

## 0.1 Вопрос 1.

Числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности частичных сумм  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Если предел последовательности частичных сумм числового ряда не существует или бесконечен, то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  называется расходящимся.

Суммой сходящегося числового ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  называется предел последовательности его частичных сумм, то есть,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .

### Арифметические свойства.

Пусть даны числовые последовательности  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \rightarrow a$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} y_k \rightarrow b$ , тогда верны следующие свойства:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 \cdot x_n \pm c_2 \cdot y_n) = c_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm c_2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c_1 \cdot a \pm c_2 \cdot b$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} ((c_1 \cdot x_n) \cdot (c_2 \cdot y_n)) = c_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot c_2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c_1 \cdot a \cdot c_2 \cdot b$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 \cdot x_n}{c_2 \cdot y_n} = \frac{c_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{c_2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{c_1 \cdot a}{c_2 \cdot b}, b \neq 0, y_n \neq 0, c_2 \neq 0$

### Свойства остатков.

Если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится, то сходится и любой его остаток. Если сходится какой-нибудь остаток ряда, то сходится и сам ряд.

### Свойства группировки.

Если ряд  $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится, то ряд  $B = \sum_{j=1}^{\infty} b_j$  полученный путем группировки членов ряда  $A$  без изменения порядка их расположения, также сходится и его сумма равна сумме ряда  $A$ .

### Задача

Найдите  $n$ -ую частичную сумму и сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - n^{-2})$ .

### Решение:

С помощью необходимого признака сходимости, проверим, не расходится ли ряд:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 - n^{-2}) = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - n^{-2}) = \ln 1 = 0$$

Рассмотрим, что сокращается при суммировании  $a_{n-1}$ ,  $a_n$  и  $a_{n+1}$ :

$$\begin{aligned}
 a_{n-1} + a_n + a_{n+1} &= \ln(1 - (n-1)^{-2}) + \ln(1 - n^{-2}) + \ln(1 - (n+1)^{-2}) = \\
 &= \ln \frac{(n-1)^2 - 1}{(n-1)^2} + \ln \frac{n^2 - 1}{n^2} + \ln \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \ln \frac{(n-1) - 1}{n-1} \cdot \frac{(n-1) + 1}{n-1} + \\
 &+ \ln \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} + \ln \frac{(n+1) - 1}{n+1} \cdot \frac{(n+1) + 1}{n+1} = (\ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n-2) - \ln(n-1)) + \\
 &+ (\ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n-1) - \ln(n)) + (\ln(n+2) - \ln(n+1) + \ln(n) - \ln(n+1)) = \\
 &= \ln(n-2) - \ln(n-1) + \ln(n) - \ln(n+1)
 \end{aligned}$$

Тогда

$$S_n = \sum_{k=2}^n \ln(1 - k^{-2}) = \ln(2-1) - \ln 2 + \ln(n+1) - \ln(n) = \ln \frac{n+1}{2n}$$

Откуда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \ln(1 - k^{-2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{2n} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

## 0.2 Вопрос 3.

### Критерий Коши.

Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  неотрицательна, тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ . При  $\lambda > 1$  ряд расходится, при  $\lambda < 1$  ряд сходится.

### Доказательство расходимости гармонического ряда.

Применим доказательство от противного, предположим, что гармонический ряд сводится к сумме  $S$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = S$$

Гармонический ряд можно представить в виде суммы 2х рядов:

$$S = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots)$$

$$S = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots) + \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots)$$

$$S = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots) + \frac{1}{2}S$$

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots \neq 0$$

Отсюда получаем, что наше предположение не верно, а значит гармонический ряд расходится.

### 0.3 Вопрос 5.

Доказательства сами придумайте, я их в уши еб.

#### Признак Коши

Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  неотрицательна, тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ . При  $\lambda > 1$  ряд расходится, при  $\lambda < 1$  ряд сходится.

#### Интегральный признак сходимости

Пусть  $f(x)$  монотона на  $[1, \infty]$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$  сходится  $\Leftrightarrow$  сходится  $\int_1^{\infty} f(x) dx$ .

#### Признак Даламбера

Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$  неотрицательна,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ . При  $\lambda > 1$  ряд расходится, при  $\lambda < 1$  ряд сходится.

#### Задача

Исследуйте на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \arcsin(3^{-n})$

#### Решение

Так как  $3^{-n}$ , при  $n \rightarrow \infty$  стремится к 0, то  $\arcsin x \sim x$ . Еще можно заметить, что  $\frac{(2n)!!}{n!} = 2^n$ . Воспользуемся признаком сходимости Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!!}{n!} \arcsin(3^{-n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n \cdot 3^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} < 1$$

Откуда понятно, что ряд сходится.

## 0.4 Вопрос 6.

Ряд называется знакопередающим, если его члены попеременно принимают значения противоположных знаков, т. е.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, a_n > 0$$

### Признак Лейбница

Если для знакопередающего ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, a_n > 0$  выполняются следующие условия:

1.  $a_{n+1} < a_n$  (монотонное убывание  $\{a_n\}$ )
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Тогда этот ряд сходится.

### Задача

Исследуйте на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$ .

### Решение

Воспользуемся признаком Лейбница:

1.  $1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n+1}} < 1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}$ , т.к.  $\cos \frac{\pi}{\sqrt{n+1}} > \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) = 1 - 1 = 0$

Откуда следует, что ряд сходится.

## 0.5 Вопрос 7.

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  является абсолютно сходящимся, если сходится ряд из его модулей:  $\sum_{n \rightarrow \infty}^{\infty} |a_n|$ .

**Свойство 1:** Абсолютно сходящийся ряд сходится, т.е. из сходимости ряда  $\sum_{n \rightarrow \infty}^{\infty} |a_n|$  следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , причем  $|S| \leq \sigma$ , где  $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , а  $\sigma = \sum_{n \rightarrow \infty}^{\infty} |a_n|$ .

**Свойство 2:** Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  абсолютно сходятся, то при любых  $\alpha$  и  $\beta$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  также абсолютно сходится.

**Свойство 3:** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  абсолютно сходится, то ряд, составленный из тех же членов, но взятых в другом порядке, также абсолютно сходится, и его сумма равна сумме исходного ряда.

**Свойство 4:** Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений  $a_i \cdot b_i$  членов этих рядов, расположенных в любом порядке, также абсолютно сходится, а его сумма равна  $S\sigma$ , где  $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

### Задача

Исследуйте на абсолютную и условную сходимости ряд  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n} \cos \pi n$ .

### Решение

Заметим, что  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n} \cos \pi n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n} \cdot (-1)^n$ . Предположим, что ряд абсолютно сходится. Тогда рассмотрим сходимость ряда:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left| \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n} \cdot (-1)^n \right| = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n}$$

Воспользуемся интегральным признаком ( $t = \ln n$ ,  $k = \ln t$ ):

$$\int_3^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n} dn = \int_{\ln 3}^{\infty} \frac{\ln^2 t}{t} dt = \int_{\ln \ln 3}^{\infty} k^2 dk$$

Откуда видно, что ряд расходится. Т.к. первоначальный ряд получился знакочередующийся, то проверим признак Лейбница:

1.  $\frac{\ln^2(\ln(n+1))}{(n+1) \ln(n+1)} < \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n}$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n} = 0$

Признак выполняется, значит ряд  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln^2(\ln n)}{n \ln n} \cos \pi n$  сходится. Теперь ясно, что ряд имеет условную сходимость.

## 0.6 Вопрос 20

Измеримое по Жордану множество в  $R^n$

Множество  $\Pi = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : a_i \leq x_i < b_i, i = 1, \dots, n\}$  будем называть клеткой в  $R^n$ . Пустое множество тоже считается клеткой. Множество  $A \in R^n$  клеточное, если оно является объединением конечного числа попарно непересекающихся клеток. Мерой  $m(\Pi)$  клетки называется число

$$m(\Pi) = (b_1 - a_1) \times \dots \times (b_n - a_n)$$

Если непересекающиеся клетки  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$  образуют разбиение клеточного множества  $A$ , то мерой клеточного множества  $A$  назовем число

$$m(A) = \sum_{i=1}^n m(\Pi_i)$$

Множество  $\Omega \subset R^n$  называется измеримым по Жордану, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся два клеточных множества  $A$  и  $B$  такие, что  $A \subset \Omega \subset B$  и  $m(B) - m(A) < \varepsilon$ . (По сути, измерить множество по Жордану - значит попробовать воссоздать его с помощью прямоугольников)

Задача

Найдите два клеточных множества  $A$  и  $B$  таких, чтобы  $A \subset \Omega \subset B, m(B) - m(A) \leq 1.5$ , если  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 3\}$ .

Решение

Чтобы понять решение, необходимо нарисовать все 3 множества на плоскости  $XOY$ .

Пусть множество  $A$  - объединение клеток:

$$\begin{aligned} &\{(x, y) : 0.5 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0.5\}, \\ &\{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}, \\ &\{(x, y) : 1.5 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 1.5\}, \\ &\{(x, y) : 2.5 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 2.5\}, \\ &\{(x, y) : 2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}. \end{aligned}$$

$$m(A) = 3\frac{3}{4}$$

Пусть множество  $B$  - объединение клеток:  $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0.5\}$ ,

$$\begin{aligned} &\{(x, y) : 0.5 \leq x \leq 1, 0.5 \leq y \leq 1\}, \\ &\{(x, y) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}, \\ &\{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 1.5\}, \\ &\{(x, y) : 1.5 \leq x \leq 2, 1.5 \leq y \leq 2\}, \\ &\{(x, y) : 2 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 2.5\}, \\ &\{(x, y) : 2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}, \\ &\{(x, y) : 2.5 \leq x \leq 3, 2.5 \leq y \leq 3\}. \end{aligned}$$

$$m(B) = 5\frac{1}{4}$$

$$m(B) - m(A) = 1.5$$