## 0.1 Вопрос 1.

Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **<u>сходящимся</u>**, если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Если предел последовательности частичных сумм числового ряда не существует или бесконечен, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **<u>расходящимся</u>**.

**<u>Суммой сходящегося числового ряда</u>** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется предел последовательности его частичных сумм, то есть, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

**<u>Арифметические свойства</u>**.

Пусть даны числовые последовательности $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \to a$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k \to b$, тогда верны следующие свойства:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (c_1 \cdot x_n \pm c_2 \cdot y_n) = c_1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm c_2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = c_1 \cdot a \pm c_2 \cdot b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} ((c_1 \cdot x_n) \cdot (c_2 \cdot y_n)) = c_1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot c_2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = c_1 \cdot a \cdot c_2 \cdot b$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_1 \cdot x_n}{c_2 \cdot y_n} = \frac{c_1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n}{c_2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{c_1 \cdot a}{c_2 \cdot b}, b \neq 0, y_n \neq 0, c_2 \neq 0$

**<u>Свойства остатков</u>**.

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то сходится и любой его остаток. Если сходится какой-нибудь остаток ряда, то сходится и сам ряд.

**<u>Свойства группировки</u>**.

Если ряд $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд $B = \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ полученный путем группировки членов ряда $A$ без изменения порядка их расположения, также сходится и его сумма равна сумме ряда $A$.

**<u>Задача</u>**

Найдите n-ю частичную сумму и сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 - n^{-2})$.

<u>Решение:</u>

С помощью необходимого признака сходимости, проверим, не расходится ли ряд:

$$\lim_{n\to\infty} \ln(1 - n^{-2}) = \ln \lim_{n\to\infty} (1 - n^{-2}) = \ln 1 = 0$$

Рассмотрим, что сокращается при суммировании $a_{n-1}$, $a_n$ и $a_{n+1}$:

$$
\begin{aligned}
a_{n-1} + a_n + a_{n+1} = \ln\left(1-(n-1)^{-2}\right) + \ln\left(1-n^{-2}\right) + \ln\left(1-(n+1)^{-2}\right) = \\
= \ln\frac{(n-1)^2-1}{(n-1)^2} + \ln\frac{n^2-1}{n^2} + \ln\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \ln\frac{(n-1)-1}{n-1}\cdot\frac{(n-1)+1}{n-1} + \\
+ \ln\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n} + \ln\frac{(n+1)-1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)+1}{n+1} = \left(\ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n-2) - \ln(n-1)\right) + \\
+ \left(\ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n-1) - \ln(n)\right) + \left(\ln(n+2) - \ln(n+1) + \ln(n) - \ln(n+1)\right) = \\
= \ln(n-2) - \ln(n-1) + \ln(n) - \ln(n+1)
\end{aligned}
$$

Тогда

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-n^{-2}\right) = \ln(2-1) - \ln 2 + \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\frac{n+1}{2n}$$

Откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-n^{-2}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{2n} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

## 0.2 Вопрос 3.

**Критерий Коши**.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится тогда и только тогда, когда для него выполняется условие Коши: для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер $N_\varepsilon$ такой, что для любого $n \geq N_\varepsilon$ и для любого $p \in N$ справедливо равенство:

$$|z_{n+1} + Z_{n+2} + \cdots + Z_{n+p}| < \varepsilon$$

Или другими словами:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon \forall p \in N : |z_{n+1} + Z_{n+2} + \cdots + Z_{n+p}| < \varepsilon$$

**Доказательство расходимости гармонического ряда**.

Применим доказательство от противного , предположим, что гармонический ряд сводится к сумме $S$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = S$$

Гармонический ряд можно представить в виде суммы 2х рядов:

$$S = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots)$$

$$S = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots) + \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots)$$

$$S = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots) + \frac{1}{2}S$$

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

$$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots \neq 0$$

Отсюда получаем, что наше предположение не верно, а значит гармонический ряд расходится.

## 0.3 Вопрос 5.

Доказательства сами придумайте, я их в уши еб.

**Признак Коши**

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ неотрицательна, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$. При $\lambda > 1$ ряд расходится, при $\lambda < 1$ ряд сходится.

**Интрегральный признак сходимости**

Пусть $f(x)$ монотона на $[1, \infty]$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$.

**Признак Даламбера**

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ неотрицательна, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$. При $\lambda > 1$ ряд расходится, при $\lambda < 1$ ряд сходится.

**Задача**

Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \arcsin\left(3^{-n}\right)$

**Решение**

Так как $3^{-n}$, при $n \to \infty$ стремится к 0, то $\arcsin x \sim x$. Еще можно заметить, что $\frac{(2n)!!}{n!} = 2^n$. Воспользуемся признаком сходимости Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!!}{n!} \arcsin\left(3^{-n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n \cdot 3^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} < 1$$

Откуда понятно, что ряд сходится.

## 0.4 Вопрос 6.

Ряд называется **<u>знакочередующимся</u>**, если его члены попеременно принимают значения противоположных знаков, т. е.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, a_n > 0$$

**<u>Признак Лейбница</u>**

Если для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, a_n > 0$ выполняются следующие условия:

1. $a_{n+1} < a_n$ (монотонное убывание $\{a_n\}$)
2. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

Тогда этот ряд сходится.

**<u>Задача</u>**

Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$.

**<u>Решение</u>**

Воспользуемся признаком Лейбница:

1. $1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n+1}} < 1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}$, т.к $\cos \frac{\pi}{\sqrt{n+1}} > \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) = 1 - 1 = 0$

Откуда следует, что ряд сходится.

## 0.5 Вопрос 7.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является абсолютно сходящимся, если сходится ряд из его модулей: $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty} |a_n|$.

**<u>Свойство 1</u>**: Абсолютно сходяйщися ряд сходится, т.е из сходимости ряда $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty} |a_n|$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, причем $|S| \le \sigma$, где $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а $\sigma = \sum\limits_{n\to\infty}^{\infty} |a_n|$.

**<u>Свойство 2</u>**: Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то при любых $\alpha$ и $\beta$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ также абсолютно сходится.

**<u>Свойство 3</u>**: Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то ряд, составленый из тех же членов, но взятых в другом порядке, также абсолютно сходится, и его сумма равна сумме исходного ряда.

**<u>Свойство 4</u>**: Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $a_i \cdot b_i$ членов этих рядов, расположенных в любом порядке, также абсолютно сходится, а его сумма равна $S\sigma$, где $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sigma = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

**<u>Задача</u>**

Исследуйте на абсолютную и условную сходимости ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n\ln n} \cos \pi n$.

**<u>Решение</u>**

Заметим, что $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n\ln n} \cos \pi n = \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n\ln n} \cdot (-1)^n$. Предположим, что ряд абсолютно сходится. Тогда рассмотрим сходимость ряда:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left| \frac{\ln^2(\ln n)}{n\ln n} \cdot (-1)^n \right| = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n\ln n}$$

Воспользуемся интегральным признаком ($t = \ln n$, $k = \ln t$):

$$\int\limits_3^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n\ln n} dn = \int\limits_{\ln 3}^{\infty} \frac{\ln^2 t}{t} dt = \int\limits_{\ln\ln 3}^{\infty} k^2 dk$$

Откуда видно, что ряд расходится. Т.к первоначальный ряд получился знакочередующийся, то проверим признак Лейбница:

1. $\frac{\ln^2(\ln(n+1))}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{\ln^2(\ln n)}{n\ln n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n\ln n} = 0$

Признак выполняется, значит ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n\ln n} \cos \pi n$ сходится. Теперь ясно, что ряд имеет условную сходимость.

## 0.6 Вопрос 8.

**Признак Дирихле:**
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничена, т. е.

$$\exists M > 0 | \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{i=1}^{n} b_i \right| \leq M, \tag{1}$$

а последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, т. е.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,|\, \forall n > n_0 \quad a_n \geq a_{n+1} \quad \text{или} \quad a_{n+1} \geq a_n$$

и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Признак Абеля:**
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, а последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена.

**Условно сходящийся ряд:**
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

**Теорема Римана:**
Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ условно сходится, то $\forall S \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ существует такая перестановка членов этого ряда, после которой он будет сходиться к этому числу $S$.

**Задача:**
Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) \cdot \sin n$.

Решение:
Покажем, что последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ ограничена сверху.

Из формулы разности косинусов:

$$\cos(k - \frac{1}{2}) - \cos(k + \frac{1}{2}) = -2 \sin k \cdot \sin(-\frac{1}{2}) = 2 \sin k \cdot \sin \frac{1}{2}.$$

Просуммируем левую и правую части от 1 до $n$.

$$2 \sin \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin k = \cos \frac{1}{2} - \cos \frac{3}{2} + \cos \frac{3}{2} - \ldots + \cos(n - \frac{1}{2}) - \cos(n + \frac{1}{2}) = \cos \frac{1}{2} - \cos(n + \frac{1}{2}).$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{\cos \frac{1}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})}{2 \sin \frac{1}{2}} \leq \frac{1 + \cos \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}}.$$

Теперь покажем, что последовательность $\{\sqrt[n]{n} - 1\}$ монотонно стремится к нулю.

$$\sqrt[n]{n} - 1 > \sqrt[n+1]{n+1} - 1 \ \Leftrightarrow \ n^{n+1} > (n+1)^n \ \Leftrightarrow \ n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

при $n > e$. Значит, последовательность монотонно убывает, начиная с $n = 3$. С другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n} - 1) = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}} - 1 = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Таким образом, последовательность стремится к нулю.

Итак, последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ ограничена сверху, а последовательность $\{\sqrt[n]{n} - 1\}$ монотонно стремится к нулю. Значит, по признаку Дирихле, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n} - 1)\cdot\sin n$ сходится.

## 0.7 Вопрос 20

Измеримое по Жордану множество в $R^n$

Множество $\Pi = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : a_i \le x_i < b_i, i = 1, ..., n\}$ будем называть клеткой в $R^n$. Пустое множество тоже считается клеткой. Множество $A \in R^n$ клеточное, если оно является объединением конечного числа попарно непересекающихся клеток.
Мерой $m(\Pi)$ клетки называется число

$$m(\Pi) = (b_1 - a_1) \times ... \times (b_n - a_n)$$

Если непересекающиеся клетки $\Pi_1, ..., \Pi_n$ образуют разбиение клеточного множества $A$, то мерой клеточного множества $A$ назовем число

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i)$$

Множество $\Omega \subset R^n$ называется измеримым по Жордану, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся два клеточных множества $A$ и $B$ такие, что $A \subset \Omega \subset B$ и $m(B) - m(A) < \varepsilon$. (По сути, измерить множество по Жордану - значит попробовать воссоздать его с помощью прямоугольников)

Задача
Найдите два клеточных множества $A$ и $B$ таких, чтобы $A \subset \Omega \subset B, m(B) - m(A) \le 1.5$, если $\Omega = \{(x, y) : 0 \le y \le x, 0 \le x \le 3\}$.

Решение
Чтобы понять решение, необходимо нарисовать все 3 множества на плоскости $XOY$.

Пусть множество $A$ - объединение клеток:
$\{(x, y) : 0.5 \le x \le 1, 0 \le y \le 0.5\}$,
$\{(x, y) : 1 \le x \le 3, 0 \le y \le 1\}$,
$\{(x, y) : 1.5 \le x \le 2, 1 \le y \le 1.5\}$,
$\{(x, y) : 2.5 \le x \le 3, 2 \le y \le 2.5\}$,
$\{(x, y) : 2 \le x \le 3, 1 \le y \le 2\}$.

$$m(A) = 3\frac{3}{4}$$

Пусть множество $B$ - объединение клеток: $\{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 0.5\}$,
$\{(x, y) : 0.5 \le x \le 1, 0.5 \le y \le 1\}$,
$\{(x, y) : 1 \le x \le 3, 0 \le y \le 1\}$,
$\{(x, y) : 1 \le x \le 2, 1 \le y \le 1.5\}$,
$\{(x, y) : 1.5 \le x \le 2, 1.5 \le y \le 2\}$,
$\{(x, y) : 2 \le x \le 3, 2 \le y \le 2.5\}$,
$\{(x, y) : 2 \le x \le 3, 1 \le y \le 2\}$,
$\{(x, y) : 2.5 \le x \le 3, 2.5 \le y \le 3\}$.

$$m(B) = 5\frac{1}{4}$$

$$m(B) - m(A) = 1.5$$