#### Esercitazione di Informatica A

Codifiche numeriche: Conversioni da e per basi  $2^n$ ; virgola fissa, virgola mobile

Stefano Cherubin <nome>.<cognome>@polimi.it

Esercitazione 4 04 Ottobre 2018



# Sezione 1

- lacktriangle Conversioni da e per basi  $2^n$ 
  - Cambio di base
  - Conversioni rapide
  - Esercizi
- 2 Virgola fissa, virgola mobile
  - Virgola fissa
  - Virgola mobile
  - Esercizi

### Recall: Conversione da decimale a binario

#### Algoritmo

Dividere ripetutamente per la base (2). Scrivere i resti della divisione in ordine inverso.

Stefano Cherubin Oct-Hex-Float 04 Ottobre 2018 3 / 29

# Recall: Conversione da base 2 a decimale

### Algoritmo

Moltiplicare il valore di ciascuno dei bit di modulo per 2 elevato alla rispettiva posizione. Sommare il tutto.

0	0	1	0	1	0	1	0
	$2^{6}$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^{0}$
+			m	nodul	0		

# Conversione da decimale a base b

#### Algoritmo

Dividere ripetutamente per la base b. Scrivere i resti della divisione in ordine inverso.

Stefano Cherubin Oct-Hex-Float 04 Ottobre 2018 5 / 29

### Conversione da base b a decimale

### Algoritmo

Moltiplicare il valore di ciascuno dei bit di modulo per la base b elevata alla rispettiva posizione. Sommare il tutto.

### Conversione da oct a binario

#### Algoritmo

Ogni cifra ottale può essere convertita in un blocco di 3 bit. La rappresentazione in binario si ottiene concatenando i blocchi così ottenuti.

$\operatorname{oct}$	bin	oct	bin
0	000	4	100
1	001	5	101
2	010	6	110
3	011	7	111

#### Conversione da oct a binario

# Algoritmo

Ogni cifra ottale può essere convertita in un blocco di 3 bit. La rappresentazione in binario si ottiene concatenando i blocchi così ottenuti.

$\operatorname{oct}$	bin	$\operatorname{oct}$	bin
0	000	4	100
1	001	5	101
2	010	6	110
3	011	7	111

5	1	4
101	001	100

 $514_8 = 101001100_2$ 

#### Conversione da binario a oct

# Algoritmo

Raggruppare i bit in blocchi da 3 partendo dal bit meno significativo (LSB). In caso di necessità estendere in segno per raggiungere un numero di bit multiplo di 3. Convertire ciascun blocco da binario a ottale e concatenare i risultati.

#### Conversione da binario a oct

# Algoritmo

Raggruppare i bit in blocchi da 3 partendo dal bit meno significativo (LSB). In caso di necessità estendere in segno per raggiungere un numero di bit multiplo di 3. Convertire ciascun blocco da binario a ottale e concatenare i risultati.

	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1
	1			5	

### Conversione da hex a binario

### Algoritmo

Ogni cifra esadecimale può essere convertita in un blocco di 4 bit. La rappresentazione in binario si ottiene concatenando i blocchi così ottenuti.

hex	$_{ m bin}$	hex	bin	hex	bin	hex	bin
0	0000	4	0100	8	1000	С	1100
1	0001	5	0101	9	1001	D	1101
2	0010	6	0110	A	1010	$\mathbf{E}$	1110
3	0011	7	0111	В	1011	$\mathbf{F}$	1111

#### Conversione da hex a binario

# Algoritmo

Ogni cifra esadecimale può essere convertita in un blocco di 4 bit. La rappresentazione in binario si ottiene concatenando i blocchi così ottenuti.

hex	bin	hex	$_{ m bin}$	ł	ıex	$_{ m bin}$	hex	$_{ m bin}$
0	0000	4	0100		8	1000	С	1100
1	0001	5	0101		9	1001	D	1101
2	0010	6	0110		A	1010	$\mathbf{E}$	1110
3	0011	7	0111		В	1011	$\mathbf{F}$	1111

$$D5_{16} = 11010101_2$$

#### Conversione da binario a hex

# Algoritmo

Raggruppare i bit in blocchi da 4 partendo dal bit meno significativo (LSB). In caso di necessità estendere in segno per raggiungere un numero di bit multiplo di 4. Convertire ciascun blocco da binario a esadecimale e concatenare i risultati.

#### Conversione da binario a hex

# Algoritmo

Raggruppare i bit in blocchi da 4 partendo dal bit meno significativo (LSB). In caso di necessità estendere in segno per raggiungere un numero di bit multiplo di 4. Convertire ciascun blocco da binario a esadecimale e concatenare i risultati.

	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
5					Ι	3	

 $1011011_2 = 5B_{16}$ 

### Conversione a base n

Convertire il seguente numero binario in base 12

• 1101001

### Conversione a base n

Convertire il seguente numero binario in base 12

• 1101001

Per semplicità è opportuno portare il numero binario in base 10 e poi convertire a base 12

$$2^0 + 2^3 + 2^5 + 2^6 = 1 + 8 + 32 + 64 = 105$$

# Conversione a base n

Convertire il seguente numero binario in base 12

• 1101001

Per semplicità è opportuno portare il numero binario in base 10 e poi convertire a base 12

$$1101001_2 = 105_{10} = 89_{12}$$

# Aritmetica in base 16: 1F + A3

$$1F + A3$$

# Aritmetica in base 16: 1F + A3

$$1F + A3$$

$$\begin{array}{ccc}
1 & F & + \\
A & 3 & = \\
\hline
C & 2 & = 
\end{array}$$

#### Aritmetica in base 16...

$$CC + FF$$

#### Aritmetica in base 16...

$$CC + FF$$

$$\begin{array}{ccc}
C & C & + \\
F & F & = \\
\hline
1 & C & B
\end{array}$$

$$x_{16} + y_{16} = x_{10} + y_{10}$$

$$x_{16} + y_{16} = x_{10} + y_{10}$$

$$CC_{16} = C \cdot 16^{0} + C \cdot 16^{1} = 12 \cdot 1 + 12 \cdot 16 = 204_{10}$$
  
 $FF_{16} = F \cdot 16^{0} + F \cdot 16^{1} = 15 \cdot 1 + 15 \cdot 16 = 255_{10}$ 

204 + 255 = 459

$$x_{16} + y_{16} = x_{10} + y_{10}$$

$$CC_{16} = C \cdot 16^{0} + C \cdot 16^{1} = 12 \cdot 1 + 12 \cdot 16 = 204_{10}$$

$$FF_{16} = F \cdot 16^{0} + F \cdot 16^{1} = 15 \cdot 1 + 15 \cdot 16 = 255_{10}$$

$$x_{16} + y_{16} = x_{10} + y_{10}$$

$$CC_{16} = C \cdot 16^{0} + C \cdot 16^{1} = 12 \cdot 1 + 12 \cdot 16 = 204_{10}$$

$$FF_{16} = F \cdot 16^{0} + F \cdot 16^{1} = 15 \cdot 1 + 15 \cdot 16 = 255_{10}$$

$$204 + 255 = 459$$

$$\begin{array}{c|c}
 & 459 & 16 \\
\hline
 & 28 & B & \uparrow \\
 & 1 & C & \uparrow \\
 & 0 & 1 & \uparrow
\end{array}$$

$$CC_{16} + FF_{16} = 204_{10} + 255_{10} = 459_{10} = 1CB_{16}$$

Stefano Cherubin Oct-Hex-Float 04 Ottobre 2018 14 / 29

# Sezione 2

- ① Conversioni da e per basi  $2^n$ 
  - Cambio di base
  - Conversioni rapide
  - Esercizi
- Virgola fissa, virgola mobile
  - Virgola fissa
  - Virgola mobile
  - Esercizi

# Virgola: not this one



Figura: Virgola http://nonciclopedia.wikia.com/wiki/File:Virgola\_impiccato.jpeg

Stefano Cherubin Oct-Hex-Float 04 Ottobre 2018 16 / 29

# Notazione fixed point

Si assegnano un numero fisso di bit per la parte intera e un numero fisso di bit per la parte decimale.

106.85

Stefano Cherubin Oct-Hex-Float 04 Ottobre 2018 17 / 29

# Notazione fixed point

Si assegnano un numero fisso di bit per la parte intera e un numero fisso di bit per la parte decimale.

#### 106.85

- Solitamente si sceglie la dimensione della parte intera in modo da non causare overflow / underflow
- È possibile che venga rappresentata solo una approssimazione del numero decimale equivalente (non dispongo di infinite cifre per la parte frazionaria)
  - L'errore di approssimazione è fisso in valore assoluto.

# Conversione da fixed point a decimale

#### Algoritmo

Moltiplicare il valore di ciascuno dei bit di modulo per 2 elevato alla rispettiva posizione, relativamente alla virgola. Sommare il tutto.

Stefano Cherubin Oct-Hex-Float 04 Ottobre 2018 18 / 29

# Conversione da fixed point a decimale

#### Algoritmo

Moltiplicare il valore di ciascuno dei bit di modulo per 2 elevato alla rispettiva posizione, relativamente alla virgola. Sommare il tutto.

$$2^3 + 2^1 + 2^{-2} + 2^{-3} = 8 + 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 10.375$$

Stefano Cherubin Oct-Hex-Float 04 Ottobre 2018 18 / 29

# Conversione da decimale a binario (fixed point)

### Algoritmo

Si procede con l'algoritmo a divisioni successive per la parte intera. I bit relativi alla componente decimale si ottengono con un simile algoritmo per moltiplicazioni successive in cui le cifre da considerare sono date dalle unità intere generate come risultato delle moltiplicazioni.

# Conversione da decimale a binario (fixed point)

### Algoritmo

Si procede con l'algoritmo a divisioni successive per la parte intera. I bit relativi alla componente decimale si ottengono con un simile algoritmo per moltiplicazioni successive in cui le cifre da considerare sono date dalle unità intere generate come risultato delle moltiplicazioni.

12.375

12	2	
6	0	$\uparrow$
3	0	$\uparrow$
1	1	$\uparrow$
0	1	$\uparrow$

$$\begin{array}{c|cc} & .375 & 2 \\ \hline 0 & .75 & \downarrow \\ 1 & .5 & \downarrow \\ 1 & .0 & \downarrow \\ \end{array}$$

19 / 29

 $12.375_{10} = 1100.011$ 

# Notazione floating point

Si ricorre alla notazione scientifica e si assegnano un numero fisso di bit per la mantissa e un numero fisso di bit per l'esponente.

 $1.0537E^{+14}$ 

# Notazione floating point

Si ricorre alla notazione scientifica e si assegnano un numero fisso di bit per la mantissa e un numero fisso di bit per l'esponente.

$$1.0537E^{+14}$$

1. 
$$\underbrace{0537}_{mantissa} E^{\underbrace{+14}_{exp}}$$

# Notazione floating point

Si ricorre alla notazione scientifica e si assegnano un numero fisso di bit per la mantissa e un numero fisso di bit per l'esponente.

$$1.0537E^{+14}$$
1. 0537  $E^{exp}$ 

- È possibile che venga rappresentata solo una approssimazione del numero decimale equivalente (non ho infiniti decimali)
  - L'errore di approssimazione non è fisso in valore assoluto ma aumenta al crescere del numero rappresentato.
- La notazione scientifica per i numeri in binario è simile:  $1.mantissa \cdot 2^{exp}$

### float single precision (32 bit)

#### Standard IEEE 754

- 1 bit per il segno
- 8 bit per l'esponente
- 23 bit per la mantissa

### float single precision (32 bit)

#### Standard IEEE 754

- 1 bit per il segno
- 8 bit per l'esponente
- 23 bit per la mantissa

#### Attenzione

L'esponente viene memorizzato come numero senza segno, sfasato di +127. Occorre tenerlo presente quando si ricostruisce il valore decimale.

Stefano Cherubin Oct-Hex-Float 04 Ottobre 2018 21 / 29

### float single precision (32 bit)

#### Standard IEEE 754

- 1 bit per il segno
- 8 bit per l'esponente
- 23 bit per la mantissa

#### Attenzione

L'esponente viene memorizzato come numero senza segno, sfasato di +127. Occorre tenerlo presente quando si ricostruisce il valore decimale.

Mantissa: 
$$2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-5} = 0.5 + 0.0625 + 0.03125 = 0.59375$$

Esponente+127: 
$$2^0 + 2^2 + 2^5 + 2^7 = 1 + 4 + 32 + 128 = 165$$

Esponente: 165 - 127 = 38

 $+1.59375 \cdot 2^{38}$ 

### Operazioni in virgola fissa

Esegui le seguenti operazioni in binario senza segno, virgola fissa, rispettando come vincoli di rappresentazione 4 bit per la parte intera, 4 bit per la parte frazionaria

- 4.5 + 1.75
- $\bullet$  3.875 + 2.125

Convertiamo gli operandi in binario

- $\bullet$  4.5<sub>10</sub> = 100.1<sub>2</sub>
- $1.75_{10} = 1.11_2$

Convertiamo gli operandi in binario

- $\bullet$  4.5<sub>10</sub> = 100.1<sub>2</sub>
- $1.75_{10} = 1.11_2$

Fissiamo la rappresentazione a 4+4 bit senza segno

- 0100.1000
- 0001.1100

Convertiamo gli operandi in binario

$$\bullet$$
 4.5<sub>10</sub> = 100.1<sub>2</sub>

• 
$$1.75_{10} = 1.11_2$$

Fissiamo la rappresentazione a 4+4 bit senza segno

- 0100.1000
- 0001.1100

Eseguiamo la somma

Convertiamo gli operandi in binario

$$\bullet$$
 4.5<sub>10</sub> = 100.1<sub>2</sub>

• 
$$1.75_{10} = 1.11_2$$

Fissiamo la rappresentazione a 4+4 bit senza segno

- 0100.1000
- 0001.1100

Eseguiamo la somma

$$100.1 + 1.11 = 110.01$$
  
 $4.5 + 1.75 = 6.25$ 

Convertiamo gli operandi in binario

- $3.875_{10} = 11.111_2$
- $2.125_{10} = 10.001_2$

Convertiamo gli operandi in binario

- $3.875_{10} = 11.111_2$
- $2.125_{10} = 10.001_2$

Fissiamo la rappresentazione a 4+4 bit senza segno

- 0011.1110
- 0010.0010

Convertiamo gli operandi in binario

• 
$$3.875_{10} = 11.111_2$$

$$2.125_{10} = 10.001_2$$

Fissiamo la rappresentazione a 4+4 bit senza segno

- 0011.1110
- 0010.0010

Eseguiamo la somma

Convertiamo gli operandi in binario

$$\bullet \ 3.875_{10} = 11.111_2$$

$$2.125_{10} = 10.001_2$$

Fissiamo la rappresentazione a 4+4 bit senza segno

- 0011.1110
- 0010.0010

Eseguiamo la somma

$$11.111 + 10.001 = 110$$
  
 $3.875 + 2.125 = 6$ 

### Operazioni in virgola mobile

Eseguire le seguenti operazioni in virgola mobile (float single precision - standard 32 bit)

- $1.875 \cdot 2^5 + 6.25 \cdot 2^{23}$
- $1.5 \cdot 2^4 2 \cdot 2^5$

- $1.875_{10} = 1.111_2$
- $\bullet$  6.25<sub>10</sub> = 110.01<sub>2</sub>
  - $6.25 \cdot 2^{23} = 1.5625 \cdot 2^{25}$

- $\bullet$  1.875<sub>10</sub> = 1.111<sub>2</sub>
- $\bullet$  6.25<sub>10</sub> = 110.01<sub>2</sub>

• 
$$6.25 \cdot 2^{23} = 1.5625 \cdot 2^{25}$$

Stefano Cherubin Oct-Hex-Float 04 Ottobre 2018 26 / 29

- $1.875_{10} = 1.111_2$
- $\bullet$  6.25<sub>10</sub> = 110.01<sub>2</sub>

• 
$$6.25 \cdot 2^{23} = 1.5625 \cdot 2^{25}$$

Portare tutte le mantisse al maggiore degli esponenti in gioco (25) tramite opportuni bit shift

 $\begin{array}{cccc} 0. & 00000000000000000001111 & + \\ 1. & 10010000000000000000000 & = \\ \hline 1. & 100100000000000000001111 & + \\ \end{array}$ 

- $\bullet \ 1.875_{10} = 1.111_2$
- $\bullet$  6.25<sub>10</sub> = 110.01<sub>2</sub>
  - $6.25 \cdot 2^{23} = 1.5625 \cdot 2^{25}$

Portare tutte le mantisse al maggiore degli esponenti in gioco (25) tramite opportuni bit shift

- $\begin{array}{cccc} 0 & 10011000 & 100100000000000000001111 \\ \pm & \exp & \text{mantissa} \end{array}$

- $1.5_{10} = 1.1_2$
- $2_{10} = 10_2$ 
  - $-2 \cdot 2^5 = -1 \cdot 2^6$

• 
$$1.5_{10} = 1.1_2$$

• 
$$2_{10} = 10_2$$

$$-2 \cdot 2^5 = -1 \cdot 2^6$$

```
• 1.5_{10} = 1.1_2

• 2_{10} = 10_2

• -2 \cdot 2^5 = -1 \cdot 2^6
```

Si portano tutte le mantisse al maggiore degli esponenti in gioco (6); si calcola il complemento a 2 delle mantisse negative e si esegue la somma.

Stefano Cherubin Oct-Hex-Float 04 Ottobre 2018 27 / 29

• 
$$1.5_{10} = 1.1_2$$

• 
$$2_{10} = 10_2$$
  
•  $-2 \cdot 2^5 = -1 \cdot 2^6$ 

Si portano tutte le mantisse al maggiore degli esponenti in gioco (6); si calcola il complemento a 2 delle mantisse negative e si esegue la somma.

Stefano Cherubin Oct-Hex-Float 04 Ottobre 2018 27 / 29

Si calcola il risultato in notazione complemento a 2 e poi si converte in modulo e segno. Per tornare in notazione modulo e segno:

Stefano Cherubin Oct-Hex-Float 04 Ottobre 2018 28 / 29

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>approfondimenti sulle operazioni in virgola mobile http://pages.cs.wisc.edu/~smoler/x86text/lect.notes/arith.flpt.html

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>A priori si sa che il risultato sarà negativo perché l'operando negativo ha esponente maggiore

Si calcola il risultato in notazione complemento a 2 e poi si converte in modulo e segno. Per tornare in notazione modulo e segno:

- si esegue un complemento a 2 (per ottenere il modulo)
- ② si normalizza in modo da ottenere la forma 1.mantissa
- 3 si imposta il bit di segno<sup>2</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>approfondimenti sulle operazioni in virgola mobile http://pages.cs.wisc.edu/~smoler/x86text/lect.notes/arith.flpt.html

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>A priori si sa che il risultato sarà negativo perché l'operando negativo ha esponente maggiore

Si calcola il risultato in notazione complemento a 2 e poi si converte in modulo e segno. Per tornare in notazione modulo e segno:

- si esegue un complemento a 2 (per ottenere il modulo)
- ② si normalizza in modo da ottenere la forma 1.mantissa
- 3 si imposta il bit di segno<sup>2</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>approfondimenti sulle operazioni in virgola mobile http://pages.cs.wisc.edu/~smoler/x86text/lect.notes/arith.flpt.html

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>A priori si sa che il risultato sarà negativo perché l'operando negativo ha esponente maggiore

Si calcola il risultato in notazione complemento a 2 e poi si converte in modulo e segno. Per tornare in notazione modulo e segno:

- si esegue un complemento a 2 (per ottenere il modulo)
- 2 si normalizza in modo da ottenere la forma 1.mantissa
- 3 si imposta il bit di segno<sup>2</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>approfondimenti sulle operazioni in virgola mobile http://pages.cs.wisc.edu/~smoler/x86text/lect.notes/arith.flpt.html

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>A priori si sa che il risultato sarà negativo perché l'operando negativo ha esponente maggiore

### Fine

Queste slides contengono elementi tratti da materiale di Gerardo Pelosi redatto per il corso di Fondamenti di Informatica per Ingegneria dell'Automazione a.a. 2014/15.

# Grazie per l'attenzione!

#### Licenza Beerware<sup>3</sup>

Queste slides sono opera di Stefano Cherubin. Mantenendo questa nota, puoi fare quello che vuoi con quest'opera. Se ci dovessimo incontrare e tu ritenessi che quest'opera lo valga, in cambio puoi offrirmi una birra.

Stefano Cherubin Oct-Hex-Float 04 Ottobre 2018 29 / 29

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>http://people.freebsd.org/~phk/