Логика $\mathcal{EL}$.

В $\mathcal{EL}$ есть имена классов («концептов») $A_1, A_2, \ldots$, класс T («thing»), имена ролей $r_1, r_2, \ldots$, операция пересечения $\sqcap$, квантор существования $\exists$.

Классы строятся из $A_1, \ldots, T$; если C, D — классы, r — роль, то $C \sqcap D$ и $\exists r.C$ — классы.

Определения в $\mathcal{EL}$ имеют вид $A \equiv B$ или $A \sqsubseteq B$, где A — имя класса, B — класс.

$\mathcal{EL}$-терминология — конечное множество определений, в котором никакое имя не определяется дважды. (Циклические определения возможны).

$\mathcal{EL}$-TBox — это конечное множество вложений классов $C \sqsubseteq D$.

Семантика $\mathcal{EL}$.

Интерпретация $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$: $\Delta^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ — домен, $\cdot^{\mathcal{I}}$ сопоставляет каждому имени класса A некоторое подмножество домена $A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$, каждому имени роли r — бинарное отношение $r^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$.

Интерпретация произвольного класса задаётся следующими правилами: $(\exists r.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} | \exists y \in \Delta^{\mathcal{I}} \colon (x, y) \in r^{\mathcal{I}}, \, y \in C^{\mathcal{I}}\}$, $(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$, $T^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$.

$\Diamond$ **1.** Выберем следующую интерпретацию: $\Delta^{\mathcal{I}} = \{\text{школьники}\} \cup \{\text{курсы МаО-2014}\}$,
$A_0^{\mathcal{I}} = \{\text{курсы за 4 цикл}\}$,
$A_1^{\mathcal{I}} = \{\text{решающий эту задачу}\}$,
$r_0^{\mathcal{I}} = \{(x, y) \colon \text{школьник x ходил на курс y}\}$,
$r_1^{\mathcal{I}} = \{(x, y) \colon \text{школьник x сдал y}\}$,
$r_2^{\mathcal{I}} = \{(x, y) \colon \text{на курс x ходил школьник y}\}$,
$r_3^{\mathcal{I}} = \{(x, y) \colon \text{курс x был сдан школьником y}\}$.
Постройте интерпретации классов $\exists r_0.A_0$, $\exists r_1.A_1$, $\exists r_2.A_0$, $\exists r_2.A_1$, $\exists r_3.A_0$, $\exists r_3.A_1$.

Модели и вывод в $\mathcal{EL}$.

Будем говорить, что в интерпретации $\mathcal{I}$ выполняется вложение классов $C \sqsubseteq D$ (записывается $\mathcal{I} \vDash C \sqsubseteq D$), если $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$. Аналогично, $\mathcal{I} \vDash C \equiv D \Leftrightarrow C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$.

Пусть $\tau - \mathcal{EL} - TBox$. Интерпретация $\mathcal{I}$ называется моделью для τ ($\mathcal{I} \vDash \tau$), если в ней выполняется каждое вложение или равенство классов из τ.

Говорят, что из TBox τ выводится вложение классов ($\tau \vDash C \sqsubseteq D$), если $\forall \mathcal{I} \, \mathcal{I} \vDash \tau \Rightarrow \mathcal{I} \vDash C \sqsubseteq D$.

$\Diamond$ **2.** Пусть $\tau = \{A \sqsubseteq B \sqcap C\}$. Верно ли, что а) $\tau \vDash B \sqsubseteq C$? б) $\tau \vDash B \sqsubseteq A$? в) $\tau \vDash A \sqsubseteq B$? г) $\tau \vDash \exists r.A \sqsubseteq \exists r.B$? д) $\tau \vDash \exists r.B \sqsubseteq \exists r.A$?

$\Diamond$ **3.** Верно ли, что если $\tau \vDash C \sqsubseteq D$ и $\tau \vDash D \sqsubseteq E$, то $\tau \vDash C \sqsubseteq E$?

$\Diamond$ **4.** Пусть $\tau = \{\exists r.\mathrm{T} \sqsubseteq C, \, E \equiv \exists r.D\}$. Верно ли, что $\tau \vDash E \sqsubseteq C$? $\tau \vDash \exists r.C \sqsubseteq C$?

Логика $\mathcal{ALC}$.

В логике $\mathcal{ALC}$ к уже известным классам, ролям, $\exists$, $\sqcup$, T добавляются $\perp$ (пустой класс), $\sqcap$ (пересечение классов), $\forall$, $\neg$ (отрицание, дополнение к классу).

$\Diamond$ **5.** Сформулируйте, как интерпретируются новые конструкции.

Зоопарк дескрипционных логик.

$\mathcal{AL} = T| \perp |A|\neg A|C \sqcap D|\exists r.C|\forall r.C$.

В $\mathcal{ALC}$ добавляется $\sqcup$.

Семантика новых символов:

- $\perp^{\mathcal{I}} = \emptyset$
- $(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$
- $(\forall r.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \colon \forall y \in \Delta^{\mathcal{I}}, (x, y) \in r \Rightarrow y \in C\}$ (ограничение значения)
- $(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \colon x \notin C^{\mathcal{I}}\}$

$\mathcal{FL}^-$ — это $\mathcal{AL}$ без отрицаний.

$\mathcal{FL}^0$ — $\mathcal{AL}$ без отрицания и квантора существования.

$\mathcal{F}$ — функциональность $T \sqsubseteq \leq 1r.T$.

$\mathcal{N} = \leq n\, r.T, \geq n\, r.T$.

$\mathcal{Q} = \leq n\, r.C, \geq n\, r.C$ (ограничения кардинальности).

$\mathcal{S}$ — ALC + транзитивность.

$\mathcal{I}$ — обратные роли.

$\mathcal{H}$ — включения ролей.

$\mathcal{R}$ — композиция ролей $r \circ s$.

$\mathcal{O}$ — номиналы (классы из ровно одного указанного элемента).

$\mathcal{SHOIQ}$ это OWL DL, $\mathcal{SROIQ}$ это OWL 2.

$\Diamond$ **6.** Запишите в виде вложений классов следующие утверждения: а) каждый человек имеет ровно одного отца б) слоны делятся на индийских и африканских в) зачёт может быть сдан только по тому курсу, содержание которого человек изучил г) если человек был на ЛЭШ-2014, то хотя бы в один из дней он был в Беляево д) на любом костре либо есть взрослый, либо есть проблема е) Лёша и Саша это два разных человека ё) Карл Маркс и Фридрих Энгельс — не муж и жена, а 4 совершенно разных человека ж*) вложение классов транзитивно.

$\Diamond$ **7.** Реализуемы ли (то есть найдётся ли модель, в которой эти классы представлены непустыми множествами) следующие классы? а) $(\forall r.C) \sqcap (\forall r.\neg C)$ б) $(\forall r.C) \sqcap (\exists r.\neg C)$ в) $\neg(\forall r.C) \sqcap (\exists r.\neg C)$ г) $\neg(\forall r.C) \sqcap \neg(\exists r.\neg C)$

$\Diamond$ **8.** Пусть в TBox входят $T \sqsubseteq \leq 1\, r.T$, $T \sqsubseteq \geq 1\, r.T$, $r \circ r \sqsubseteq r$. Что можно сказать о моделях этого TBox?