1 Límites y continuidad

- Definición de límite y propiedades

  El límite de una función describe el valor al que se aproximan los valores de la función cuando la variable se acerca a un punto, sin necesidad de que la función esté definida en dicho punto.

  $$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

  Cuando me acerco mucho al punto "a" en el eje de la X, la función se acerca mucho a L en el eje de la Y.

  Límites laterales: A veces hay que distinguir si nos acercamos mucho por la derecha $\lim_{x\to a^+} f(x)$ o por la izquierda $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

  El límite, si existe, es único y cumple que:

  $$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

  Si los valores por la izquierda y por la derecha no coinciden, el límite no existe.

  Límites al infinito: En un polinomio el término que manda es el de mayor grado

  Propiedades:

  Sean: $\lim_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim_{x\to a} g(x) = B$

  1. $\lim_{x\to a}[k \cdot f(x)] = k \cdot A$
  2. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$
  3. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$
  4. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}, B \neq 0$
  5. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$, si existe $\sqrt[n]{A}$
  6. $\lim_{x\to a}[f(x)^{g(x)}] = A^B$, si A^B es determinado

- Indeterminaciones

  Vamos a recordar primero algunas operaciones:

  – **Indeterminación** $\dfrac{0}{0}$

    Polinomios: Simplificar la fracción (Factorizo polinomios)

    Ejemplo: $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 6 - x}{x^2 - 3x} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminación

    $\lim_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{3+2}{3} = \dfrac{5}{3}$

    Con raíces: Multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado

    Ejemplo: $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminación

    $\lim_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x^2 - 3x + 2)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{x + 3 - 4}{(x^2 - 3x + 2)(\sqrt{x+3} + 2)} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminación

    $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x+3} + 2)} = \dfrac{1}{-1 \cdot 4} = \dfrac{-1}{4}$

- **Indeterminación** $\dfrac{\infty}{\infty}$

  Hay que dividir todos los términos por la x de mayor exponente.

  Ejemplo: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x}{2x^3-100} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Indeterminación

  $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{x^2}{x^3}-\dfrac{2x}{x^3}}{\dfrac{2x^3}{x^3}-\dfrac{100}{x^3}} = \dfrac{0-0}{2-0} = \dfrac{0}{2} = 0$

  Ejemplo: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-3}-3x}{x-3} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Indeterminación.

  $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{\sqrt{4x^2-3}}{x}+\dfrac{3x}{x}}{\dfrac{x}{x}-\dfrac{3}{x}} = \dfrac{\sqrt{4}+3}{1} = 5$

- **Indeterminación** $\infty - \infty$

  Aparecen raíces: Multiplicar y dividir por el conjugado Sin raíces: Realizar la operación que aparece.

  Ejemplo: $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}) = \infty-\infty$ Indeterminación

  $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x-1-x}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})} =$

  $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})} = \dfrac{-1}{\infty}$

- **Indermінación** $0\cdot\infty$

  Esta indeterminación aparece cuando un factor tiende a 0 y el otro a ∞. Para resolverla, se transforma el producto en un cociente:

  * Pasando el factor que tiende a ∞ al denominador.
  * O bien pasando el factor que tiende a 0 al denominador.

  Ejemplo: $\lim_{x\to+\infty} x\cdot\dfrac{1}{x^2} = 0\cdot\infty$.

  Reescribimos el producto como cociente: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

  Ejemplo: $\lim_{x\to0^+} x\cdot\ln x$

  Sabemos que:

  $$x\to0^+ \quad \text{y} \quad \ln x\to-\infty$$

  Reescribimos:

  $$x\cdot\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

  Como $\frac{1}{x}\to+\infty$, aplicamos el caso $\dfrac{\infty}{\infty}$:

  $$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}(-x) = 0$$

- **Indermінación** 1^∞

  Aparece cuando una potencia tiene:

  * base que tiende a 1,
  * exponente que tiende a ∞.

Para resolverla, se aplica el logaritmo y se transforma en un producto:

$$\lim a(x)^{b(x)} = e^{\lim b(x) \ln a(x)}$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

Tenemos:

$$1+\frac{1}{x} \to 1 \quad \text{y} \quad x \to \infty$$

Luego es una indeterminación del tipo 1^{∞}.
Aplicamos logaritmos:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e^{\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Sabemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Observación: Este tipo de indeterminación aparece con frecuencia en límites relacionados con el número e.

- Continuidad de una función

  Cuando soy capaz de repasar el trazo sin levantar el lápiz del papel.

  Una función f(x) es continua en un punto x=a si cumple:

  1. $\exists f(a) \to$ Al sustituir x=a en la función, me da un valor real.
  2. $\exists \lim_{x\to a} f(x) \to$ Existen los límites laterales
  3. $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

  f(x) continua en x=a $\Leftrightarrow$ f(a) = $\lim_{x\to a} f(x) = L$

  En caso contrario, la función será discontinua (o no será continua) en x=a.

  ¡Recuerda! Son continuas las funciones:

  - Polinómicas
  - Exponenciales
  - Logarítmicas
  - Racionales: Menos los valores que anulan el denominador
  - Radicales: Solo donde el radicando es ≥ 0

  Teorema de Bolzano

- **Enunciado:** Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, es decir,

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f(c) = 0.$$

Interpretación intuitiva: Si una función continua toma valores positivos y negativos en los extremos de un intervalo, necesariamente debe cortar al eje x en algún punto intermedio.

Aplicación práctica: Este teorema se utiliza para:

* Demostrar la existencia de soluciones de ecuaciones.
* Justificar que una ecuación tiene al menos una raíz en un intervalo.

Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^3 - x - 1$, que es continua en $\mathbb{R}$.

$$f(1) = -1 \quad \text{y} \quad f(2) = 5$$

Como $f(1) \cdot f(2) < 0$, por el Teorema de Bolzano existe al menos un número $c \in (1, 2)$ tal que:

$$f(c) = 0.$$

Observaciones:

* El teorema no indica cuántas raíces existen, solo garantiza la existencia de al menos una.
* Es imprescindible que la función sea continua en todo el intervalo cerrado.

Teorema de Weierstrass

- **Enunciado:** Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Entonces:

* La función alcanza un valor máximo absoluto.
* La función alcanza un valor mínimo absoluto.

Es decir, existen $x_M, x_m \in [a, b]$ tales que:

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Interpretación intuitiva: Una función continua en un intervalo cerrado no puede "escaparse": necesariamente toma un valor más grande que todos los demás y un valor más pequeño que todos los demás.

Aplicación práctica: Este teorema se utiliza para:

* Determinar máximos y mínimos absolutos.
* Resolver problemas de optimización.
* Justificar que una función está acotada en un intervalo cerrado.

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-2, 1]$.

$$f(-2) = 4, \quad f(1) = 1$$

El mínimo absoluto se alcanza en $x = 0$, donde $f(0) = 0$, y el máximo absoluto se alcanza en $x = -2$, donde $f(-2) = 4$.

Observaciones:

  * Es imprescindible que el intervalo sea **cerrado y acotado**.
  * En intervalos abiertos o no acotados, el teorema no se cumple.

Relación entre ambos teoremas

- El Teorema de Bolzano garantiza la existencia de ceros.
- El Teorema de Weierstrass garantiza la existencia de extremos.
- Ambos requieren continuidad y trabajan sobre intervalos cerrados.

Funciones definidas a trozos: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

1. Ver si las funciones definidas en sus "trozos" son o no son continuas.
   (a) continúa, ya que sus "trozos" son funciones continúa (polinomios)
2. Estudiar la continuidad en los valores que la función se divide a trozos.
   (a) x=0: no es continua
   (b) x=1 no es continua
3. Agrupamos las continuidades del paso 1 y 2
   - f(x) es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

Tipos de discontinuidad:

- Discontinuidad evitable
- Discontinuidad inevitable
  * salto finito
  * salto infinito

• Asíntotas

Son rectas a las que se pega la función. Hay tres tipos: verticales, horizontales y oblicuas.

- Asíntotas verticales: $f(x)$ tiene A.V. en x=a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$
  1. Buscar los puntos que no están en el dominio
  2. Calcular $\lim_{x\to a} f(x)$, si sale un número no tiene asíntota vertical, si sale $\pm\infty$ tiene asíntota vertical en x=a
- Asíntota horizontal: $f(x)$ tiene A.H. en y =a $\Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$
  1. Calcular $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ Si da $\pm\infty$ no tiene A.H. si da un número (a), tiene asíntota horizontal en y =a
- Asíntota oblicua: $y = mx + n$
  El grado del numerador - grado de denominador = 1
  * División de polinomios: El cociente es la asíntota
  * $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty}(f(x)) - mx$

  IMPORTANTE: Si hay A. Horizontal no hay A. Oblicua.

2 Ejercicios

1. Calcula a

(a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{ax^2-9a}{x^2-2x-3} = 1$

(b) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax+1}-x) = 2$

2. Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = x^3+8$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^3+8}$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-8}$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+8}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^3-8}$

(f) $f(x) = \sqrt{x^4}$

(g) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

(h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$

(i) $f(x) = e^{x-2}$

(j) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

(k) $f(x) = log(5x-6)$

(l) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$

(m) $f(x) = tan(2x)$

(n) $f(x) = sin\dfrac{1}{x-1}$

(o) $f(x) = cos(2x-1)$

(p) $f(x) = \dfrac{2-sinx}{2+cosx}$

3. Estudia la continuidad y di que tipo de discontinuidad en cada caso.

(a) $f(x) = \begin{cases} 3x-x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ x-3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{si } x \geq 6. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{1-x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{-1}{x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} cos(x) & \text{si } x \leq 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{-1}{x-2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(h) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 1 \\ ln(2-x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

4. Halla el valor de a y b para que la función f(x) sea continúa.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{si } x < -1 \\ 3x-a & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x+a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x-a & \text{si } x < -2 \\ x^2+x+b & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x+a & \text{si } x < 1 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ 2a+sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} a+ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

5. Halla para qué valores de "a" la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq a \\ a+2 & \text{si } x > a \end{cases}$

3 Videos de refuerzo

- Ejercicios de límites: https://www.youtube.com/watch?v=YnWo7noYDyQ
- Tipos de discontinuidad: https://www.youtube.com/watch?v=raDNa4Q8QkQ
- Ejercicios de continuidad: https://www.youtube.com/watch?v=7ZYPMfwp47k

- Ejercicios de continuidad: https://www.youtube.com/watch?v=uIyliInYZek
- Indeterminación $\dfrac{0}{0}$: https://www.youtube.com/watch?v=MKjHcw3ooUc
- Indeterminación $\dfrac{0}{0}$: https://www.youtube.com/watch?v=HFnvI-ZTm2E
- Indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$: https://www.youtube.com/watch?v=y26Uv5jpvWc
- Indeterminación $\infty - \infty$: https://www.youtube.com/watch?v=OFA5P-FrqvY
- Regla de l'Hopital : https://www.youtube.com/watch?v=iCjRT0lYqPE
- Lista de reproducción: https://www.youtube.com/playlist?list=PLwCiNw1sXMSDRxTynmzWuH4wV