PKU 数学分析 (I)2022 秋期中

2023 年 11 月 14 日

1.(30') 求序列或函数的极限

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}[\sin\ln(n+1)-\sin\ln n];\ (2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x\sin x}-1}{\arctan x^2};\ (3)\ \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}}$$

;

$$(4)\ \lim_{n\to\infty}[(n+\ln n)^\alpha-n^\alpha],\ 0<\alpha<1;\ (5)\ \lim_{x\to+\infty}(\frac{2^{1/x}+8^{1/x}}{2})^x$$

.

2.(8') 讨论下列函数的连续性，若有间断点，说明间断点类型（若为第一类间断点，需区分可去间断点和跳跃间断点）:

$$(1)f(x)=[|\cos x|];\ (2)f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$$

.

3.(6') 当 $x\to 0$ 时，$e^{x^n}-1$ 是比 $x(\cos\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x+1}-1)$ 低阶但比 $\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$ 高阶的无穷小量，求正整数 n.

4.(15') 求下列函数的导数:

$$(1)f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}},\ x>0;\ (2)f(x)=x^{x^{\sin x}},\ x>0$$

;

$$(3)y'(0)\quad \text{st.}\quad y\sin x+e^{x-y}=1$$

.

5.(7') 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^3$。证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$ 存在并求其值。

6.(7') 序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=0$, $x_{2k}=\frac{x_{2k-1}}{2}$, $x_{2k+1}=x_{2k}+\frac{1}{2}$. 求该序列的上下极限。

7.(7') 假设 $x_0=1$, $x_{n+1}=\frac{1}{x_n^3+4}$. 证明序列 $\{x_n\}$ 收敛到方程 $x^4+4x-1=0$ 的唯一正根。

8.(6') 设方程 $4\ln x-x^2+a-\ln 4=0$ 在 $[\frac{1}{e},2]$ 中恰有两根，求 a 满足的条件。

9.(7') 用闭区间套定理证明单调有界原理。

10.(7') 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件，即存在常数 C, 使得 $\forall x,y\in[1,+\infty)$, $|f(x)-f(y)|\leq C|x-y|$。证明：$\frac{f(x)}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续。