高等代数期中试题参考答案

一．(24 分)．设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&2&2&0\\0&2&5&2\\0&0&2&a\end{bmatrix}$，列向量 $\beta=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\a-2\end{bmatrix}$.

1) 当 a 取哪些值时，A 的列向量组能唯一地线性表出 β；

2) 当 a 取何值时，$AX=\beta$ 有无穷多解，将此时的解集合用向量表示；

3) 将矩阵 A 写成 BC 的形式，其中 B 是对角元都为 1 的下三角矩阵，

C 是上三角矩阵;

4) 求 A 第 1 行上 4 个元素的余子式的和.

解：对增广矩阵作行变换，化为阶梯形

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&2&2&0&0\\0&2&5&2&1\\0&0&2&a&a-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&2&0&0\\0&2&5&2&1\\0&0&2&a&a-2\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&2&0&0\\0&0&1&2&1\\0&0&2&a&a-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&2&0&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&a-4&a-4\end{bmatrix}$$

1) 当 $a\neq 4$ 时，$AX=\beta$ 有唯一解，A 的列向量组能唯一地线性表出 β；

2) 当 $a=4$ 时，$AX=\beta$ 有无穷多解. 反向消元，可将阶梯形矩阵化为

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&2&0&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&-4&-2\\0&0&1&2&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&4&2\\0&1&0&-4&-2\\0&0&1&2&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由此得解的公式

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 4\,x_4 \\ x_2 = -2 + 4x_4 \\ x_3 = 1 - 2x_4 \end{cases}$$ 其中 x_4是自由变量;

通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-4\,x_4 \\ -2+4x_4 \\ 1-2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

x_4取遍数域 K.

3) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{bmatrix}$$

4) A 第 1 行上 4 个元素的余子式的和

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{vmatrix}$$ (按第一行代数余子式展开)

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & -13 & -4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -13 & -4 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 13a - 8.$$

二.（12 分）已知向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 能线性表出向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$，且两向量组

的秩相等. 证明: $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 也能线性表出 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$.(每一步要有依据)

证: 不妨设 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的一个极大无关组, 则 r 也是

向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的秩. 对于向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 中的任一向量 α_i ，向量组

$\beta_1,\cdots,\beta_r,\alpha_i$ 都可被向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表出. 故 $\beta_1,\cdots,\beta_r,\alpha_i$ 的

秩 $\le r$. 于是 $\beta_1,\cdots,\beta_r,\alpha_i$ 线性相关. 但 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关, 由课本引理,

$\beta_1,\cdots,\beta_r$ 能线性表出 α_i. 于是 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 能线性表出 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$.

三.（12 分）计算 n 阶行列式 $A_n=\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$.

解: 由矩阵分解

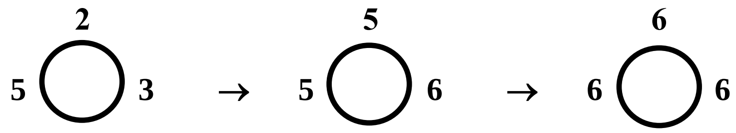
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

知 $A_n=1/(n!)^2$.

四.（12 分）现有若干有理数排成一个圆圈. 规定一次操作为: 将任意相邻

的两个有理数都加上同一个有理数, 其余各数不变. 下图是两次操作的

示意图, 将圆圈上的三个数变为了相同的数.



试用线性代数的理论解决以下问题：能否将 1, 2, 3, 5 这 4 个有理数以某种方式排列在圆圈上，使得通过若干次操作将这 4 个数变为相同的数？若可以，请画出最初的排列方式与具体的操作步骤；若不能，请说明理由.

解：问题等价于：用列向量

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$ 能否线性表出 $\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}$，其中 a,b,c,d

是 1, 2, 3, 5 的一个排列（注意 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$）.

为此我们取这四个向量生成的子空间 V 的一组好算的基. 将这些向量写成行排成矩阵，作行变换化为简化阶梯形

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

由此得到 V 的一组的基 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$. 若 $\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\in V$，则必有

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\text{ 且 } d=a-b+c.$$

反之，若 $a+c=b+d$，则 $\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\in V$. 但容易看出无法将 1, 2, 3, 5 分成和相等的两部分. 故问题无解.

五.（20 分）已知列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5\in\mathbf{R}^4$ 的秩为 3，且

$$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2\ ,\quad \alpha_5=-\alpha_3+\alpha_4\ .$$

1) 写出矩阵 $A=[\,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_5\,]$ 的行简化阶梯型;

2) 写出 A 的一个列极大无关组;

3) 求 A 行空间的一组基；若已知向量 $\beta=[1\ 1\ a\ a\ b]$ 属于 A 的行空间，写出 β 在此基下的坐标及 a,b 的值;

4) 求线性方程组 $AX=\alpha_4+\alpha_5$ 的通解 (写成向量形式);

5) 求所有矩阵 B，使得 $A=[\,\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4\,]B$.

解: 2) 考察向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$ 的部分组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，其向量个数刚好等于向量组的秩，且能表出向量组其余的向量:

$$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2\ ,\quad \alpha_5=-\alpha_3+\alpha_4=-2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4\,.$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$ 的一个极大无关组.

1) $A=[\,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_5\,]$ 的行简化阶梯型为

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

注: 作行变换不改变列向量之间的线性关系. 特别地，简化阶梯型的第 1, 2, 4 列可用与 A 相同的系数线性表出第 3，第 5 列.

3) 简化阶梯形的非零行

$\beta_1=[\,1\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ -2\,],\beta_2=[\,0\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ \ 1\,],\beta_3=[\,0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\,]$

构成 A 行空间的一组基.

若 $\beta=[1\ 1\ a\ a\ b]$ 属于 A 的行空间，则必有

$$\beta=\beta_1+\beta_2+a\,\beta_3\quad \text{且}\ \ a=2-1=1,\ b=-2+1+a=0.$$

$\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $[1\ \ 1\ \ 1]^T$.

4) 线性方程组 $AX=\alpha_4+\alpha_5$ 的一个特解为 $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$.

导出组 $AX=0$ 解的公式为

$$\begin{cases} x_1 = -2\,x_3 + 2\,x_5 \\ x_2 = \quad x_3 - x_5 \\ x_4 = \ -x_5 \end{cases}$$ 其中 x_3, x_5 是自由变量;

通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\,x_3+2\,x_5\\x_3-x_5\\x_3\\-x_5\\x_5\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

故线性方程组 $AX=\alpha_4+\alpha_5$ 的通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix},$$

x_3, x_5 取遍所在数域 K .

5) 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关, 满足条件 $A=[\,\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4\,]B$ 的矩阵 B 是唯一的, 即 A 的行简化阶梯形的非零行:

$$B=\begin{bmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

六.(12 分)已知线性方程组 I: $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad\cdots\qquad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$

有解, 但在方程组 I 里添加方程 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=0$

后又变得无解. 证明: 方程组 I 导出组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\cdots \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解都是方程 $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0$ 的解.

解：记方程组 I 为 $AX = \beta$， 设 $\delta = [\, c_1 \;\; c_2 \;\cdots\; c_n \,]^T$

反证法：若导出组 $AX = 0$ 存在一个解 γ 不满足

$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0$，即 $\delta^T\gamma \neq 0$.

设 α 是方程组 I 的一个特解，即 $A\alpha = \beta$.

则对任意 $c \in K$， $\alpha + c\gamma$ 也是方程组 I 的解.

由于 $\delta^T\gamma \neq 0$，取 $c = -\,(\delta^T\alpha)/(\delta^T\gamma)$，就有

$$\delta^T(\alpha + c\gamma) = 0 \;.$$

这说明 $\alpha + c\gamma$ 同时满足方程组 $AX = \beta$ 及方程 $\delta^TX = 0$,

这与题设条件矛盾.

注：此题的几何意义是 若 K^n 里某个高维的平面(线性流形)与某个

n-1 维子空间 V 没有交点，则总可以把这个高维面平移到 V 里面.

七．（8 分）设 A 是 n 级实矩阵且满足 $A^2 = 0$．记 A 的列空间为 V_1，

A^T的列空间为 V_2，$AA^T + A^TA$ 的列空间为 V．证明：

1) $V_1 \cap V_2 = \{\, 0 \,\}$；

2) $V_1 + V_2 = V$． (注： $V_1 + V_2 = \{\, \alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2 \}$)

证: 1) 若列向量 $\alpha \in V_1 \cap V_2$ ，即存在列向量 $\beta, \gamma \in R^n$，使得

$$\alpha = A\beta = A^T\gamma \;.$$

则 $\alpha^T\alpha = \gamma^T A A \beta = 0$．于是 $\alpha = 0$.

2) 记矩阵 $B = AA^T + A^TA$. 容易看出，若 $\alpha \in V$ ，即存在 $\beta \in R^n$，使得

$$\alpha = (AA^T + A^TA)\beta = A\,(A^T\beta) + A^T(A\beta),$$

则 $\alpha \in \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$. 于是有 $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$.

反之, 注意到 $\mathbf{A}$ 是实矩阵, 我们有 $\mathbf{AA^T}$秩 $=$ $\mathbf{A}$秩. 类似地, 有

$$\mathbf{AA^T}(\mathbf{AA^T})^{T}\text{秩} = \mathbf{AA^T}\text{秩} = \mathbf{A}\text{秩}.$$

又由于 $\mathbf{A}$ 的列向量组能表出 $\mathbf{AA^T}(\mathbf{AA^T})^{T}$ 的列向量组,

我们推出 $\mathbf{A}$ 的列空间 $\subseteq \mathbf{AA^T}(\mathbf{AA^T})^{T}$的列空间.

另一方面, $\mathbf{AA^T}(\mathbf{AA^T})^{T} = (\mathbf{AA^T})^2 = (\mathbf{AA^T} + \mathbf{A^TA})\mathbf{AA^T}$.

故 $\mathbf{AA^T}(\mathbf{AA^T})^{T}$的列空间 $\subseteq$ $(\mathbf{AA^T} + \mathbf{A^TA})$ 的列空间.

于是有 $\mathbf{V}_1 \subseteq \mathbf{V}$. 类似地, 也有 $\mathbf{V}_2 \subseteq \mathbf{V}$.

故 $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}$.