北京大学高等数学A(II)期中考试试题

(共六道大题，满分100分)

2024-04

一、（本题20分）计算二重积分

$$I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos(2\theta)}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

其中积分区域D为 $D=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le\sec\theta,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}$.

计算中可以直接使用定积分公式：

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n t\ \mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\cos^n t\ \mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}, & n=\text{正奇数},\\ \frac{\pi}{2}\frac{(n-1)!!}{n!!}, & n=\text{正偶数}.\end{cases}$$

二、（本题20分）计算曲线积分

$$I=\oint_{L^+}\frac{-y}{4x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{4x^2+y^2}\,dy+z\,dz,$$

其中曲线L是由曲面$4x^2+y^2=1$与平面$2x+y+z=1$所截得到的曲线，其正向L^+规定为从z轴正向看是逆时针方向.

三、（本题20分）设$f(x)$为一元连续函数,计算曲面积分

$$I=\iint_S[xf(xy)+2x-y]\,dydz+[yf(xy)+2y+x]\,dzdx+[zf(xy)+z]\,dxdy,$$

其中曲面S为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$夹在平面$z=1$, $z=2$之间的部分,方向取下侧.

四、（本题20分）解答下列问题：

(1) 求微分方程$xy'+y(\ln x-\ln y)=0$满足条件$y(1)=e^3$的解.

(2) 给定常微分方程$y'+y=f(x)$,其中$f(x)$为整个实数轴上的连续函数.

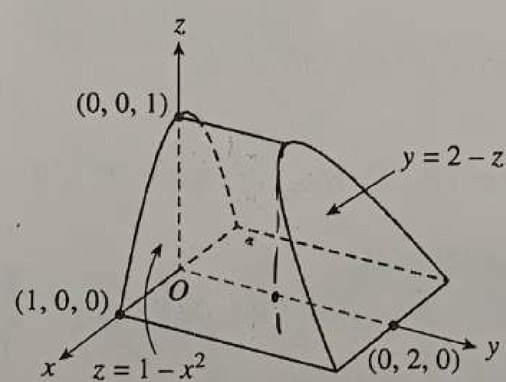
(i)若$f(x)=x$,请给出方程的通解；

(ii)若$f(x)$以T为周期,证明方程有惟一以T为周期的解.

五、（本题 10 分）计算曲面积分

$$I = \oiint_S xy\,dydz + (y^2 + e^{xz^2})\,dzdx + \sin(xy)\,dxdy,$$

其中曲面S为柱面$z = 1 - x^2$与平面$z = 0,\ y = 0, y + z = 2$围成区域Ω的外表面(见下图).



六、（本题 10 分）设L为平面上的一条分段光滑的简单闭曲线,试计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\,\mathrm{d}s$, 其中$\vec{r} = (x, y)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vec{n}$为L的单位外法向量.