

2023 秋线代 B 期末

2024 年 1 月 13 日

1.(16') 设 $\alpha_1 = (1, 3, 2, 3)^T, \alpha_2 = (2, 8, 2, 8)^T, \alpha_3 = (-1, 0, -4, -1)^T, \alpha_4 = (-2, -4, -3, -6)^T \in \mathbb{R}^4$, 求与向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ 等价的正交单位向量。

2.(15') 设 $Q(x, y, z) = \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2xz - 2yz$ 为二次型。试确定:

- (1). λ 取何值时, $Q(x, y, z)$ 正定。
- (2). λ 取何值时, $Q(x, y, z)$ 负定。
- (3). $\lambda = 2$ 时, $Q(x, y, z)$ 是何种二次型。

3.(12') 试求出 $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = I\}$ 。

4.(12') 试求出 3 阶可逆矩阵 S , 可同时相似对角化矩阵 A, B , 并给出 A, B 的相似标准形。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 6 \\ -4 & -4 & 6 \\ -6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

5.(10') 设 $M_n^0(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$ 。证明:

- (1). $M_n^0(\mathbb{K})$ 为 $M_n(\mathbb{K})$ 的子空间。
- (2). $M_n(\mathbb{K}) = \langle E_{ii} \mid 1 \leq i \leq n \rangle \oplus M_n^0(\mathbb{K})$

6.(10') 设 \mathcal{A} 为 \mathbb{K} 上 n -维线性空间 V 上的线性变换。证明: \mathcal{A} 可逆 $\iff V = V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V = \mathcal{A}(V_1) \oplus \mathcal{A}(V_2)$ 。

7.(13) $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), B \in M_{s \times l}(\mathbb{K})$. $Y = \{X \in M_{n \times s}(\mathbb{K}) \mid AXB = 0\}$, $\text{rank}(A) = r, \text{rank}(B) = t$ 。试用 n, s, r, t 表示 $\dim Y$, 并给出证明。

8.(12) $A, B \in M_n(\mathbb{K}), A^2 = A, B^2 = B$ 。证明: $A \sim B \iff \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ 。