3. 考察

課題(1)

乱数の平均値が 0.5 になる理由、分散の値が 1/12 になる理由
まず、一様乱数の確率密度関数を考える。一般に、一様乱数の確率密度関数は次のように表される。

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}\ (a\leq x\leq b)\\ 0\ (\text{otherwise})\end{cases}$$

これを用いて、平均値$E(X)$と分散$V(X)$を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_a^b xf(x)dx\\&=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx\\&=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b\\&=\frac{b+a}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_a^b x^2f(x)dx\\&=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx\\&=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b\\&=\frac{b^2+ab+a^2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(X)&=E(X^2)-E(X)^2\\&=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(b+a)^2}{4}\\&=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}\end{aligned}$$

よって、今回の場合、$a=0$、$b=1$ であるため、平均値$E(X)$、分散$V(X)$はそれぞれ0.5、$\frac{1}{12}$になることがわかる。

課題(2)

buffon の針で、何故πの値が求められるのか
まず、buffon の針問題とは、床の上に等間隔に引かれた平行線群があり、その距離を$2a$として，この床に長さ$2l(l<a)$の針をデタラメに落とすと，その針が平行線と交わる確率はいく

らかという問題である。 buffon の針で何故πの値が求められるかについて以下の図を基に考える。

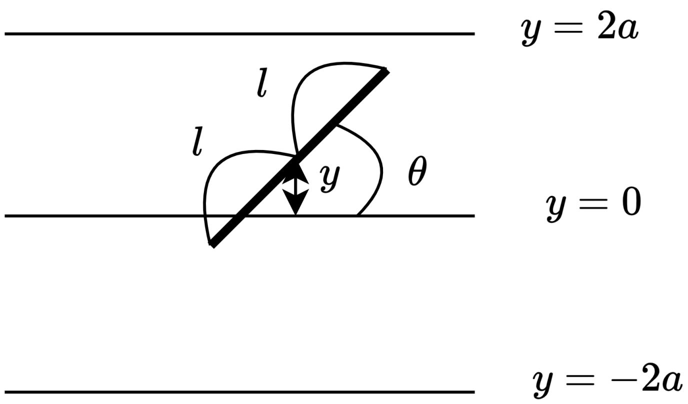

Figure 1: buffon の針問題

針の中点をy、針と平行線のなす角をθ、針の長さを$2l$とする。対称性より、yの区間を$[0, a]$、θの区間を$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$とする。この時､針が平行線と交差する条件は、

$$y \leq l \sin\theta$$

と表される。ここで針をデタラメに落とすということは、yとθは一様分布に従うと解釈できる。(y, θ)平面を考えると、針が平行線と交差する確率は、$y = l\sin\theta$をθの領域で積分した面積を、全体の面積で割ったものになる。全体の面積は、yの区間が$[0, a]$、θの区間が$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$であるため、$\frac{a\pi}{2}$になる。また、針が平行線と交差する領域は、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin\theta d\theta = l$$

となる。よって、針が平行線と交差する確率Pは、

$$P = \frac{l}{\frac{a\pi}{2}} = \frac{2l}{a\pi}$$

と求めることができる。 今回の実験では、yの区間を$[-a, a]$、θの区間を$[0, \pi]$とし、針の下端y_1、上端y_2を

$$\begin{cases} y_1 = y - l\sin\theta \\ y_2 = y + l\sin\theta \end{cases}$$