北京大学数学学院期中试题

2018－2019 学年第二学期

考试科目 高等代数II　考试时间 2018 年 4 月 22 日

姓　名 ＿＿＿＿＿＿　学　号 ＿＿＿＿＿＿＿

一. (16 分)

(1) 求矩阵 $A \in M_3(\mathbb{R})$, 使得映射 $X \mapsto AX$ 是 $\mathbb{R}^3$ 沿着子空间 $\langle [1\ 2\ 3]^T \rangle$ 向 $\langle [0\ 1\ 0]^T, [0\ 0\ 1]^T \rangle$ 作的投影变换;

(2) 求矩阵 $B \in M_3(\mathbb{R})$ ，使得映射 $X \mapsto BX$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 向子空间 $\langle [1\ 2\ 3]^T \rangle$ 作的正交投影变换.

二.填空题 (30 分)

1) 设 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. 当 A 秩 ＝＿＿ 时, 由 $AB = AC$ 能推出矩阵 $B = C$;

2) 在 $K[x, y, z]$ 中由全体 n 次齐次多项式及零多项式构成的 K－线性空间的维数是＿; 由全体 5 次齐次对称多项式及零多项式构成的 K－线性空间的维数是＿ ;

3) 当 $a =$＿时, $A = \begin{bmatrix} 2-a & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-a & 0 & a \end{bmatrix}$ 在 R 上可对角化;

4) 设实矩阵 A 满足 $A^2 = A$, 且 ImA 与 KerA 互为正交补. 则以下说法正确的有＿＿(多选)

A. A 是正交矩阵;　B. A 是对称矩阵;

C. $I - A$ 是正交矩阵;　D. $I - 2A$ 是正交矩阵.

三. (10 分) 设 $f(x)=x^3-3x+1$, $g(x)=x^2-1\in Q[x]$.

1) 证明: $(f(x), g(x))=1$;

2) 求 $u(x), v(x)\in Q[x]$, 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$;

3) 设 θ 是 $f(x)$ 的一个实根, 求 2 次多项式 $h(x)\in Q[x]$,

使得 $h(\theta)\,g(\theta)=1$.

四. (10 分) 将对称多项式 $f(x,y,z)=(x^2-yz)(y^2-xz)(z^2-xy)$

写成初等对称多项式 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的多项式形式.

五. (24 分) 设线性变换 $\mathcal{A}$ 在空间 V 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_5$ 下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}2&1&6&2&3\\0&1&0&0&1\\1&0&3&0&2\\1&1&3&0&3\\1&0&3&1&1\end{bmatrix}\in M_5(R) .$$

1) 求 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和 $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ 的一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_r$.

2) 求 $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}+\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ 与 $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}\cap\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ 的维数与基底,

判断 $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ 与 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ 是否为直和 ;

3) 求商空间 $V/\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ 的维数与一组基;

4) 证明: 将线性变换 $\mathcal{A}$ 的定义域限制在 $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ 上, 给出 $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ 到

自身的线性变换 $\mathcal{B}$. 求 $\mathcal{B}$ 在 $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ 的基 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 下的矩阵.

六. (10 分) 用 $h(n)$ 表示从矩阵空间 $M_n(R)$ 中可选出的线性无关

且两两可交换的上三角矩阵的最大数目. 证明:

$$h(n)\le h(n-1)+n/2 .$$