PKU 线性代数 A(I)2022 期中

2023 年 8 月 13 日

1

A 是 3 级矩阵，将 A 的第 3 行与第 1 行交换，再将第 1 行的 k 倍加到第 2 行上，再将第 2 行的 (-2) 倍加到第 3 行。这些操作相当于给 A 左乘了一个矩阵 B。

1. 如题意求矩阵 B.
2. 如果用矩阵 B 右乘 A，又相当于对 A 依次进行了哪些操作？

2 行列式求值

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ n & n & n & n & n \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$

3

矩阵 A=$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

(1) 求 A 的简化行阶梯形矩阵。

(2) 求 A 的列向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_5\}$ 的一个极大线性无关组，并用它表出 A 的所有列向量。

(3) 矩阵 A 可以表示为两个矩阵 B 与 C 的乘积 BC，B 由 (2) 中极大线性无关组中的向量顺次构成且列满秩，C 行满秩。求矩阵 C，并证明 C 的行向量构成 A 的行空间的一组基。

(4) 若 $\vec{\beta}=(a,b,3a,a+2b,b)^T$ 落在 A 的行空间中，求 a, b.

(5) 求 $AX=\alpha_1+\alpha_5$ 的通解。

4

A_1, A_2 是实矩阵，且 $\det(A_1+iA_2)=\alpha$, 其中 α 为非零复数，求 $\begin{vmatrix} A_1 & iA_2 \\ -iA_2 & A_1 \end{vmatrix}$.

5

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 $AX=\vec{\beta}$ 的线性无关解，求证:$k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}+\cdots+k_s\vec{\alpha_s}$ 是 $AX=0$ 的解向量 $\iff \sum_{n=1}^{s}k_n=0$.

(2) A 为 4 级矩阵，$rank(A)=3$, $AX=\vec{\beta}$ 的解 $\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3}$ 满足 $3\vec{\alpha_1}+\vec{\alpha_2}=(5,-1,3,-1)^T$, $\vec{\alpha_3}=(2,3,1,-1)^T$, 求 $AX=\vec{\beta}$ 的通解。

6

向量 $\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\cdots,\vec{\alpha_s}$ 互不相同，有唯一的极大线性无关组。
求证：$rank\{\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\cdots,\vec{\alpha_s}\}=s$ 或 $rank\{\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\cdots,\vec{\alpha_s}\}=s-1$ 且向量组中存在零向量。

7

矩阵 A,B,C 满足 $AB=C$ 且 A 列满秩，求证：

(1) $BX=0$ 与 $CX=0$ 的解空间相同。

(2) $rank(B)=rank(C)$

8

$n(n>2)$ 个人分成 m 组，满足：

(1) 每组有且仅有一位组员在另一组中；

(2) 一个人可以在多个组中。

现要求运用线性代数的知识，求出 m 的最大值。