Линейный квадратичный регулятор

Конспект выполнили Наумов Никита, Веденеева Элина Б03-831

28 октября 2021 г.

1 Линейно-квадратичный регулятор

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(0) = x^0$$

Целевой функционал $J = \int\limits_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \to min$

Если система нелинейная, линеаризуем $\dot{x} = f(x, u, t)$

$$f(x,u) = f(x^0, u^0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^0} (x - x^0) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u=u^0} (u - u^0) + ...$$

$$A(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x^0} \qquad B(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u=u^0} (u - u^0)$$

Решив алгебраическое уравнение Риккати с A(x(t)) и B(x(t)), найдем

$$u = -kx$$

2 State-Dependent Riccati Equation (SDRE)

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t \qquad J = \sum_{\tau=0}^{N-1} (x_\tau^T Q x_\tau + u_\tau^T Q u_\tau) + x_N^T Q_f x_N$$

x_0 - дано,
$u_0, u_1, u_2, ..u_{N-1}$ - N управлений,
N - горизонт (число шагов)
Q, R, Q_f - положительно определенные матрицы.

3 Динамическое программирование Уравнение Беллмана

V - опорная функция (value-function)

$$V(z) = \min_{u_t, u_{t+1}, ..u_{t+N-1}} \sum_{\tau=t}^{t+N-1} (x_\tau^T Q x_\tau + u_\tau^T Q u_\tau) + x_{t+N}^T Q_f x_{t+N}$$

$$\begin{cases} x_t = z \\ x_{\tau+1} = Ax_\tau + Bu_\tau \\ \tau = t, t+1, .., t+N \end{cases}$$

На последнем шаге $V(z) = x_{t+N}^T Q_f x_{t+N}$
Зная $V_{\tau+1}(z)$ можно найти $V_\tau(z)$:

$$V_\tau(z) = \min(x_\tau^T Q x_\tau + u_\tau^T Q u_\tau) + x_{t+N}^T Q_f x_{t+N} \Rightarrow u_\tau \Rightarrow V_\tau$$

4 iLQR - итерационный линейно-квадратичный регулятор

$$\dot{x} = f(x,u) \qquad\qquad J = \int\limits_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt \to 0$$

1. Линеаризация f: $f(x,u) = f(x^0,u^0) + \frac{\partial f(x)}{\partial x}(x - x^0) + ...$
2. Выбрать управление
3. На обратном проходе от N к $\tau = T$ строим оптимальное управление u^*
4. Повторяем шаги 2 и 3 до сходимости траектории к X