北京大学数学学院期中试题

2017－2018 学年第二学期

考试科目 高等代数II　　考试时间 2018 年 5 月 18 日

姓　　名 ____________　　学　　号 ______________

一（15 分）设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换，且 $\mathcal{A}$ 在 V 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A．若基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 U．求 $\mathcal{A}$ 在基 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 下的矩阵 (要求推导过程，每一步注明理由).

解：　$\mathcal{A}(\beta_1 \dots \beta_n)$

$= \mathcal{A}((\alpha_1 \dots \alpha_n) U)$　　(过渡矩阵定义)

$= (\mathcal{A}(\alpha_1 \dots \alpha_n)) U$　(组合的像等于像作组合)

$= ((\alpha_1 \dots \alpha_n) A) U$　($\mathcal{A}$ 在$\{\alpha_i\}$下的矩阵为 A)

$= (\alpha_1 \dots \alpha_n)(AU)$　　(结合律)

$= ((\beta_1 \dots \beta_n) U^{-1})(AU)$　(过渡矩阵定义)

$= (\beta_1 \dots \beta_n)(U^{-1} AU)$　　(结合律)

故 $\mathcal{A}$ 在基 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 下的矩阵为 $U^{-1}AU$.

二.（20 分）

1) 已知多项式 $h_1(x), h_2(x), h_3(x) \in Q[x]$ 两两互素,

证明：存在 $u_i(x) \in Q[x]$, $i=1, 2, 3$, 使得

$$u_1(x)h_2(x)h_3(x)+u_2(x)h_3(x)h_1(x)$$
$$+u_3(x)h_1(x)h_2(x)=1.$$

解：由 $(h_1(x), h_2(x))=1$ 及 $(h_1(x), h_3(x))=1$ 知

$$(h_1(x),\ \ h_2(x)h_3(x))=1.$$

故存在 $p_1(x), p_2(x) \in Q[x]$, 使得

$$p_1(x)h_1(x)+p_2(x)h_2(x)h_3(x)=1. \qquad (*)$$

由 $(h_2(x), h_3(x))=1$ 知存在 $q_1(x), q_2(x) \in Q[x]$,

使得

$$q_1(x)h_2(x)+q_2(x)h_3(x)=1.$$

代入(*)式，得

$$p_1(x)h_1(x)\big(q_1(x)h_2(x)+q_2(x)h_3(x)\big)$$
$$+p_2(x)h_2(x)h_3(x)=1.$$

令 $u_1(x)=p_2(x)$, $\quad u_2(x)=p_1(x)q_2(x)$,

$u_3(x)=p_1(x)q_1(x)$ 即可满足题目要求.

2) 求一个3 次的多项式 $f(x)\in R[x]$, 使得

$$f(1)=6,\quad f'(1)=8 \text{ 且 } x^2+1\mid(f(x)-2x).$$

解: 由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的泰勒展式

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+c_1(x-1)^2+c_2(x-1)^3$$

$(c_1, c_2\in R)$ 知题设条件 $f(1)=6, f'(1)=8$ 等价于

$$(x-1)^2\mid(f(x)-6-8(x-1)).$$

对 $(x-1)^2, x^2+1$ 作辗转相除 :

$$(x-1)^2 = 1(x^2+1)-2x;$$

$$(x^2+1) = (-1/2\,x)(-2x)+1.$$

故 $1=(x^2+1)+1/2\,x(-2x)$

$$=(x^2+1)+1/2\,x\big((x-1)^2-(x^2+1)\big)$$

$$=(2-x)/2\quad(x^2+1)\quad+\quad x/2\quad(x-1)^2.$$

记 $p_1(x)=(2-x)(x^2+1)/2,$

$$p_2(x)= x(x-1)^2/2.$$

则有

$$p_1(x)=1 \bmod (x-1)^2,\quad p_1(x)=0 \bmod (x^2+1);$$

$$p_2(x)=0 \bmod (x-1)^2,\quad p_2(x)=1 \bmod (x^2+1).$$

计算 $(6+8(x-1))\,p_1(x)+2x\,p_2(x)$

$$=(4x-1)(2-x)(x^2+1)+x\,x(x-1)^2$$

$$= -3x^4+7x^3-5x^2+9x-2$$

$$= -3(x^2+1)(x-1)^2+ x^3+x^2+3x+1$$

三次多项式 x^3+x^2+3x+1 即满足题目要求.

三.（15 分）已知 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 是 $x^3 + ax + b$ 的三个复根.

求 $(\theta_1\theta_2 + \theta_3)(\theta_1\theta_3 + \theta_2)(\theta_2\theta_3 + \theta_1)$ 的值.

解: 由韦达定理,

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0,$$

$$\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_1 = a,$$

$$\theta_1\theta_2\theta_3 = b.$$

于是

$$
\begin{aligned}
&(\theta_1\theta_2 + \theta_3)(\theta_1\theta_3 + \theta_2)(\theta_2\theta_3 + \theta_1) \\
= \ & \theta_1^2\theta_2^2\theta_3^2 + \theta_1^3\theta_2\theta_3 + \theta_2^3\theta_3\theta_1 + \theta_3^3\theta_2\theta_1 \\
& + \theta_1^2\theta_2^2 + \theta_1^2\theta_3^2 + \theta_2^2\theta_3^2 + \theta_1\theta_2\theta_3 \\
= \ & b^2 + b + \theta_1\theta_2\theta_3(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) \\
& + (\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_1)^2 - 2\theta_1\theta_2\theta_3(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
= \ & b^2 + b + b(0 - 2a) + a^2 \\
= \ & a^2 - 2ab + b^2 + b
\end{aligned}
$$

四.（30 分）设 A 是线性空间 V 上的线性变换，且 A 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_4$ 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&2&0\\2&2&1&1\end{bmatrix}$.

1) 求 A 的特征多项式与特征子空间;

2) 将 V 分解为根子空间 W_1 与 W_2 的直和，求 $W_i\,(i=1,2)$ 的基并写出限制变换 $A\,|\,W_i$ 在此基下的矩阵;

3) 求 A 的最小多项式；

4) 求次数 ≤ 2 的多项式 $h_i(x), i=1,2$, 使得 $h_i(A)$是沿 W_{3-i} 向 W_i 所作的投影变换；

5) 若 V 上的线性变换 B 与 A 可交换，以上 W_1, W_2 是否一定也是 B 的不变子空间？请说明理由.

解: 1)　A 的特征多项式为

$$|xI-A|=\begin{vmatrix}x-2&-1&0&0\\1&x&0&0\\0&0&x-2&0\\-2&-2&-1&x-1\end{vmatrix}=(x-1)^3(x-2)$$

A 的特征值为 1 (代数 3 重), 2 (代数 1 重).

对矩阵 A − I 做初等行变换，得

$$A-I=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\-1&-1&1&0\\0&0&1&0\\2&2&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$(A-I)X=0$ 解的公式为 $\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$，$x_2, x_4$ 是自由变量.

故
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix} = -x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

于是 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_4$ 是特征子空间 $\mathrm{Ker}(A - I)$ 的一组基底.

对矩阵 $A - 2I$ 做初等行变换，得

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(A-2I)X=0$ 解的公式为 $\begin{cases} x_1 = 1/3\,x_4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1/3\,x_4 \end{cases}$，$x_4$ 是自由变量.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3\,x_4 \\ 0 \\ 1/3\,x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = 1/3\,x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

故 $\alpha_1 + \alpha_3 + 3\alpha_4$ 是特征子空间 $\mathrm{Ker}(A - 2I)$ 的一组基底.

2) -3) 由 A 特征多项式 $(x-1)^3(x-2)$ 的分解得根子空间的直和分解：

$$V = W_1 \oplus W_2 = \mathrm{Ker}(A - I)^3 \oplus \mathrm{Ker}(A - 2I).$$

由 1) 知 $\dim\ker(A - I) = 2$．又由主分解定理,

$\dim\ker(A - I)^3 = 3$ (特征值 1 的代数重数),

于是 $\dim\ker(A-I)^2=3$ （若 $\dim\ker(A-I)^2=2$，则 $\dim\ker(A-I)^k=2,\ \forall k>1$）. 故 $\ker(A-I)^2$ 就是特征值 1 的根子空间， A 的最小多项式为

$$(x-1)^2(x-2).$$

$$V=W_1\oplus W_2=\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2\oplus\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{I}).$$

由 $(A-I)^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&3&0\end{bmatrix}$ 可看出 $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2$ 的一组基为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$. 由计算,

$$\mathbf{A}(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_4)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4)\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\\2&2&1\end{bmatrix}$$

$$=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_4)\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\2&2&1\end{bmatrix}.$$

故限制变换 $\mathbf{A}\,|\,\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\2&2&1\end{bmatrix}$.

限制变换 $\mathbf{A}\,|\,\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$ 在 $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$ 基 $\alpha_1+\alpha_3+3\alpha_4$ 下的矩阵为 2 .

4) 记 $W_1=\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2$， $W_2=\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$.

对 $(x-1)^2$ 与 $(x-2)$ 做辗转相除，得

$$(x-1)^2-x(x-2)=1.$$

记 $h_1(x)=-x(x-2)$， $h_2(x)=(x-1)^2$.

则有

$$h_1(\mathsf{A})\alpha = -\mathsf{A}(\mathsf{A}-2\mathsf{I})\alpha = 0, \quad \forall\alpha\in W_2$$

$$h_1(\mathsf{A})\alpha = (\mathsf{I}-(\mathsf{A}-\mathsf{I})^2)\alpha = \alpha, \quad \forall\alpha\in W_1$$

于是 $h_1(\mathsf{A})=2\mathsf{A}-\mathsf{A}^2$ 是平行于 W_2 向 W_1 所作的投影变换.

类似的,

$$h_2(\mathsf{A})\alpha = (\mathsf{A}-\mathsf{I})^2\alpha = 0, \quad \forall\alpha\in W_1$$

$$h_2(\mathsf{A})\alpha = (\mathsf{I}+\mathsf{A}(\mathsf{A}-2\mathsf{I}))\alpha=\alpha, \ \forall\alpha\in W_2$$

故 $h_2(\mathsf{A})=(\mathsf{A}-\mathsf{I})^2$ 是平行于 W_1 向 W_2 所作的投影变换.

5) 由于$(\mathsf{A}-\mathsf{I})^2,(\mathsf{A}-2\mathsf{I})$ 与 B 可交换，故

$W_1=\mathrm{Ker}(\mathsf{A}-\mathsf{I})^2$， $W_2=\mathrm{Ker}(\mathsf{A}-2\mathsf{I})$ 也是 B 的

的不变子空间.

五．（10 分）若 $a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{Q}$ 满足条件

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0+a_1 & a_1+a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0+a_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

证明： $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

证：用反证法.

若有不全为零的有理数 a_1, a_2, a_3，使得矩阵

$$a_0\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + a_1\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

的行列式为零。记 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则 $\mathrm{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

记 $g(x) = a_0 + a_2 x + a_1 x^2 \in \mathrm{Q}[x]$. 则有 $|g(\mathrm{A})| = 0$.

观察到 A 的特征多项式

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3 - x - 1$$

在 $\mathrm{Q}[x]$中不可约， 且 $g(x)$是不超过 2 次的非零多项式.

我们有 $(f(x), g(x)) = 1$. 于是存在 $u(x), v(x) \in \mathrm{Q}[x]$,

使得

$$u(x)\, f(x) + g(x)\, v(x) = 1 .$$

带入 A，并应用 Hamilton-Cayley 定理，得 $g(\mathrm{A})\, v(\mathrm{A}) = \mathrm{I}$,

这与 $|g(\mathrm{A})| = 0$ 矛盾 . 故 $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

六．（10 分）设 V 是 F-线性空间，S_1，S_2，S_3 是 V 的子集，

$W_i = \mathrm{span}(S_i)\ (i = 1, 2, 3)$．假设 $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ 线性无关.

证明:

$$W_1 \cap (W_2 + W_3) = (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3).$$

证：由 $W_1 \cap W_2$，$W_1 \cap W_3 \subseteq W_1 \cap (W_2 + W_3)$ 知

$$W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3 \subseteq W_1 \cap (W_2 + W_3).$$

以下证

$$W_1 \cap (W_2 + W_3) \subseteq (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3).$$

设 $v \in W_1 \cap (W_2 + W_3)$．由于 $v \in W_1$，可设

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_r v_r,\quad \text{其中 } a_i \in F, v_i \in S_1.$$

另一方面，$v \in W_2 + W_3 = \mathrm{span}(S_2 \cup S_3)$，可设

$$v = b_1 w_1 + \dots + b_{s+t} w_{s+t},\ \text{这里 } b_j \in F \setminus \{0\},$$

$$w_1, \dots, w_s \in S_2,\quad w_{s+1}, \dots, w_{s+t} \in S_3 \setminus S_2,$$

并且 $w_1, \dots, w_{s+t}$,互异．由于

$\{v_1, \dots, v_r\} \cup \{w_1, \dots, w_{s+t}\}$ 线性无关，并且

$$a_1 v_1 + \dots + a_r v_r - b_1 w_1 - \dots - b_{s+t} w_{s+t} = 0.$$

上式经”合并同类项”后每个 w_i 的系数为 0．由于

$w_1, \dots, w_{s+t}$ 互不相同，所以每个 w_j 必为某个 v_i，

因此属于 S_1．这推出

$$w_1, \dots, w_s \in S_1 \cap S_2 \subseteq W_1 \cap W_2,$$

$$w_{s+1}, \dots, w_{s+t} \in S_1 \cap S_3 \subseteq W_1 \cap W_3,$$

故 $v = b_1 w_1 + \dots + b_{s+t} w_{s+t} \in W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3$．