0.1 Вопрос 1.

Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **<u>сходящимся</u>**, если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Если предел последовательности частичных сумм числового ряда не существует или бесконечен, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **<u>расходящимся</u>**.

<u>Суммой сходящегося числового ряда</u> $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется предел последовательности его частичных сумм, то есть, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

<u>Арифметические свойства</u>.
Пусть даны числовые последовательности $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \to a$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k \to b$, тогда верны следующие свойства:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (c_1 \cdot x_n \pm c_2 \cdot y_n) = c_1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm c_2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = c_1 \cdot a \pm c_2 \cdot b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} ((c_1 \cdot x_n) \cdot (c_2 \cdot y_n)) = c_1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot c_2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = c_1 \cdot a \cdot c_2 \cdot b$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_1 \cdot x_n}{c_2 \cdot y_n} = \frac{c_1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n}{c_2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{c_1 \cdot a}{c_2 \cdot b}, b \neq 0, y_n \neq 0, c_2 \neq 0$

<u>Свойства остатков</u>.
Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то сходится и любой его остаток. Если сходится какой-нибудь остаток ряда, то сходится и сам ряд.

<u>Свойства группировки</u>.
Если ряд $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд $B = \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ полученный путем группировки членов ряда A без изменения порядка их расположения, также сходится и его сумма равна сумме ряда A.

<u>Задача</u>
Найдите n-ю частичную сумму и сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 - n^{-2})$.

<u>Решение:</u>
С помощью необходимого признака сходимости, проверим, не расходится ли ряд:

$$\lim_{n\to\infty} \ln(1 - n^{-2}) = \ln \lim_{n\to\infty} (1 - n^{-2}) = \ln 1 = 0$$

Рассмотрим, что сокращается при суммировании a_{n-1}, a_n и a_{n+1}:

$$\begin{aligned}
a_{n-1}+a_n+a_{n+1} = \ln\left(1-(n-1)^{-2}\right)+\ln\left(1-n^{-2}\right)+\ln\left(1-(n+1)^{-2}\right) = \\
= \ln\frac{(n-1)^2-1}{(n-1)^2}+\ln\frac{n^2-1}{n^2}+\ln\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \ln\frac{(n-1)-1}{n-1}\cdot\frac{(n-1)+1}{n-1}+ \\
+\ln\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}+\ln\frac{(n+1)-1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)+1}{n+1} = \left(\ln(n)-\ln(n-1)+\ln(n-2)-\ln(n-1)\right)+ \\
+\left(\ln(n+1)-\ln(n)+\ln(n-1)-\ln(n)\right)+\left(\ln(n+2)-\ln(n+1)+\ln(n)-\ln(n+1)\right) = \\
= \ln(n-2)-\ln(n-1)+\ln(n)-\ln(n+1)
\end{aligned}$$

Тогда

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-n^{-2}\right) = \ln(2-1)-\ln 2+\ln(n+1)-\ln(n) = \ln\frac{n+1}{2n}$$

Откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-n^{-2}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{2n} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

0.2 Вопрос 3.

<u>Критерий Коши</u>.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится тогда и только тогда, когда для него выполняется условие Коши: для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер N_ε такой, что для любого $n \geq N_\varepsilon$ и для любого $p \in N$ справедливо равенство:

$$|z_{n+1} + Z_{n+2} + \cdots + Z_{n+p}| < \varepsilon$$

Или другими словами:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon \forall p \in N : |z_{n+1} + Z_{n+2} + \cdots + Z_{n+p}| < \varepsilon$$

<u>Доказательство расходимости гармонического ряда</u>.

Применим доказательство от противного , предположим, что гармонический ряд сводится к сумме S:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = S$$

Гармонический ряд можно представить в виде суммы 2х рядов:

$$S = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots)$$

$$S = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots) + \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots)$$

$$S = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots) + \frac{1}{2}S$$

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

$$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots \neq 0$$

Отсюда получаем, что наше предположение не верно, а значит гармонический ряд расходится.

0.3 Вопрос 5.

Доказательства сами придумайте, я их в уши еб.

Признак Коши

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ неотрицательна, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$. При $\lambda > 1$ ряд расходится, при $\lambda < 1$ ряд сходится.

Интрегральный признак сходимости

Пусть $f(x)$ монотона на $[1, \infty]$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$.

Признак Даламбера

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ неотрицательна, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$. При $\lambda > 1$ ряд расходится, при $\lambda < 1$ ряд сходится.

Задача

Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \arcsin(3^{-n})$

Решение

Так как 3^{-n}, при $n \to \infty$ стремится к 0, то $\arcsin x \sim x$. Еще можно заметить, что $\frac{(2n)!!}{n!} = 2^n$. Воспользуемся признаком сходимости Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!!}{n!} \arcsin(3^{-n})} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n \cdot 3^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} < 1$$

Откуда понятно, что ряд сходится.

0.4 Вопрос 6.

Ряд называется **знакочередующимся**, если его члены попеременно принимают значения противоположных знаков, т. е.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, a_n > 0$$

Признак Лейбница

Если для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, a_n > 0$ выполняются следующие условия:

1. $a_{n+1} < a_n$ (монотонное убывание $\{a_n\}$)
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Тогда этот ряд сходится.

Задача

Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$.

Решение

Воспользуемся признаком Лейбница:

1. $1 - \cos\frac{\pi}{\sqrt{n+1}} < 1 - \cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}$, т.к $\cos\frac{\pi}{\sqrt{n+1}} > \cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) = 1 - 1 = 0$

Откуда следует, что ряд сходится.

0.5 Вопрос 7.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является абсолютно сходящимся, если сходится ряд из его модулей: $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty} |a_n|$.

<u>Свойство 1</u>: Абсолютно сходяйщися ряд сходится, т.е из сходимости ряда $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty} |a_n|$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, причем $|S| \leq \sigma$, где $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а $\sigma = \sum\limits_{n\to\infty}^{\infty} |a_n|$.

<u>Свойство 2</u>: Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то при любых α и β ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ также абсолютно сходится.

<u>Свойство 3</u>: Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то ряд, составленый из тех же членов, но взятых в другом порядке, также абсолютно сходится, и его сумма равна сумме исходного ряда.

<u>Свойство 4</u>: Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $a_i \cdot b_i$ членов этих рядов, расположенных в любом порядке, также абсолютно сходится, а его сумма равна $S\sigma$, где $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sigma = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

<u>Задача</u>

Исследуйте на абсолютную и условную сходимости ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n} \cos \pi n$.

<u>Решение</u>

Заметим, что $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n} \cos \pi n = \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n} \cdot (-1)^n$. Предположим, что ряд абсолютно сходится. Тогда рассмотрим сходимость ряда:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left| \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n} \cdot (-1)^n \right| = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n}$$

Воспользуемся интегральным признаком ($t = \ln n$, $k = \ln t$):

$$\int\limits_{3}^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n} dn = \int\limits_{\ln 3}^{\infty} \frac{\ln^2 t}{t} dt = \int\limits_{\ln\ln 3}^{\infty} k^2 dk$$

Откуда видно, что ряд расходится. Т.к первоначальный ряд получился знакочередующийся, то проверим признак Лейбница:

1. $\frac{\ln^2(\ln(n+1))}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n} = 0$

Признак выполняется, значит ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n} \cos \pi n$ сходится. Теперь ясно, что ряд имеет условную сходимость.

0.6 Вопрос 20

Измеримое по Жордану множество в R^n

Множество $\Pi = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : a_i \leq x_i < b_i, i = 1, ..., n\}$ будем называть клеткой в R^n. Пустое множество тоже считается клеткой. Множество $A \in R^n$ клеточное, если оно является объединением конечного числа попарно непересекающихся клеток.
Мерой $m(\Pi)$ клетки называется число

$$m(\Pi) = (b_1 - a_1) \times ... \times (b_n - a_n)$$

Если непересекающиеся клетки $\Pi_1, ..., \Pi_n$ образуют разбиение клеточного множества A, то мерой клеточного множества A назовем число

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i)$$

Множество $\Omega \subset R^n$ называется измеримым по Жордану, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся два клеточных множества A и B такие, что $A \subset \Omega \subset B$ и $m(B) - m(A) < \varepsilon$. (По сути, измерить множество по Жордану - значит попробовать воссоздать его с помощью прямоугольников)

Задача
Найдите два клеточных множества A и B таких, чтобы $A \subset \Omega \subset B, m(B) - m(A) \leq 1.5$, если $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 3\}$.

Решение
Чтобы понять решение, необходимо нарисовать все 3 множества на плоскости XOY.

Пусть множество A - объединение клеток:
$\{(x, y) : 0.5 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0.5\}$,
$\{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$,
$\{(x, y) : 1.5 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 1.5\}$,
$\{(x, y) : 2.5 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 2.5\}$,
$\{(x, y) : 2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$.

$$m(A) = 3\frac{3}{4}$$

Пусть множество B - объединение клеток: $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0.5\}$,
$\{(x, y) : 0.5 \leq x \leq 1, 0.5 \leq y \leq 1\}$,
$\{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$,
$\{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 1.5\}$,
$\{(x, y) : 1.5 \leq x \leq 2, 1.5 \leq y \leq 2\}$,
$\{(x, y) : 2 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 2.5\}$,
$\{(x, y) : 2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$,
$\{(x, y) : 2.5 \leq x \leq 3, 2.5 \leq y \leq 3\}$.

$$m(B) = 5\frac{1}{4}$$

$$m(B) - m(A) = 1.5$$