

PKU 高等数学 A(I)2022 期中

2023 年 8 月 13 日

1 判断正误并说明理由

- (1) 有理数的有理数次幂一定是有理数。
- (2) 无理数的无理数次幂一定是无理数。(提示: 考察 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$)

2 极限求值

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x+\sqrt{x+3}}}}{\sqrt{x+4}}.$
- (2) $\lim_{n \rightarrow 1} (\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n^2-1} + \frac{3}{n^3-1} - \frac{4}{n^4-1}).$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2021\sqrt{n+2021} + 2023\sqrt{n+2023} - 2 \times 2022\sqrt{n+2022}).$

3 判断正误, 举例或说明理由

- (1) 存在序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = 1.001.$
- (2) 若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处存在一阶导数, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域连续。
- (3) 若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处存在二阶导数, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域连续。

4

已知 $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n}$, 问序列 $\{a_n\}$ 的极限是否存在。若存在, 求之; 不然, 说明理由。

5 求下列函数的导数

- (1) $\int_{\tan x}^{\cot x} \sqrt{1+t^2} dt$
- (2) 忘了

6

(1) $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}x}{x^2 - 1}$, 求 $f(x)$ 的导数.

(2) $g(x) = \frac{x^4}{x^4 + 1}$, 求 $g(x)$ 的一个原函数。

7

已知

$$f \in C[a, b], \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

证明:

(1) $F(x) \in C[a, b]$.

(2) $F(x) \in D[a, b]$ 且 $F'(x) = f(x)$.

8

忘了

9

试找出满足下列条件的一个序列 $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$, $f(x) = x \ln x$

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(\xi_n) - f(e^n)| \neq 0$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_n - e^n| = 0$