Производящие функции в комбинаторике

Сборник задач.

1 Разбиения

1. Для данного числа n пусть A — число способов, которыми n можно представить в виде суммы нечётных натуральных чисел, B — число способов, которыми можно представить n в виде суммы различных натуральных чисел. (Суммы неупорядоченная, то есть $1+3$ и $3+1$ — это одно и то же представление)

   Докажите, что $A = B$.

2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ — некоторое натуральное число. Предположим, что

$$\begin{array}{cc} x + 2y = n & \text{имеет } R_1 \text{ решений в } \mathbb{N}_0^2 \\ 2x + 3y = n & \text{имеет } R_2 \text{ решений в } \mathbb{N}_0^2 \\ \cdots & \cdots \\ nx + (n+1)y = 1 & \text{имеет } R_n \text{ решений в } \mathbb{N}_0^2 \\ (n+1)x + (n+2)y = 0 & \text{имеет } R_{n+1} \text{ решений в } \mathbb{N}_0^2 \end{array}$$

   Докажите, что $\sum_k R_k = n + 1$.

3. Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N}$ нашлись такие различные по составу последовательности целых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$, что множества попарных сумм совпадают, то есть совпадают множества

$$a_1 + a_2, a_1 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_n$$

   и

$$b_1 + b_2, b_1 + b_3, \ldots, b_{n-1} + b_n.$$

   Докажите, что n является степенью двойки.

Подсказка. Если для некоторых многочленов $F(x), G(x)$ известно, что $F(1) = G(1)$, то можно положить $F(x) - G(x) = (x-1)^k H(x)$, где $H(1) \neq 0$.

4. Пусть дано конечное число арифметических прогрессий, и каждое натуральное число принадлежит ровно одной из них.

   Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_k$ — их разности. Докажите, что

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_k} = 1$$

5. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, такая, что любое целое неотрицательное число может быть единственным образом представлено в виде $a_i + 2a_j + 4a_k$, где i, j, k не обязательно различны. Найдите a_{2013}

   Подсказка. Покажите, что представление чисел a_k в 8-ичной системе счисления содержит только 0, 1.

6. Докажите, что существует единственный способ разбить $\mathbb{N}_0$ на два непересекающихся множества A, B так, что для любого $n \in \mathbb{N}_0$ количество способов представить n в виде суммы $n = a_1 + a_2$ ($a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$) равно количеству способов представить его в виде $n = b_1 + b_2$, ($b_1, b_2 \in B$, $b_1 \neq b_2$)

7. Пусть для некоторого n элементы множества $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ могут быть раскрашены в красный и синий таким образом, что множество троек $S \times S \times S$ содержит ровно 2007 упорядоченных троек (x, y, z), что

   (i) x, y, z одного цвета,

   (ii) $x + y + z \,\vdots\, n$.

   Докажите, что если r, b — соответственно количество элементов красного и синего цвета, то

$$r^2 + rb + b^2 = 2007$$

   Подсказка. Рассмотрите ряд $\sum_{b \in B} x^b$, где B — множество чисел, покрашенных в синий цвет. Кроме него, рассмотрите аналогичный ряд для чисел, покрашенных в красный цвет.

2 Многочлены

1. Пусть n — натуральное число. Найдите количество таких многочленов $P(x)$, у которых коэффициенты — это числа из множества $\{0, 1, 2, 3\}$, и $P(2) = n$.

2. Пусть Q — множество многочленов с коэффициентами из множества $\mathbb{Z}_p$ (поле остатков по простому модулю p), таких, что выполнены условия

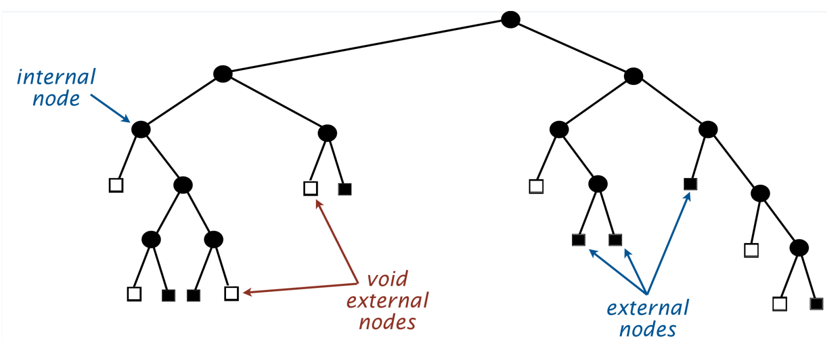
   - Коэффициент при старшем члене равен 1
   - Многочлены из Q не делятся на квадрат никакого многочлена.

   Покажите, что количество таких многочленов степени n равно $Q_n = p^n - p^{n-1}$

3 Деревья

1. Сакура — это бинарное дерево со следующими свойствами.

   - Листовая вершина может быть белой ($\square$)
   - Братишки белых вершин обязаны быть чёрными ($\bullet$, $\blacksquare$)

   Найдите количество сакур с n чёрными вершинами.

2. Найдите количество деревьев с n вершинами, таких, что у каждой вершины либо 0, либо 2 потомка.

3. У каждой нелистовой вершины хотя бы два ребёнка. Найдите количество таких деревьев с заданным количеством листев n.

   Теорема. (Формула инверсии Лагранжа).

   Если производящая функция $g(z) = \sum_{n\geqslant 1} g_n z^n$ удовлетворяет уравнению
   $$z = f(g(z)),$$
   причём $f_0 = 0$, $f_1 \neq 0$, то
   $$g_n = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\left(\frac{u}{f(u)}\right)^n$$

4. Пользуясь теоремой Лагранжа, найдите количество 0-3 деревьев (у любой вершины 0 или 3 детей) с n листовыми вершинами.

4 Строки

1. Бесконечная строка из нулей и единиц генерируется случайным образом, то есть очередной ноль или единица появляется с вероятностью $\dfrac{1}{2}$. Генерация останавливается, когда встреится строка из p единиц.

   Покажите, что матожидание длины этой случайной строки равно $F_p(\frac{1}{2})$, где $F(x)$ — производящая функция для количества таких строк
   $$F_p(x) = \frac{1 - z^p}{1 - 2z + z^{p+1}}$$

2. Рассмотрим алфавит из m символов, из которого составляются всевозможные слова длины n. Пусть имеется некоторая подстрока $p_1 p_2 \dots p_k$ длины k. Покажите, что среднее число вхождений этой строки в случайный текст длины n (как подстроки) составляет
   $$m^{-k}(n - k + 1)$$

   Пример вхождения в качестве подстроки: слово "тор"входит в слово "комбинаторика"в качестве подстроки.

3. Рассмотрим алфавит из m символов, из которого составляются всевозможные слова длины n. Пусть имеется некоторая подстрока $p_1p_2\dots p_k$ длины k. Покажите, что среднее число вхождений этой строки в случайный текст длины n (как подпоследовательности) составляет

$$m^{-k}C_n^k$$

Пример вхождения в качестве подпоследовательности: слово "минор"входит в слово "комбинаторика"в качестве подстроки.

5 Отображения

1. Отображение (функция) из множества $\{1,\dots,n\}$ в множество $\{1,\dots,r\}$ называется r-*сюръекцией*, если каждое значение функции принимается хотя бы один раз.

   Покажите, что количество сюръекций равно

$$\sum_{j=0}^{r} C_r^j(-1)^j(r-j)^n$$

   Для этого покажите, что EGF таких отображений равняется $(e^z-1)^r$. Что можно сказать про EGF для отображений, которые каждое своё значение принимают хотя бы два раза?

2. Отображение называется *идемпотентным*, если для него выполнено $f(x)=f(f(x))$.

   Покажите, что количество идемпотентных отображений на $\{1,2,\dots,n\}$ можно найти по формуле

$$I_n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k k^{n-k}$$

3. Частичное отображение — это отображение, которое не определено в некоторых точках, и принимает специальное значение $\perp$. Инъекцией называется отображение, которое в разных точках принимает разные значения.

Покажите, что класс инъективных частичных отображений может быть представлен как множество цепочек (циклических или последовательных), и покажите, что размер такого класса отображений на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ равен

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \sum k! \left(C_n^k\right)^2$$

Использованная литература

1. Mathematical Excalibur, Volume 18 Number 5
2. Milan Novakovic — Generating Functions
3. Albert R.Meyer, MIT — Generating Functions
4. IMO Shortlist 2007
5. R.Sedgewick, P.Flajolet — Analytic Combinatorics