北京大学数学学院期中试题

2018－2019 学年第二学期

考试科目 高等代数Ⅱ　考试时间 2018 年 4 月 22 日

一. (16 分)

(1) 求矩阵 $\mathbf{A}\in \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$, 使得映射 $\mathbf{X}\mapsto \mathbf{AX}$ 是 $\mathbf{R}^3$沿着子空间 $\langle [\,1\ 2\ 3\,]^T\rangle$ 向 $\langle [\,0\ 1\ 0\,]^T, [\,0\ 0\ 1\,]^T\rangle$ 作的投影变换;

(2) 求矩阵 $\mathbf{B}\in \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ ，使得映射 $\mathbf{X}\mapsto \mathbf{BX}$ 是欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 向子空间 $\langle [\,1\ 2\ 3\,]^T\rangle$ 作的正交投影变换.

解:

(1) 由 $\mathbf{A}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 得

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$$

(2) 设 $\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, 将$\alpha_1$扩充成 $\mathbf{R}^3$的标准正交基

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\,.$$

则有 $\mathbf{B}[\,\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3] = [\,\alpha_1\ 0\ 0\,]$, 故

$$\mathbf{B}\ = [\,\alpha_1\ 0\ 0\,][\,\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]^{-1}$$
$$= [\,\alpha_1\ 0\ 0\,][\,\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]^T$$

$$=[\,\alpha_1\ 0\ 0\,]\begin{bmatrix}\alpha_1{}^T\\ \alpha_2{}^T\\ \alpha_3{}^T\end{bmatrix}=\alpha_1\alpha_1{}^T$$

$$=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[\,1\ 2\ 3\,]=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}.$$

注：此题也可用正交投影公式做. 列向量 X 在单位向量 α_1上的正交投影为 $(\alpha_1,X)\alpha_1=\alpha_1(\alpha_1{}^T X)=(\alpha_1\alpha_1{}^T)X$.

二.填空题 (30 分)

1) 设 $A\in M_{m,n}(R)$. 当 A 秩 = _n_ 时, 由 $AB=AC$ 能推出矩阵 $B=C$;

2) 在 $K[x,y,z]$中由全体 n 次齐次多项式及零多项式构成的 K－线性空间的维数是 $\binom{n+2}{2}$;

由全体 5 次齐次对称多项式及零多项式构成的 K－线性空间的维数是_5_ ;

3) 当 a =_1_时, $A=\begin{bmatrix}2-a&0&a-1\\0&1&0\\1-a&0&a\end{bmatrix}$ 在 R 上可对角化;

4) 设实矩阵 A 满足 $A^2=A$, 且 ImA 与 KerA 互为正交补. 则以下说法正确的有_B, D_(多选)

A. A 是正交矩阵; B. A 是对称矩阵;

C. $I-A$ 是正交矩阵; D. $I-2A$ 是正交矩阵.

三.（10 分）设 $f(x)=x^3-3x+1$，$g(x)=x^2-1\in Q[x]$.

1) 证明：（$f(x)$，$g(x)$）$=1$;

2) 求 $u(x), v(x)\in Q[x]$，使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$;

3) 设 θ 是 $f(x)$ 的一个实根，求 2 次多项式 $h(x)\in Q[x]$，使得 $h(\theta)\,g(\theta)=1$.

解：1) 对 $f(x)$，$g(x)$ 作辗转相除，

$$f(x)=x^3-3x+1=x\,(x^2-1)-2x+1\ ;$$

$$g(x)=x^2-1=(2x+1)(2x-1)/4\ -3/4.$$

能同时乘除 $f(x)$，$g(x)$的多项式也要乘除 $3/4$ ，

故（$f(x)$，$g(x)$）$=1$;

2) 反向叠代

$$3/4=(2x+1)(2x-1)/4\ -(x^2-1)$$

$$=(2x+1)\big(x\,g(x)-f(x)\big)/4\ -g(x)$$

$$=(2x+1)\big(x\,g(x)-f(x)\big)/4\ -g(x)$$

$$=-(2x+1)\,f(x)/4\ \ +(2x^2+x-4)\,g(x)/4\ .$$

令 $u(x)=-(2x+1)/3$，$v(x)=(2x^2+x-4)/3$，

则有 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$

3) 取 $h(x)=v(x)=(2x^2+x-4)/3$ ，则有

$$h(\theta)\,g(\theta)=u(\theta)f(\theta)+v(\theta)g(\theta)=1\ .$$

四. (10 分) 将对称多项式 $f(x,y,z) = (x^2-yz)(y^2-xz)(z^2-xy)$

写成初等对称多项式 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的多项式形式.

解: 将 $f(x,y,z)$ 展开并按字典法排序

$$f(x,y,z) = (x^2-yz)(y^2z^2-xz^3-xy^3+x^2yz)$$

$$= x^4yz - x^3y^3 - x^3z^3 + xy^4z + xyz^4 - y^3z^3$$

注意到

$$(x+y+z)^3xyz = x^4yz + 3x^3y^2z + \cdots$$

$$(xy+xz+yz)^3 = x^3y^3 + 3x^3y^2z + \cdots$$

(字典排序下前两项)

对称多项式

$$f(x,y,z) - (x+y+z)^3xyz + (xy+xz+yz)^3$$

在字典排序法下的首项在 x^3y^2z 项之后,只能是 $k\,x^2y^2z^2$.

于是

$$f(x,y,z) = (x+y+z)^3xyz - (xy+xz+yz)^3 + k\,x^2y^2z^2.$$

令 $x = y = z = 1$ 并代入上式, 解得 $k = 0$.

故 $f(x,y,z) = (x+y+z)^3xyz - (xy+xz+yz)^3$

$$= {\sigma_1}^3\sigma_3 - {\sigma_2}^3.$$

五. (24 分) 设线性变换 $\mathbf{A}$ 在空间 V 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_5$ 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_5(R).$$

1) 求 Ker $\mathbf{A}$ 的一组基和 Im $\mathbf{A}$ 的一组基 $\beta_1, \cdots, \beta_r$.

2) 求 Im $\mathbf{A}$ + Ker $\mathbf{A}$ 与 Im $\mathbf{A} \cap$ Ker $\mathbf{A}$ 的维数与基底,

判断 Im $\mathbf{A}$ 与 Ker $\mathbf{A}$ 是否为直和 ;

3) 求商空间 V / Ker $\mathbf{A}$ 的维数与一组基;

4) 证明: 将线性变换 $\mathbf{A}$ 的定义域限制在 Im $\mathbf{A}$ 上, 给出 Im $\mathbf{A}$ 到自身的线性变换 $\mathbf{B}$. 求 $\mathbf{B}$ 在 Im $\mathbf{A}$ 的基 $\beta_1, \cdots, \beta_r$下的矩阵.

解: 1) 对矩阵 A 作行变换, 得 A 的简化阶梯形

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \dashrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (*).$$

由此看出 A 的第 1, 2, 4 列构成 A 的列极大无关组, 故

Im $\mathbf{A}$ 的一组基为

$$\beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \mathbf{A}\alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = \mathbf{A}\alpha_2,$$

$$\beta_3 = 2\alpha_1 + \alpha_5 = \mathbf{A}\alpha_4.$$

从 A 的简化阶梯形还可看出齐次方程组 AX = 0 的通解

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 - 2x_5 \\ x_2 = -x_5 \\ x_4 = x_5 \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_3 - 2x_5 \\ -x_5 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ker **A** 的一组基为

$$\gamma_1 = 3\alpha_1 - \alpha_3\,,\ \gamma_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_5\ .$$

2) 将 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma_1,\gamma_2$ 的坐标列向量排成矩阵，作行变换

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这说明 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma_1,\gamma_2$ 线性无关， Im **A** 与 Ker **A** 为直和，

即 Im **A** $\cap$ Ker **A** $= \{\,0\,\}$，且 Im **A** + Ker **A** = V .

3) 商空间 V / Ker **A** 的维数为 3， 一组基为

$$\beta_1 + \text{Ker A}\,,\ \beta_2 + \text{Ker A}\,,\ \beta_3 + \text{Ker A}\,;$$

4) Im **A** 是 **A** 的不变子空间，限制映射

$$\mathbf{B}\!:\ \beta \mapsto A\beta\,,\ \beta \in \text{Im A}$$

是 Im **A** 到自身的映射，同时保持向量加法,数乘运算，

即对任意 $\alpha,\beta \in \text{Im A}$，$k \in$ K ，有

$$B(\alpha+\beta) = B\alpha + B\beta\ ,\ B(k\alpha) = k\,B\alpha\,.$$

故限制映射 **B** 是 Im **A** 上的线性变换.

由(*)可看出

$$A\alpha_1 = \beta_1\,, A\alpha_2 = \beta_2\,, A\alpha_4 = \beta_3\,,$$

$$A\alpha_3 = 3\,\beta_1\,,\ A\alpha_5 = 2\,\beta_1 + \beta_2 - \beta_3,$$

我们有 $\mathbf{A\beta_1 = A(2\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)}$

$$\mathbf{= 2\,\beta_1 + 3\,\beta_1 + \beta_3 + (2\,\beta_1 + \beta_2 - \beta_3)}$$

$$\mathbf{= 7\,\beta_1 + \beta_2}$$

$$\mathbf{A\beta_2 = A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)}$$

$$\mathbf{= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3}$$

$$\mathbf{A\beta_3 = A(2\alpha_1 + \alpha_5)}$$

$$\mathbf{= 2\,\beta_1 + (2\,\beta_1 + \beta_2 - \beta_3)}$$

$$\mathbf{= 4\,\beta_1 + \beta_2 - \beta_3}$$

$$\mathbf{B[\,\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,] = [\,A\beta_1\,A\beta_2\,A\beta_3\,]}$$

$$\mathbf{= [\,\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,]\begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}.$$

六．（10 分）用 $\mathbf{h}(n)$ 表示从矩阵空间 $\mathbf{M_n(R)}$ 中可选出的线性无关且两两可交换的上三角矩阵的最大数目．证明:

$$\mathbf{h}(n) \le \mathbf{h}(n-1) + n/2\ .$$

证: 设 $\mathbf{n \ge 2}$, $\mathbf{s = h}(n)$, $\mathbf{A_1,\cdots,A_s \in M_n(R)}$ 是线性无关且两两交换的上三角矩阵. 我们将反复用到以下事实:

对矩阵组 $\mathbf{A_1,\cdots,A_s}$ 作初等变换, 如将 $\mathbf{A_i}$ 换为 $\mathbf{A_i} + k\,\mathbf{A_j}$, $k \in \mathbf{R}$ ，新的矩阵组仍线性无关且两两交换.

我们先将 $\mathbf{A_i}$ 写成分块矩阵的形式

$$\mathbf{A_i} = \begin{bmatrix} a_{\mathrm{i}} & \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{i}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B_i} \end{bmatrix},$$

其中 $a_{\mathrm{i}} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{B_i}$ 是 $n-1$ 级上三角矩阵. 由

$$\mathrm{A_iA_j}=\begin{bmatrix}a_\mathrm{i} & \boldsymbol{\beta}_\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{B_i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_\mathrm{j} & \boldsymbol{\beta}_\mathrm{j}\\ 0 & \mathrm{B_j}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_\mathrm{i}a_\mathrm{j} & *\\ 0 & \mathrm{B_iB_j}\end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{A_jA_i}=\begin{bmatrix}a_\mathrm{j} & \boldsymbol{\beta}_\mathrm{j}\\ 0 & \mathrm{B_j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_\mathrm{i} & \boldsymbol{\beta}_\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{B_i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_\mathrm{j}a_\mathrm{i} & *\\ 0 & \mathrm{B_jB_i}\end{bmatrix}$$

知 $\mathrm{B_1,\cdots,B_s}\in\mathrm{M_{n-1}(R)}$ 是两两交换的上三角矩阵.

于是矩阵组 $\mathrm{B_1,\cdots,B_s}$ 的秩 $\mathrm{r}\le\mathrm{h}(n-1)$.

不妨设 $\mathrm{B_1,\cdots,B_r}$ 是 $\mathrm{B_1,\cdots,B_s}$ 的极大无关组.

对 $\mathrm{A_1,\cdots,A_s}$ 作适当初等变换，可设 $\mathrm{B_{r+1}}=\cdots=\mathrm{B_s}=0$.

由矩阵组 $\mathrm{A_{r+1},\cdots,A_s}$ 线性无关可推出行向量组

$[\,a_\mathrm{i}\ \ \boldsymbol{\beta}_\mathrm{i}\,]$，$\mathrm{i}=\mathrm{r}+1,\cdots,\mathrm{s}$ 线性无关.

类似地，也可将 $\mathrm{A_i}$ 写成分块形式 $\mathrm{A_i}=\begin{bmatrix}\mathrm{C_i} & \gamma_\mathrm{i}\\ 0 & c_\mathrm{i}\end{bmatrix}$,

这里 $c_\mathrm{i}\in\mathrm{R}$，$\mathrm{C_i}$ 是 $n-1$ 级上三角矩阵. 由

$$\mathrm{A_iA_j}=\begin{bmatrix}\mathrm{C_i} & \gamma_\mathrm{i}\\ 0 & c_\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{C_j} & \gamma_\mathrm{j}\\ 0 & c_\mathrm{j}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{C_iC_j} & *\\ 0 & c_\mathrm{i}c_\mathrm{j}\end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{A_jA_i}=\begin{bmatrix}\mathrm{C_j} & \gamma_\mathrm{j}\\ 0 & c_\mathrm{j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{C_i} & \gamma_\mathrm{i}\\ 0 & c_\mathrm{i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{C_jC_i} & *\\ 0 & c_\mathrm{i}c_\mathrm{j}\end{bmatrix}$$

知 $\mathrm{C_1,\cdots,C_s}\in\mathrm{M_{n-1}(R)}$ 也是两两交换的上三角矩阵.

于是矩阵组 $\mathrm{C_1,\cdots,C_s}$ 的秩 $\mathrm{t}\le\mathrm{h}(n-1)$.

对 $\mathrm{A_1,\cdots,A_s}$ 作适当初等变换，可使

$\mathrm{C_1,\cdots,C_t}$ 线性无关，$\mathrm{C_{t+1}}=\cdots=\mathrm{C_s}=0$.

特别地，列向量组 $\begin{bmatrix}\gamma_\mathrm{j}\\ c_\mathrm{j}\end{bmatrix}$，$\mathrm{j}=\mathrm{t}+1,\cdots,\mathrm{s}$ 线性无关.

最后，由

$$\begin{bmatrix} a_i & \beta_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \gamma_j \\ 0 & c_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_j \\ 0 & c_j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_i & \beta_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

(这里没用分块乘法)

可推出向量组 $[\,a_i \ \ \beta_i\,]^T$，$i = r + 1, \cdots, s$ 与向量组 $\begin{bmatrix} \gamma_j \\ c_j \end{bmatrix}$，$j = t + 1, \cdots, s$ 正交. 故有

$$2\big(h(n) - h(n-1)\big) \le (s - r) + (s - t) \le n \ ,$$

即 $h(n) \le h(n-1) + n/2$.