Esercitazione di Informatica A

Algebra di Boole

Stefano Cherubin
`<nome>.<cognome>@polimi.it`

Esercitazione 1
22 Ottobre 2015

Sezione 1

1. Richiami di teoria

2. Esercizi
   - Semplificazione espressioni
   - Equivalenza di due funzioni logiche
   - Dimostrare tautologie
   - Equivalenza di 3 espressioni

Proprietà commutativa

Commutativa di OR e AND

$$
\begin{aligned}
a + b &= b + a \\
ab &= ba
\end{aligned}
$$

Proprietà distributiva

Distributiva di OR rispetto a AND

$$a + bc = (a + b)(a + c)$$

Distributiva di AND rispetto a OR

$$(a + b)\,c = ac + bc$$

Tautologie e contraddizioni

Tautologia (sempre vero)

$$
\begin{aligned}
a + \overline{a} &= 1 \\
1 + a &= 1
\end{aligned}
$$

Contraddizione (sempre falso)

$$
\begin{aligned}
a\overline{a} &= 0 \\
0a &= 0
\end{aligned}
$$

Altre proprietà

Assorbimento

$$
\begin{aligned}
a + ab &= a \\
a\,(a + b) &= a
\end{aligned}
$$

Elemento neuto

$$
\begin{aligned}
0 + a &= a \\
1 \cdot a &= a
\end{aligned}
$$

Leggi di De Morgan

Teoremi di De Morgan

$$\begin{aligned} \overline{a+b} &= \overline{a} \cdot \overline{b} \\ \overline{a \cdot b} &= \overline{a} + \overline{b} \end{aligned}$$

Sezione 2

Prova del 19/11/2003 - esercizio 1

Data la seguente espressione booleana in 3 variabili

$$\overline{a}b + \overline{b}c + ab$$

1. se ne ricavi la tabella della verità
2. si provi a semplificare l'espressione usando le proprietà dell'algebra di boole e giustificando ogni passaggio

Esercizio 1 - tabella della verità

a	b	c	$\overline{a}b$	$\overline{b}c$	ab	$\overline{a}b + \overline{b}c + ab$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1

Esercizio 1 - semplificazione

$$\overline{a}b + \overline{b}c + ab$$

commutativa di OR

$$\overline{a}b + ab + \overline{b}c$$

distributiva di AND

$$(\overline{a} + a)\, b + \overline{b}c$$

tautologia

$$1b + \overline{b}c$$

distributiva di OR

$$\left(b + \overline{b}\right)(b + c)$$

tautologia

$$b + c$$

Esercizio 1 - semplificazione

$$\overline{a}b + \overline{b}c + ab$$

commutativa di OR

$$\overline{a}b + ab + \overline{b}c$$

distributiva di AND

$$(\overline{a} + a)\, b + \overline{b}c$$

tautologia

$$1b + \overline{b}c$$

distributiva di OR

$$\left(b + \overline{b}\right)(b + c)$$

tautologia

$$b + c$$

Esercizio 1 - semplificazione

$$\overline{a}b + \overline{b}c + ab$$

commutativa di OR

$$\overline{a}b + ab + \overline{b}c$$

distributiva di AND

$$\left(\overline{a} + a\right) b + \overline{b}c$$

tautologia

$$1b + \overline{b}c$$

distributiva di OR

$$\left(b + \overline{b}\right)\left(b + c\right)$$

tautologia

$$b + c$$

Esercizio 1 - semplificazione

$$\overline{a}b + \overline{b}c + ab$$

commutativa di OR

$$\overline{a}b + ab + \overline{b}c$$

distributiva di AND

$$(\overline{a} + a)\, b + \overline{b}c$$

tautologia

$$1b + \overline{b}c$$

distributiva di OR

$$\left(b + \overline{b}\right)(b + c)$$

tautologia

$$b + c$$

Esercizio 1 - semplificazione

$$\overline{a}b + \overline{b}c + ab$$

commutativa di OR

$$\overline{a}b + ab + \overline{b}c$$

distributiva di AND

$$(\overline{a} + a)\, b + \overline{b}c$$

tautologia

$$1b + \overline{b}c$$

distributiva di OR

$$\left(b + \overline{b}\right)(b + c)$$

tautologia

$$b + c$$

Esercizio 1 - semplificazione

$$\overline{a}b + \overline{b}c + ab$$

commutativa di OR

$$\overline{a}b + ab + \overline{b}c$$

distributiva di AND

$$(\overline{a} + a)\, b + \overline{b}c$$

tautologia

$$1b + \overline{b}c$$

distributiva di OR

$$\left(b + \overline{b}\right)(b + c)$$

tautologia

$$b + c$$

Esercizio 2

Verificare l'equivalenza delle seguenti funzioni logiche

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{a}b + a\overline{b} + \overline{a + bc} \\
H &= \overline{b} + \overline{a}
\end{aligned}
$$

Per dimostrare l'equivalenza di due funzioni logiche si può procedere in due modi:

- derivando l'una dall'altra algebricamente
  - impiegando le proprietà di AND e OR
- esaustivamente dimostrando che per tutti i valori di ingresso forniscono il medesimo output
  - compilando la tabella di verità

Esercizio 2

Verificare l'equivalenza delle seguenti funzioni logiche

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{a}b + a\overline{b} + \overline{a + bc} \\
H &= \overline{b} + \overline{a}
\end{aligned}
$$

Per dimostrare l'equivalenza di due funzioni logiche si può procedere in due modi:

- derivando l'una dall'altra algebricamente
  - impiegando le proprietà di AND e OR
- esaustivamente dimostrando che per tutti i valori di ingresso forniscono il medesimo output
  - compilando la tabella di verità

Esercizio 2 - tabella di verità

$$F = \overline{a}b + a\overline{b} + \overline{a + bc}$$
$$H = \overline{b} + \overline{a}$$

a	b	c	$\overline{a}b$	$a\overline{b}$	$a + bc$	$\overline{a + bc}$	F	H
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	0

Esercizio 2 - metodo algebrico

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{a}\cdot b + a\cdot\overline{b} + \underbrace{\overline{a + b\cdot c}} = \text{De Morgan (2 volte)}\\
&= \overline{a}\cdot b + a\cdot\overline{b} + \underbrace{\overline{a}\cdot\left(\overline{b}+\overline{c}\right)} = \text{Distributiva di AND}\\
&= \underbrace{\overline{a}\cdot b + a\cdot\overline{b}} + \overline{a}\cdot\overline{b} + \overline{a}\cdot\overline{c} = \text{Commutativa di OR}\\
&= a\cdot\overline{b} + \underbrace{\overline{a}\cdot b + \overline{a}\cdot\overline{b} + \overline{a}\cdot\overline{c}} = \text{Distributiva di AND}\\
&= a\cdot\overline{b} + \overline{a}\cdot\left(\underbrace{b+\overline{b}} + \overline{c}\right) = \text{Tautologia}\\
&= a\cdot\overline{b} + \overline{a}\cdot\left(\underbrace{1+\overline{c}}\right) = \text{Tautologia}\\
&= a\cdot\overline{b} + \overline{a} = \text{Distributiva di OR}\\
&= \underbrace{(a+\overline{a})}\cdot\left(\overline{b}+\overline{a}\right) = \text{Tautologia}\\
&= \overline{b}+\overline{a}
\end{aligned}
$$

Esercizio 2 - variante

Verificare la non equivalenza delle seguenti funzioni logiche

$$\begin{aligned} F &= \overline{a}b + a\overline{b} + \overline{a + bc} \\ H &= \overline{b} + a \end{aligned}$$

- Per dimostrare la non equivalenza di due funzioni logiche è sufficiente fornire un controesempio
  - Si procede quindi con la tebella di verità

Esercizio 2 - variante

Verificare la non equivalenza delle seguenti funzioni logiche

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{a}b + a\overline{b} + \overline{a + bc} \\
H &= \overline{b} + a
\end{aligned}
$$

- Per dimostrare la non equivalenza di due funzioni logiche è sufficiente fornire un controesempio
  - Si procede quindi con la tebella di verità

Esercizio 2 - variante - tabella di verità

$$F = \overline{a}b + a\overline{b} + \overline{a + bc}$$
$$H = \overline{b} + a$$

a	b	c	$\overline{a}b$	$a\overline{b}$	$a + bc$	$\overline{a + bc}$	F	H
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

Esercizio 3 - Prova del 22/11/2002

Data l'espressione booleana seguente stabilire se è una tautologia, motivando la risposta

$$\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) + a + b$$

Dimostrare che un'espressione è una tautologia (o una contraddizione) equivale a dimostrare l'equivalenza dell'espressione data con 1 - sempre vero (0 - sempre falso per le contraddizioni)

A scelta, possiamo procedere con:

- tabella di verità
- semplificazioni algebriche

Esercizio 3 - Prova del 22/11/2002

Data l'espressione booleana seguente stabilire se è una tautologia, motivando la risposta

$$\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) + a + b$$

Dimostrare che un'espressione è una tautologia (o una contraddizione) equivale a dimostrare l'equivalenza dell'espressione data con 1 - sempre vero (0 - sempre falso per le contraddizioni)
A scelta, possiamo procedere con:

- tabella di verità
- semplificazioni algebriche

Esercizio 3 - metodo algebrico

$\underbrace{\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) + a} + b =$ Distributiva di OR

$= \underbrace{(\overline{a} + a)} \cdot \left(\overline{b} + a\right) + b =$ Tautologia

$= \underbrace{1 \cdot \left(\overline{b} + a\right)} + b =$ Elemento neutro di AND

$= \underbrace{\overline{b} + a} + b =$ Commutativa di OR

$= 1 + a =$ **Tautologia**

Esercizio 3 - metodo algebrico

$\underbrace{\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) + a} + b =$ Distributiva di OR

$= \underbrace{(\overline{a} + a)} \cdot \left(\overline{b} + a\right) + b =$ Tautologia

$= \underbrace{1 \cdot \left(\overline{b} + a\right)} + b =$ Elemento neutro di AND

$= \underbrace{\overline{b} + a} + b =$ Commutativa di OR

$= 1 + a =$ **Tautologia**

Esercizio 3 - metodo algebrico

$$\underbrace{\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)+a}+b = \text{Distributiva di OR}$$

$$= \underbrace{(\overline{a}+a)}\cdot\left(\overline{b}+a\right)+b = \text{Tautologia}$$

$$= \underbrace{1\cdot\left(\overline{b}+a\right)}+b = \text{Elemento neutro di AND}$$

$$= \underbrace{\overline{b}+a}+b = \text{Commutativa di OR}$$

$$= 1+a = \textbf{Tautologia}$$

Esercizio 3 - metodo algebrico

$$\underbrace{\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) + a} + b = \text{Distributiva di OR}$$

$$= \underbrace{(\overline{a} + a)} \cdot \left(\overline{b} + a\right) + b = \text{Tautologia}$$

$$= \underbrace{1 \cdot \left(\overline{b} + a\right)} + b = \text{Elemento neutro di AND}$$

$$= \underbrace{\overline{b} + a} + b = \text{Commutativa di OR}$$

$$= 1 + a = \textbf{Tautologia}$$

Esercizio 3 - metodo algebrico

$$\underbrace{\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) + a} + b = \text{Distributiva di OR}$$
$$= \underbrace{(\overline{a} + a)} \cdot \left(\overline{b} + a\right) + b = \text{Tautologia}$$
$$= \underbrace{1 \cdot \left(\overline{b} + a\right)} + b = \text{Elemento neutro di AND}$$
$$= \underbrace{\overline{b} + a} + b = \text{Commutativa di OR}$$
$$= 1 + a = \textbf{Tautologia}$$

Esercizio 3 - tabella di verità

a	b	$\overline{a} \cdot \overline{b}$	$a + b$	$\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) + a + b$
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

Esercizio 4

Data le seguenti espressioni booleane, verificare che sono equivalenti

$$
\begin{aligned}
R &= a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b \\
S &= \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b} \\
T &= (a + b) \cdot \left(\overline{a} + \overline{b}\right)
\end{aligned}
$$

L'equivalenza tra espressioni booleane è una relazione di equivalenza e, in quanto relazione di equivalenza, gode della proprietà transitiva. È sufficiente dimostrare che $R = S$ e che $S = T$ e sarà garantito anche che $R = T$.

A scelta, possiamo procedere con:

- tabella di verità
- semplificazioni algebriche

Esercizio 4

Data le seguenti espressioni booleane, verificare che sono equivalenti

$$\begin{aligned} R &= a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b \\ S &= \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b} \\ T &= (a + b) \cdot \left(\overline{a} + \overline{b}\right) \end{aligned}$$

L'equivalenza tra espressioni booleane è una relazione di equivalenza e, in quanto relazione di equivalenza, gode della proprietà transitiva. È sufficiente dimostrare che $R = S$ e che $S = T$ e sarà garantito anche che $R = T$.

A scelta, possiamo procedere con:

- tabella di verità
- semplificazioni algebriche

$R = a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b$ =De Morgan

$= \overline{\left(\overline{\underbrace{a \cdot \overline{b}}}\right) \cdot \left(\overline{\underbrace{\overline{a} \cdot b}}\right)}$ =De Morgan

$= \overline{\underbrace{\overline{a} \cdot a} + \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b + \underbrace{b \cdot \overline{b}}}$ =Contraddizione

$= \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b} = S$

$S = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b}$ =De Morgan

$= \overline{\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)} \cdot \left(\overline{a \cdot b}\right)$ =De Morgan

$= (a + b) \cdot \left(\overline{a} + \overline{b}\right) = T$

Esercizio 4 - metodo algebrico

$$R = \overline{a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b} = \text{De Morgan}$$

$$= \overline{\left(\underbrace{\overline{a \cdot \overline{b}}}\right) \cdot \left(\underbrace{\overline{\overline{a} \cdot b}}\right)} = \text{De Morgan}$$

$$= \overline{\underbrace{\overline{a} \cdot a} + \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b + \underbrace{b \cdot \overline{b}}} = \text{Contraddizione}$$

$$= \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b} = S$$

$$S = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b} = \text{De Morgan}$$

$$= \overline{\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)} \cdot \left(\overline{a \cdot b}\right) = \text{De Morgan}$$

$$= (a + b) \cdot \left(\overline{a} + \overline{b}\right) = T$$

Esercizio 4 - metodo algebrico

$$R = a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b = \text{De Morgan}$$

$$= \overline{\left(\underbrace{\overline{a \cdot \overline{b}}}\right) \cdot \left(\underbrace{\overline{\overline{a} \cdot b}}\right)} = \text{De Morgan}$$

$$= \overline{\underbrace{\overline{a} \cdot a} + \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b + \underbrace{b \cdot \overline{b}}} = \text{Contraddizione}$$

$$= \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b} = S$$

$$S = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b} = \text{De Morgan}$$

$$= \overline{\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)} \cdot \left(\overline{a \cdot b}\right) = \text{De Morgan}$$

$$= (a + b) \cdot \left(\overline{a} + \overline{b}\right) = T$$

$$R = a\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot b = \text{De Morgan}$$
$$= \overline{\left(\underbrace{\overline{a\cdot\overline{b}}}\right)\cdot\left(\underbrace{\overline{\overline{a}\cdot b}}\right)} = \text{De Morgan}$$
$$= \overline{\underbrace{\overline{a}\cdot a}+\overline{a}\cdot\overline{b}+a\cdot b+\underbrace{b\cdot\overline{b}}} = \text{Contraddizione}$$
$$= \overline{\overline{a}\cdot\overline{b}+a\cdot b} = S$$
$$S = \overline{a}\cdot\overline{b}+a\cdot b = \text{De Morgan}$$
$$= \overline{\left(\overline{\overline{a}\cdot\overline{b}}\right)}\cdot\left(\overline{a\cdot b}\right) = \text{De Morgan}$$
$$= (a+b)\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}\right) = T$$

$$
\begin{aligned}
R &= a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b = \text{De Morgan}\\
&= \overline{\left(\underbrace{\overline{a \cdot \overline{b}}}\right) \cdot \left(\underbrace{\overline{\overline{a} \cdot b}}\right)} = \text{De Morgan}\\
&= \overline{\underbrace{\overline{a} \cdot a} + \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b + \underbrace{b \cdot \overline{b}}} = \text{Contraddizione}\\
&= \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b} = S\\
S &= \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b} = \text{De Morgan}\\
&= \left(\overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}\right) \cdot \left(\overline{a \cdot b}\right) = \text{De Morgan}\\
&= (a + b) \cdot \left(\overline{a} + \overline{b}\right) = T
\end{aligned}
$$

Esercizio 4 - metodo algebrico

$$R = a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b = \text{De Morgan}$$
$$= \overline{\left(\overline{\underbrace{a \cdot \overline{b}}}\right) \cdot \left(\overline{\underbrace{\overline{a} \cdot b}}\right)} = \text{De Morgan}$$
$$= \overline{\underbrace{\overline{a} \cdot a} + \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b + \underbrace{b \cdot \overline{b}}} = \text{Contraddizione}$$
$$= \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b} = S$$
$$S = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b} = \text{De Morgan}$$
$$= \overline{\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)} \cdot \left(\overline{a \cdot b}\right) = \text{De Morgan}$$
$$= (a + b) \cdot \left(\overline{a} + \overline{b}\right) = T$$

$$
\begin{aligned}
R &= a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b = \text{De Morgan} \\
&= \overline{\left(\underbrace{\overline{a \cdot \overline{b}}}\right) \cdot \left(\underbrace{\overline{\overline{a} \cdot b}}\right)} = \text{De Morgan} \\
&= \overline{\underbrace{\overline{a} \cdot a} + \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b + \underbrace{b \cdot \overline{b}}} = \text{Contraddizione} \\
&= \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b} = S \\
S &= \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b} = \text{De Morgan} \\
&= \overline{\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)} \cdot \left(\overline{a \cdot b}\right) = \text{De Morgan} \\
&= (a + b) \cdot \left(\overline{a} + \overline{b}\right) = T
\end{aligned}
$$

Esercizio 4 - tabella di verità

$$
\begin{aligned}
R &= a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b \\
S &= \overline{\overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b} \\
T &= (a + b) \cdot \left(\overline{a} + \overline{b}\right)
\end{aligned}
$$

a	b	$a \cdot \overline{b}$	$\overline{a} \cdot b$	$a \cdot b$	$\overline{a} \cdot \overline{b}$	$a + b$	$\overline{a} + \overline{b}$	R	S	T
0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0

Fine

Queste slides contengono elementi tratti da materiale di Gerardo Pelosi redatto per il corso di Fondamenti di Informatica per Ingegneria dell'Automazione a.a. 2014/15.

Grazie per l'attenzione!

[1] http://people.freebsd.org/~phk/