# 北京大学数学学院期中试题

## 考试科目 高等代数Ⅰ　考试时间 2017 年 11 月 8 日

一.　1）（10 分）叙述向量空间 $K^n$ 的线性子空间的维数和基底的定义：

若 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 是 $K^n$ 的子空间 V 中的一组向量，满足以下两条件

（1）$\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 线性无关；

（2）$\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 能线性表出子空间 V 的每个向量；

则称 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 是子空间 V 的一组基，称基底包含的向量个数 r 为子空间 V 的维数（V 的不同基底包含的向量个数是一样的）。

2）（10 分）已知向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 的秩为 r，且部分组 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 的能线性表出 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$. 证明：$\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 线性无关 .

证：若部分组 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 线性相关，则 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 的秩 $<r$.

另一方面，部分组 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 能线性表出 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$，故

$\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 的秩 $\geq$ $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 的秩 $=r$，矛盾！

故 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 线性无关 .

二.（10 分）计算 n 阶行列式
$$\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}.$$

解： 记此 n 阶行列式为 $D_n$ .

我们用数学归纳法证明 $D_n = 1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n}$ .

显然， $D_1 = 1 + a^2$，此时命题成立；

以下假设公式对低于 n 阶的行列式都成立，考察 n 阶行列式的情况.

对 $D_n$ 的第一列作代数余子式展开 ：

$$D_n = (1 + a^2) D_{n-1} + (-1)\, a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & 0 & \cdots & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1 + a^2) D_{n-1} + (-1)\, a\, a\, D_{n-2}$$

$$= (1 + a^2)(1 + a^2 + \dots + a^{2n-2}) + (-1)(a^2 + a^4 + \dots + a^{2n-2})$$

（归纳假设）

$$= 1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n}.$$

故此公式对任意 n 阶行列式成立。

三．(16 分) 设列向量 $\alpha_k = [1 \quad k \quad k^2 \quad k^3]^T$， $1 \le k \le 5$ .

1) 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 能否线性表出 $\alpha_4$？若可以，求所有表出系数;

2) 求向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ 线性表出 $\alpha_5$ 的所有表出方式 .

解：1）方阵 $[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]$的行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} = (4-1)(4-2)(4-3)(3-1)(3-2)(2-1) \ne 0 .$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关 . 特别地, $\alpha_4$ 不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

2) 记 $A = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5]$， $X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T$ .

问题等价于求线性方程组 $AX = \alpha_5$ 的解集.

显然， $X=[\,0\ 0\ 0\ 0\ 1\,]$ 是此方程组的一个特解.

注意到 A 秩为 4，齐次方程组 $AX=0$ 解空间的维数为 $5-4=1$ .

设 B 是在 A 的下方再加上一行得到的 5 级方阵 . 则 B 最后一行 5 个元素的代数余子式为

$$A_{51}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\2^2&3^2&4^2&5^2\\2^3&3^3&4^3&5^3\end{vmatrix}=(5-2)(5-3)(5-2)(4-2)(4-3)(3-2)=12\,;$$

$$A_{52}=-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&4&5\\1&3^2&4^2&5^2\\1&3^3&4^3&5^3\end{vmatrix}=-(5-1)(5-3)(5-4)(4-1)(4-3)(3-1)=-48\,;$$

$$A_{53}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&5\\1&2^2&4^2&5^2\\1&2^3&4^3&5^3\end{vmatrix}=(5-1)(5-2)(5-4)(4-1)(4-2)(2-1)=72\,;$$

$$A_{54}=-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&5\\1&2^2&3^2&5^2\\1&2^3&3^3&5^3\end{vmatrix}=-(5-1)(5-2)(5-3)(3-1)(3-2)(2-1)=-48\,;$$

$$A_{55}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}=(4-1)(4-2)(4-3)(3-1)(3-2)(2-1)=12\,;$$

由于向量 $[\,A_{51}\ \ldots\ A_{55}\,]=12\,[\,1\ \text{-}4\ 6\ \text{-}4\ 1\,]$ 与 A 的行向量都正交， 故 $[\,1\ \text{-}4\ 6\ \text{-}4\ 1\,]^T$ 构成 $AX=0$ 解空间的基. 方程组 $AX=\alpha_5$ 的一般解为

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\-4\\6\\-4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\\-4k\\6k\\-4k\\1+k\end{bmatrix},\quad \forall\, k\in K\,.$$

四．（30 分）已知矩阵 A 的列向量依次为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$，且对 A 作若干次初等

行变换，可以得到矩阵 $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

1) 求 A 的行简化阶梯型矩阵 J；

2) 求 A 列向量组的一个极大无关组，并用此极大无关组表出 A 的每个列向量;

3) 求 A 行空间的一组基，并确定当 $a, b$ 取何值时，向量

$$\beta = [\,1+a \quad a \quad a+b \quad b \quad 1+b\,]$$

落在 A 的行空间里，写出此时 β 在所求 A 行空间基底下的坐标;

4) 求齐次方程组 $AX = 0$ 解空间的一组基；

5) 将 A 写成 EC 的形式，其中 E 是列满秩的矩阵，C 是行满秩的矩阵.

解： 1) 由于 B 与 A 的简化阶梯型矩阵相同， 故对 B 作行变换

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到 A 的简化阶梯型 J.

2) 简化阶梯型 J 的主元在第 1, 2, 4 列，故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 构成 A 列向量组的一个极大无关组，且由 J 列向量的表出关系可以看出

$$\alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_2, \qquad \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2;$$

3) 简化阶梯型 J 的三个非零行

$$\beta_1 = [\quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad],$$
$$\beta_2 = [\quad 0 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad],$$
$$\beta_3 = [\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad]$$

是 A 行空间的一组基 .

若向量 $\beta = [\,1+a \quad a \quad a+b \quad b \quad 1+b\,]$ 落在 A 的行空间里,

比较第 1, 2, 4 位置分量， 必有 $\beta = (1+a)\beta_1 + a\beta_2 + b\beta_3$.

再比较第 3, 5 分量，得

$$(1+a)+a(-2)+b\,0=a+b, \quad (1+a)+a+b\,0=1+b.$$

由此解得 $a=1/4$， $b=1/2$ .

反之，当 $a=1/4$ , $b=1/2$ 时，确有 $\beta=(1+a)\beta_1+a\beta_2+b\beta_3$ .

此时 β 落在 A 行空间里， β 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 下的坐标是 $[\,5/4 \quad 1/4 \quad 1/2\,]^T$.

4) $AX=0$ 解的公式为

$$\begin{cases} x_1 = -x_3-x_5 \\ x_2 = 2x_3-x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases}, \quad x_3, x_5 \text{ 为自由变量 .}$$

通解为 $$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x_3-x_5\\ 2x_3-x_5\\ x_3\\ 0\\ x_5 \end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix} -1\\ 2\\ 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix} -1\\ -1\\ 0\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}.$$

5) A 可写成

$$A=EC=[\,\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_4\,]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

其中 E 是由 A 的主元列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 排成， E 列满秩;

C 是由 A 的简化阶梯型 J 的非零行排成， C 行满秩

五.（14 分）设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 是 $R^m$ 中一组线性无关的列向量， $\beta_1,\ldots,\beta_s$ 是 $R^n$ 中一组线性无关的列向量. 证明：若有系数 $c_{ij}\in R$ , $1\le i\le r$ , $1\le j\le s$ ,

使得 $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} c_{ij}\alpha_i\beta_j^T=0$，则每个系数 $c_{ij}$ 必须都取 0 .

证： 记 $\gamma_i = c_{i1}\beta_1+\ldots+c_{is}\beta_s$ ， $1\le i\le r$ . 于是

$$\alpha_1\gamma_1^T+\ldots+\alpha_r\gamma_r^T=0.$$

若有某个系数 $c_{kl}\neq 0$，则由 $\beta_1,\ldots,\beta_s$ 线性无关可推得 $\gamma_k\neq 0$ .

不妨设$\gamma_k$的第 t 个分量不为零．记$\gamma_i$ 的第 t 个分量为$b_i, 1 \le i \le r$，

则 $b_1, \dots, b_r$ 不全为零．另一方面，矩阵 $\alpha_1\gamma_1^T + \dots + \alpha_r\gamma_r^T = 0$．

故其第 t 列为 0， 即 $b_1\alpha_1 + \dots + b_r\alpha_r = 0$．这与$\alpha_1, \dots, \alpha_r$线性无关

矛盾！

六．（10 分）设 ε 是任意一个固定的正数．证明：任给一个 n 级矩阵 A，总存在一个对角矩阵 D，其每个对角元要么为 ε，要么为 -ε，且 $|A + D| \ne 0$．

证：对 A 的阶数 n 应用数学归纳法．

当 A 是 1 阶矩阵时，$A + \varepsilon$，$A - \varepsilon$ 总有一个非零．命题成立．

以下假设命题对 n - 1 阶矩阵成立．考察 n 级矩阵 $A = [a_{ij}]$的情况：

记 $A_1$ 是划去 A 的第一行和第一列，剩下的元素排成的 n - 1 级子阵．

由归纳假设，存在 n - 1 级对角矩阵 $D_1$，其每个对角元为 ε 或 -ε，

使得 $|A_1 + D_1| \ne 0$．

记 n 级矩阵 $D(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix}$．将 $|A + D(x)|$ 按第一行作代数余子式

展开，得

$$|A + D(x)| = (x + a_{11})|A_1 + D_1| + c,$$

这里 c 是 $A + D(x)$ 的第一行除 (1, 1) 元外其余元素 $a_{12}, \dots, a_{1n}$与

各自代数余子式的乘积之和，不含 x．由于$|A_1 + D_1| \ne 0$，总可取

$x = \varepsilon$ 或 $-\varepsilon$，使得 $|A + D(x)| \ne 0$．命题得证．