Листок 3. Линейные отображения, матрицы

Определение **1.** Пусть L_1, L_2 — линейные пространства. Отображение линейных пространств $A\colon L_1 \to L_2$ называется линейным отображением (гомоморфизмом), если выполняются следующие условия: $A(x+y) = A(x)+A(y)$, $A(\lambda x) = \lambda A(x)$. Множество всех линейных отображений из L_1 в L_2 обозначается $\mathrm{Hom}(L_1, L_2)$.

3◇1 Являются ли линейными следующие отображения $A\colon L_1 \to L_2$: **а)** $Ax = 0$ **б)** $L_1 = L_2$, $Ax = x$ (такое отображение называется *тождественным*; обозначение: id или E); **в)** $L_1 = \mathbb{R}^4$, $L_2 = \mathbb{R}^3$, $A(x,y,z,t) = (x+y, y+z, z+t)$ **г)** $L_1 = L_2 = \mathbb{R}^3$, $A(x,y,z) = (x+1, y+1, z+1)$ **д)** $L_1 = L_2 = \mathbb{R}[x]$, $(Ap)(x) = p(\lambda x^2 + \nu)$, $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ **е)** $L_1 = L_2 = \mathbb{R}[x]$, $(Ap)(x) = q(x) \cdot p(x)$, $q \in \mathbb{R}[x]$ **ж*)** L_1 — пространство сходящихся последовательностей действительных чисел, $L_2 = \mathbb{R}$, $A(x) = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$

3◇2 Доказать, что $\mathrm{Hom}(L_1, L_2)$ — линейное пространство относительно следующих операций: $(A+B)x = Ax + Bx$, $(\lambda A)x = \lambda(Ax)$.

3◇3 Доказать, что произведение (композиция) линейных отображений есть линейное отображение.

Определение **2.** *Ядром* линейного отображения A называется множество, состоящее из всех таких x, что $Ax = 0$. Обозначение: $\ker A$. Образ линейного отображения A обозначается $\mathrm{im}\, A$.

3◇4 Доказать, что ядро и образ линейного отображения являются линейными пространствами.

3◇5 Найти ядра и образы линейных отображений задачи 1.

3◇6 Пусть A — отображение пространства многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами в пространство функций на $M \subset \mathbb{R}$, которое переводит многочлен в его ограничение на M. **а)** Доказать, что A линейно. **б)** При каких M $\ker A = 0$?

Определение **3.** Отображение $A \in \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$ называется изоморфизмом, если $\ker A = 0$ и $\mathrm{im}\, A = L_2$. Множество изоморфизмов обозначается $\mathrm{Iso}(L_1, L_2)$. В случае $L_1 = L_2$ изоморфизмы называются автоморфизмами. Обозначение: $\mathrm{Aut}(L_1)$.

3◇7 Пусть $A \in \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны: **а)** A — изоморфизм; **б)** A взаимно однозначно; **в)** A обратимо, т. е. существует такое отображение $A^{-1} \in \mathrm{Hom}(L_2, L_1)$, что $AA^{-1} = \mathrm{id}$ и $A^{-1}A = \mathrm{id}$.

3◇8 Пусть $A \in \mathrm{Iso}(L_2, L_3)$, $B \in \mathrm{Iso}(L_1, L_2)$, λ — число, не равное нулю. Доказать, что $\lambda A \in \mathrm{Iso}(L_2, L_3)$, $AB \in \mathrm{Iso}(L_1, L_3)$, и выразить обратные к λA и AB отображения через A^{-1} и B^{-1}.

Определение **4.** Пусть даны базис $(e_1, \dots, e_m)$ линейного пространства L и базис $(g_1, \dots, g_n)$ линейного пространства M. Пусть A — линейное отображение из L в M, $Ae_i = \sum a_i^j g_j$. Тогда набор чисел (a_i^j), записываемый в виде таблицы с m столбцами и n строками, называют *матрицей отображения* A в базисах (e_i), (g_j). Если $L = M$, $(e_i) = (g_j)$, то говорят о матрице оператора в базисе (e_i). Наконец, просто матрицей называют прямоугольную таблицу чисел (элементов поля).

3◇9 Доказать, что отображение, сопоставляющее линейному отображению его матрицу в фиксированных базисах, взаимно однозначно.

3◇10 Найти матрицы отображений задачи 1.

3◇11 Пусть L — пространство многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами. Доказать, что следующие отображения являются линейными, и найти их матрицы в базисе $(x_n, \dots, x, 1)$: **а)** $Ap(x) = p(cx)$; **б)** $Ap(x) = p(x+s)$.

3◇12 Пусть L_1, L_2, L_3 — конечномерные линейные пространства, в которых заданы базисы. Пусть (a_i), (b_i), (c_n) — матрицы отображений $A, B \in \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$, $C \in \mathrm{Hom}(L_2, L_3)$ в этих базисах. Найти матрицы следующих отображений: **а)** id (единичная матрица, обозначение: δ_i^j или E); **б)** λA; **в)** $A + B$; **г)** CA (правило «строка на столбец»).

3◇13 **а)** Записать оператор Rot_α поворота плоскости на угол α матрицей. **б)** Проверить, что $Rot_\alpha Rot_\beta = Rot_{\alpha+\beta}$

3◇14 Найти матрицу оператора A^n, если матрица оператора A имеет вид

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

д) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ **е)** $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}$