PKU 高等代数 I2023 秋期中

2023 年 11 月 9 日

1.(4*7') 计算下列各行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_2x_3x_4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_1x_3x_4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_1x_2x_4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_1x_2x_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1-x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x_{n-1} & x_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-x_n \end{vmatrix}$$

2.(32') 已知

$$\alpha_1=(1,1,2,4)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,1,1,2)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(-1,1,0,0),\alpha_4=(0,1,1,3)^{\mathrm{T}},\alpha_5=(-1,-1,-2,-3)^{\mathrm{T}};\beta=(0,3,3,7)^{\mathrm{T}}$$

(a)(12') 求 $\alpha_1,\ldots,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组。

(b)(10') 证明: $\beta \in <\alpha_1,\ldots,\alpha_5>$.

(c)(10') 求出方程组 $\sum_{i=1}^5 \alpha_i x_i=\beta$ 的解集。

3.(10') 设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m \in \mathbb{F}^n$ 是线性无关向量组, $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的基。

a 如果 $m<n$, 证明 $\exists\{i_1,i_2,\ldots,i_{n-m}\}\subset\{1,2,\ldots,n\}$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_{i_1},\ldots,\beta_{i_{(n-m)}}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的一组基。

b 满足条件 a 的向量组 $\beta_{i_1},\ldots,\beta_{i_{(n-m)}}$ 是唯一的吗? 对你的判断给出证明。

4.(10') 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 证明下列条件等价:

a $rank(A)=r$

b $\exists A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}\neq 0$, 且 $\forall i,j\in 1,2,\ldots,n$ 都有 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r & i \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r & j \end{pmatrix}=0$. 其中 $1\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le n$, $1\le j_1<j_2<\ldots<j_r\le n$.

5.(10') 设 $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta\in\mathbb{F}^n$，$A=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. $B_i=(\dots,\beta,\dots)$ 是把 A 的第 i 列用 β 替换所得到的矩阵，$i=1,2,\dots,n$. 证明：当 $|A|\neq 0$ 时，方程组 $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i=\beta$ 的解为 $(\frac{|B_1|}{|A|},\dots,\frac{|B_n|}{|A|})^{\mathrm{T}}$。

6.(10') 设 $f:\mathcal{M}_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ 是一个函数，满足下列条件：

a $\forall 1\leq i<j\leq n$, $f(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)=-f(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)$;

b $\forall 1\leq i\leq n$, $c,d\in\mathbb{F}$, $f(\alpha_1,\dots,c\alpha_i+d\beta_i,\dots,\alpha_n)=cf(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)+df(\alpha_1,\dots,\beta_i,\dots,\alpha_n)$;

c $f(e_1,e_2,\dots,e_n)=1$。$e_1,\dots,e_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的标准基，第 i 位是 1，其他位都是 0。

证明：$f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=|\alpha_1,\dots,\alpha_n|$.