

PKU 高等数学 B2020 秋期中

2023 年 11 月 9 日

1.(20') 求极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{n} - 1)$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}}$

2.(20')

(1) $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$

(2) $\int \frac{4x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x(x+1)(x^2+1)} dx$

(3) $\int_0^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx$

(4) $\int_{-1}^1 (x^4 + 2x^2 + 1) \sin^3 x dx$

3.(10') 给定一个有限区间 $[a, b]$, 已知函数 $f(x) : [a, b] \rightarrow [a, b]$ 满足: 对于任意的 $x, y \in [a, b]$, 都有 $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$. 求证: 对任意选取的初值 $x_1 \in [a, b]$, 递推

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$$

所定义的序列 x_n 收敛。

4.(10') 求导数:

(1) $y = (\arcsin x)^2$, 求 $y^{(n)}(0)$.

(2) $\frac{d}{dx} \int_{x^3+1}^{2^x} \frac{\sin t}{t^4+1} dt$

5.(10') 函数 $f(x) \in C[0, 1]$, 并且 $f(0) = f(1)$, 求证: 存在常数 $c \in [0, 1]$, 使得 $f(c) = f(c + \frac{1}{3})$.

6.(10') 函数 $f(x) \in C^1[0, 1]$ 。求证:

$$|f(x)| \leq \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |f'(t)| dt$$

并求出所有可能的 $f(x)$, 使得上述不等式的等号对 $\forall x \in [0, 1]$ 都成立。

7.(20') 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

其中 $m \in \mathbb{Z}^+$ 。

(1) 在 $x \neq 0$ 处, 求 $f'(x)$, $f''(x)$;

(2) 若 $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$, 求 m 的取值范围。