北京大学数学学院期中试题

2017－2018 学年第二学期

考试科目 高等代数 II　考试时间 2018 年 5 月 18 日

姓　　名 ____________　学　　号 _______________

一（15 分）设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换，且 $\mathcal{A}$ 在 V 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A．若基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 U．求 $\mathcal{A}$ 在基 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 下的矩阵 (要求推导过程，每一步注明理由).

二．（20 分）

1) 已知多项式 $h_1(x), h_2(x), h_3(x) \in Q[x]$ 两两互素，证明：存在 $u_i(x) \in Q[x]$, i =1, 2, 3, 使得

$$u_1(x)h_2(x)h_3(x) + u_2(x)h_3(x)h_1(x) + u_3(x)h_1(x)h_2(x) = 1 .$$

2) 求一个 3 次的多项式 $f(x) \in R[x]$，使得

$$f(1) = 6,\quad f'(1) = 8 \text{ 且 } x^2 + 1 \mid (f(x) - 2x).$$

三．（15 分）已知 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 是 $x^3 + ax + b$ 的三个复根.

求 $(\theta_1\theta_2 + \theta_3)(\theta_1\theta_3 + \theta_2)(\theta_2\theta_3 + \theta_1)$ 的值.

四．（30 分）设 A 是线性空间 V 上的线性变换，且 A 在基

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_4 \text{ 下的矩阵为 } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1) 求 A 的特征多项式与特征子空间;

2) 将 V 分解为根子空间 W_1 与 W_2 的直和，求 W_i ($i = 1, 2$) 的基并写出限制变换 $A \mid W_i$ 在此基下的矩阵;

3) 求 A 的最小多项式 ;

4) 求次数 ≤ 2 的多项式 $h_i(x)$, $i = 1, 2$, 使得 $h_i(A)$是沿 W_{3-i} 向 W_i 所作的投影变换 ;

5) 若 V 上的线性变换 B 与 A 可交换 ，以上 W_1, W_2 是否一定也是 B 的不变子空间？请说明理由.

五．（10 分）若 $a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{Q}$ 满足条件

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 + a_1 & a_1 + a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 + a_1 \end{vmatrix} = 0.$$

证明: $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

六．（10 分）设 V 是 F-线性空间，S_1，S_2，S_3 是 V 的子集，

$W_i = \mathrm{span}(S_i)$ ($i = 1, 2, 3$). 假设 $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ 线性无关.

证明:

$$W_1 \cap (W_2 + W_3) = (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3).$$