

# PKU 高等数学 B(II)2023 期中

2023 年 8 月 13 日

1. (10') 求初值问题  $(xy - x^3y^3) dx + (1 + x^2) dy = 0$ ,  $y(0) = 1$  的解。

2. (10') 求初值问题  $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$  ( $x > 0$ ),  $y(1) = y'(1) = 1$  的解。

3. (10') 求初值问题  $y'' + y' - 2y = x + e^x + \sin x$ ,  $y(0) = -\frac{7}{20}$ ,  $y'(0) = \frac{38}{15}$  的解。

4. (10') 设  $I(R) = \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{x dx - y dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}$ , 证明  $\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = 0$ .

5. (10') 设  $L$  为空间曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$ , 其正向为自  $z$  轴正向看下来的逆时针方向, 计算积分

$$I = \int_L (y - z + \sin^2 x) dx + (z - x + \sin^2 y) dy + (x - y + \sin^2 z) dz.$$

6. (10') 计算积分  $I = \iint_D (x + y + xy)^2 d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

7. (10') 计算积分  $I = \iint_D (\frac{3x^2 \sin y}{y} + 2e^{x^2}) d\sigma$ , 其中  $D$  由  $y = x$ ,  $y = x^3$  围成。

8. (10') 计算积分  $I = \iiint_{\Omega} \frac{(x + y + z)^2 \sqrt{1 + x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)(1 + x^2 + y^2 + z^2)} dv$ , 其中  $dv = dx dy dz$ ,  $\Omega$  是由曲面  $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ ,  $z = \sqrt{3(1 + x^2 + y^2)}$ ,  $x^2 + y^2 = 1$  所围成的区域。

9. (10') 计算积分  $I = \oint_{\Gamma} (\frac{y^2 + y + 4x^2}{4x^2 + y^2} + \sin x^2) dx + (\frac{y^2 - x + 4x^2}{4x^2 + y^2} + \sin y^2) dy$ , 其中  $\Gamma$  是  $x^2 + y^2 = 9$  ( $y \geq 0$ ),  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$  ( $y \leq 0$ ) 所组成的曲线的逆时针方向。

10. (10') 设曲面  $S$  是柱体  $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$  的表面的外侧, 计算下列积分:

$$(1) I_1 = \iint_S (y - z)|x| dy dz + (z - x)|y| dz dx + (x - y)|z| dx dy.$$

$$(2) I_2 = \iint_S (y - z)x^2 dy dz + (z - x)y^2 dz dx + (x - y)z^2 dx dy.$$

$$(3) I_3 = \iint_S (y - z)x^3 dy dz + (z - x)y^3 dz dx + (x - y)z^3 dx dy.$$