

# 1 Límites y continuidad

- Definición de límite y propiedades

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Cuando me acerco mucho al punto "a" en el eje de la X, la función se acerca mucho a L en el eje de la Y.

Límites laterales: A veces hay que distinguir si nos acercamos mucho por la derecha  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  o por la izquierda  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

El límite, si existe, es único y cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Límites al infinito: En un polinomio el término que manda es el de mayor grado

Propiedades:

Sean:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$

- $\lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot A$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, B \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$ , si existe  $\sqrt[n]{A}$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^{g(x)}] = A^B$ , si  $A^B$  es determinado

- Indeterminaciones

Vamos a recordar primero algunas operaciones:

Suma y resta	Producto	Cociente	Potencia
$+\infty + \infty = +\infty$ $-\infty - \infty = -\infty$ $[+\infty - \infty]$ indeterminado	$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$ $+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$ $-\infty \cdot (+\infty) = -\infty$ $-\infty \cdot (-\infty) = +\infty$ $[\pm\infty \cdot 0]$ indeterminado	$\frac{0}{k} = 0 ; k \neq 0$ $\frac{k}{0} = \pm\infty ; k \neq 0$ $\left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right]$ indeterminado $\frac{k}{\pm\infty} = 0$ $\left[ \begin{matrix} \pm\infty \\ \pm\infty \end{matrix} \right]$ indeterminado	$(+\infty)^k = +\infty$ si $k > 0$ $(+\infty)^k = 0$ si $k < 0$ $[\infty^0]$ = indeterminado $k^{+\infty} = +\infty$ $k^{-\infty} = 0$ $k^{+\infty} = 0$ $k^{-\infty} = +\infty$ $[0^0]$ indeterminado $[1^{+\infty}]$ indeterminado

- Indeterminación  $\frac{0}{0}$

Polinomios: Simplificar la fracción (Factorizo polinomios)

Ejemplo:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6 - x}{x^2 - 3x} = \frac{0}{0}$  Indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$$

Con raíces: Multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado

Ejemplo:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0}$  Indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{0}{0}$$
 Indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{-1 \cdot 4} = \frac{-1}{4}$$

### - Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Hay que dividir todos los términos por la x de mayor exponente.

Ejemplo:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x}{2x^3-100} = \frac{\infty}{\infty}$  Indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{100}{x^3}} = \frac{0-0}{2-0} = \frac{0}{2} = 0$$

Ejemplo:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3}-3x}{x-3} = \frac{\infty}{\infty}$  Indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2-3}}{x} + \frac{3x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{4}+3}{1} = 5$$

### - Indeterminación $\infty - \infty$

Aparecen raíces: Multiplicar y dividir por el conjugado Sin raíces: Realizar la operación que aparece.

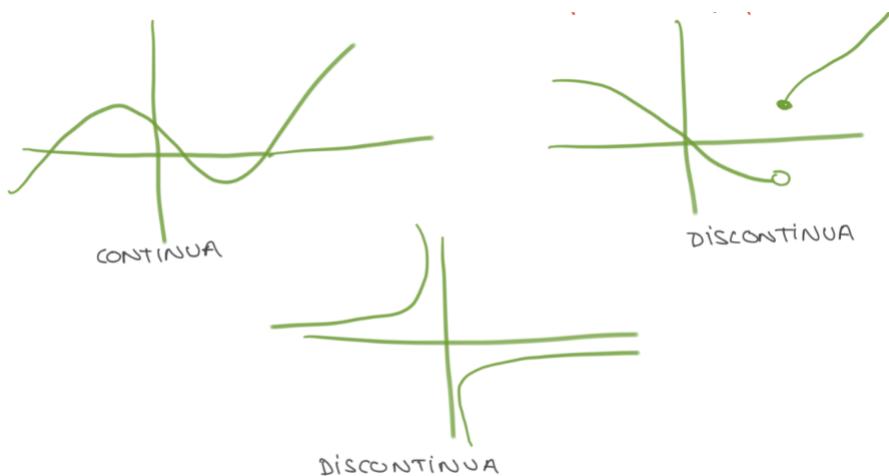
Ejemplo:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x}) = \infty - \infty$  Indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x-1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1-x}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})} = \frac{-1}{\infty}$$

- Continuidad de una función

Cuando soy capaz de repasar el trazo sin levantar el lápiz del papel.



Una función  $f(x)$  es continua en un punto  $x=a$  si cumple:

1.  $\exists f(a) \rightarrow$  Al sustituir  $x=a$  en la función, me da un valor real.

2.  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow$  Existen los límites laterales
3.  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$f(x)$  continua en  $x=a \Leftrightarrow f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

En caso contrario, la función será discontinua (o no será continua) en  $x=a$ .

¡Recuerda! Son continuas las funciones:

- Polinómicas
- Exponenciales
- Logarítmicas
- Racionales: Menos los valores que anulan el denominador
- Radicales: Solo donde el radicando es  $\geq 0$

Funciones definidas a trozos:  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

1. Ver si las funciones definidas en sus "trozos" son o no son continuas.
  - (a) continúa, ya que sus "trozos" son funciones continua (polinomios)
2. Estudiar la continuidad en los valores que la función se divide a trozos.
  - (a)  $x=0$ : no es continua
  - (b)  $x=1$  no es continua
3. Agrupamos las continuidades del paso 1 y 2
  - $f(x)$  es continua  $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

Tipos de discontinuidad:

- Discontinuidad evitable
- Discontinuidad inevitable
  - \* salto finito
  - \* salto infinito

## • Asíntotas

Son rectas a las que se pega la función. Hay tres tipos: verticales, horizontales y oblicuas.

- Asíntotas verticales:  $f(x)$  tiene A.V. en  $x=a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ 
  1. Buscar los puntos que no están en el dominio
  2. Calcular  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , si sale un número no tiene asíntota vertical, si sale  $\pm\infty$  tiene asíntota vertical en  $x=a$
- Asíntota horizontal:  $f(x)$  tiene A.H. en  $y=a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$ 
  1. Calcular  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  Si da  $\pm\infty$  no tiene A.H. si da un número (a), tiene asíntota horizontal en  $y=a$
- Asíntota oblicua:  $y = mx + n$   
 El grado del numerador - grado de denominador = 1
  - \* División de polinomios: El cociente es la asíntota
  - \*  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  y  $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) - mx$

IMPORTANTE: Si hay A. Horizontal no hay A. Oblicua.

Asíntota	Definición	Posición de la gráfica respecto de la asíntota
Vertical	Recta $x = a$ tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$	Se estudian: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
Horizontal	Recta $y = k$ tal que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$	Se estudian: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k]$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k]$ Si el límite tiende a $0^+$ , la curva está encima de la asíntota, y si tiende a $0^-$ , está debajo.
Oblicua	Recta $y = mx + b$ tal que $m \neq 0$ y $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ , $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$	Se estudian: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)]$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)]$ Si el límite tiende a $0^+$ , la curva está encima de la asíntota, y si tiende a $0^-$ , está debajo.

## 2 Ejercicios

1. Calcula a

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^2 - 9a}{x^2 - 2x - 3} = 1$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - x) = 2$$

2. Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones.

$$(a) f(x) = x^3 + 8$$

$$(g) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$(l) f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$$

$$(b) f(x) = \frac{x}{x^3 + 8}$$

$$(h) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$(m) f(x) = \tan(2x)$$

$$(c) f(x) = \frac{x}{x^2 - 8}$$

$$(i) f(x) = e^{x-2}$$

$$(n) f(x) = \sin \frac{1}{x-1}$$

$$(d) f(x) = \frac{x}{x^2 + 8}$$

$$(j) f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

$$(o) f(x) = \cos(2x - 1)$$

$$(e) f(x) = \sqrt{x^3 - 8}$$

$$(k) f(x) = \log(5x - 6)$$

$$(p) f(x) = \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x}$$

$$(f) f(x) = \sqrt{x^4}$$

3. Estudia la continuidad y di que tipo de discontinuidad en cada caso.

$$(a) f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{si } x \geq 6. \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} e^{1-x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{-1}{x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$(g) f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{-1}{x-2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$(h) f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(2 - x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

4. Halla el valor de a y b para que la función  $f(x)$  sea continua.

$$(a) \ f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < -1 \\ 3x - a & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$(b) \ f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$(c) \ f(x) = \begin{cases} x - a & \text{si } x < -2 \\ x^2 + x + b & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$(d) \ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + a & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$(e) \ f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ 2a + \sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$(f) \ f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

5. Halla para qué valores de "a" la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq a \\ a+2 & \text{si } x > a \end{cases}$

### 3 Videos de refuerzo

- Ejercicios de límites: <https://www.youtube.com/watch?v=YnWo7noYDyQ>
- Tipos de discontinuidad: <https://www.youtube.com/watch?v=raDNa4Q8QkQ>
- Ejercicios de continuidad: <https://www.youtube.com/watch?v=7ZYPMfwP47k>
- Ejercicios de continuidad: <https://www.youtube.com/watch?v=uIyliInYZek>
- Indeterminación  $\frac{0}{0}$ : <https://www.youtube.com/watch?v=MKjHcw3ooUc>
- Indeterminación  $\frac{0}{0}$ : <https://www.youtube.com/watch?v=HFnvI-ZTm2E>
- Indeterminación  $\frac{\infty}{\infty}$ : <https://www.youtube.com/watch?v=y26Uv5jpWc>
- Indeterminación  $\infty - \infty$ : <https://www.youtube.com/watch?v=OFA5P-FrqvY>
- Regla de l'Hopital : <https://www.youtube.com/watch?v=iCjRT0lYqPE>
- Lista de reproducción: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLwCiNw1sXMSDRxTynmzWuH4wV>