

0.1 Вопрос 1.

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Если предел последовательности частичных сумм числового ряда не существует или бесконечен, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется расходящимся.

Суммой сходящегося числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется предел последовательности его частичных сумм, то есть, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Арифметические свойства.

Пусть даны числовые последовательности $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \rightarrow a$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k \rightarrow b$, тогда верны следующие свойства:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 \cdot x_n \pm c_2 \cdot y_n) = c_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm c_2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c_1 \cdot a \pm c_2 \cdot b$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} ((c_1 \cdot x_n) \cdot (c_2 \cdot y_n)) = c_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot c_2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c_1 \cdot a \cdot c_2 \cdot b$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 \cdot x_n}{c_2 \cdot y_n} = \frac{c_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{c_2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{c_1 \cdot a}{c_2 \cdot b}, b \neq 0, y_n \neq 0, c_2 \neq 0$

Свойства остатков.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то сходится и любой его остаток. Если сходится какой-нибудь остаток ряда, то сходится и сам ряд.

Свойства группировки.

Если ряд $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд $B = \sum_{j=1}^{\infty} b_j$ полученный путем группировки членов ряда A без изменения порядка их расположения, также сходится и его сумма равна сумме ряда A .

Задача

Найдите n -ую частичную сумму и сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - n^{-2})$.

Решение:

С помощью необходимого признака сходимости, проверим, не расходится ли ряд:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 - n^{-2}) = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - n^{-2}) = \ln 1 = 0$$

Рассмотрим, что сокращается при суммировании a_{n-1} , a_n и a_{n+1} :

$$\begin{aligned}
 a_{n-1} + a_n + a_{n+1} &= \ln(1 - (n-1)^{-2}) + \ln(1 - n^{-2}) + \ln(1 - (n+1)^{-2}) = \\
 &= \ln \frac{(n-1)^2 - 1}{(n-1)^2} + \ln \frac{n^2 - 1}{n^2} + \ln \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \ln \frac{(n-1) - 1}{n-1} \cdot \frac{(n-1) + 1}{n-1} + \\
 &+ \ln \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} + \ln \frac{(n+1) - 1}{n+1} \cdot \frac{(n+1) + 1}{n+1} = (\ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n-2) - \ln(n-1)) + \\
 &+ (\ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n-1) - \ln(n)) + (\ln(n+2) - \ln(n+1) + \ln(n) - \ln(n+1)) = \\
 &= \ln(n-2) - \ln(n-1) + \ln(n) - \ln(n+1)
 \end{aligned}$$

Тогда

$$S_n = \sum_{k=2}^n \ln(1 - k^{-2}) = \ln(2-1) - \ln 2 + \ln(n+1) - \ln(n) = \ln \frac{n+1}{2n}$$

Откуда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \ln(1 - k^{-2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{2n} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

0.2 Вопрос 3.

Критерий Коши.

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ неотрицательна, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$. При $\lambda > 1$ ряд расходится, при $\lambda < 1$ ряд сходится.

Доказательство расходимости гармонического ряда.

Применим доказательство от противного, предположим, что гармонический ряд сводится к сумме S :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = S$$

Гармонический ряд можно представить в виде суммы 2х рядов:

$$S = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots)$$

$$S = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots) + \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots)$$

$$S = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots) + \frac{1}{2}S$$

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots \neq 0$$

Отсюда получаем, что наше предположение не верно, а значит гармонический ряд расходится.

0.3 Вопрос 5.

Доказательства сами придумайте, я их в уши еб.

Признак Коши

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ неотрицательна, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$. При $\lambda > 1$ ряд расходится, при $\lambda < 1$ ряд сходится.

Интегральный признак сходимости

Пусть $f(x)$ монотона на $[1, \infty]$. $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ сходится \Leftrightarrow сходится $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Признак Даламбера

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ неотрицательна, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$. При $\lambda > 1$ ряд расходится, при $\lambda < 1$ ряд сходится.

Задача

Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \arcsin(3^{-n})$

Решение

Так как 3^{-n} , при $n \rightarrow \infty$ стремится к 0, то $\arcsin x \sim x$. Еще можно заметить, что $\frac{(2n)!!}{n!} = 2^n$. Воспользуемся признаком сходимости Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!!}{n!} \arcsin(3^{-n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n \cdot 3^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} < 1$$

Откуда понятно, что ряд сходится.

0.4 Вопрос 6.

Ряд называется знакопередающим, если его члены попеременно принимают значения противоположных знаков, т. е.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, a_n > 0$$

Признак Лейбница

Если для знакопередающего ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, a_n > 0$ выполняются следующие условия:

1. $a_{n+1} < a_n$ (монотонное убывание $\{a_n\}$)
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Тогда этот ряд сходится.

Задача

Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$.

Решение

Воспользуемся признаком Лейбница:

1. $1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n+1}} < 1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}$, т.к. $\cos \frac{\pi}{\sqrt{n+1}} > \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) = 1 - 1 = 0$

Откуда следует, что ряд сходится.

0.5 Вопрос 20

Измеримое по Жордану множество в R^n

Множество $\Pi = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : a_i \leq x_i < b_i, i = 1, \dots, n\}$ будем называть клеткой в R^n . Пустое множество тоже считается клеткой. Множество $A \in R^n$ клеточное, если оно является объединением конечного числа попарно непересекающихся клеток. Мерой $m(\Pi)$ клетки называется число

$$m(\Pi) = (b_1 - a_1) \times \dots \times (b_n - a_n)$$

Если непересекающиеся клетки Π_1, \dots, Π_n образуют разбиение клеточного множества A , то мерой клеточного множества A назовем число

$$m(A) = \sum_{i=1}^n m(\Pi_i)$$

Множество $\Omega \subset R^n$ называется измеримым по Жордану, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся два клеточных множества A и B такие, что $A \subset \Omega \subset B$ и $m(B) - m(A) < \varepsilon$. (По сути, измерить множество по Жордану - значит попробовать воссоздать его с помощью прямоугольников)

Задача

Найдите два клеточных множества A и B таких, чтобы $A \subset \Omega \subset B, m(B) - m(A) \leq 1.5$, если $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 3\}$.

Решение

Чтобы понять решение, необходимо нарисовать все 3 множества на плоскости XOY .

Пусть множество A - объединение клеток:

$$\begin{aligned} &\{(x, y) : 0.5 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0.5\}, \\ &\{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}, \\ &\{(x, y) : 1.5 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 1.5\}, \\ &\{(x, y) : 2.5 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 2.5\}, \\ &\{(x, y) : 2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}. \end{aligned}$$

$$m(A) = 3\frac{3}{4}$$

Пусть множество B - объединение клеток: $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0.5\}$,

$$\begin{aligned} &\{(x, y) : 0.5 \leq x \leq 1, 0.5 \leq y \leq 1\}, \\ &\{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}, \\ &\{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 1.5\}, \\ &\{(x, y) : 1.5 \leq x \leq 2, 1.5 \leq y \leq 2\}, \\ &\{(x, y) : 2 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 2.5\}, \\ &\{(x, y) : 2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}, \\ &\{(x, y) : 2.5 \leq x \leq 3, 2.5 \leq y \leq 3\}. \end{aligned}$$

$$m(B) = 5\frac{1}{4}$$

$$m(B) - m(A) = 1.5$$