

Segundo Exercício Programa de PMR 3401
Data de entrega: 30/06/2025 (até as 23:59hs)
Método de Elementos Finitos (MEF)

ELEMENTOS PÓRTICO E TRELIÇA - Matlab, Python ou Scilab

Aerofólios são perfis projetados para gerar sustentação ao interagir com o escoamento de ar. Um dos mais utilizados em aplicações práticas e acadêmicas é o da série NACA 4 dígitos (Figura 1), cuja geometria é definida por fórmulas simples (ABBOTT 2012).

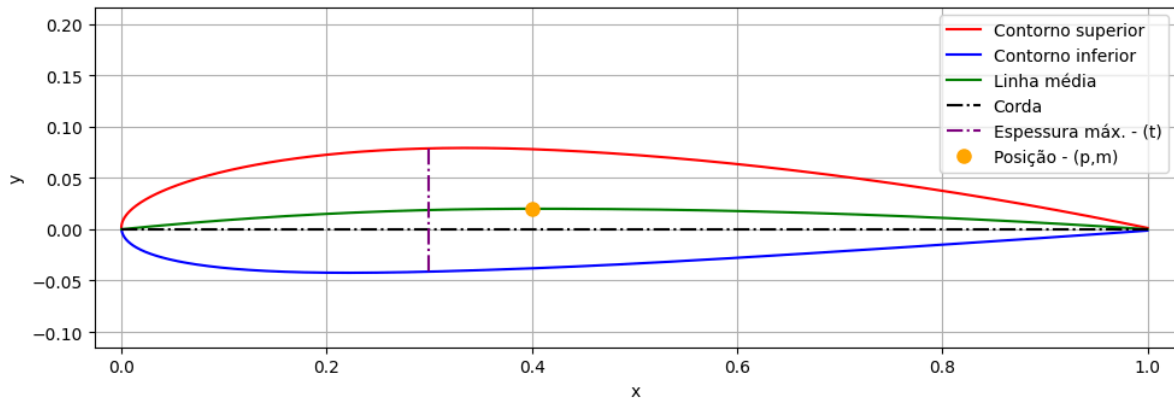


Figura 1. Perfil NACA 2412. As porcentagens indicam valores relativos ao comprimento da corda do aerofólio: **2%** para o camber máximo (m), **40%** para a posição do camber máximo (p) e **12%** para a espessura máxima (t).

A distribuição de pressão sobre a superfície do aerofólio depende de fatores como a velocidade do escoamento, o ângulo de ataque e a altitude de voo. O ângulo de ataque é definido como o ângulo entre a corda do aerofólio (linha reta que liga o bordo de ataque ao bordo de fuga) e a direção do escoamento relativo do ar. Esse ângulo influencia diretamente a quantidade de sustentação e arrasto gerados pelo aerofólio, sendo um parâmetro crítico no desempenho aerodinâmico. Essa distribuição de pressão pode ser obtida por simulações CFD ou por dados experimentais em túnel de vento. No entanto, para análises rápidas, também existem expressões analíticas aproximadas que reproduzem bem o comportamento aerodinâmico em condições típicas (ANDERSON 1991).

O perfil do aerofólio e a distribuição de pressão na sua superfície são determinados em função da coordenada da corda normalizada:

$$x = \frac{1 - \cos \beta}{2}$$

O ângulo auxiliar β , variando de 0 a π , permite gerar uma distribuição cossenoidal ao longo da corda do aerofólio. Essa distribuição concentra mais pontos próximos ao bordo de ataque e ao bordo de fuga, melhorando a representação da geometria.

Definindo os parâmetros **m**, **p** e **t**, do perfil NACA 4 dígitos, pode ser obtido o perfil do aerofólio usando as seguintes equações:

$$y_t(x) = 5t \left(0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4 \right)$$

$$y_c(x) = \begin{cases} \frac{m}{p^2}(2px - x^2), & \text{se } x < p \\ \frac{m}{(1-p)^2}[(1-2p) + 2px - x^2], & \text{se } x \geq p \end{cases} \quad \frac{dy_c}{dx} = \begin{cases} \frac{2m}{p^2}(p - x), & \text{se } x < p \\ \frac{2m}{(1-p)^2}(p - x), & \text{se } x \geq p \end{cases}$$

$$\theta(x) = \arctan\left(\frac{dy_c}{dx}\right) \quad \begin{array}{ll} x_u = x - y_t \sin(\theta) & x_l = x + y_t \sin(\theta) \\ y_u = y_c + y_t \cos(\theta) & y_l = y_c - y_t \cos(\theta) \end{array}$$

Sendo $y_t(x)$ a distribuição de espessura ao longo da corda normalizada; $y_c(x)$ a linha média do camber; $\frac{dy_c(x)}{dx}$ sua derivada; $\theta(x)$ o ângulo de inclinação da linha média; e (x_u, y_u) as coordenadas do contorno superior e (x_l, y_l) as coordenadas do contorno inferior.

A partir das condições de voo, pode ser estimada a pressão absoluta na superfície do aerofólio usando as seguintes equações:

$$C_p = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0,03 \\ \pm 2 \left(\frac{\alpha}{\sqrt{x}} + \frac{dy_c}{dx} \right) & \text{se } 0,03 < x < 0,97 \\ 0 & \text{se } x \geq 0,97 \end{cases}$$

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad p(x) = C_p(x) \cdot q + p_{atm}$$

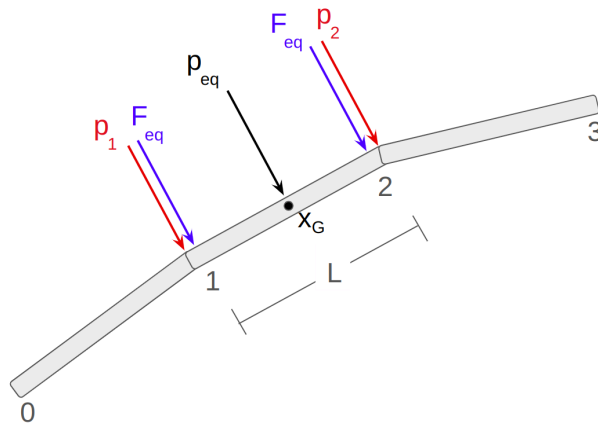
sendo $C_p(x)$ o coeficiente de pressão (positivo na superfície inferior do aerofólio e negativo na superior), α o ângulo de ataque em radianos, q a pressão dinâmica do ar em voo, ρ a densidade do ar, V a velocidade da aeronave, e p_{atm} a pressão atmosférica.

Considere:

- Perfil do aerofólio: NACA 4412 ($m=4\%$, $p=40\%$, $t=12\%$).
- Resolução de x : 500 valores.
- Profundidade da seção estudada: 1 m.
- Ângulo de ataque: 8° .
- Velocidade da aeronave: 300 Km/h.
- Densidade do ar: $1,29 \text{ Kg/m}^3$.
- Pressão atmosférica: $1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

PARTE I:

- Plote o perfil do aerofólio, indicando o contorno superior, inferior, e a linha média.
- Plote o coeficiente de pressão no contorno superior e inferior em função de x .
- Plote a pressão absoluta no contorno superior e inferior em função de x .
- Plote a força F_x e F_y ao longo do contorno superior e inferior em função de x .
- Determine a força de arrasto e de sustentação. **Ref.:** Arrasto: 527 N ; Sust.: 3965 N.



$$p_{eq} = (p_1 + p_2)/2 ;$$

$$\vec{F}_{eq} = p_{eq} * A/2 * \hat{n} ;$$

$$\hat{n} = \frac{y_2 - y_1}{L} i - \frac{x_2 - x_1}{L} j$$

Figura 2. Força nodal a partir da pressão.

Dica: Se baseie na Figura 2 para traduzir a pressão absoluta em carregamento nodal, e use a equação abaixo para o cálculo das forças de arrasto e sustentação:

$$\begin{bmatrix} F_{arr} \\ F_{sus} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum F_x \\ \sum F_y \end{bmatrix}$$

* F_x e F_y representam os carregamentos nodais.

PARTE II:

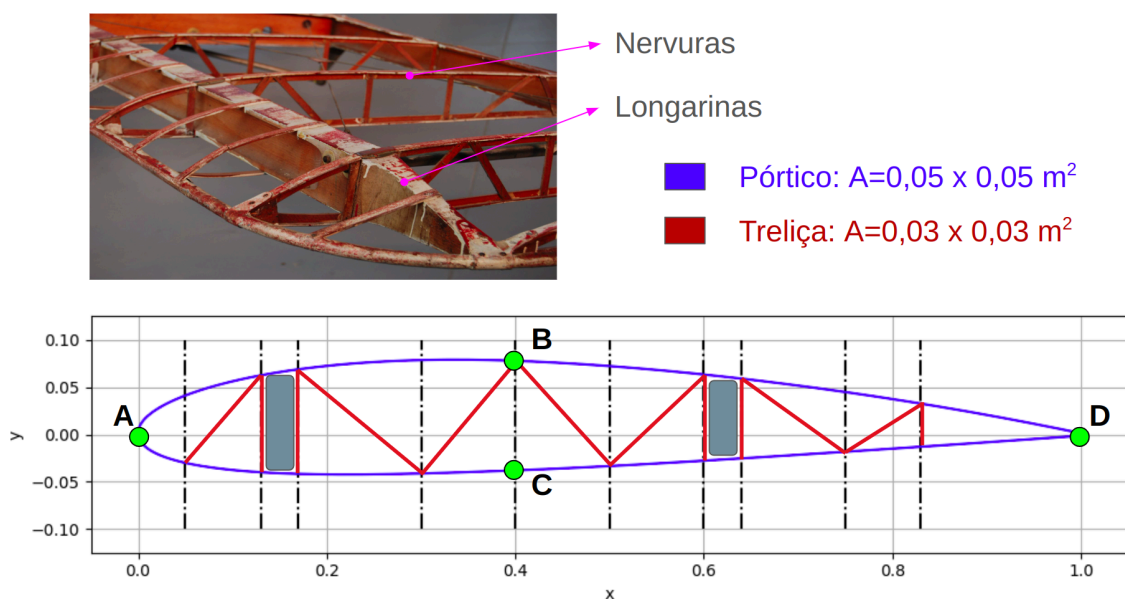


Figura 3. Suporte estrutural do aerofólio.

Considere o esquema da estrutura que dá suporte ao aerofólio (nervuras e longarinas da Figura 3). Use elementos tipo pórtico para modelar o perfil do aerofólio e elementos tipo treliça para modelar a estrutura interna, ambos de seção quadrada. A estrutura é feita de aço com módulo de Young $E = 210 \text{ GPa}$ e densidade $\rho = 7600 \text{ Kg/m}^3$. Fixe a estrutura restringindo todos os graus de liberdade dos nós que pertencem à superfície superior do aerofólio e que estão compreendidos na região das longarinas. Para a construção da estrutura interna, utilize as linhas guia, localizadas em:

$x = [0,05; 0,13; 0,17; 0,30; 0,40; 0,50; 0,60; 0,64; 0,75; 0,83]$.

Dica: Como a resolução de x é 500, devem haver 1000 nós compondo as superfícies superior e inferior do aerofólio e, conseqüentemente, 1000 elementos tipo pórtico. Devem haver 12 tipo treliça.

a) Desenvolva um programa de Elementos Finitos para obter as primeiras seis frequências naturais da estrutura e seus respectivos modos de vibração. Plote os modos de vibrar em cima da estrutura sem deformar para compará-las. Liste as frequências em Hertz.

b) Mediante uma análise transiente, simule:

i) A decolagem da aeronave:

O ângulo de ataque e a velocidade da aeronave variam:

$$\alpha = \begin{cases} 6^\circ [1 - \cos(0,1\pi t)] + 8^\circ & \text{se } t \leq 20 \text{ min} \\ 8^\circ & \text{se } t > 20 \text{ min} \end{cases}$$

$$V = \begin{cases} 250 \text{ Km/h} [1 - \cos(0,05\pi t)] + 300 \text{ Km/h} & \text{se } t \leq 20 \text{ min} \\ 800 \text{ Km/h} & \text{se } t > 20 \text{ min} \end{cases}$$

ii) Turbulência durante um voo a 800 Km/h e ângulo de ataque de 8° :

A pressão absoluta na superfície superior, **entre o 0 e 30% da corda**, varia:

$$p_t(x) = \begin{cases} p_n(x) & \text{se } t \leq 20 \text{ min} \\ p_n(x) + 10000 \text{ Pa} (2\pi f t) & \text{se } t > 20 \text{ min} \end{cases}$$

sendo $p_n(x) = p(x)$ a pressão em condições de voo normais e $p_t(x)$ a pressão em condições de turbulência. Considere f igual a 350 Hz, 660 Hz e 1200 Hz.

Utilize o método direto Newmark β para realizar a análise transiente. Calcule os coeficientes de amortecimento do modelo de Rayleigh ($[C] = \alpha[M] + \beta[K]$) considerando um fator de amortecimento estrutural de $\xi = 0,06$ constante entre o primeiro e sexto modo de vibração. Assim, com as frequências calculadas em a) (em radianos), α e β são calculados por:

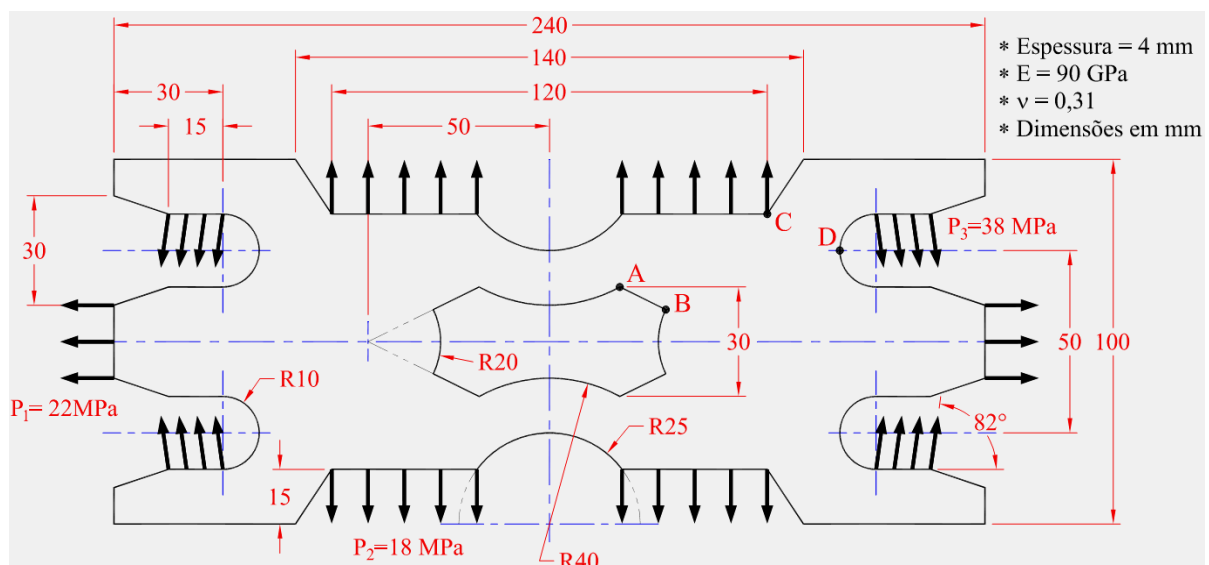
$$\alpha = \frac{2\xi\omega_1\omega_6}{\omega_1 + \omega_6} \quad \beta = \frac{2\xi}{\omega_1 + \omega_6}$$

Para cada situação **i)** e **ii)**, e para cada frequência em **ii)**, plote (no mesmo gráfico) o deslocamento vertical dos pontos A, B, C e D.

c) Obtenha o diagrama de resposta em frequência da norma do deslocamento ($\|U\|$ vs f) para os mesmos pontos solicitados no item anterior (A, B, C e D). Plote as curvas no mesmo gráfico e verifique que sejam observados os picos de ressonância correspondentes às primeiras três frequências obtidas em a) (sem amortecimento). Considere, neste caso, **apenas** carregamentos nodais na superfície superior do aerofólio, entre 0 e 30% da corda, provenientes da pressão absoluta, da forma, $10000e^{j\omega t}$ [Pa]. Use uma discretização adequada para a frequência (Δf). Se necessário, refine o passo Δf próximo aos valores de ressonância.

ESTADO PLANO DE TENSÕES - ANSYS

Considere a peça simétrica da figura abaixo.



Resolva o problema usando o programa Ansys (ou similar) considerando estado plano de tensões (“plane stress”):

PARTE I:

- Plote a estrutura deformada e identifique o máximo valor de deslocamento e onde ocorre.
- Plote as tensões mecânicas de von Mises na estrutura e obtenha os valores de tensão nos pontos A, B, C, e D. Analise a influência da discretização da malha nos resultados, escolha uma discretização inicial Δx_1 e logo refine-a da forma $\Delta x_2 = \Delta x_1/2$.
- Identifique o máximo valor de tensão de von Mises e onde ocorre, bem como os demais pontos onde ocorrem concentração de tensões na estrutura.

Dica: O carregamento distribuído inclinado pode ser visto como uma decomposição de forças distribuídas verticais e horizontais.

APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Os resultados devem ser apresentados da seguinte forma:

- a) Inicialmente, apresente todos os equacionamentos analíticos e numéricos do problema a implementar no MATLAB, Python ou SCILAB.
- b) NÃO será aceita a utilização de comandos prontos da plataforma de programação que escolha para realizar seus códigos, por exemplo, para a solução de equações diferenciais, ou para o cálculo de integrais e derivadas.
- c) Use os comandos do MATLAB, Python ou SCILAB para as plotagens (coloque títulos, legendas e unidades nos gráficos). Os gráficos devem ser legíveis e de fácil leitura. NÃO será aceita a simples apresentação de tabelas ou a listagem dos valores de funções em nós da malha.
- d) Sistemas matriciais podem ser resolvidos usando-se um comando do MATLAB, Python ou SCILAB do tipo $x=A^{-1}*b$. No entanto, caso o tamanho da matriz seja maior do que o máximo permitido pela plataforma de programação, use um método iterativo como Gauss-Seidel ou Sobre-relaxação.
- e) NÃO use os comandos de manipulação simbólica do MATLAB, Python ou SCILAB.
- f) NÃO use o módulo Workbench do Ansys.
- g) Entregue os arquivos *.m, *.py ou *.sci, os quais devem estar decentemente comentados.
- h) O relatório (pdf) contendo a listagem do algoritmo (pdf) deve ser entregue na forma digital no Moodle. O relatório deve ser organizado em seções, os resultados devem ser discutidos e apresentados na sequência descrita neste EP, e no final do relatório deve incluir uma seção de conclusões.
- i) Qualquer discussão ou comparação deve ser acompanhada de gráficos e/ou outras indicações que o levou às conclusões.
- j) Para cada dia de atraso serão descontados 2,0 pontos na nota do EP.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, Ira H.; VON DOENHOFF, Albert E. Theory of wing sections: including a summary of airfoil data. Courier Corporation, 2012.

ANDERSON JR, John D. Fundamentals of Aerodynamics, McGraw-Hill. New York, 1991.