1 Límites y continuidad

- Definición de límite y propiedades

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Cuando me acerco mucho al punto "a" en el eje de la X, la función se acerca mucho a L en el eje de la Y.

Límites laterales: A veces hay que distinguir si nos acercamos mucho por la derecha $\lim_{x \to a^+} f(x)$ o por la izquierda $\lim_{x \to a^-} f(x)$.

El límite, si existe, es único y cumple que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Límites al infinito: En un polinomio el término que manda es el de mayor grado

Propiedades:

Sean: $\lim_{x \to a} f(x) = A$ y $\lim_{x \to a} g(x) = B$

1. $\lim_{x \to a} [k \cdot f(x)] = k \cdot A$
2. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$
3. $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$
4. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}, B \neq 0$
5. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$, si existe $\sqrt[n]{A}$
6. $\lim_{x \to a} [f(x)^{g(x)}] = A^B$, si A^B es determinado

- Indeterminaciones

Vamos a recordar primero algunas operaciones:

Suma y resta	Producto	Cociente	Potencia
$+\infty + \infty = +\infty$ $-\infty - \infty = -\infty$ $[+\infty - \infty]$ indeterminado	$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$ $+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$ $-\infty \cdot (+\infty) = -\infty$ $-\infty \cdot (-\infty) = +\infty$ $[\pm\infty \cdot 0]$ indeterminado	$\frac{0}{k} = 0$; $k \neq 0$ $\frac{k}{0} = \pm\infty$; $k \neq 0$ $\left[\frac{0}{0}\right]$ indeterminado $\frac{k}{\pm\infty} = 0$ $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$ indeterminado	$(+\infty)^k = +\infty$ si $k > 0$ $(+\infty)^k = 0$ si $k < 0$ $[\infty^0]$ = indeterminado $\left.\begin{matrix} k^{+\infty} = +\infty \\ k^{-\infty} = 0 \end{matrix}\right\}$ si $k > 1$ $\left.\begin{matrix} k^{+\infty} = 0 \\ k^{-\infty} = +\infty \end{matrix}\right\}$ si $0 < k < 1$ $[0^0]$ indeterminado $[1^{\pm\infty}]$ indeterminado

  - **Indeterminación** $\dfrac{0}{0}$

    Polinomios: Simplificar la fracción (Factorizo polinomios)

    Ejemplo: $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 6 - x}{x^2 - 3x} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminación

    $\lim_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x(x-3)} = \lim_{x \to 3} \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{3+2}{3} = \dfrac{5}{3}$

    Con raíces: Multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado

Ejemplo: $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminación

$\lim_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{x+3-4}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+3}+2)} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminación

$\lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \dfrac{1}{-1\cdot 4} = \dfrac{-1}{4}$

- **Indeterminación** $\dfrac{\infty}{\infty}$

  Hay que dividir todos los términos por la x de mayor exponente.

  Ejemplo: $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-2x}{2x^3-100} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Indeterminación

  $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\dfrac{x^2}{x^3}-\dfrac{2x}{x^3}}{\dfrac{2x^3}{x^3}-\dfrac{100}{x^3}} = \dfrac{0-0}{2-0} = \dfrac{0}{2} = 0$

  Ejemplo: $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-3}-3x}{x-3} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Indeterminación.

  $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\dfrac{\sqrt{4x^2-3}}{x}+\dfrac{3x}{x}}{\dfrac{x}{x}-\dfrac{3}{x}} = \dfrac{\sqrt{4}+3}{1} = 5$

- **Indeterminación** $\infty - \infty$

  Aparecen raíces: Multiplicar y dividir por el conjugado Sin raíces: Realizar la operación que aparece.

  Ejemplo: $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}) = \infty - \infty$ Indeterminación

  $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{x-1-x}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})} =$

  $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{-1}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})} = \dfrac{-1}{\infty}$

- Continuidad de una función

  Cuando soy capaz de repasar el trazo sin levantar el lápiz del papel.

CONTINUA

DISCONTINUA

DISCONTINUA

Una función f(x) es continua en un punto x=a si cumple:

1. $\exists f(a) \rightarrow$ Al sustituir x=a en la función, me da un valor real.

2. $\exists \lim_{x\to a} f(x) \to$ Existen los límites laterales
3. $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

f(x) continua en x=a $\Leftrightarrow$ f(a) = $\lim_{x\to a} f(x) = L$

En caso contrario, la función será discontinua (o no será continua) en x=a.

¡Recuerda! Son continuas las funciones:

- Polinómicas
- Exponenciales
- Logarítmicas
- Racionales: Menos los valores que anulan el denominador
- Radicales: Solo donde el radicando es ≥ 0

Funciones definidas a trozos: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

1. Ver si las funciones definidas en sus "trozos" son o no son continuas.
   (a) continúa, ya que sus "trozos" son funciones continúa (polinomios)
2. Estudiar la continuidad en los valores que la función se divide a trozos.
   (a) x=0: no es continua
   (b) x=1 no es continua
3. Agrupamos las continuidades del paso 1 y 2
   - f(x) es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

Tipos de discontinuidad:

- Discontinuidad evitable
- Discontinuidad inevitable
  * salto finito
  * salto infinito

• Asíntotas

Son rectas a las que se pega la función. Hay tres tipos: verticales, horizontales y oblicuas.

- Asíntotas verticales: $f(x)$ tiene A.V. en x=a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$
  1. Buscar los puntos que no están en el dominio
  2. Calcular $\lim_{x\to a} f(x)$, si sale un número no tiene asíntota vertical, si sale $\pm\infty$ tiene asíntota vertical en x=a
- Asíntota horizontal: $f(x)$ tiene A.H. en y =a $\Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$
  1. Calcular $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ Si da $\pm\infty$ no tiene A.H. si da un número (a), tiene asíntota horizontal en y =a
- Asíntota oblicua: $y = mx + n$
  El grado del numerador - grado de denominador = 1
  * División de polinomios: El cociente es la asíntota
  * $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty}(f(x)) - mx$

  IMPORTANTE: Si hay A. Horizontal no hay A. Oblicua.

2 Ejercicios

1. Calcula a

   (a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{ax^2-9a}{x^2-2x-3}=1$

   (b) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax+1}-x)=2$

2. Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones.

   (a) $f(x)=x^3+8$

   (b) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+8}$

   (c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-8}$

   (d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+8}$

   (e) $f(x)=\sqrt{x^3-8}$

   (f) $f(x)=\sqrt{x^4}$

   (g) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

   (h) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$

   (i) $f(x)=e^{x-2}$

   (j) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

   (k) $f(x)=log(5x-6)$

   (l) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$

   (m) $f(x)=tan(2x)$

   (n) $f(x)=sin\dfrac{1}{x-1}$

   (o) $f(x)=cos(2x-1)$

   (p) $f(x)=\dfrac{2-sinx}{2+cosx}$

3. Estudia la continuidad y di que tipo de discontinuidad en cada caso.

   (a) $f(x)=\begin{cases}3x-x^2 & \text{si } x\leq 3\\ x-3 & \text{si } 3<x<6\\ 0 & \text{si } x\geq 6.\end{cases}$

   (b) $f(x)=\begin{cases}e^{1-x^2} & \text{si } x\leq -1\\ \dfrac{-1}{x} & \text{si } x>-1\end{cases}$

   (c) $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\leq 1\\ x-1 & \text{si } x>1\end{cases}$

   (d) $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{si } x\leq 1\\ x-1 & \text{si } x>1\end{cases}$

   (e) $f(x)=\begin{cases}cos(x) & \text{si } x\leq 0\\ x+1 & \text{si } x>0\end{cases}$

   (f) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\leq 0\\ sin(x) & \text{si } x>0\end{cases}$

   (g) $f(x)=\begin{cases}e^{x-1} & \text{si } x\leq 1\\ \dfrac{-1}{x-2} & \text{si } x>1\end{cases}$

   (h) $f(x)=\begin{cases}1-x & \text{si } x\leq 1\\ ln(2-x) & \text{si } x>1\end{cases}$

4. Halla el valor de a y b para que la función f(x) sea continúa.

   (a) $f(x)=\begin{cases}x^2+x & \text{si } x<-1\\ 3x-a & \text{si } x\geq -1\end{cases}$

   (b) $f(x)=\begin{cases}e^x & \text{si } x\leq 0\\ 2x+a & \text{si } x>0\end{cases}$

   (c) $f(x)=\begin{cases}x-a & \text{si } x<-2\\ x^2+x+b & \text{si } -2\leq x<1\\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

   (d) $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\leq 1\\ 2x+a & \text{si } x<1\end{cases}$

   (e) $f(x)=\begin{cases}e^{ax} & \text{si } x\leq 0\\ 2a+sin(x) & \text{si } x>0\end{cases}$

   (f) $f(x)=\begin{cases}a+ln(1-x) & \text{si } x<0\\ x^2e^{-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

5. Halla para qué valores de "a" la función $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\leq a\\ a+2 & \text{si } x>a\end{cases}$

3 Videos de refuerzo

- Ejercicios de límites: https://www.youtube.com/watch?v=YnWo7noYDyQ

- Tipos de discontinuidad: https://www.youtube.com/watch?v=raDNa4Q8QkQ
- Ejercicios de continuidad: https://www.youtube.com/watch?v=7ZYPMfwp47k
- Ejercicios de continuidad: https://www.youtube.com/watch?v=uIyliInYZek
- Indeterminación $\frac{0}{0}$: https://www.youtube.com/watch?v=MKjHcw3ooUc
- Indeterminación $\frac{0}{0}$: https://www.youtube.com/watch?v=HFnvI-ZTm2E
- Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$: https://www.youtube.com/watch?v=y26Uv5jpvWc
- Indeterminación $\infty - \infty$: https://www.youtube.com/watch?v=OFA5P-FrqvY
- Regla de l'Hopital : https://www.youtube.com/watch?v=iCjRT0lYqPE
- Lista de reproducción: https://www.youtube.com/playlist?list=PLwCiNw1sXMSDRxTynmzWuH4wV