

1. 目的

レーザ光源とスリットを用いて、光の干渉、回折現象を観察する。そしてその結果を理論値と比較することで、現象の理解を図る。また、数値計算ソフトウェア Octave を用いて様々なスリットにおける光の干渉、回折現象をシミュレーションする。

2. 実験原理

光の干渉、回折現象は、光の波動性によって生じる現象である。波において、2つ以上の波が一点で重なる時、その点での光の振幅は、個々の波が足し合わされた振幅になる現象が干渉である。ただし光が干渉するには、2つの波の波長が等しく、位相差が一定に保たれており、少なくともある時間は振幅一定の合成振動をする場合にのみ干渉するという特徴がある。それに対し、障害物等がある際に、波が直進せずにその障害物の幾何学的影の部分に回り込むような動きをする現象が回折である。

次に図 1 のような状況を考える。光源 Q からでた光で、半径1のところの光を $A = A_0 \sin \omega t$ とすると、光源から距離 a 離れた波面 E では、

$$A = \frac{A_0}{a} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} a \right) \quad (1)$$

となる。次に、PM 間の距離を r とすると、P から出た光の M における振幅は、

$$A = \frac{\alpha A_0}{r a} \sin \left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (a + r) \right] \quad (2)$$

ここで、 α は光の方向によって変わるが、ここでは、 $\alpha = 1$ とする。そして、干渉を考えた際の M における振幅は、

$$A(M) = \int_E \frac{A_0}{ar} \sin \left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (a + r) \right] de \quad (3)$$

となる。スリットの幅が小さいことを考えると、 $\frac{A_0}{ar} \simeq \frac{A_0}{ab}$ となる。また、振幅の比のみを今後考えるために、 $\frac{A_0}{a}b = 1$ とする。ここで、図 1 の状況を 2 次元として考える。P、M の座標をそれぞれ $(\xi, -b + \zeta)$ 、 $(x, 0)$ とすると、

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (b - \zeta)^2} \quad (4)$$

となり、波面 E 上の座標の式は、

$$\xi^2 + (a + \zeta)^2 = a^2 \quad (5)$$

とすると、最終的に r は、

$$r = \sqrt{x^2 + b^2 - 2(a + b)\zeta - 2x\xi} \quad (6)$$

となる。ここで、 ζ が十分小さいとき、(5)式より $\zeta = -\frac{\xi^2}{2a}$ となるため、これを踏まえて式(6) をテイラー展開すると、

$$r = b \left(1 + \frac{x^2}{2b^2} \right) - \left(\frac{x\xi}{b} - \frac{a+b}{2ab} \xi^2 \right) + \dots = \bar{\varepsilon} + \varepsilon(\xi) \quad (7)$$

となる。これを用いると、 $A(M)$ は、

$$\begin{aligned}
A(M) &= \int_E \sin \left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (a + \bar{\varepsilon} + \varepsilon(\xi)) \right] de \\
&= C \cdot \sin \left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (a + \bar{\varepsilon}) \right] + S \cdot \cos \left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (a + \bar{\varepsilon}) \right] \\
C &= \int_E \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{x\xi}{b} - \frac{a+b}{2ab} \xi^2 \right) de \\
S &= \int_E \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{x\xi}{b} - \frac{a+b}{2ab} \xi^2 \right) de
\end{aligned} \tag{8}$$

となり、光強度は $|A(M)|^2 = C^2 + S^2$ となる。次に、図 2 のような状況を考える。この場合は、E'面の積分を考えれば良い。P を E' 上にとった時、波面 E' の式は $\xi^2 + (b - \zeta)^2 = b^2$ となり、PM 間の距離を r' とすると、 $r' = \sqrt{(x - \xi)^2 + (b - \zeta)^2}$ となるため、

$$\begin{aligned}
a + r &= a + b + r - b = a + b + \sqrt{(x - \xi)^2 + (b - \zeta)^2} - b \\
&\simeq \left(a + b + \frac{x^2}{2b} \right) - \frac{x\xi}{b}
\end{aligned} \tag{9}$$

となる。 $\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{x\xi}{b} = kx\xi$ と置けるので、式(8) は、

$$\begin{aligned}
C &= \int_E \cos kx\xi de \\
S &= \int_E \sin kx\xi de \\
C + iS &= \int_E \exp(ikx\xi) de
\end{aligned} \tag{10}$$

となる。よって、式(10) と、 $|A(M)|^2 = C^2 + S^2$ より、回折像が開口部 S のフーリエ変換になることがわかる。

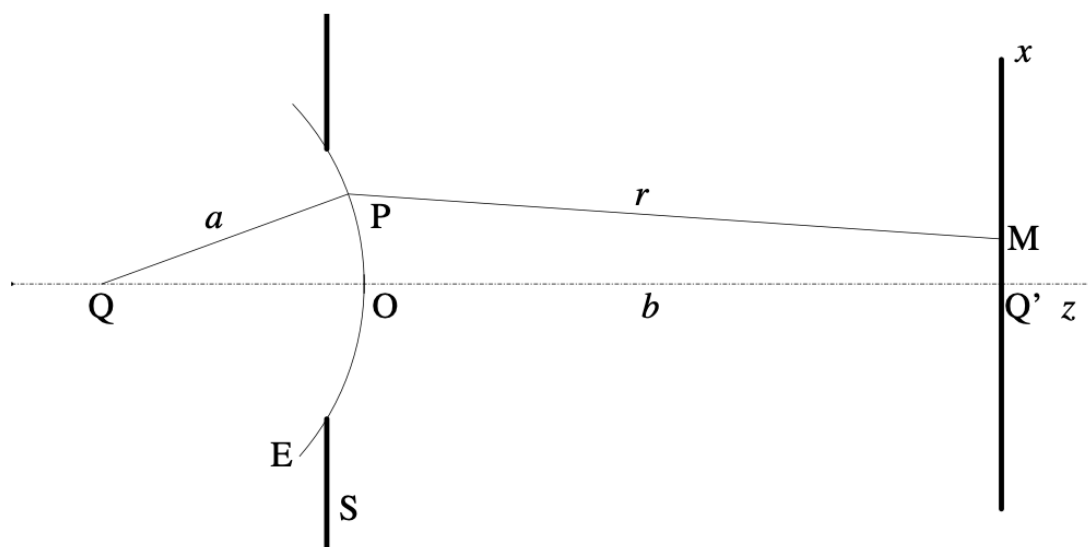


図 1: 光源 Q の回折像(参照: [1])

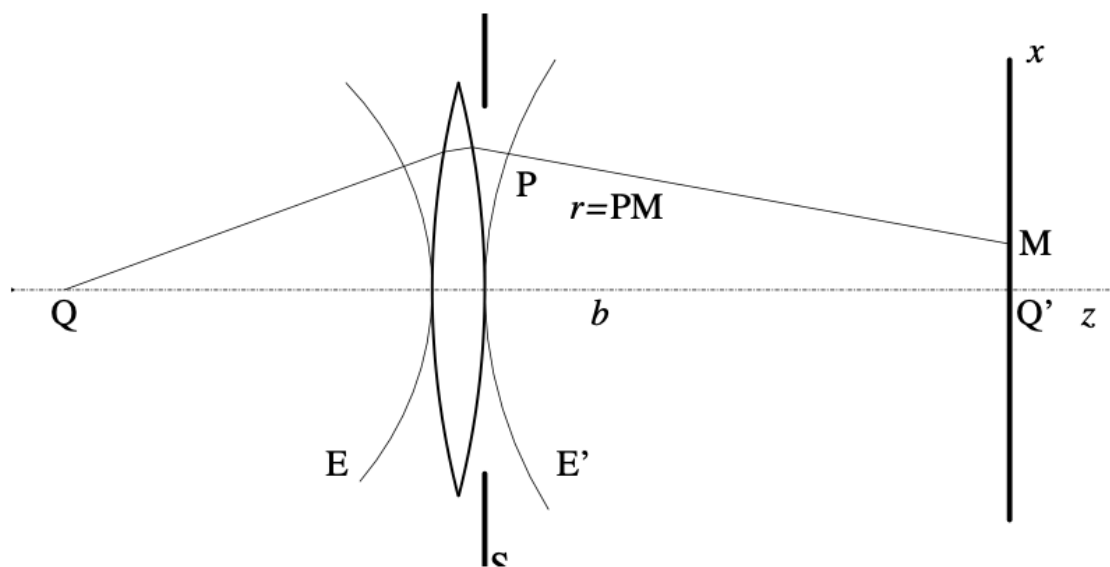


図 2: 光源 Q のフラウンホーファー回折像(参照: [1])

3. 実験方法

3.1. レーザ光による回折強度パターン

今回は、レーザ光を用いて、スリットの回折強度パターンを観察することを実際には行わず、与えられた実験データを ImageJ を用いて解析することで、スリットの幅や個数による回折強度パターンの変化を観察した。まず、与えられた実験データには、3種類の幅の単スリットを用いた時のスリット画像とスクリーン画像の計6枚、幅やスリット間隔を変えた3種類のダブルスリットを用いた時のスリット画像とスクリーンの計6枚である。まず、単スリットの場合は、ImageJを用いてスリットの幅を測定し、また、精密な目盛りを顕微鏡で撮影した画像を用いて、pixel 単位を m 単位に変換した。次に、ImageJ によってスクリーン画像の光強度のグラフを得た。光強度のグラフから、強度パターンの周期を測定し、理論値と比較を行った。また、ダブルスリットの場合も同様に、スリット間隔を測定し、スリット画像の光強度のグラフを得た。光強度のグラフから、強度パターンの周期を測定し、理論値と比較を行った。

ここで理論値の求め方について考える。単スリットの場合、スリットを表現する関数 $f(x)$ は、

$$f(x) = 1 \ (|x| < a), \ 0 \ \left(|x| > \frac{a}{2}\right) \quad (11)$$

と表し、 $f(x)$ の値を光の透過率とする。ここで、 a はスリットの幅である。次に、ダブルスリットの場合、スリットを表現する関数 $f(x)$ は、

$$f(x) = 1 \ (|x| < x_0 \pm a), \ 0 \ (\text{otherwise}) \quad (12)$$

と表せる。実験原理で述べたように、スクリーン上にはスリットのフーリエ変換が現れる。単スリットの場合のフーリエ変換は式(10)より、

$$\begin{aligned} F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx\xi} dx \\ &= \int_{-a}^a e^{-ikx\xi} dx \\ &= -\frac{1}{ik\xi} (e^{ika\xi} - e^{-ika\xi}) \\ &= 2a \cdot \text{sinc}(ak\xi) \\ &= 2a \cdot \text{sinc}\left(\frac{2\pi a}{\lambda b} \xi\right) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。ここで、 sinc 関数は、 $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ である。また、ダブルスリットの場合のフーリエ変換は、式(10)より、

$$\begin{aligned}
F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
&= \int_{-x_0-a}^{-x_0+a} e^{-ikx} dx + \int_{x_0-a}^{x_0+a} e^{-ikx} dx \\
&= 2a \cdot \text{sinc}(ak\xi) e^{-ikx_0\xi} + 2a \cdot \text{sinc}(ak\xi) e^{ikx_0\xi} \\
&= 4a \cdot \text{sinc}(ak\xi) \cos(kx_0\xi) \\
&= 4a \cdot \text{sinc}\left(\frac{2\pi a}{\lambda b} \xi\right) \cos\left(\frac{2\pi x_0}{\lambda b} \xi\right)
\end{aligned} \tag{14}$$

となる。よって、光強度の強度パターンの周期は、sinc 関数によるものは、 $\frac{\lambda b}{2a}$ 、cos 関数によるものは、 $\frac{\lambda b}{2x_0}$ である。これを用いて、実験データと理論値を比較した。

3.2. 回折強度パターンのシミュレーション

フリーの数値計算ソフトウェア レーザ光源とスリットを用いて、いくつかのスリットを作成して、光の回折強度パターン、スクリーンに映し出される回折像のシミュレーションを行った。まず、Octave上で単スリット（幅0.1）を作成し、その回折強度パターンを計算させ、回折強度を表すグラフと回折像を表示させた。次に、スリットの幅を0.2に変更し、同様に回折強度パターンを計算させ、回折強度を表すグラフと回折像を表示させた。また、ダブルスリットの場合は、幅0.1、2つのスリット間隔を0.8に設定し、同様に回折強度パターンを計算させ、回折強度を表すグラフと回折像を表示させた。また、スリット間隔を1.8に変更し、同様に回折強度パターンを計算させ、回折強度を表すグラフと回折像を表示させた。最後に、四角い形状のスリット、オリジナルのスリットを作成し、同様のシミュレーションを行った。

4. 実験結果

4.1. レーザー光による回折強度パターン

まず、ImageJを用いて与えられたスクリーン画像の光強度グラフを得た。得られた光強度グラフを図 3、図 4、図 5、図 6、図 7、図 8 に示す。まず、単スリットの場合、スリット幅が狭いほど、回折強度パターンの周期が狭くなることが確認でき、これは式(13)の sinc の位相成分から考えられる結果と一致している。また、ダブルスリットの場合、図 6 と図 7 を比較すると、スリット幅が広いほど、回折強度パターンの周期が狭くなることが確認でき、また、図 7 と図 8 を比較すると、スリット間隔が広いほど、小さい山の周期が狭くなることが確認できる。これらは、式(14)の sinc と cos の位相成分から考えられる結果と一致していることがわかる。

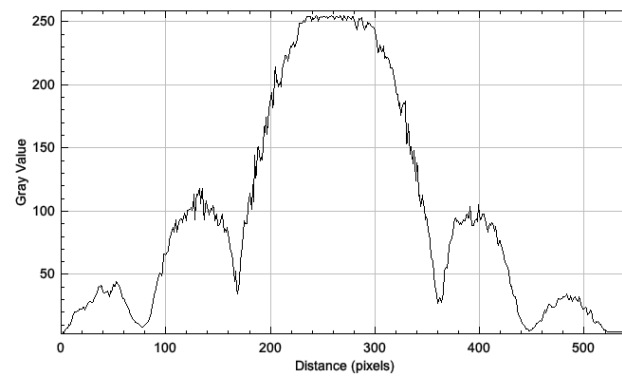


図 3: スリット幅が1番狭い単スリットの回折強度パターン

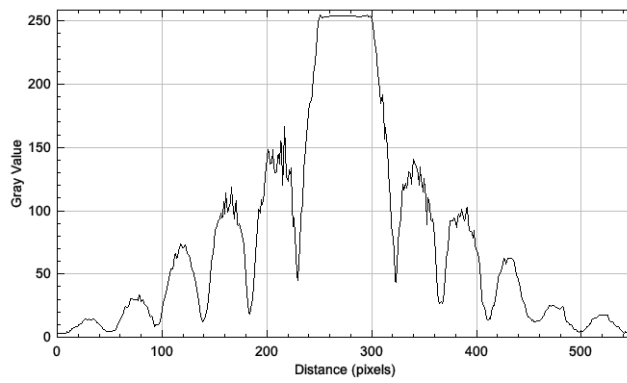


図 4: スリット幅が2番目に狭い単スリットの回折強度パターン

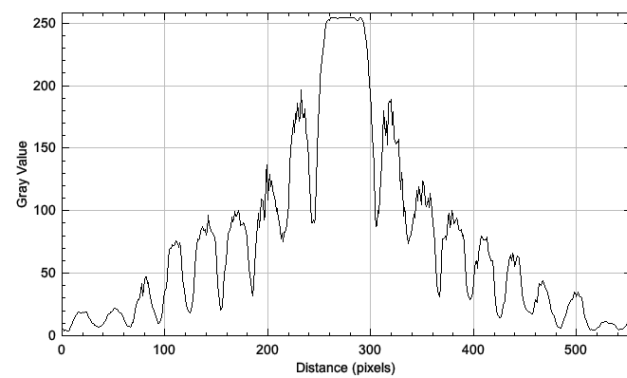


図 5: スリット幅が一番広い単スリットの回折強度パターン

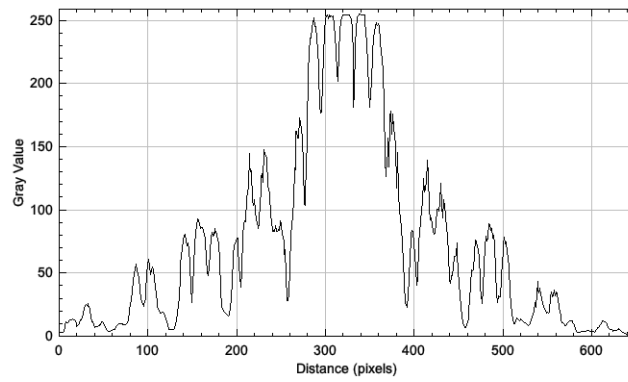


図 6: ダブルスリットの回折強度パターン

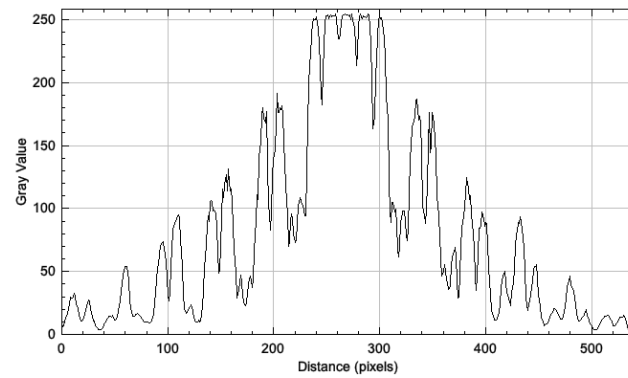


図 7: スリット幅が広いダブルスリットの回折強度パターン

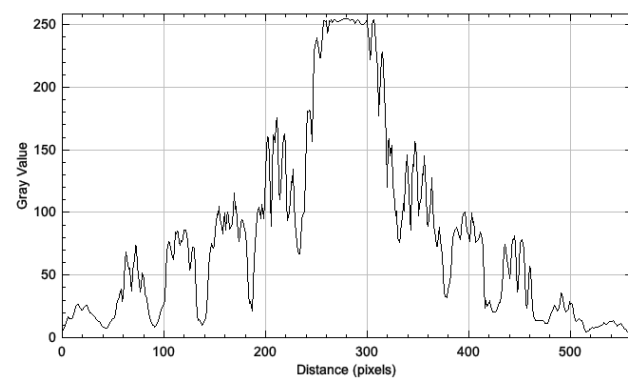


図 8: スリット幅が広く、スリット間隔が広いダブルスリットの回折強度パターン

そして、これらの図から、ImageJを用いて強度パターンの周期を測定し、理論値と比較した。まず、pixelをm単位に変換するための定規と目盛りの計測値、また用いた光の波長 λ 、開口とスクリーンの距離 b を表1に示す。

表 1: 実験に使用した定規と目盛りの計測値、光の波長、開口とスクリーンの距離

	定規 /pixel	定規 /cm	目盛り /pixel	目盛り /mm	λ /nm	b /cm
計測値	322.0	5.0	87.0	0.1	632.8	96.5

表 1 の定規を用いて強度パターンの周期を、目盛りを用いてスリットの幅、間隔をそれぞれ m 単位に直した。次に実験に使用されたスリット画像を ImageJ を用いて解析し、スリットの幅を測定した。ここで、ダブルスリットの場合、スリット幅を 2 つ測定できるため、その平均をスリット幅の測定値とする。また、2 つのスリットの間隔も計測した。それら測定値を表 2 に示す。

表 2: スリットの幅とスリット間隔の測定値

	スリットの幅 $2a$						スリットの間隔 $2x_0$		
	SS1	SS2	SS3	DS1	DS2	DS3	DS1	DS2	DS3
長さ /pixel	39.1	75.1	112.2	50.5	71.0	72	179.2	203.0	404.0
長さ / μm	44.9	86.3	129	58.1	81.6	82.7	206	233	464

次に、強度パターンの周期の測定結果を表 3 に示す。

表 3: 強度パターンの周期の測定結果

	sinc の周期						cos の周期		
	SS1	SS2	SS3	DS1	DS2	DS3	DS1	DS2	DS3
長さ /pixel	95.5	44.8	30.3	67.1	46.7	48.3	17.5	15.3	8.67
長さ /mm	14.8	6.96	4.70	10.4	7.25	7.50	2.72	2.37	1.35

表 2、表 3 の結果から、単スリットの場合、スリット幅が狭いほど、sinc の周期が狭くなることが確認できた。ダブルスリットの場合もスリット幅が広いほど、回折強度パターンの周期が狭くなることが確認できる。また、スリット間隔が広いほど、cos の周期が狭くなることが確認できた。次に、これらの周期の実験値を理論値と比較した。

最後に、表 1、表 2、表 3 の測定値を用いて、強度パターンの実験値と理論値を比較した結果を表 4 に示す。

表 4: 強度パターンの実験値と理論値の比較

	sinc の周期						cos の周期		
	SS1	SS2	SS3	DS1	DS2	DS3	DS1	DS2	DS3
実験値 /mm	14.8	6.96	4.70	10.4	7.25	7.50	2.72	2.37	1.35
理論値 /mm	13.6	7.07	4.74	10.5	7.48	7.38	2.97	2.62	1.32
相対誤差 /%	8.97	1.68	0.81	0.90	3.11	1.61	8.38	9.54	2.31

表 4 の結果から、実験値と理論値の相対誤差はどれも10%以下に収まったことが確認できる。

4.2. 回折強度パターンのシミュレーション

まず単スリットの場合で、Octave を用いて出力した、作成したスリット、光の回折強度を表すグラフ、回折像を図 9、図 10、図 11、図 12、図 13、図 14 に示す。

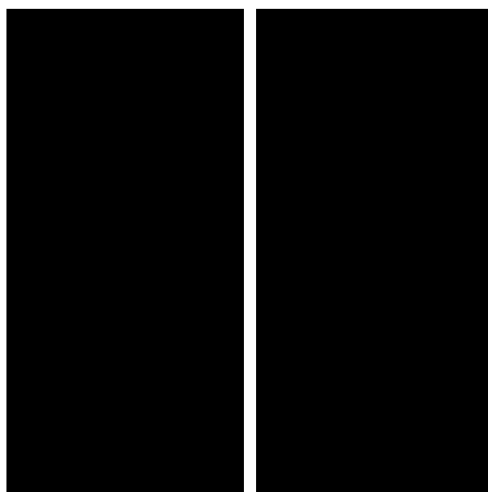


図 9: 単スリット (幅: 0.1)

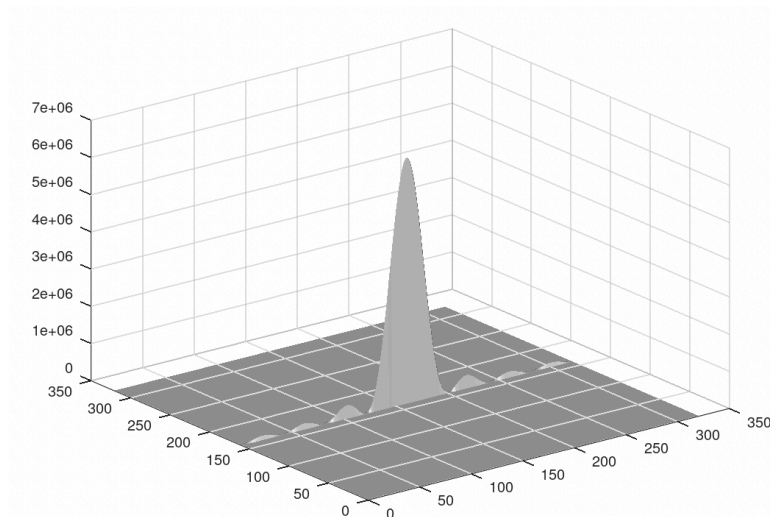


図 10: 単スリットの関数



図 11: 単スリットのスクリーン

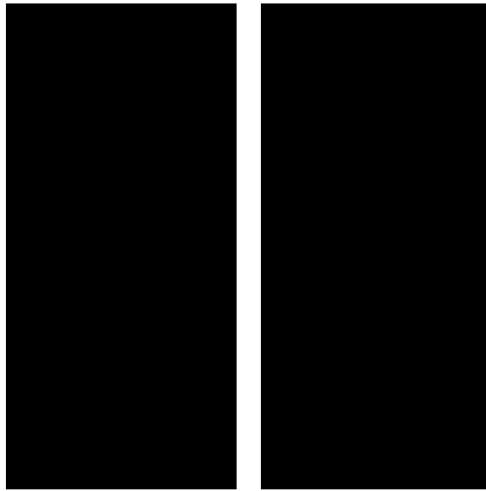


図 12: 単スリット (幅: 0.2)

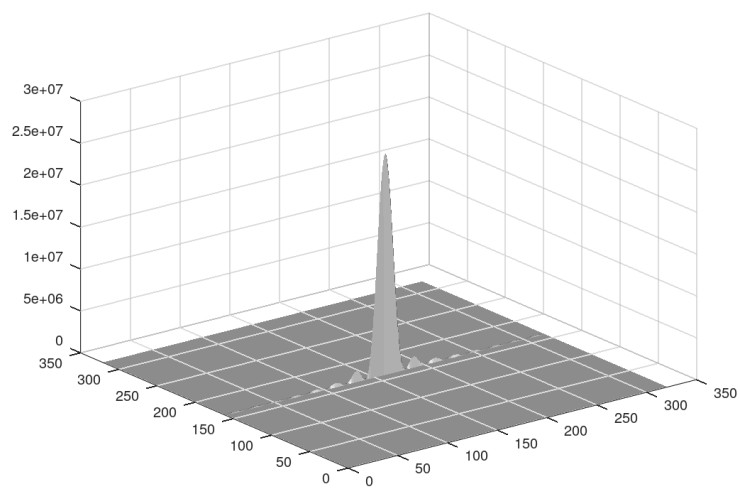


図 13: 単スリットの関数 (幅: 0.2)

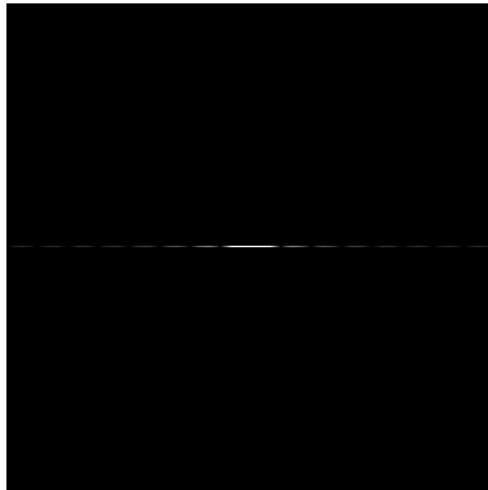


図 14: 単スリットのスクリーン (幅: 0.2)

これらの結果から、シミュレーション上でも、スリット幅が大きくなると、回折強度パターンの周期が狭くなることが確認できる。次に、ダブルスリットの場合で、スリット間隔を変えた場合の結果を図 15、図 16、図 17、図 18、図 19、図 20 に示す。

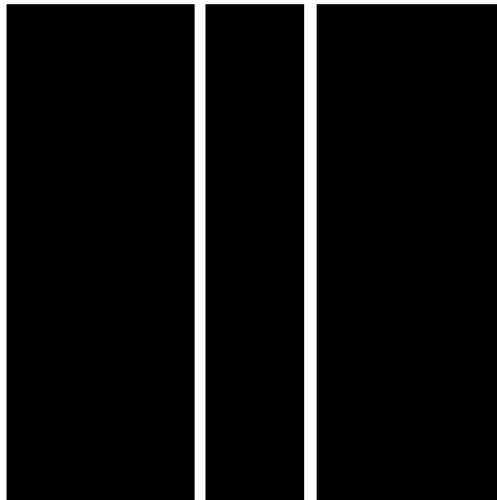


図 15: ダブルスリット (幅: 0.1, 間隔: 0.8)

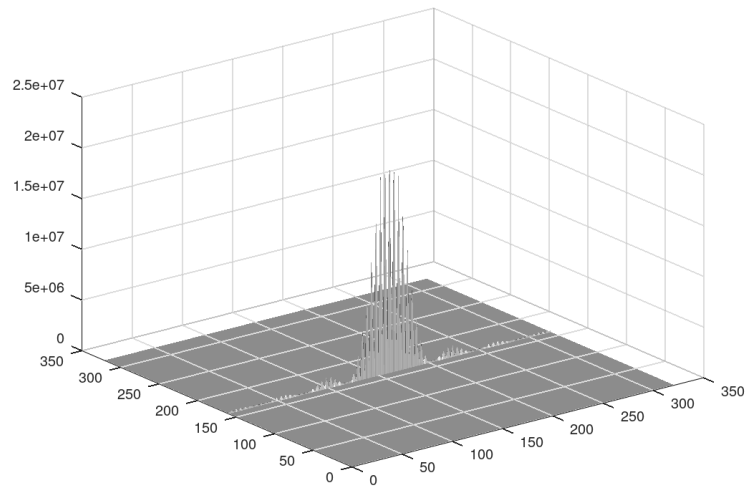


図 16: ダブルスリットの関数 (幅: 0.1, 間隔: 0.8)



図 17: ダブルスリットのスクリーン (幅: 0.1, 間隔: 0.8)

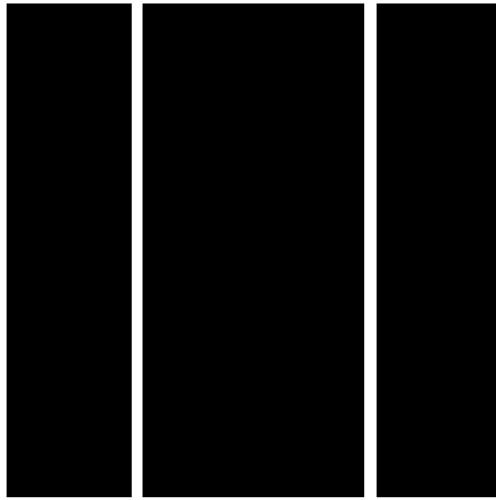


図 18: ダブルスリット (幅: 0.1, 間隔: 1.8)

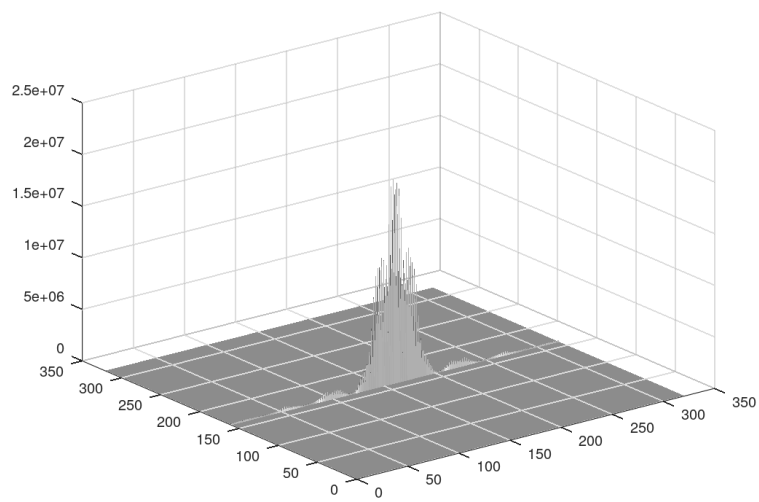


図 19: ダブルスリットの関数 (幅: 0.1, 間隔: 1.8)

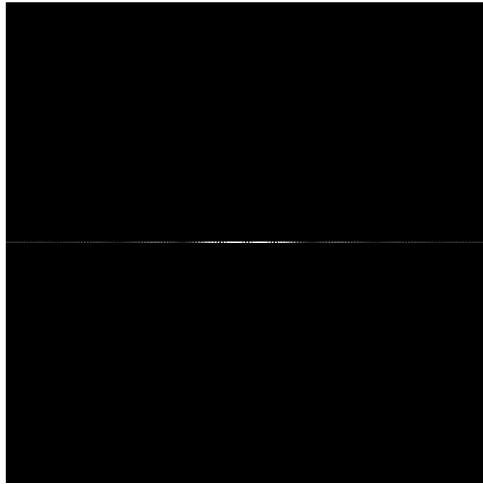


図 20: ダブルスリットのスクリーン (幅: 0.1, 間隔: 1.8)

これらの結果から、シミュレーション上でも、スリット間隔が大きくなると、小さい山の周期が狭くなることを確認できる。最後に、四角い形状のスリット、オリジナルのスリットの場合の結果を図 21、図 22、図 23、図 24、図 25、図 26 に示す。

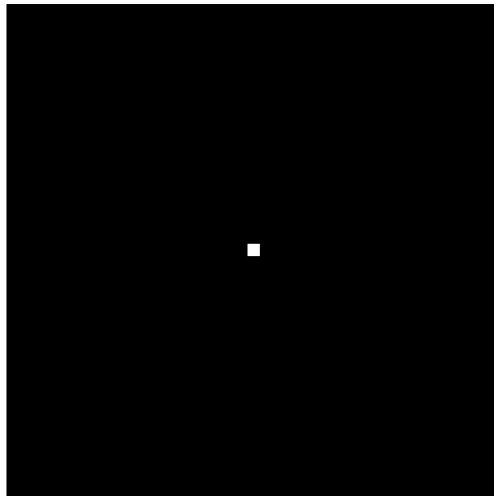


図 21: 四角い形状のスリット (幅: 0.1)

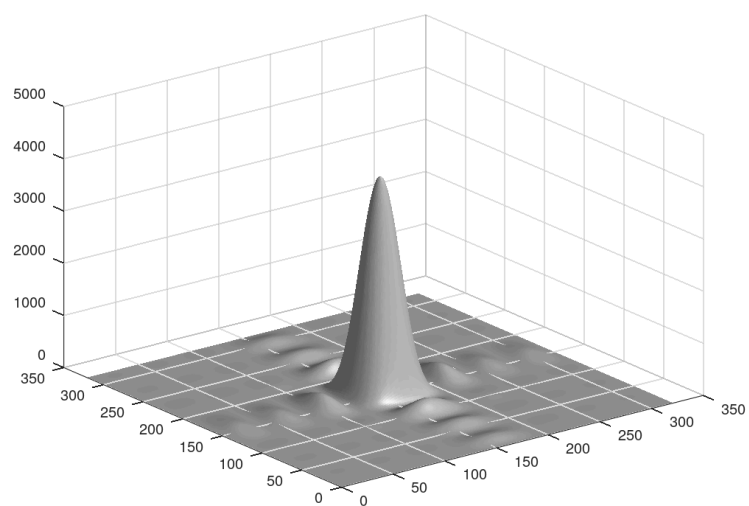


図 22: 四角い形状のスリットの関数 (幅: 0.1)

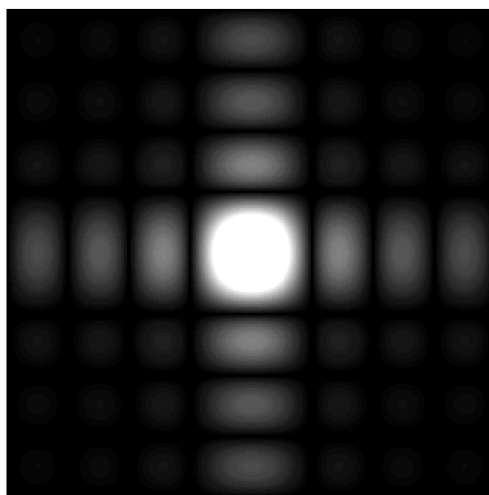


図 23: 四角い形状のスリットのスクリーン (幅: 0.1)

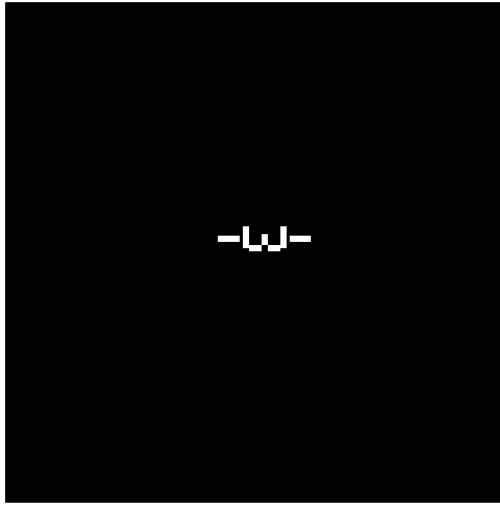


図 24: オリジナルのスリット (絵文字)

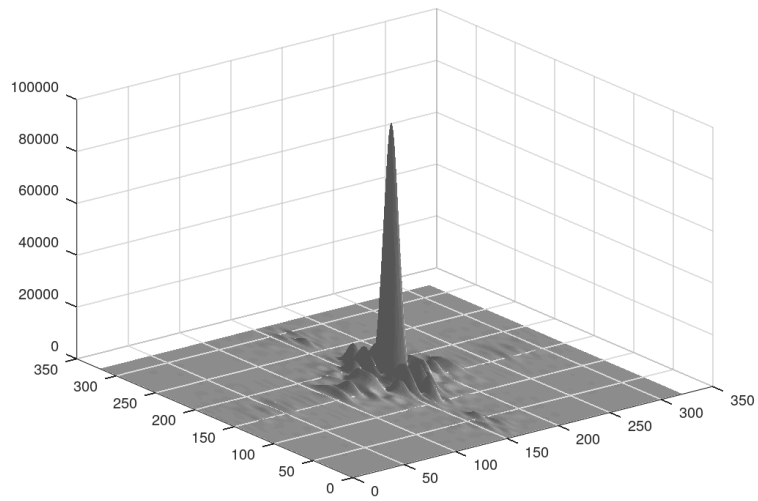


図 25: オリジナルのスリットの関数 (絵文字)

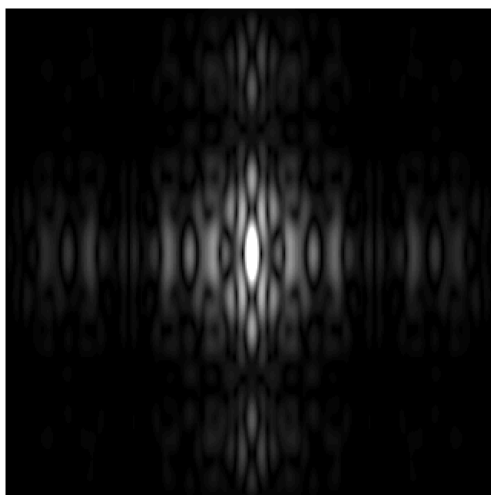


図 26: オリジナルのスリットのスクリーン（絵文字）

5. 考察（強度パターンの実験値の誤差原因について）

今回の実験では、単スリットやダブルスリットを用いて、スリットの幅やスリット間隔を変えた際の回折強度パターンを観測し、理論値との比較を行った。その結果、実験値と理論値の相対誤差はどれも10%以下に収まったことが確認できたが、いくつかの場合で他の場合よりも比較的に誤差が大きかった。ここでは、実験値の誤差の原因について考察する。

まず、実験値の誤差の原因として考えられるのは、スリットの幅やスリット間隔、強度パターンの測定誤差である。例として、SS1 の強度パターンの周期測定、スリットの幅測定の際に、1 pixel ずれた（増えた）場合の誤差への影響を計算してみる。表 1 で求めた定規と目盛りの値を用いて、表 2 と表 3 から、SS1 で 1 pixel の測定誤差があった場合の理論値と測定値の相対誤差を計算すると、表 5 になる。

表 5: SS1 の周期測定、スリットの幅測定の誤差の影響

	強度パターンがずれた場合	スリット幅がずれた場合
相対誤差 /%	10.1	11.8

表 5 から、測定が 1 pixel ずれると強度パターン、スリット幅がずれた場合どちらも1~2 %誤差が大きくなったことがわかる。表 3 より sinc 関数の相対誤差は3 %以下のものが多い。よって、sinc 関数のパターン相対誤差の原因としては、スリット幅の測定誤差や強度パターンの周期測定誤差が妥当であると考えられる。しかし、SS1 については、他の場合よりも sinc 関数のパターンの相対誤差が5 %以上大きい。これには別の誤差原因がある可能性がある。

SS1 の誤差原因として考えられるのは、レーザー光の標準がずれてしまったことである。まず、SS1 は単スリットの中で最もスリット幅が小さいスリットであった。ここで、レーザー光の標準がずれて一部の光が壁に衝突するという状況になった時、その光にとってはスリット幅が小さくなることになる。ここで、表 2、表 3 に見られるように、スリット幅が小さくなるほど、強度パターンの周期が大きくなる。よって、強度パターン周期の実験値の値が理論値よりも大きくなることが予想される。以上より、レーザー光の標準がずれたことが SS1 の他の場合と比べて大きい誤差の原因であると考えられる。

6.結論

今回の実験では、単スリットやダブルスリットを用いて、スリットの幅やスリット間隔を変えた際の回折強度パターンを観測し、理論値との比較を行った。その結果、実験値と理論値の相対誤差はどれも 10 % 以下に収まったことが確認できた。また、SS1 の実験値の誤差が他の場合よりも大きかったが、それはレーザー光の標準がずれたことが原因であると考えられる。以上より、今回の実験は、理論値と実験値の比較を通じて、回折強度パターンの周期がスリットの幅やスリット間隔にどのように影響されるかを理解することができた。また、Octave を用いたシミュレーションを通じて、実験で見られた現象がシミュレーション上でも再現されることが確認できた。

参考文献

- [1] “光の回折強度パターン（教科書）”