

## Основные понятия теории Марковских процессов.

Функция  $X(t)$  называется случайной, если ее значение при любом аргументе  $t$  является случайной.

Случайная функция  $X(t)$ , аргументом которой является время, называется случайным процессом.

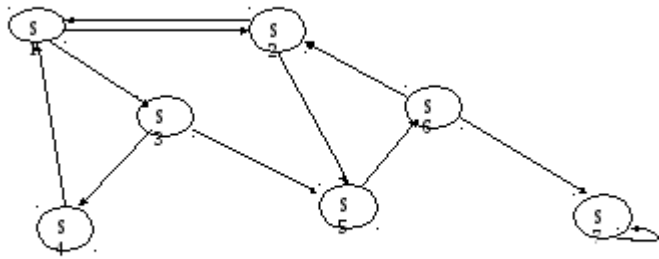
Марковские процессы являются частным видом случайных процессов. Особое место Марковских процессов среди других классов случайных процессов обусловлено следующими обстоятельствами: для Марковских процессов хорошо разработан математический аппарат, позволяющий решать многие практические задачи; с помощью Марковских процессов можно описать поведение достаточно сложных систем.

**Определение.** Случайный процесс, протекающий в какой либо системе  $S$ , называется Марковским, если он обладает следующим свойством: для любого момента времени  $t_0$  вероятность любого состояния системы в будущем (при  $t > t_0$ ) и не зависит от того, когда и каким образом система  $S$  пришла в это состояние.

Классификация Марковских процессов. Классификация Марковских случайных процессов производится в зависимости от непрерывности и дискретности множества значений функций  $X(t)$  и параметра  $t$ . Различают следующие основные виды Марковских случайных процессов:

- с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова);
- с непрерывными состояниями и дискретным временем (марковские последовательности);
- с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывная цепь Маркова);

- с непрерывным состоянием и непрерывным временем.



Граф состояний.

Марковские процессы с дискретными состояниями удобно иллюстрировать с помощью так называемого графа состояний, где кружками обозначены

состояния  $S_1, S_2, \dots, S_n$  системы  $S$ , а стрелками - возможные переходы из состояния в состояние. На графе отмечаются только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния. Возможные задержки в прежнем состоянии изображают «петлей», т.е. стрелкой, направленной из данного состояния в него же. Число состояний системы может быть как конечным, так и бесконечным (но счетным).

Рисунок 1 - Граф состояния системы  $S$ .

### Марковские цепи

Марковский случайные процесс с дискретными состояниями и дискретным временем называют *Марковской цепью*. Для такого процесса моменты  $t_1, t_2, \dots$ , когда система  $S$  может менять свое состояние, рассматривают как последовательные шаги процесса, а в качестве аргумента, от которого зависит процесс, выступает не время  $t$ , номер шага  $1, 2, \dots, k, \dots$ . Случайный процесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний  $S(0), S(1), S(2), \dots, S(k), \dots$ , где  $S(0)$ - начальное состояние системы (перед первым шагом);  $S(1)$ - состояние системы после первого шага;  $S(k)$ - состояние системы после  $k$ -го шага...

Событие  $\{S(k)=S_i\}$ , состояние в том, что сразу после  $k$ -го шага система находится в состоянии  $S_i (i=1, 2, \dots)$ , является случайным событием.

Последовательность состояний  $S(0), S(1), S(2), \dots, S(k), \dots$  можно рассматривать как последовательность случайных событий. Такая случайная последовательность событий называется Марковской цепью, если для каждого шага вероятность перехода из любого состояния  $S_i$  в любое  $S_j$  не зависит от того, когда и как система пришла в состояние  $S_i$ . Начальное состояние  $S(0)$  может быть заданием заранее или случайным.

Вероятностями состояний цепи Маркова называются вероятности  $P_j(k)$  того, что после  $k$ -го шага (и до  $(k+1)$ -го) система  $S$  будет находиться в состоянии  $S_i (i=1, 2, \dots, n)$ . Очевидно, для любого  $k$

$$\sum_{i=1}^n P_i(k) = 1$$

Начальным распределением вероятностей Марковской цепи называется распределение вероятностей состояний в начале процесса:

$$P_1(0), P_2(0), \dots, P_i(0), \dots, P_n(0).$$

В частном случае, если первоначальное состояние системы  $S$  в точности известно  $S(0) = S_i$ , то начальная вероятность  $P_i(0) = 1$ , а все остальные равны нулю. Вероятность перехода на  $k$ -м шаге из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  при условии, что непосредственно перед этим она находится в состоянии  $S_i$ . Поскольку система может пребывать в одном из  $n$  состояний, то для каждого момента времени  $t$  необходимо задать  $n^2$  вероятностей перехода  $P_{ij}$ , которое удобно представить в виде следующей матрицы:

$$\| P_{ij} \| = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

где  $P_{ij}$ - вероятность перехода за один шаг из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$ ,  
 $P_{ii}$ - вероятность задержки системы в состоянии  $S_i$  .

Матрица называется переходной или матрицей переходных вероятностей. Если переходные вероятности не зависят от номера шага, а зависят только от того, из какого состояния в какое осуществляется переход, то соответствующая цепь Маркова называется однородной. Переходные вероятности однородной Марковской цепи  $P_{ij}$  образуют квадратную матрицу размера  $n \times n$ . Отметим некоторые ее особенности:

1. Каждая строка характеризует выбранное состояние системы, а ее элементы представляют собой вероятности всех возможных переходов за один шаг из выбранного состояния, в том числе и переход в самое себя.

2. Элементы столбцов показывают вероятности всех возможных переходов системы за один шаг в заданное состояние (иначе говоря, строка характеризует вероятность перехода системы из состояния, столбец - в состояние).

3. Сумма вероятностей каждой строки равна единице, так как переходы образуют полную группу несовместных событий:

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1, i = \overline{1, n}$$

4. По главной диагонали матрицы переходных вероятностей стоят вероятности  $P_{ii}$  того, что система не выйдет из состояния  $S_i$ , а останется в нем.

Если для однородной Марковской цепи заданы начальное распределение вероятностей и матрица перехода вероятностей  $\|P_{ij}\|$  , то вероятности состояний системы  $P_i(k)$  ( $i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}$  ).

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^n P_j(k-1) * P_{ij}, (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}).$$

## Метод имитационного моделирования

Метод Монте-Карло как разновидность имитационного моделирования. Датой рождения метода Монте-Карло принято считать 1949 г., когда появилась статья под названием «The Monte Carlo method». Создателями этого метода считают американских математиков Дж. Неймана и С. Улама. В СССР первые статьи о методе Монте-Карло были опубликованы в 1955—1956 гг.

Любопытно, что теоретическая основа метода была известна давно. Более того, некоторые задачи статистики рассчитывались иногда с помощью случайных выборок, т. е. фактически методом Монте-Карло. Однако до появления электронных вычислительных машин (ЭВМ) этот метод не мог найти сколько-нибудь широкого применения, ибо моделировать случайные величины вручную очень трудоемкая работа. Таким образом, возникновение метода Монте-Карло как весьма универсального численного метода стало возможным только благодаря появлению ЭВМ.

Само название «Монте-Карло» происходит от города Монте-Карло в княжестве Монако, знаменитого своим игорным домом.

Идея метода чрезвычайно проста и состоит она в следующем. Вместо того, чтобы описывать процесс с помощью аналитического аппарата (дифференциальных или алгебраических уравнений), производится «розыгрыш» случайного явления с помощью специально организованной процедуры, включающей в себя случайность и дающей случайный результат. В действительности конкретное осуществление случайного процесса складывается каждый раз по-иному; так же и в результате статистического моделирования мы получаем каждый раз новую, отличную от других реализацию исследуемого процесса. Что она может нам дать? Сама по себе ничего, так же как, скажем, один случай излечения больного с помощью какого-либо лекарства. Другое дело, если таких реализаций получено много. Это множество реализаций можно использовать как некий искусственно

полученный статистический материал, который может быть обработан обычными методами математической статистики. После такой обработки могут быть получены любые интересующие нас характеристики: вероятности событий, математические ожидания и дисперсии случайных величин и т. д. При моделировании случайных явлений методом Монте-Карло мы пользуемся самой случайностью как аппаратом исследования, заставляем ее «работать на нас».

Нередко такой прием оказывается проще, чем попытки построить аналитическую модель. Для сложных операций, в которых участвует большое число элементов (машин, людей, организаций, подсобных средств), в которых случайные факторы сложно переплетены, где процесс - явно немарковский, метод статистического моделирования, как правило, оказывается проще аналитического (а нередко бывает и единственно возможным).

В сущности, методом Монте-Карло может быть решена любая вероятностная задача, но оправданным он становится только тогда, когда процедура розыгрыша проще, а не сложнее аналитического расчета. Приведем пример, когда метод Монте-Карло возможен, но крайне неразумен. Пусть, например, по какой-то цели производится три независимых выстрела, из которых каждый попадает в цель с вероятностью  $1/2$ . Требуется найти вероятность хотя бы одного попадания. Элементарный расчет дает нам вероятность хотя бы одного попадания равной  $1 - (1/2)^3 = 7/8$ . Ту же задачу можно решить и «розыгрышем», статистическим моделированием. Вместо «трех выстрелов» будем бросать «три монеты», считая, скажем, герб—за попадание, решку — за «промах». Опыт считается «удачным», если хотя бы на одной из монет выпадет герб. Произведем очень-очень много опытов, подсчитаем общее количество «удач» и разделим на число  $N$  произведенных опытов. Таким образом, мы получим частоту события, а она при большом числе опытов близка к вероятности. Ну, что же? Применить такой прием мог

бы разве человек, вовсе не знающий теории вероятностей, тем не менее, в принципе, он возможен.

Метод Монте-Карло- это численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин.

### **Две особенности метода Монте-Карло.**

Первая особенность метода - простая структура вычислительного алгоритма.

Вторая особенность метода - погрешность вычислений, как правило, пропорциональна  $D/N^2$ , где  $D$  - некоторая постоянная,  $N$  - число испытаний. Отсюда видно, что для того, чтобы уменьшить погрешность в 10 раз (иначе говоря, чтобы получить в ответе еще один верный десятичный знак), нужно увеличить  $N$  (т. е. объем работы) в 100 раз.

Ясно, что добиться высокой точности таким путем невозможно. Поэтому обычно говорят, что метод Монте-Карло особенно эффективен при решении тех задач, в которых результат нужен с небольшой точностью (5-10%). Способ применения метода Монте-Карло по идее довольно прост. Чтобы получить искусственную случайную выборку из совокупности величин, описываемой некоторой функцией распределения вероятностей, следует:

1. Построить график или таблицу интегральной функции распределения на основе ряда чисел, отражающего исследуемый процесс (а не на основе ряда случайных чисел), причем значения случайной переменной процесса откладываются по оси абсцисс ( $x$ ), а значения вероятности (от 0 до 1) - по оси ординат ( $y$ ).

2. С помощью генератора случайных чисел выбрать случайное десятичное число в пределах от 0 до 1 (с требуемым числом разрядов).

3. Провести горизонтальную прямую от точки на оси ординат соответствующей выбранному случайному числу, до пересечения с кривой распределения вероятностей.

4. Опустить из этой точки пересечения перпендикуляр на ось абсцисс.

5. Записать полученное значение  $x$ . Далее оно принимается как выборочное значение.

б. Повторить шаги 2-5 для всех требуемых случайных переменных, следуя тому порядку, в котором они были записаны. Общий смысл легко понять с помощью простого примера: количество звонков на телефонную станцию в течение 1 минуты соответствует следующему распределению:

Кол - во звонков	Вероятность	Кумулятивная вероятность
------------------	-------------	--------------------------

0	0,10	0,10
---	------	------

1	0,40	0,50
---	------	------

2	0,30	0,80
---	------	------

3	0,15	0,95
---	------	------

4	0,05	1,00
---	------	------

Предположим, что мы хотим провести мысленный эксперимент для пяти периодов времени.

Построим график распределения кумулятивной вероятности. С помощью генератора случайных чисел получим пять чисел, каждое из которых используем для определения количества звонков в данном интервале времени.

Период времени	Случайное число	Количество звонков
----------------	-----------------	--------------------

1	0,09	0
---	------	---



2 0,54 2

3 0,42 1

4 0,86 3

5 0,23 1

Взяв еще несколько таких выборок, можно убедиться в том, что если используемые числа действительно распределены равномерно, то каждое из значений исследуемой величины будет появляться с такой же частотой, как ирреальном мире», и мы получим результаты, типичные для поведения исследуемой системы.

В задачах исследования операций метод Монте-Карло применяется в трех основных ролях:

1. при моделировании сложных, комплексных операций, где присутствует много взаимодействующих случайных факторов;
  2. при проверке применимости более простых, аналитических методов и выяснении условий их применимости;
- в целях выработки поправок к аналитическим формулам типа «эмпирических формул» в технике.

На основе проведенного в данной работе исследования сущности и содержания метода имитационного моделирования можем сделать ряд выводов:

Имитационная модель отражает временной, пространственный и логический аспекты исследуемого процесса, тогда как в других моделях, как правило, присутствует один из них.

Это сравнительно новый класс моделей, которые основаны на программировании.

Обладая замечательным инструментом — имитационным моделированием, можно решить задачи высокого уровня сложности.