Ecuaciones

Una **ecuación** es una propuesta de igualdad que se cumple solo para algunos valores de la incógnita, y en algunos casos para ninguno.

Las **soluciones** de una ecuación son los valores que hacen cierta la igualdad.

Resolver una ecuación es hallar su solución (o soluciones) o llegar a la conclusión de que no tiene.

Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado es aquella que solo aparecen expresiones algebraicas de grado 1. Después de simplificarla llegaremos a una igualdad tipo: $ax + b = 0$

Pasos:

1. Quitar denominadores
2. Quitar paréntesis
3. Reducir cada miembro
4. Despejar la incógnita
5. Comprobar si el valor obtenido cumple la igualdad.

Ejemplo: $\dfrac{3(x+1)}{4} - 2 = 2x - \dfrac{5(x-1)}{3}$

1. mcm(4,3) = 12

   $3 \cdot 3(x+1) - 24 = 24x - 4 \cdot 5(x-1)$

2. $9x + 9 - 24 = 24x - 20x + 20$

3. $9x - 15 = 4x + 20$

   $9x - 4x = 20 + 15$

   $5x = 35$

4. $x = \dfrac{35}{5}$

   $x = 7$

5. $\dfrac{3(7+1)}{4} - 2 = \dfrac{3 \cdot 8}{4} - 2 = 6 - 2 = 4$

   $2 \cdot n7 - \dfrac{7(7-1)}{3} = 14 - \dfrac{5 \cdot 6}{3} = 14 - 10 = 4$

Existen expresiones como:

- $4x - 6 = 4(x+3) \to 4x - 6 = 4x + 12 \to 0 \cdot x = 18$ La cual **no** tiene solución.
- $4x - 6 = 4(x-2) + 2 \to 4x - 6 = 4x - 6 \to 0 \cdot x = 0$ La cual tiene **infinitas** soluciones.

Ecuaciones de segundo grado

Las ecuaciones de segundo grado son de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ y se resuelven con la siguiente formula : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- Si $b^2 - 4ac > 0$ hay dos soluciones.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ hay una solución.
- $b^2 - 4ac < 0$ no hay ninguna solución.

Ejemplo: $5x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2)}}{2 \cdot 5} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{10} \rightarrow x_1 = \dfrac{2}{5}$ y $x_2 = -1$

Ecuaciones incompletas

- Si $b = 0$ despejamos directamente x^2
  Ejemplo: $3x^2 - 48 = 0 \rightarrow 3x^2 = 48 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} \rightarrow x = \pm 4$
- Si $c = 0$ factorizamos sacando factor común.
  Ejemplo: $2x^2 - x = 0 \rightarrow x(2x - 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0$ y $2x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = \dfrac{1}{2}$

Pasos para resolver una ecuación de segundo grado

.

1. Quitar los denominadores, si los hay.
2. Quitar paréntesis, si los hay.
3. Reducir a la forma $ax + bx + c = 0$
4. Resolver con la fórmula o con el resto de recursos que conoces.

Otros tipos de ecuaciones

Ecuaciones factorizadas

Aparece como producto de factores y para que el producto sea cero es necesario que uno de los factores sea cero.

Ejemplo: $x(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

- $x_1 = 0$
- $x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = 1$
- $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x_3 = 2$ y $x_4 = 3$
  La ecuación tiene 4 soluciones.

Ecuaciones con x en el denominador

Habrá que suprimir los denominadores.

Ejemplo: $\dfrac{8}{x} - 3 = \dfrac{5}{x+3}$

- Para suprimir los denominadores, haciendo el mínimo común múltiplo.

  $8 \cdot (x+3) - 3 \cdot x \cdot (x+3) = 5x$

  $-3x^2 - 6x + 24 = 0$

  $x^2 + 2x - 8 = 0$

  $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \dfrac{-2 \pm 6}{2} \to x_1 = 2$ y $x_2 = -4$

- Es necesario comprobar las soluciones.

  $\dfrac{8}{2} - 3 = \dfrac{5}{2+3}$

  $\dfrac{8}{-4} - 3 = \dfrac{5}{-4+3}$

  Por lo tanto, tiene dos soluciones.

Ecuaciones con radicales

Resolvamos la ecuación: $\sqrt{x^2+5} + 1 = 2x$

1. Aislamos el radical en un miembro, pasando al otro lado lo demás.

   $\sqrt{x^2+5} = 2x - 1$

2. Elevamos al cuadrado los dos miembros.

   $(\sqrt{x^2+5})^2 = (2x-1)^2$

   $x^2 + 5 = 4x^2 - 4x + 1$

3. Reducimos la ecuación a la forma general y la resolvemos.

   $3x^2 - 4x - 4 = 0$

   $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \dfrac{4 \pm 8}{6} \to x_1 = 2$ y $x_2 = -2/3$

4. Será necesario comprobar las soluciones, ya que, al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones que en realidad no son.

   $\sqrt{2^2+5} + 1 = 2 \cdot 2$

   $\sqrt{(-2/3)^2+5} + 1 \neq 2(-2/3)$

   En este casa x=2 es solución, pero $x = \dfrac{-2}{3}$ no lo es.

Ejercicios

1. Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado

   (a) $5x - 4(2x + 3) = 5(x - 1) - 8x$ (no tiene solución)

   (b) $7 + 6(3x - 2) = 15x - (5 - 3x)$ (da igual el valor de x)

   (c) $\dfrac{3 - x}{2} - \dfrac{2(x - 2)}{3} = 4 - \dfrac{7(2x - 1)}{9}$

2. El sueldo de un cajero del supermercado, aumentado en su tercera parte y 80€, se iguala con el de su encargada, que gana 1700€ ¿Cuánto gana el cajero? (1215€)

3. Una porción de pizza cuesta 40 céntimos más que un bote de refresco. Por tres botes de refresco y cuatro porciones de pizza, hemos pagado 10€. ¿Cuánto cuesta cada bote y cuánto cada porción? (refresco 1.20€ y pizza 1.60€)

4. Entre mi hermano y yo tenemos ahorrados 248€, y si yo le diera 13 ambos tendríamos lo mismo. ¿Cuánto tenemos cada uno?

5. Una bodega tiene dos tipos de vino, uno de calidad superior, a 5€/L, y otro de calidad inferior, a 3.60€/L ¿Cuántos litros del primero debe añadir a un barril que contiene 100 litros del segundo, para que la mezcla resulte a 4€/L?

6. Una camisa y una falda costaban lo mismo antes de las rebajas. Ahora he comprado ambas prendas por 99€, con una rebaja del 20% en la camisa y 15% en la falda. ¿Cuánto costaba cada prenda antes de la rebaja?

7. Multiplicando la edad de Laura por la que tenía el año pasado, obtenemos 240. ¿Cuantos años tiene Laura? (16 años)

8. Una escalera está apoyada en la pared, alcanzando una altura igual a 2.4 veces la separación entre su apoyo inferior y la pared, y 20 cm menor que la propia longitud de la escalera. ¿Cuánto mide la escalera? (2.60m)

9. Una finca rectangular con una superficie de $28hm^2$ está rodeada por una valla de 22hm de longitud. ¿Cuáles son las dimensiones de la finca? (7hm y 4hm)

10. Un inversor deposita en el banco 10.000€ a un cierto porcentaje. Al cabo de un año, añade 20.000€ y mantiene todo el capital al mismo porcentaje. Al finalizar el segundo año le devuelven 32.025€. ¿A qué porcentaje impuso su capital? (5%)

11. Ecuaciones:

    (a) $x(x-1)(x^2-5x+6)=0$ (x= 0,1,2,3)

(b) $\dfrac{8}{x} - 3 = \dfrac{5}{x+3}$ (x=2,-4)

(c) $\sqrt{x^2+5} + 1 = 2x$ (x=2)

(d) $9(2-3x) + \dfrac{4}{5}(x-3) = 4x - \dfrac{7-3x}{5}$ (x=85/154)

(e) $6 - (8 - 4(3x - \dfrac{3}{7})) = 2x - \dfrac{5-9x}{7}$ (x=21/61)

(f) $\dfrac{1-2x^2}{3x} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{4x-2}{15}$ (x=0.47 o x=-0.75)

12. Comprueba que la solución de $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = \frac{1}{6}$ es x=6

13. Resuelve las ecuaciones de segundo grado incompletas.

(a) $^2 + 6x = 0$ (x=0 y x=-6)

(b) $3x^2 + 18x = 0$ (x=0 y x=-6)

(c) $5x^2 - 180 = 0$ (x=6, x=-6)

(d) $5x^2 - 10x = 0$ (x=0, x=2)

14. Resuelve las ecuaciones.

(a) $x(x^2 - 64) = 0$

(b) $(x + 1)(x^2 - 4) = 0$

(c) $(2x+1)(x^2+5x-24)=0$

(d) $(x-4)(\frac{4}{3x-1}-2)=0$

15. Elimina los denominadores y resuelve.

(a) $\frac{12}{x}+1=x+2$

(b) $\frac{7}{x}-2=x+\frac{4}{x}$

(c) $\frac{5}{x^2+1}+1=\frac{10}{x^2+1}$

(d) $\dfrac{2}{3x-1} + x = \dfrac{x+3}{3x-1}$

(e) $\dfrac{5}{x-3} - 1 = x$

(f) $\dfrac{8}{x} - 3 = \dfrac{5}{x+3}$

(g) $\dfrac{15}{x-1} = \dfrac{12}{x} + 1$

(h) $\dfrac{7}{x+2} + 2 = \dfrac{9}{x-2}$

16. Resuelve las ecuaciones con radicales.

(a) $\sqrt{x} - 3 = 0$

(b) $\sqrt{x} + 2 = x$

(c) $\sqrt{4x + 5} = x + 2$

(d) $\sqrt{x + 1} - 3 = x - 8$

(e) $3\sqrt{x - 1} = 2x - 11$

(f) $x = \sqrt{2x^2 - 1}$

(g) $\sqrt{2x^2 - 2} = 1 - x$

(h) $\sqrt{3x^2 + 4} = \sqrt{5x + 6}$

17. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es 30cm y que su base es doble que su altura. (altura 5cm y base 10 cm)

18. Con motivo de la jubilación de un empleado, varios compañeros deciden regalarle, como recuerdo, un reloj que cuesta 240€. Al conocer la idea se apuntan otros cuatro más y, así tocan todos a 10€ menos. ¿Cuántos participan finalmente en la compra de regalo?

19. Para salvar el desnivel de un metro, se ha construido una rampa que es 10cm más larga que su proyección horizontal. ¿Cuál es la longitud de la rampa?

20. Una comerciante de un mercadillo ha obtenido 240€ por la venta de cierta cantidad de camisas. Habría obtenido lo mismo vendiendo 6 unidades menos, pero dos euros más caras. ¿Cuántas camisas ha vendido?

Videos

- Común denominador de fracciones: https://www.youtube.com/watch?v=x2pARYoIXCU
-