

1º Exercício Programa de PMR 3401
Data de entrega: 19/05/2025 (até às 23h59min)

Runge Kutta (RK)

Um absorvedor de vibração é um sistema secundário acoplado a um sistema primário, formando um sistema composto, com o objetivo de modificar as frequências de ressonância em relação àquelas que o sistema primário apresentaria isoladamente (DE GODOY, 2017). Essa abordagem é especialmente útil quando o sistema primário já está preestabelecido ou não pode sofrer grandes alterações.

A eficácia do absorvedor de vibração se deve ao fato de que ele transfere parte da energia vibratória do sistema primário para si, oscilando em torno de seu ponto de equilíbrio (HARIS, 2020). Quando o absorvedor possui não linearidades, sua amplitude de oscilação pode aumentar, permitindo que ele sequestre uma quantidade ainda maior de energia do sistema primário. Vídeo de exemplo: [Vibration Absorber](#)

A Figura 1, mostra uma simplificação do sistema de suspensão de um veículo, composto por uma mola com rigidez K_y e um amortecedor com constante de amortecimento C_y , conectados a uma massa M .

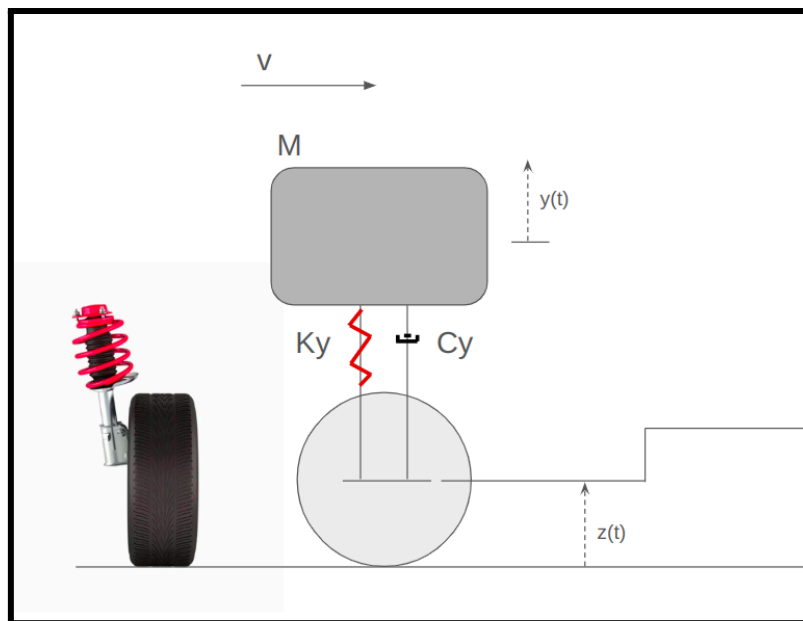


Figura 1. Sistema de suspensão de um veículo.

A equação de movimento que modela o deslocamento da massa M , dado por $y(t)$, pode ser deduzida mediante formalismo lagrangiano:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2$$

$$V_k = \frac{1}{2} K_y (y - z)^2$$

$$\delta W_{nc} = -C_y (\dot{y} - \dot{z}) \delta y$$

sendo T a energia cinética, V_k , a energia potencial elástica, e δW_{nc} o trabalho realizado pelas forças não conservativas. Desconsiderando a energia potencial gravitacional, obtém-se a seguinte equação diferencial ordinária (EDO):

$$M\ddot{y} + K_y(y - z) + C_y(\dot{y} - \dot{z}) = 0$$

1) Resolva a equação, considerando um deslocamento inicial nulo e o sistema partindo do repouso. Use:

- a) Método de Euler
- b) Método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Para os dois métodos implementados, faça uma análise da influência do passo “h” sobre a solução. Plote as curvas de deslocamento, velocidade e aceleração em figuras diferentes, organizadas em uma mesma página, uma debaixo da outra. Considere que a pista apresenta um degrau, modelado segundo a equação:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t < 2 \\ 0,25 & ; \quad t \geq 2 \end{cases}$$

Na Figura 2, mostra-se a inclusão de um absorvedor de vibração no sistema primário. Este subsistema é composto por uma mola com rigidez k e comprimento não deformado L , e um amortecedor com constante de amortecimento c , conectados a uma massa m , onde $m = \epsilon \cdot M$.

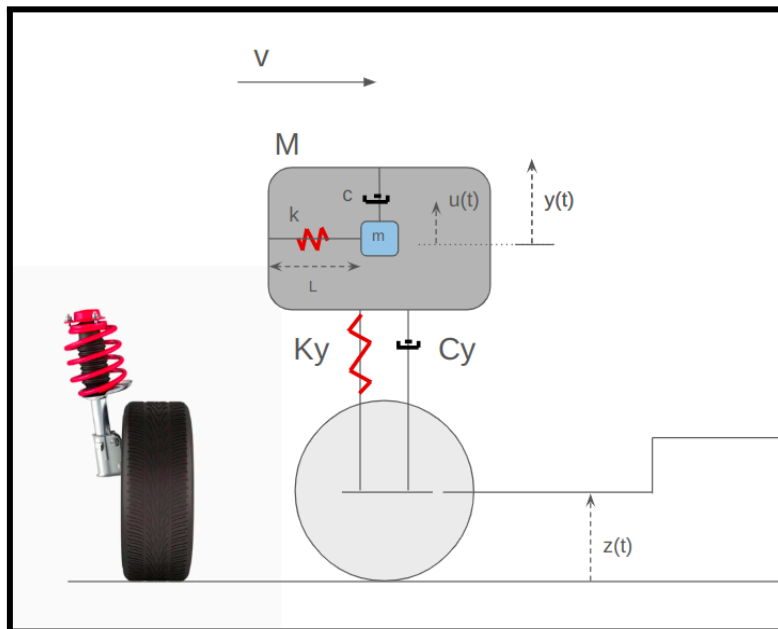


Figura 2. Inclusão de um absorvedor de vibração no sistema de suspensão.

A equação de movimento que modela o deslocamento da massa M , dado por $y(t)$, e o deslocamento da massa m , relativo a $y(t)$, dado por $u(t)$, pode ser deduzida mediante formalismo lagrangiano:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{y} + \dot{u})^2$$

$$V_k = \frac{1}{2}K_y(y-z)^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{L^2 + u^2} - L\right)^2$$

$$\delta W_{nc} = -C_y(\dot{y} - \dot{z})\delta y - c\dot{u}\delta u$$

sendo T a energia cinética, V_k , a energia potencial elástica, e δW_{nc} o trabalho realizado pelas forças não conservativas. Desconsiderando a energia potencial gravitacional, obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs):

$$(M+m)\ddot{y} + m\ddot{u} + K_y(y-z) + C_y(\dot{y} - \dot{z}) = 0$$

$$m\ddot{y} + m\ddot{u} + ku\frac{\sqrt{L^2 + u^2} - L}{\sqrt{L^2 + u^2}} + c\dot{u} = 0$$

O termo da mola conectada à massa m pode ser expandido em uma série de Taylor até a terceira ordem, resultando em uma função cúbica. Com isso, obtém-se o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs):

$$(M+m)\ddot{y} + m\ddot{u} + K_y(y-z) + C_y(\dot{y} - \dot{z}) = 0$$

$$m\ddot{y} + m\ddot{u} + \frac{ku^3}{2L^2} + c\dot{u} = 0$$

2) Resolva o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs), considerando um deslocamento inicial nulo e o sistema partindo do repouso. Use o Método de Runge-Kutta de 4ª ordem para a solução numérica. Varie o valor de ε (a razão m/M) entre 1% e 19%, com incrementos de 4,5%. Para cada valor de ε , plote os gráficos de $y(t)$ e $u(t)$ na mesma figura, e compare os resultados com o caso em que $\varepsilon = 0$ (sem absorvedor de vibração). Faça isso considerando que:

a) a pista apresenta um degrau, modelado segundo a equação:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t < 2 \\ 0,25 & ; \quad t \geq 2 \end{cases}$$

b) a pista apresenta um conjunto de redutores de velocidade (lombadas), modelado segundo a equação:

$$z(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t < \lfloor \frac{2}{T} \rfloor T \\ 0,125 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right) & ; \quad \lfloor \frac{2}{T} \rfloor T \leq t < (\lfloor \frac{2}{T} \rfloor + 10)T \\ 0 & ; \quad t \geq (\lfloor \frac{2}{T} \rfloor + 10)T \end{cases}$$

sendo o período $T = 2 / V$, e a velocidade de avanço do veículo $V = 3$ m/s.

3) Usando o pico máximo de deslocamento da curva $y(t)$, calcule a porcentagem de redução da amplitude de vibração em função de ε , variando entre 1% e 19% com 50 incrementos uniformemente espaçados. Faça isso apenas para o caso em que a pista apresenta um conjunto de redutores de velocidade (lombadas):

$$z(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t < \lfloor \frac{2}{T} \rfloor T \\ 0,125 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right) & ; \quad \lfloor \frac{2}{T} \rfloor T \leq t < (\lfloor \frac{2}{T} \rfloor + 10)T \\ 0 & ; \quad t \geq (\lfloor \frac{2}{T} \rfloor + 10)T \end{cases}$$

com período $T = 2 / V$.

Considere as velocidades de avanço do veículo de 2 m/s; 3 m/s; 4 m/s e 5 m/s. Para qual velocidade de avanço do veículo o absorvedor de vibração apresenta o melhor desempenho? Por quê?

Dados do problema:

Variável	Valor	Unidade
M	500	Kg
Ky	20000	N/m
Cy	700	Ns/m
k	10000	N/m
c	350	Ns/m
L	0,1	m

Método de Diferenças Finitas (MDF)

Ventos laterais fortes podem arrancar telhados de construções, casas, silos, tendas ou hangares, como o da Figura 3. Diversos exemplos de colapso estrutural causado por vento podem ser encontrados em vídeo:

- ▶ Top 5 Roofs that got Blown Away by Wind
- ▶ Wind Causes Hangar Collapse At Houston's Hobby Airport



Figura 3. Fotografia de um Hangar.

Este exercício consiste em uma análise do esforço gerado pelo vento sobre o telhado de uma construção. Partindo de um modelo bidimensional da construção, conforme ilustrado na Figura 4 onde é definido o domínio do problema, pede-se a simulação do escoamento de ar em volta da estrutura. Considerando que o escoamento seja irrotacional, invíscido e em regime permanente, modelado o ar como um fluido compressível e desprezando os efeitos gravitacionais, obtém-se a equação de escoamento potencial compressível (ANDERSON, 1990):

$$\left(1 - M_x^2\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(1 - M_y^2\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2M_x M_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = 0 \quad (1)$$

onde:

$$M_x = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad e \quad M_y = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2)$$

são as componentes do número de Mach, c é a velocidade do som local, e

$$\nabla \Phi = \vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} \quad (3)$$

é o gradiente do potencial de velocidade Φ . Para escoamentos subsônicos com número de Mach desprezível ($M_x \rightarrow 0$ e $M_y \rightarrow 0$), temos uma simplificação que resulta na eq. (4):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

A imposição das condições de contorno é mais simples utilizando a função de corrente ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -v \quad e \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u \quad (5)$$

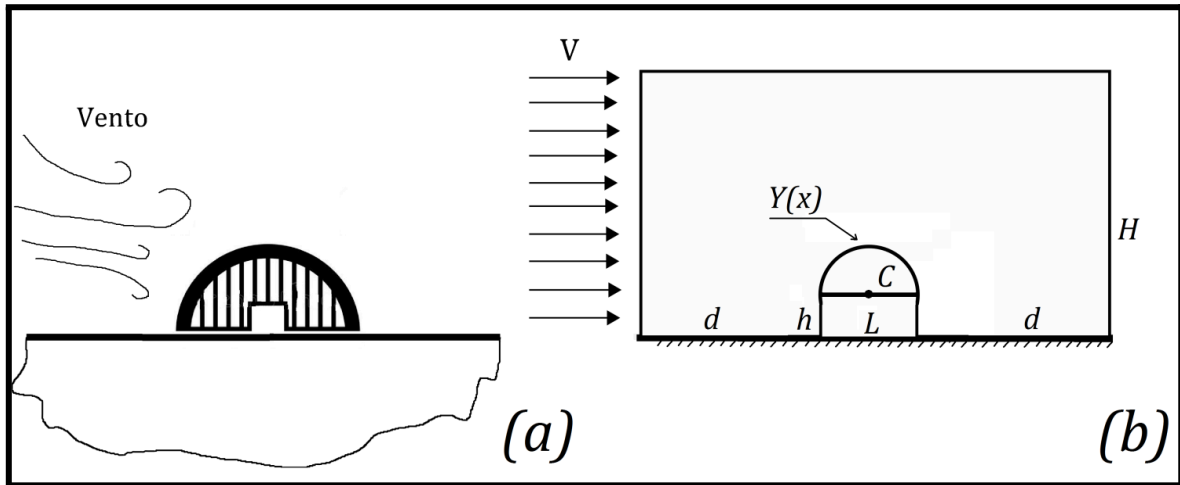


Figura 4. Modelo bidimensional: (a) Ilustração da situação real e (b) Domínio do problema.

Portanto, ao invés de resolver (4), pode-se resolver a equação :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

utilizando o método das diferenças finitas (MDF) com as condições de contorno apresentadas na Figura 5, onde V é a velocidade do vento. A partir do campo de velocidade u , pode-se obter a pressão utilizando a equação de Bernoulli:

$$\frac{(\sqrt{u(x,y)^2 + v(x,y)^2})^2}{2} + \frac{\gamma_{ar}}{\gamma_{ar}-1} \frac{p(x,y)}{\rho} = cte \quad (7)$$

Portanto, a partir das condições de contorno na fronteira superior, temos a variação de pressão no domínio:

$$p(x,y) - p_{atm} = \rho \frac{\gamma_{ar}-1}{\gamma_{ar}} \left(\frac{(V)^2}{2} - \frac{(\sqrt{u(x,y)^2 + v(x,y)^2})^2}{2} \right) \quad (8)$$

Após determinar o campo de velocidade, pode-se calcular a distribuição de temperaturas utilizando a expressão:

$$k \nabla^2 T - \rho c_p u \cdot \nabla T = 0 \quad (9)$$

O fluxo de calor $\vec{Q}(x,y)$ (em W/m^2) que flui através das superfícies do prédio é dado por:

$$\vec{Q}|_{prédio} = -k \frac{\partial T}{\partial n} \vec{n} = -(k \nabla T \cdot \vec{n}) \vec{n}; \quad (10)$$

onde \vec{n} é o versor normal à parede ou telhado do prédio, **direcionado para fora**. Assim, a quantidade de calor total (unidade W) trocada pela área A do prédio com o ar é:

$$q = \int_A \vec{Q} \cdot \vec{n} dA = - \int_A k \frac{\partial T}{\partial n} dA = - \int_A k \nabla T \cdot \vec{n} dA \quad (11)$$

Considere:

- Velocidade do vento: $V=100$ km/h.
- Dimensões e posição da estrutura: $h=3$ m, $d=5$ h, $L=2$ h e $H=8$ h.
- Propriedades do ar:

$$\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3 ;$$

$$\gamma_{ar} = 1,4 , k_{ar} = 0,026 \text{ W/(m.K)} ;$$

$$c_{p_{ar}} = 1002 \text{ J/(kg.K)} .$$

- Comprimento da estrutura: 60 metros.
- Temperaturas: $T_{dentro} = 40^\circ\text{C}$ e $T_{fora} = 20^\circ\text{C}$

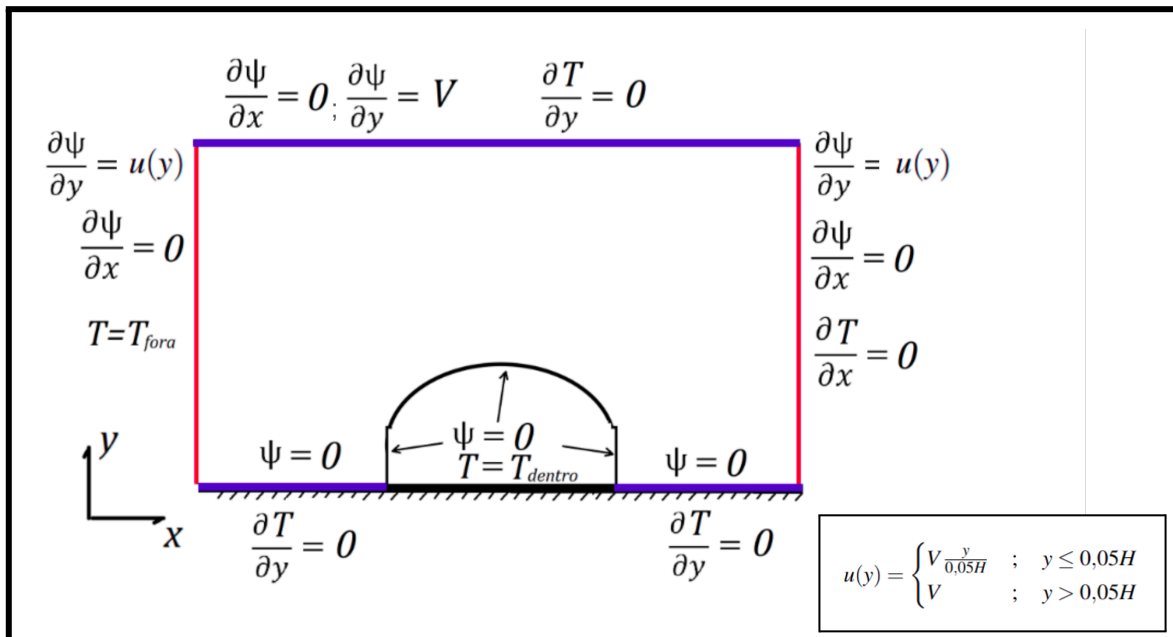


Figura 5. Condições de contorno.

Com uma malha quadrada adequada, ou seja, $\Delta x = \Delta y$, implemente o método de “sobre-relaxação” para a solução do sistema linear de equações resultante da aplicação do MDF (utilize $\lambda=1,85$ e e tolerância de convergência de 0,01). Verifique a influência da discretização (Δx) sobre a solução, explicando como determinou o valor de Δx utilizado. Utilize diferenças finitas para contornos irregulares nos nós mais próximos do contorno do telhado.

PARTE I: Considerando um telhado com topo circular de raio $L/2$, pede-se:

- Plotar a função de corrente ψ do escoamento;
- Plotar os vetores de velocidade absoluta do escoamento;
- Plotar a pressão no domínio;
- Plotar a pressão ao longo do telhado, explicitando seu valor mínimo;

e) Calcular a força vertical resultante que atua no telhado.

PARTE II: Com os resultados da parte I, calcule:

- a) A distribuição de temperatura no ar (em °C).
- b) A taxa de calor retirada do prédio.

A solução da eq. (9) pelo MDF torna-se instável com uso de diferenças finitas centrais para esses valores das constantes das propriedades do ar. Isto ocorre devido à dominância do termo convectivo $\rho c_p u \cdot \nabla T$ na equação. Uma maneira de resolver esse problema é utilizar diferenças finitas para trás. No caso, o termo “para trás” depende da direção do fluxo de ar, isto é:

- Se $u > 0$ deve ser utilizado: $\frac{\partial T}{\partial x} = (T_{ij} - T_{i-1,j})/\Delta x + O(\Delta x)$
- Se $u < 0$ deve ser utilizado: $\frac{\partial T}{\partial x} = (T_{i+1,j} - T_{ij})/\Delta x + O(\Delta x)$
- Se $v > 0$ deve ser utilizado: $\frac{\partial T}{\partial y} = (T_{ij} - T_{i,j-1})/\Delta y + O(\Delta y)$
- Se $v < 0$ deve ser utilizado: $\frac{\partial T}{\partial y} = (T_{i,j+1} - T_{ij})/\Delta y + O(\Delta y)$

Neste item use sobre-relaxação de 1,15 e e tolerância de convergência de 0,01 com $\Delta y = \Delta x = h/8$.

Sugestão de implementação: Crie um grid cartesiano e atribua $\psi = 0$ e $T = T_{dentro}$ se

$y < Y(x)$ onde a altura do telhado é dada por $Y(x) = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(x - d - \frac{L}{2}\right)^2} + h$.

APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Os trabalhos podem ser feitos em grupos de dois alunos. Os resultados devem ser apresentados da seguinte forma:

- a) Inicialmente apresente todos os equacionamentos analíticos e numéricos do problema a serem implementados no Python, SCILAB ou MATLAB;
- b) NÃO será aceita a utilização de comandos prontos do Python, SCILAB ou MATLAB para as soluções das equações de derivadas ordinárias no Método de Runge Kutta e das equações de derivadas parciais no Método de Diferenças Finitas;
- c) Todos os resultados do tipo $f(x,y)$ devem ser plotados utilizando funções do Python, SCILAB ou MATLAB como *mesh*, *contour*, *quiver*, *surf*, etc (escolha uma). Coloque título e legenda nos gráficos. Os gráficos devem ser legíveis e de fácil leitura. NÃO será aceita a simples apresentação de tabelas ou a listagem dos valores da função nos nós da malha;
- d) NÃO utilize os comandos de manipulação simbólica do Python, SCILAB ou MATLAB;
- e) Entregue as listagens dos arquivos *.py, *.sci ou *.m, os quais devem estar devidamente comentados;
- f) O relatório (pdf) contendo a listagem do algoritmo (pdf) deve ser entregue na forma digital no Moodle. O relatório deve ser organizado em seções, os resultados devem ser discutidos e apresentados na sequência descrita neste EP, e no final do relatório deve ser incluída uma conclusão;
- g) Qualquer discussão ou comparação deve ser acompanhada de gráficos e/ou outras indicações que o levou às conclusões;
- h) Para cada dia de atraso serão descontados 2,0 pontos na nota do EP.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, John David. Modern compressible flow: with historical perspective. 1990.

DE GODOY, Willians Roberto Alves. Projeto, análise e otimização de um absorvedor dinâmico de vibrações não linear. 2017.

HARIS, Aini et al. Design and validation of a nonlinear vibration absorber to attenuate torsional oscillations of propulsion systems. Nonlinear Dynamics, v. 100, p. 33-49, 2020.