北京大学数学学院期中试题

2021－2022 学年第一学期

考试科目 高等代数 I　考试时间 2021 年 11 月 16 日

姓　　名 ____________　学　　号 ________________

一. (24 分). 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&2&2&0\\0&2&5&2\\0&0&2&a\end{bmatrix}$, 列向量 $\beta=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\a-2\end{bmatrix}$.

1) 当 a 取哪些值时, A 的列向量组能唯一地线性表出 β；

2) 当 a 取何值时, $AX=\beta$ 有无穷多解, 将此时的解集合用向量表示；

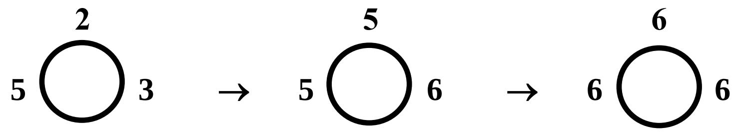
3) 将矩阵 A 写成 BC 的形式, 其中 B 是对角元都为 1 的下三角矩阵, C 是上三角矩阵;

4) 求 A 第 1 行上 4 个元素的余子式的和.

二.（12 分）已知向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 能线性表出向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$，且两向量组的秩相等. 证明: $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 也能线性表出 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$.(每一步要有依据)

三.（12 分）计算 n 阶行列式 $A_n=\begin{vmatrix}\frac{1}{1}&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\cdots&\frac{1}{n}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\cdots&\frac{1}{n}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\cdots&\frac{1}{n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\\frac{1}{n}&\frac{1}{n}&\frac{1}{n}&\cdots&\frac{1}{n}\end{vmatrix}$.

四.（12 分）现有若干有理数排成一个圆圈. 规定一次操作为: 将任意相邻的两个有理数都加上同一个有理数，其余各数不变. 下图是两次操作的示意图, 将圆圈上的三个数变为了相同的数.



试用线性代数的理论解决以下问题：能否将 1, 2, 3, 5 这 4 个有理数以某种方式排列在圆圈上，使得通过若干次操作将这 4 个数变为相同的数？若可以，请画出最初的排列方式与具体的操作步骤；若不能，请说明理由.

五.（20 分）已知列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5\in \mathrm{R}^4$ 的秩为 3，且

$$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2\ ,\quad \alpha_5=-\alpha_3+\alpha_4\ .$$

1) 写出矩阵 $A=[\,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_5\,]$ 的行简化阶梯型；

2) 写出 A 的一个列极大无关组；

3) 求 A 行空间的一组基；若已知向量 $\beta=[1\ 1\ a\ a\ b]$ 属于 A 的行空间，写出 β 在此基下的坐标及 a, b 的值；

4) 求线性方程组 $AX=\alpha_4+\alpha_5$ 的通解（写成向量形式）；

5) 求所有矩阵 B，使得 $A=[\,\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4\,]B$.

六.（12 分）已知线性方程组 I：$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \cdots\qquad\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$

有解，但在方程组 I 里添加方程 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=0$ 后又变得无解. 证明：方程组 I 导出组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ \cdots\qquad\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

的解都是方程 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=0$ 的解.

七.（8 分）设 A 是 n 级实矩阵且满足 $A^2=0$. 记 A 的列空间为 V_1，A^T 的列空间为 V_2，AA^T+A^TA 的列空间为 V . 证明：

1) $V_1\cap V_2=\{\,0\,\}$；

2) $V_1+V_2=V$.（注：$V_1+V_2=\{\,\alpha_1+\alpha_2\mid \alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2\}$）