

Esercitazione di Informatica A

Algebra di Boole

Stefano Cherubin

`<nome>.<cognome>@polimi.it`

Esercitazione 1

22 Ottobre 2015

1 Richiami di teoria

2 Esercizi

- Semplificazione espressioni
- Equivalenza di due funzioni logiche
- Dimostrare tautologie
- Equivalenza di 3 espressioni

Commutativa di OR e AND

$$a + b = b + a$$

$$ab = ba$$

Proprietà distributiva

Distributiva di OR rispetto a AND

$$a + bc = (a + b)(a + c)$$

Distributiva di AND rispetto a OR

$$(a + b)c = ac + bc$$

Tautologia (sempre vero)

$$a + \bar{a} = 1$$

$$1 + a = 1$$

Contraddizione (sempre falso)

$$a\bar{a} = 0$$

$$0a = 0$$

Assorbimento

$$\begin{aligned}a + ab &= a \\ a(a + b) &= a\end{aligned}$$

Elemento neutro

$$\begin{aligned}0 + a &= a \\ 1 \cdot a &= a\end{aligned}$$

Teoremi di De Morgan

$$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$
$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$

1 Richiami di teoria

2 Esercizi

- Semplificazione espressioni
- Equivalenza di due funzioni logiche
- Dimostrare tautologie
- Equivalenza di 3 espressioni

Data la seguente espressione booleana in 3 variabili

$$\overline{a}b + \overline{b}c + ab$$

- ① se ne ricavi la tabella della verità
- ② si provi a semplificare l'espressione usando le proprietà dell'algebra di boole e giustificando ogni passaggio

Esercizio 1 - tabella della verità

a	b	c	$\overline{a}b$	$\overline{b}c$	ab	$\overline{a}b + \overline{b}c + ab$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1

Esercizio 1 - semplificazione

$$\overline{a}b + \overline{b}c + ab$$

commutativa di OR

$$\overline{a}b + ab + \overline{b}c$$

distributiva di AND

$$(\overline{a} + a)b + \overline{b}c$$

tautologia

$$1b + \overline{b}c$$

distributiva di OR

$$(b + \overline{b})(b + c)$$

tautologia

$$bc$$

Esercizio 1 - semplificazione

$$\overline{a}b + \overline{b}c + ab$$

commutativa di OR

$$\overline{a}b + ab + \overline{b}c$$

distributiva di AND

$$(\overline{a} + a)b + \overline{b}c$$

tautologia

$$1b + \overline{b}c$$

distributiva di OR

$$(b + \overline{b})(b + c)$$

tautologia

$$bc$$

Esercizio 1 - semplificazione

$$\overline{a}b + \overline{b}c + ab$$

commutativa di OR

$$\overline{a}b + ab + \overline{b}c$$

distributiva di AND

$$(\overline{a} + a)b + \overline{b}c$$

tautologia

$$1b + \overline{b}c$$

distributiva di OR

$$(b + \overline{b})(b + c)$$

tautologia

$$bc$$

Esercizio 1 - semplificazione

$$\overline{a}b + \overline{b}c + ab$$

commutativa di OR

$$\overline{a}b + ab + \overline{b}c$$

distributiva di AND

$$(\overline{a} + a)b + \overline{b}c$$

tautologia

$$1b + \overline{b}c$$

distributiva di OR

$$(b + \overline{b})(b + c)$$

tautologia

$$bc$$

Esercizio 1 - semplificazione

$$\overline{a}b + \overline{b}c + ab$$

commutativa di OR

$$\overline{a}b + ab + \overline{b}c$$

distributiva di AND

$$(\overline{a} + a)b + \overline{b}c$$

tautologia

$$1b + \overline{b}c$$

distributiva di OR

$$(b + \overline{b})(b + c)$$

tautologia

$$bc$$

Esercizio 1 - semplificazione

$$\overline{a}b + \overline{b}c + ab$$

commutativa di OR

$$\overline{a}b + ab + \overline{b}c$$

distributiva di AND

$$(\overline{a} + a)b + \overline{b}c$$

tautologia

$$1b + \overline{b}c$$

distributiva di OR

$$(b + \overline{b})(b + c)$$

tautologia

$$bc$$

Verificare l'equivalenza delle seguenti funzioni logiche

$$F = \bar{a}b + a\bar{b} + \overline{a + bc}$$

$$H = \bar{b} + \bar{a}$$

Per dimostrare l'equivalenza di due funzioni logiche si può procedere in due modi:

- derivando l'una dall'altra algebricamente
 - impiegando le proprietà di AND e OR
- esaustivamente dimostrando che per tutti i valori di ingresso forniscono il medesimo output
 - compilando la tabella di verità

Verificare l'equivalenza delle seguenti funzioni logiche

$$F = \bar{a}b + a\bar{b} + \overline{a + bc}$$

$$H = \bar{b} + \bar{a}$$

Per dimostrare l'equivalenza di due funzioni logiche si può procedere in due modi:

- derivando l'una dall'altra algebricamente
 - impiegando le proprietà di AND e OR
- esaustivamente dimostrando che per tutti i valori di ingresso forniscono il medesimo output
 - compilando la tabella di verità

Esercizio 2 - tabella di verità

$$F = \bar{a}b + a\bar{b} + \overline{a + bc}$$

$$H = \bar{b} + \bar{a}$$

a	b	c	$\bar{a}b$	$a\bar{b}$	$a + bc$	$\overline{a + bc}$	F	H
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	0

Esercizio 2 - metodo algebrico

$$\begin{aligned} F &= \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b} + \underbrace{\overline{a + b \cdot c}}_{\text{De Morgan (2 volte)}} \\ &= \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b} + \underbrace{\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c})}_{\text{Distributiva di AND}} \\ &= \underbrace{\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}}_{\text{Commutativa di OR}} + \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c} \\ &= a \cdot \bar{b} + \underbrace{\bar{a} \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}}_{\text{Distributiva di AND}} \\ &= a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \underbrace{(b + \bar{b} + \bar{c})}_{\text{Tautologia}} \\ &= a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \underbrace{(1 + \bar{c})}_{\text{Tautologia}} \\ &= a \cdot \bar{b} + \bar{a} = \text{Distributiva di OR} \\ &= \underbrace{(a + \bar{a})}_{\text{Tautologia}} \cdot (\bar{b} + \bar{a}) \\ &= \bar{b} + \bar{a} \end{aligned}$$

Verificare la non equivalenza delle seguenti funzioni logiche

$$F = \bar{a}b + a\bar{b} + \overline{a + bc}$$

$$H = \bar{b} + a$$

- Per dimostrare la non equivalenza di due funzioni logiche è sufficiente fornire un controesempio
 - Si procede quindi con la tabella di verità

Verificare la non equivalenza delle seguenti funzioni logiche

$$F = \bar{a}b + a\bar{b} + \overline{a + bc}$$

$$H = \bar{b} + a$$

- Per dimostrare la non equivalenza di due funzioni logiche è sufficiente fornire un controesempio
 - Si procede quindi con la tabella di verità

Esercizio 2 - variante - tabella di verità

$$F = \bar{a}b + a\bar{b} + \overline{a + bc}$$

$$H = \bar{b} + a$$

a	b	c	$\bar{a}b$	$a\bar{b}$	$a + bc$	$\overline{a + bc}$	F	H
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

Data l'espressione booleana seguente stabilire se è una tautologia, motivando la risposta

$$(\overline{a} \cdot \overline{b}) + a + b$$

Dimostrare che un'espressione è una tautologia (o una contraddizione) equivale a dimostrare l'equivalenza dell'espressione data con 1 - sempre vero (0 - sempre falso per le contraddizioni)

A scelta, possiamo procedere con:

- tabella di verità
- semplificazioni algebriche

Data l'espressione booleana seguente stabilire se è una tautologia, motivando la risposta

$$(\bar{a} \cdot \bar{b}) + a + b$$

Dimostrare che un'espressione è una tautologia (o una contraddizione) equivale a dimostrare l'equivalenza dell'espressione data con 1 - sempre vero (0 - sempre falso per le contraddizioni)

A scelta, possiamo procedere con:

- tabella di verità
- semplificazioni algebriche

Esercizio 3 - metodo algebrico

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\bar{a} \cdot \bar{b}) + a + b}_{\text{Distributiva di OR}} \\ &= \underbrace{(\bar{a} + a) \cdot (\bar{b} + a)}_{\text{Tautologia}} + b \\ &= 1 \cdot \underbrace{(\bar{b} + a)}_{\text{Elemento neutro di AND}} + b \\ &= \underbrace{\bar{b} + a}_{\text{Commutativa di OR}} + b \\ &= 1 + a = \mathbf{Tautologia} \end{aligned}$$

Esercizio 3 - metodo algebrico

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\bar{a} \cdot \bar{b}) + a + b}_{\text{Distributiva di OR}} \\ &= \underbrace{(\bar{a} + a) \cdot (\bar{b} + a)}_{\text{Tautologia}} + b \\ &= \underbrace{1 \cdot (\bar{b} + a)}_{\text{Elemento neutro di AND}} + b \\ &= \underbrace{\bar{b} + a}_{\text{Commutativa di OR}} + b \\ &= 1 + a = \text{Tautologia} \end{aligned}$$

Esercizio 3 - metodo algebrico

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\bar{a} \cdot \bar{b}) + a + b}_{\text{Distributiva di OR}} \\ &= \underbrace{(\bar{a} + a) \cdot (\bar{b} + a)}_{\text{Tautologia}} + b \\ &= \underbrace{1 \cdot (\bar{b} + a)}_{\text{Elemento neutro di AND}} + b \\ &= \underbrace{\bar{b} + a}_{\text{Commutativa di OR}} + b \\ &= 1 + a = \text{Tautologia} \end{aligned}$$

Esercizio 3 - metodo algebrico

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\bar{a} \cdot \bar{b}) + a + b}_{\text{Distributiva di OR}} \\ &= \underbrace{(\bar{a} + a) \cdot (\bar{b} + a)}_{\text{Tautologia}} + b \\ &= 1 \cdot \underbrace{(\bar{b} + a)}_{\text{Elemento neutro di AND}} + b \\ &= \underbrace{\bar{b} + a}_{\text{Commutativa di OR}} + b \\ &= 1 + a = \text{Tautologia} \end{aligned}$$

Esercizio 3 - metodo algebrico

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\bar{a} \cdot \bar{b}) + a + b}_{\text{Distributiva di OR}} \\ &= \underbrace{(\bar{a} + a) \cdot (\bar{b} + a)}_{\text{Tautologia}} + b \\ &= 1 \cdot \underbrace{(\bar{b} + a)}_{\text{Elemento neutro di AND}} + b \\ &= \underbrace{\bar{b} + a}_{\text{Commutativa di OR}} + b \\ &= 1 + a = \mathbf{Tautologia} \end{aligned}$$

Esercizio 3 - tabella di verità

a	b	$\bar{a} \cdot \bar{b}$	$a + b$	$(\bar{a} \cdot \bar{b}) + a + b$
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

Esercizio 4

Data le seguenti espressioni booleane, verificare che sono equivalenti

$$\begin{aligned}R &= a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b \\S &= \overline{\bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b} \\T &= (a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b})\end{aligned}$$

L'equivalenza tra espressioni booleane è una relazione di equivalenza e, in quanto relazione di equivalenza, gode della proprietà transitiva. È sufficiente dimostrare che $R = S$ e che $S = T$ e sarà garantito anche che $R = T$.

A scelta, possiamo procedere con:

- tabella di verità
- semplificazioni algebriche

Data le seguenti espressioni booleane, verificare che sono equivalenti

$$R = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$$

$$S = \overline{\bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b}$$

$$T = (a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b})$$

L'equivalenza tra espressioni booleane è una relazione di equivalenza e, in quanto relazione di equivalenza, gode della proprietà transitiva. È sufficiente dimostrare che $R = S$ e che $S = T$ e sarà garantito anche che $R = T$.

A scelta, possiamo procedere con:

- tabella di verità
- semplificazioni algebriche

Esercizio 4 - metodo algebrico

$$R = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b = \text{De Morgan}$$

$$= \overline{\underbrace{(a \cdot \bar{b})} \cdot \underbrace{(\bar{a} \cdot b)}} = \text{De Morgan}$$

$$= \overline{\underbrace{\bar{a} \cdot a} + \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b + \underbrace{b \cdot \bar{b}}} = \text{Contraddizione}$$

$$= \overline{\bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b} = S$$

$$S = \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}} + a \cdot b = \text{De Morgan}$$

$$= \overline{(\bar{a} \cdot \bar{b})} \cdot \overline{(a \cdot b)} = \text{De Morgan}$$

$$= (a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = T$$

Esercizio 4 - metodo algebrico

$$\begin{aligned} R &= a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b = \text{De Morgan} \\ &= \overline{\underbrace{(a \cdot \bar{b})} \cdot \underbrace{(\bar{a} \cdot b)}} = \text{De Morgan} \\ &= \overline{\underbrace{\bar{a} \cdot a} + \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b + \underbrace{b \cdot \bar{b}}} = \text{Contraddizione} \\ &= \overline{\bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b} = S \\ S &= \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}} + a \cdot b = \text{De Morgan} \\ &= \overline{(\bar{a} \cdot \bar{b})} \cdot \overline{(a \cdot b)} = \text{De Morgan} \\ &= (a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = T \end{aligned}$$

Esercizio 4 - metodo algebrico

$$\begin{aligned} R &= a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b = \text{De Morgan} \\ &= \overline{\underbrace{(a \cdot \bar{b})} \cdot \underbrace{(\bar{a} \cdot b)}} = \text{De Morgan} \\ &= \overline{\underbrace{\bar{a} \cdot a} + \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b + \underbrace{b \cdot \bar{b}}} = \text{Contraddizione} \\ &= \overline{\bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b} = S \\ S &= \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}} + a \cdot b = \text{De Morgan} \\ &= \overline{(\bar{a} \cdot \bar{b})} \cdot \overline{(a \cdot b)} = \text{De Morgan} \\ &= (a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = T \end{aligned}$$

Esercizio 4 - metodo algebrico

$$\begin{aligned} R &= a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b = \text{De Morgan} \\ &= \overline{\underbrace{(a \cdot \bar{b})} \cdot \underbrace{(\bar{a} \cdot b)}} = \text{De Morgan} \\ &= \overline{\underbrace{\bar{a} \cdot a} + \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b + \underbrace{b \cdot \bar{b}}} = \text{Contraddizione} \\ &= \overline{\bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b} = S \\ S &= \overline{\bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b} = \text{De Morgan} \\ &= \overline{(\bar{a} \cdot \bar{b})} \cdot \overline{(a \cdot b)} = \text{De Morgan} \\ &= (a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = T \end{aligned}$$

Esercizio 4 - metodo algebrico

$$\begin{aligned} R &= a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b = \text{De Morgan} \\ &= \overline{\underbrace{(a \cdot \bar{b})} \cdot \underbrace{(\bar{a} \cdot b)}} = \text{De Morgan} \\ &= \overline{\underbrace{\bar{a} \cdot a} + \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b + \underbrace{b \cdot \bar{b}}} = \text{Contraddizione} \\ &= \overline{\bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b} = S \\ S &= \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}} + a \cdot b = \text{De Morgan} \\ &= \overline{(\bar{a} \cdot \bar{b})} \cdot \overline{(a \cdot b)} = \text{De Morgan} \\ &= (a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = T \end{aligned}$$

Esercizio 4 - metodo algebrico

$$\begin{aligned} R &= a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b = \text{De Morgan} \\ &= \overline{\underbrace{(a \cdot \bar{b})} \cdot \underbrace{(\bar{a} \cdot b)}} = \text{De Morgan} \\ &= \overline{\underbrace{\bar{a} \cdot a} + \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b + \underbrace{b \cdot \bar{b}}} = \text{Contraddizione} \\ &= \overline{\bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b} = S \\ S &= \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}} + a \cdot b = \text{De Morgan} \\ &= \overline{(\bar{a} \cdot \bar{b})} \cdot \overline{(a \cdot b)} = \text{De Morgan} \\ &= (a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = T \end{aligned}$$

Esercizio 4 - metodo algebrico

$$\begin{aligned} R &= a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b = \text{De Morgan} \\ &= \overline{\underbrace{(a \cdot \bar{b})} \cdot \underbrace{(\bar{a} \cdot b)}} = \text{De Morgan} \\ &= \overline{\underbrace{\bar{a} \cdot a} + \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b + \underbrace{b \cdot \bar{b}}} = \text{Contraddizione} \\ &= \overline{\bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b} = S \\ S &= \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}} + a \cdot b = \text{De Morgan} \\ &= \overline{(\bar{a} \cdot \bar{b})} \cdot \overline{(a \cdot b)} = \text{De Morgan} \\ &= (a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = T \end{aligned}$$

Esercizio 4 - tabella di verità

$$R = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$$

$$S = \overline{\bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b}$$

$$T = (a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b})$$

a	b	$a \cdot \bar{b}$	$\bar{a} \cdot b$	$a \cdot b$	$\bar{a} \cdot \bar{b}$	$a + b$	$\bar{a} + \bar{b}$	R	S	T
0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0

Queste slides contengono elementi tratti da materiale di Gerardo Pelosi redatto per il corso di Fondamenti di Informatica per Ingegneria dell'Automazione a.a. 2014/15.

Grazie per l'attenzione!

Licenza Beerware¹

Queste slides sono opera di Stefano Cherubin. Mantenendo questa nota, puoi fare quello che vuoi con quest'opera. Se ci dovessimo incontrare e tu ritenessi che quest'opera lo valga, in cambio puoi offrirmi una birra.

¹<http://people.freebsd.org/~phk/>