Fizyka Fazy Skondensowanej

Spis treści

1 Zestaw:

1.1 Pierwszy

1.1.1

1. Sieć krystaliczna, węzły sieci, proste sieciowe, płaszczyzny sieciowe, wskaźniki Millera (hkl), Komórka elementarna i typy układów krystalograficznych

2. Operacje symetrii, grupy punktowe.

3. Sieć prosta a sieć odwrotna. Objętości komórki elementarnej w sieci odwrotnej. Odległości międzypłaszczyznowe. Strefy Brillouina.

Rozwiązanie:

1.1.2

Obliczyć objętość komórki elementarnej dla układu regularnego, romboedrycznego, heksagonalnego, jednoskośnego.

Rozwiązanie:

1.1.3

Wykaż, że:

1. dla prostej sieci regularnej o stałej sieciowej a, odległość międzypłaszczyznowa

$$d_{hkl}^2 = \frac{a^2}{h^2 + k^2 + l^2}$$

2. obliczyć $\frac{1}{d_{hkl}^2}$ dla układu heksagonalnego oraz rombowego

Rozwiązanie:

1.1.4

Struktura diamentu zawiera dwa identyczne atomy w położeniach 000 i $\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}$ związane z każdym węzłem sieci powierzchniowo centrowanej *(fcc)*. Obliczyć czynnik strukturalny dla tej struktury. Pokaż, że dozwolone odbicia spełniają warunek $h + k + l = 4n$, gdzie wszystkie wskaźniki są parzyste, a n jest dowolna liczbą całkowitą, albo wszystkie składniki są nieparzyste.

Rozwiązanie:

1.2 Drugi

1.2.1

Energia oddziaływania między dwoma atomami w cząsteczce opisywana jest wzorem:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^n} + \frac{\beta}{r^m}$$

Pokazać, że $m > n$.

Rozwiązanie:

1.2.2

Rozważ liniowy układ $2N$ jonów o ładunku równym na przemian $\pm q$. Załóż, że energia potencjalna odpychania między najbliższymi sąsiadami ma postać $\frac{A}{R^n}$.

1. Pokaż, że dla odległości między jonami odpowiadającej stanowi równowagi

$$U(R_0) = -\frac{2Nq^2 \ln(2)}{R_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

2. Załóżmy, że kryształ został ściśnięty tak, że $R_0 \to R_0(1-\delta)$. Pokaż, że w wyrażeniu na pracę związaną ze ściśnięciem kryształu największy wkład opisuje człon $\frac{C\delta^2}{2}$ gdzie:

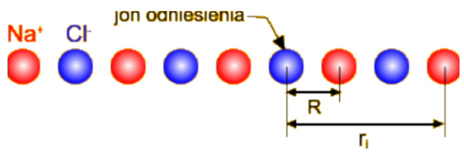
$$C = \frac{(n-1)q^2 \ln(2)}{R_0}$$

Rozwiązanie:

1.2.3

Obliczyć stałą Madelunga dla kryształu $NaCl$:

1. przypadek jednowymiarowy (nić krystaliczna $NaCl$)



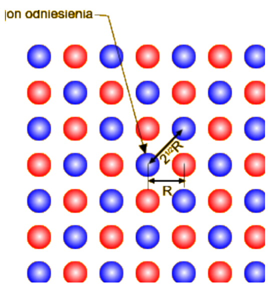
2. przypadek dwuwymiarowy (siatka płaska $NaCl$)

Rozwiązanie:

1.2.4

Obliczyć jakie ciśnienie należy przyłożyć do kryształu jonowego, aby odległość między jonami zmniejszyła się o 1 procent.

Rozwiązanie:


jon odniesienia
2^{1/2}R
R

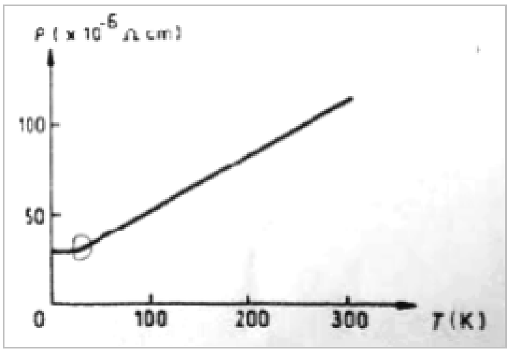
1.3 Trzeci

1.3.1

Poniższy rysunek przedstawia temperaturową zależność oporu elektrycznego. Określ, czy jest to zależność dla metali czy izolatorów. Opisz proces fizyczny, który opisuje tą zależność w zakresie temperatur: a) blisko 0 K, b) około 25 K, c) około 300 K. Oszacuj średnią drogę swobodną i czas w $T = 0$K i $T = 300$K. Przydatne stałe: $n = 10^{23} cm^{-3}$, $m = 10^{27}$kg, $v_f = 108 \frac{cm}{s}$, $e = 4.8 \cdot 10^{10}$esu ($e = 1,6^{19}C$), $1(\Omega cm)^2 = 9 \cdot 10^{11}$esu.

Rozwiązanie:

1.3.2



Rozwiązanie:

1.3.3

Rozpatrzyć falę podłużną $u_s = u(0)\cos(\omega t - sKa)$, która rozchodzi się w jednoatomowej sieci liniowej składającej się z atomów o masach M odległych od siebie o a; stała siłowa oddziaływania między najbliższymi sąsiadami wynosi C.

- Wykazać, że całkowita energia fali wynosi:

$$E = \frac{1}{2} M \sum_s \left(\frac{du_s}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} C \sum_s (u_s - u_{s+1})^2$$

- Podstawiając wyrażenie na u_s do powyższego wzoru wykaż, że uśredniona w czasie energia całkowita przypadająca na jeden atom wynosi:

$$\frac{1}{4} M\omega^2 u^2(0) + \frac{1}{2} C(1 - cos(Ka))u^2(0) = \frac{1}{2} M\omega^2 u^2(0)$$

Rozwiązanie:

podpunkt a

fala podłużna:

$$U_s = Ucos(\omega - ska) \tag{1}$$

a-odległość pomiędzy atomami, ω-częstotliwość, s-pozycja atomu, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

prędkość:

$$v = \frac{dU_s}{dt} = \frac{d}{dt}(Ucos(\omega t - ska) \tag{2}$$

energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M(\frac{dU_s}{dt})^2 \tag{3}$$

całkowita energia kinetyczna fali- suma energi poszczególnych atomów:

$$E_k = \sum \frac{1}{2}M(\frac{dU_s}{dt})^2 \tag{4}$$

energia potencjalna:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 -> \frac{1}{2}C(U_s - U_{s+1})^2 \tag{5}$$

c-stała siłowa

całkowita energia potencjalna:

$$E_p = \sum \frac{1}{2}kx^2 -> \frac{1}{2}C(U_s - U_{s+1})^2 \tag{6}$$

całkowita energia:

$$E = \frac{1}{2}\sum M(\frac{dU_s}{dt})^2 + \frac{1}{2}C\sum(U_s - U_{s+1})^2 \tag{7}$$

podpunkt b

$U_s = Ucos(\omega t - ska)$
$U_{s+1} = Ucos(\omega t - (s+1)ka)$

korzystamy z zależności $cos(\alpha-\beta)=cos\alpha cos\beta+sin\alpha sin\beta$

$U_{s+1}=U[cos(\omega t-ska-ka]=U[cos(\omega t-ska)cos(ka)+sin(\omega t-ska)sin(ka)]$

$U_s-U_{s+1}=Ucos(\omega t-ska)-U[cos(\omega t-ska-ka]=U[cos(\omega t-ska)cos(ka)+sin(\omega t-ska)sin(ka)]$

$=Ucos(\omega t-ska)[1-cos(ka)]+sin(\omega t-ska)sin(ka)]$

$E=\frac{1}{2}M(\frac{d}{dt}Ucos(\omega t-ska)^2+\frac{1}{2}C[Ucos(\omega t-ska)[1-cos(ka)]+sin(\omega t-ska)sin(ka)]^2$

$=\frac{1}{2}M[-U\omega sin(\omega t-ska]^2+\frac{1}{2}C[Ucos(\omega t-ska)[1-cos(ka)]+sin(\omega t-ska)sin(ka)]^2$

podstawiamy:

$\omega t-ska->A$
$ka->B$

$E=\frac{1}{2}M[-u\omega sinA]^2+\frac{1}{2}CU^2[cosA(1-cosB)+sinAsinB]^2$

$=\frac{1}{2}M\omega^2U^2sin^2A+\frac{1}{2}CU^2[cos^2A(1-cosB)^2+sin^2Asin^2B+2cosA(1-cosB)sinAsinB$

$=\frac{1}{2}M\omega^2U^2sin^2A+\frac{1}{2}CU^2[cos^2A(1-2cosB+cos^2B)+sin^2AB+2cosA(1-cosB)sinAsinB$

$=\frac{1}{2}M\omega^2U^2sin^2A+\frac{1}{2}CU^2[cos^2A-2cos^2AcosB+cos^2Acos^B+sin^2Asin^2B+2cosA(1-cosB)sinAsinB$

$<cos^2>=\frac{1}{2}$
$<sin^2>=\frac{1}{2}$
$<sincos>=0$

$E=\frac{1}{2}M\omega^2U^2\frac{1}{2}+\frac{1}{2}CU^2[\frac{1}{2}-cosB+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+2*0*sinB-2*0*0]$

$=\frac{1}{4}M\omega^2U^2+\frac{1}{2}CU^2[\frac{1}{2}-cosB+\frac{1}{2}]=\frac{1}{4}M\omega^2U^2+\frac{1}{2}[1-cosB]$

B->ka

$E=\frac{1}{4}M\omega^2U^2+\frac{1}{2}CU^2(1-cos(ka)$

relacja dyspersyjna:

$\omega^2=\frac{2C}{M}(1-cos(ka))$

$\frac{M\omega^2}{2C}=(1-cos(ka))$

$E = \frac{1}{4}M\omega^2U^2 + \frac{1}{4}U^2\frac{M\omega^2}{2}$

$E = \frac{1}{2}M\omega^2U^2$

1.3.4

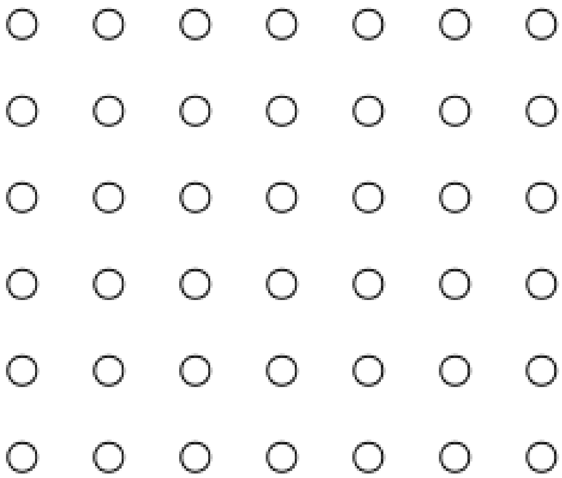
Wyznaczyć podłużny fonon akustyczny oraz widmo optyczne dla sieci liniowej o stałej a zawierającej w komórce dwa jednakowe atomy o masach M, których odległość w położeniu równowagi wynosi $\delta < \frac{1}{a}$.

Rozwiązanie:

Rozwiązanie:

1.3.5

Dana jest sieć:



- Wykazać. że

$$M\frac{d^2u_{lm}}{dt^2} = C\Big((u_{l+1,m} - ul - 1, m - 2u_{lm}) + (u_{l,m+1} - u_{l,m-1} - 2u_{lm})\Big)$$

- Przyjąć: $u_{lm} = u(0)\exp\Big(i(lK_xa + mK_ya - \omega t)\Big)$ i wykazać, że:

$$\omega^2M = 2C(2 - \cos(K_xa) - \cos(K_ya))$$

- Wykazać, że przedział wartości wektora K, dla których istnieją niezależne rozwiązania można przyjąć kwadrat o baku $\frac{2\pi}{a}$

- Dla $Ka << 1$ wykazać, że:

$$\omega = \left(\frac{Ca^2}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\left(K_x^2 + K_y^2\right) = \left(\frac{Ca^2}{M}\right)K$$

Rozwiązanie:

1.4 Czwarty

1.4.1

Wyprowadzić wzory na funkcję gęstości stanów dla łańcucha jednoatomowego zakładając, że $\omega = \upsilon \cdot k$. Określić częstotliwość Debye'a.

Rozwiązanie:

funkcja gęstości stanów D(ω) jest to liczba modów różnych dragań przypadająca na jednostkowy zakres częstotliwości.

przemieszczenia atomu w drganiach podłuznych i poprzecznych określa zależność:

$U_s\ sin(sKa)$

dobieramy tak wartości K żeby atomy na końcu i początku łańcucha były unieruchomione.
wartości wektora falowego, które są dozwolone:

K= +/-$\frac{2\pi}{L}$, $\frac{4\pi}{L}$, ...
Gęstość stanów opisuje wzór:

$$D(\omega) = \frac{dN}{d\omega} \tag{8}$$

gdzie N to całkowita liczba modów drgań o wartości wektora falowego mniejszego od k.

$K = \frac{N\pi}{L}$

$N = \frac{KL}{N}$

$D(\omega) = \frac{d}{d\omega}\frac{KL}{\pi} = \frac{L}{\pi}\frac{dK}{d\omega} = \frac{L}{\pi V} = \frac{L\omega}{\pi K}$

gdzie $\frac{dK}{d\omega}$ - prędkość grupowa, $k = \frac{\omega}{v}$

częstotliwość Debaya jest to teoretyczna najwyższa możliwa częstotliwość drgań atmów wsieci krystalicznej.

$N = \frac{KL}{\pi} = \frac{\omega L}{v\pi}$

$\omega_D = \frac{Nv\pi}{L}$

1.4.2

Wyprowadzić wzory na funkcję gęstości stanów dla sieci kwadratowej zakładając, że $\omega = v \cdot k$. Określić częstotliwość Debye'a.

Rozwiązanie:

Jedna dozwolona wartość wektora K przypada na element płaszczyzny o powierzchni:

$P = (\frac{2\pi}{L})^2$

zatem wewnątrz koła (rys 6. str 141 Kittel) o powierzchni:

$P = \pi K^2$

liczba drgań na jednostkowy przedział k wynosi:

$$N = \pi K^2 (\frac{L}{2\pi})^2 \tag{9}$$

$$D(\omega) = \frac{d}{d\omega}\pi K^2 (\frac{L}{2\pi})^2 = \frac{d}{d\omega}\frac{k^2 L^2}{4\pi} = \frac{L^2 K}{2\pi}\frac{dK}{d\omega} = \frac{L^2}{2\pi}kv = \frac{L^2\omega}{2\pi v^2} \tag{10}$$

częstotliwość Debaya:

$$N = \frac{k^2 L^2}{4\pi} = \frac{\omega^2 L^2}{4\pi v^2} \tag{11}$$

$$\omega_D = (\frac{4\pi N v^2}{L^2})^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

1.4.3

Korzystając z wyników zadań **??** i **??** wyprowadzić wzory na molowe ciepło właściwe.

Rozwiązanie:

1.4.4

Znaleźć zależność poziomu Fermiego w temperaturze zera bezwzględnego od gęstości elektronowej n:

$$E_F(T=0) = \frac{\hbar^2}{2m}(3n\pi)^{\frac{2}{3}}$$

oraz zależność średniej energii na elektron od energii Fermiego.

$$\overline{E}(T=0) = \frac{3}{5}E_F$$

Rozwiązanie:

1.4.5

Wyprowadzić wzór na funkcję gęstości stanów elektronów swobodnych w przypadku jednowymiarowym.

Rozwiązanie:

1.4.6

Wyprowadzić wzór na funkcję gęstości stanów $g(E)$ gazu elektronowego dla sieci kwadratowej.

Rozwiązanie:

1.4.7

Korzystając z wyników zadania **??** wyprowadzić wzór na molowe ciepło właściwe gazu Fermiego w przypadku jednowymiarowym.

Rozwiązanie:

Spis rysunków

Kod źródłowy