicare un bit in più per il segno: $+66 = 01000010$
Invertire tutti i bit e poi sommare 1

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array} \begin{array}{c} \\ + \\ = \\ \\ \end{array}$$

Complemento a 2: -31

$$|-31| = \begin{array}{c|c|c} 31 & 2 & \\ \hline 15 & \mathbf{1} & \uparrow \\ 7 & \mathbf{1} & \uparrow \\ 3 & \mathbf{1} & \uparrow \\ 1 & \mathbf{1} & \uparrow \\ 0 & \mathbf{1} & \uparrow \end{array} = 11111$$

Applichiamo un bit in più per il segno: $+31 = 011111$
Invertire tutti i bit e poi sommare 1

$$\begin{array}{cccccccc} & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \hline & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ & & & & & & & 1 & = \\ \hline & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & & & & & & \end{array}$$

Numero minimo di bit

Qual è il numero minimo di bit necessari a rappresentare i seguenti numeri relativi?

- -70
- $+25$
- $+256$
- -256

Numero minimo di bit: -70

Qual è il numero minimo di bit necessari a rappresentare

- -70

Calcoliamo $|-70| = 70$ in base 2

$$1000110$$

Servono quindi 7 bit per rappresentare il modulo di -70. Occorre un bit in più per il segno, quindi arriviamo a 8 bit.
Infatti con 8 bit possiamo rappresentare numeri da

$$\begin{aligned} [-2^{N-1} &; 2^{N-1} - 1] \\ [-2^{8-1} &; 2^{8-1} - 1] \\ [-128 &; 127] \end{aligned}$$

$$-70 \in [-128; 127]$$

Numero minimo di bit: +25

Qual è il numero minimo di bit necessari a rappresentare

- $+25$

Calcoliamo $|+25| = 25$ in base 2

$$11001$$

Servono quindi 5 bit per rappresentare il modulo di $+25$. Occorre un bit in più per il segno perché operiamo nel dominio dei numeri relativi, quindi arriviamo a 6 bit.
Infatti con 6 bit possiamo rappresentare numeri da

$$[-2^{6-1} \quad ; \quad 2^{6-1} - 1]$$
$$[-32 \quad ; \quad 31]$$

$$+25 \in [-32; 31]$$

Numero minimo di bit: +256

Qual è il numero minimo di bit necessari a rappresentare

- +256

Calcoliamo $|+256| = 256$ in base 2

$$100000000$$

Servono quindi 9 bit per rappresentare il modulo di +256. Occorre un bit in più per il segno, quindi arriviamo a 10 bit.
Infatti con 10 bit possiamo rappresentare numeri da

$$[-2^{10-1} \quad ; \quad 2^{10-1} - 1]$$
$$[-512 \quad ; \quad 511]$$

$$+256 \in [-512; 511]$$

Numero minimo di bit: -256

Qual è il numero minimo di bit necessari a rappresentare

- -256

Calcoliamo $|-256| = 256$ in base 2

$$100000000$$

Servono quindi 9 bit per rappresentare il modulo di -256. Occorrebbe un bit in più per il segno, quindi arriveremmo a 10 bit MA...
...nei casi speciali delle esatte potenze di 2 $(256 = 2^8)$ ci troviamo agli estremi dell'intervallo rappresentabile. È opportuno ricordare che, in questi casi, per rappresentare una potenza esatta di 2 con segno negativo si può usare un bit in meno.

$$[-2^{9-1} \quad ; \quad 2^{9-1} - 1]$$
$$[-256 \quad ; \quad 255]$$

$$-256 \in [-256; 255]$$

Somme, overflow, underflow

Si eseguano le seguenti operazioni in binario

- $36 + 11$
- $38 - 83$

Si eseguano le seguenti operazioni in binario su 6 bit e si dica in quali occasioni si presenta overflow o underflow e si indichi il bit di carry

- $15 - 18$
- $-27 - 10$
- $-1 - 1$

Operazioni in binario: 36+11

Si esegua la seguente operazione in binario

- $36 + 11$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & = \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \end{array}$$

$$1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 8 + 4 + 2 + 1 = 47$$

Operazioni in binario: 38-83

Si esegua la seguente operazione in binario

- $38 - 83$
  - $= 38 + (-83)$

$$\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & + \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & = \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \end{array}$$

Operazioni in binario: 15-18

Si esegua la seguente operazione in binario su 6 bit e si dica se si presenta overflow o underflow e si indichi il bit di carry

- $15 - 18$
  - $= 15 + (-18)$

$$\begin{array}{cccccccc} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & + \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & = \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

c

Operandi discordi $\implies$ nessun rischio di overflow/underflow

- control bits
  - Carry 0
  - Overflow 0
- NO overflow
- NO underflow

Operazioni in binario: -27-10

Si esegua la seguente operazione in binario su 6 bit e si dica se si presenta overflow o underflow e si indichi il bit di carry

- $-27 - 10$
  - $= -27 + (-10)$

	1	0	0	1	0	1	+
	1	1	0	1	1	0	=
1	0	1	1	0	1	1	
c							

Operandi concordi $\implies$ rischio di overflow/underflow
Operandi negativi, risultato positivo $\implies$ underflow

- control bits
  - Carry 1
  - Overflow 1
- NO overflow
- SÌ underflow

Operazioni in binario: -1-1

Si esegua la seguente operazione in binario su 6 bit e si dica se si presenta overflow o underflow e si indichi il bit di carry

- $-1-1$
  - $=-1+(-1)$

	1	1	1	1	1	1	+
	1	1	1	1	1	1	=
1	1	1	1	1	1	0	
c							

Operandi concordi $\Longrightarrow$ rischio di overflow/underflow
Operandi negativi, risultato negativo $\Longrightarrow$ NO underflow

- control bits
  - Carry 1
  - Overflow 0
- NO overflow
- NO underflow

Fine

Queste slides contengono elementi tratti da materiale di Gerardo Pelosi redatto per il corso di Fondamenti di Informatica per Ingegneria dell'Automazione a.a. 2014/15.

Grazie per l'attenzione!

Licenza Beerware[2]

[2] http://people.freebsd.org/~phk/