Листок 1. Линейные пространства

Определение **1.** *Линейным простраством* (или *векторным пространством*) над множеством чисел $\mathbb{F}$ (обычно под числами будут подразумеваться действительные числа $\mathbb{R}$) называется множество L с двумя операциями — сложением (паре a, b элементов L ставится в соответствие элемент L, обозначаемый $a + b$) и умножением (паре λ из F, a из L ставится в соответствии элемент L, обозначаемый λa) — удовлетворяющими следующим условиям (аксиомам):

1. $a + b = b + a$;
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3. существует такой элемент $0 \in L$, что $a + 0 = a$;
4. $\forall a \ \exists b \ a + b = 0$;
5. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$;
6. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$;
7. $1 \cdot a = a$.

Элементы линейного пространства называют *векторами*. Линейное пространство, состоящее из одного элемента, обозначается 0.

1⋄1 Являются ли линейными пространствами **а)** многочлены с действительными коэффициентами? А многочлены степени $\leq n$? А степени $> n$? **б)** Многочлены от x, равные в точке $x = 7$ нулю? Единице? А многочлены, делящиеся на $x^2 + 3$? **в)** Бесконечные последовательности; ограниченные последовательности; неограниченные последовательности? **г)** Арифметические прогрессии? Геометрические прогрессии? **д)** Последовательности Фибоначчи (последовательности, удовлетворяющие условию $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$)? **е)** Ограниченные функции на отрезке $[0; 1]$? **ж*)** $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ над $\mathbb{C}$?

Определение **2.** *Линейным подпространством* линейного пространства L называется непустое подмножество $L_1 \subset L$, удовлетворяющее условиям:

1. $\forall x, y \in L_1 \ x + y \in L_1$;
2. $\forall \lambda \in F \ \forall x \in L_1 \ \lambda x \in L_1$

1⋄2 Доказать, что линейное подпространство является линейным пространством (относительно тех же операций сложения и умножения на число).

Определение **3.** *Суммой* линейных подпространств L_1 и L_2 линейного пространства L называется множество, обозначаемое $L_1 + L_2$ и состоящее из всех $x \in L$, представимых в виде $x = y + z$, где $y \in L_1$, $z \in L_2$.

1◇3 Пусть L_1, L_2 — линейные подпространства. Являются ли линейными подпространствами следующие множества? **а)** $L_1 + L_2$; **б)** $L_1 \cup L_2$; **в)** $L_1 \cap L_2$?

1◇4 Пусть L_1, L_2, L_3 — линейные подпространства. Докажите, что **а)** $L_1 + 0 = L_1 = L_1 + L_1$; **б)** $L_1 \cap L_3 + L_2 \cap L_3 \subset (L_1 + L_2) \cap L_3$; **в)** приведите пример ситуации, когда два пространства из предыдущего пункта не совпадают; **г)** $L_1 + (L_2 + L_3) = (L_1 + L_2) + L_3$?

1◇5 Найти суммы и пересечения: **а)** пространства четных и пространства нечетных функций на $\mathbb{R}$; **б)** пространства функций на $\mathbb{R}$, равных нулю на множествах M_1, M_2; **в*)** пространства многочленов, делящихся на фиксированные многочлены $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x]$.