

1.(10') 判断下面方程组是否有解。若有解给出方程组的全部解，若无解请给出理由。

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

2.(20') 已知线性方程组

$$\begin{cases} (a_1 + b)x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = 0, \\ a_1x_1 + (a_2 + b)x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = 0, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + (a_3 + b)x_3 + \cdots + a_nx_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + (a_n + b)x_n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$  .

(1). 计算系数矩阵的行列式。

(2). 讨论  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  满足什么条件时，方程组仅有零解；方程组有非零解。

(3). 有非零解，请给出方程组的一个基础解系。

3.(15') 计算下面行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

4.(13') 求下面行列式中所有元素的代数余子式之和。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

5.(10') 已知向量组  $\alpha_1 = (3, 4, -2)^T, \alpha_2 = (2, -5, 0)^T, \alpha_3 = (5, 0, -1)^T, \alpha_4 = (3, 3, -3)^T$ , 求这个向量组的一个极大线性无关组。

6.(12') 求如下  $n$  阶方阵的秩

$$\begin{pmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{pmatrix}$$

7.(10') 给定  $n$  个彼此不相同的数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . 设  $b_1, b_2, \dots, b_n$  为任意  $n$  个数。证明：存在唯一一个次数不超过  $n - 1$  的多项式  $f(x)$  使得  $f(a_i) = b_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

8.(10') 设  $M$  为行列式不为零的 5 阶矩阵。证明：存在一个行列式不为零的 5 阶上三角矩阵  $B$  使得  $BM$  具有如下性质：对于  $\forall 1 \leq i \leq 5$ , 都存在且只存在  $BM$  的一行，使得该行的前  $i - 1$  个位置为 0，第  $i$  个位置不为 0.