北京大学数学学院期中试题

考试科目 高等代数Ⅰ　考试时间 2017 年 11 月 8 日

姓　　名 ____________　　学　　号 ________________

注： A^T 表示矩阵 A 的转置.

一．（20 分）

1）叙述向量空间 K^n 的线性子空间的维数和基底的定义；

2）已知向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的秩为 r，且部分组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 的能线性表出 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$．证明： $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 线性无关．

二．（10 分）求 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$.

三．（16 分）设列向量 $\alpha_k = [1 \quad k \quad k^2 \quad k^3]^T$， $1 \le k \le 5$．

1) 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 能否线性表出 α_4？若可以，求所有表出系数;

2) 求向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ 线性表出 α_5 的所有表出方式．

四．（30 分）已知矩阵 A 的列向量依次为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$，且对 A 作若干次初等行变换，可以得到矩阵 $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

1) 求 A 的行简化阶梯型矩阵 J；

2) 求 A 列向量组的一个极大无关组，并用此极大无关组表出 A 的每个列向量;

3) 求 A 行空间的一组基，并确定当 a,b 取何值时，向量

$$\beta=[\,1+a\quad a\quad a+b\quad b\quad 1+b\,]$$

落在 A 的行空间里，写出此时 β 在所求 A 行空间基底下的坐标;

4) 求齐次方程组 $AX=0$ 解空间的一组基；

5) 将 A 写成 BC 的形式，其中 B 是列满秩的矩阵，C 是行满秩的矩阵.

五.（14 分）设 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 是 R^m 中一组线性无关的列向量，$\beta_1,\dots,\beta_s$ 是 R^n 中一组线性无关的列向量. 证明：若有系数 $c_{ij}\in R,\ 1\le i\le r,\ 1\le j\le s$，使得 $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}c_{ij}\alpha_i\beta_j^T=0$，则每个系数 c_{ij} 必须都取 0.

六.（10 分）设 ε 是任意一个固定的正数. 证明：任给一个 n 级矩阵 A，总存在一个对角矩阵 D，其每个对角元要么为 ε，要么为 $-\varepsilon$，且 $|A+D|\neq 0$.