0.1 Вопрос 1.

Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **<u>сходящимся</u>**, если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Если предел последовательности частичных сумм числового ряда не существует или бесконечен, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **<u>расходящимся</u>**.

<u>Суммой сходящегося числового ряда</u> $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется предел последовательности его частичных сумм, то есть, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

<u>Арифметические свойства</u>.

Пусть даны числовые последовательности $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \to a$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k \to b$, тогда верны следующие свойства:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (c_1 \cdot x_n \pm c_2 \cdot y_n) = c_1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm c_2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = c_1 \cdot a \pm c_2 \cdot b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} ((c_1 \cdot x_n) \cdot (c_2 \cdot y_n)) = c_1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot c_2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = c_1 \cdot a \cdot c_2 \cdot b$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_1 \cdot x_n}{c_2 \cdot y_n} = \frac{c_1 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n}{c_2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{c_1 \cdot a}{c_2 \cdot b}, b \neq 0, y_n \neq 0, c_2 \neq 0$

<u>Свойства остатков</u>.

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то сходится и любой его остаток. Если сходится какой-нибудь остаток ряда, то сходится и сам ряд.

<u>Свойства группировки</u>.

Если ряд $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд $B = \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ полученный путем группировки членов ряда A без изменения порядка их расположения, также сходится и его сумма равна сумме ряда A.

<u>Задача</u>

Найдите n-ю частичную сумму и сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 - n^{-2})$.

<u>Решение:</u>

С помощью необходимого признака сходимости, проверим, не расходится ли ряд:

$$\lim_{n\to\infty} \ln(1 - n^{-2}) = \ln \lim_{n\to\infty} (1 - n^{-2}) = \ln 1 = 0$$

Рассмотрим, что сокращается при суммировании a_{n-1}, a_n и a_{n+1}:

$$a_{n-1} + a_n + a_{n+1} = \ln(1-(n-1)^{-2}) + \ln(1-n^{-2}) + \ln(1-(n+1)^{-2}) =$$
$$= \ln\frac{(n-1)^2-1}{(n-1)^2} + \ln\frac{n^2-1}{n^2} + \ln\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \ln\frac{(n-1)-1}{n-1}\cdot\frac{(n-1)+1}{n-1} +$$
$$+ \ln\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n} + \ln\frac{(n+1)-1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)+1}{n+1} = (\ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n-2) - \ln(n-1)) +$$
$$+ (\ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n-1) - \ln(n)) + (\ln(n+2) - \ln(n+1) + \ln(n) - \ln(n+1)) =$$
$$= \ln(n-2) - \ln(n-1) + \ln(n) - \ln(n+1)$$

Тогда

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(1-n^{-2}) = \ln(2-1) - \ln 2 + \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\frac{n+1}{2n}$$

Откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \ln(1-n^{-2}) = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{2n} = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$$

0.2 Вопрос 3.

Критерий Коши.

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ неотрицательна, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$. При $\lambda > 1$ ряд расходится, при $\lambda < 1$ ряд сходится.

Доказательство расходимости гармонического ряда.

Применим доказательство от противного , предположим, что гармонический ряд сводится к сумме S:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = S$$

Гармонический ряд можно представить в виде суммы 2х рядов:

$$S = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots)$$

$$S = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots) + \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots)$$

$$S = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots) + \frac{1}{2}S$$

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

$$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots \neq 0$$

Отсюда получаем, что наше предположение не верно, а значит гармонический ряд расходится.