Вычислительная математика

Часть I
Погрешности вычислений

1 6.5

Относительная погрешность округления при представлении действительного числа в ЭВМ, если под хранение мантиссы отводится p бит?

Рассмотрим представление числа в виде бесконечной двоичной дроби:

$$A = (-1)^s 2^q (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}) \quad a_k \in \{0, 1\}$$

Тогда в мантисе остается p слагаемых, и округленное число представимо суммой до p члена. Абсолютная погрешность

$$\Delta A = 2^q (2^{-p})$$

Относительная

$$\sigma = 2^{-p}$$

2 8.18

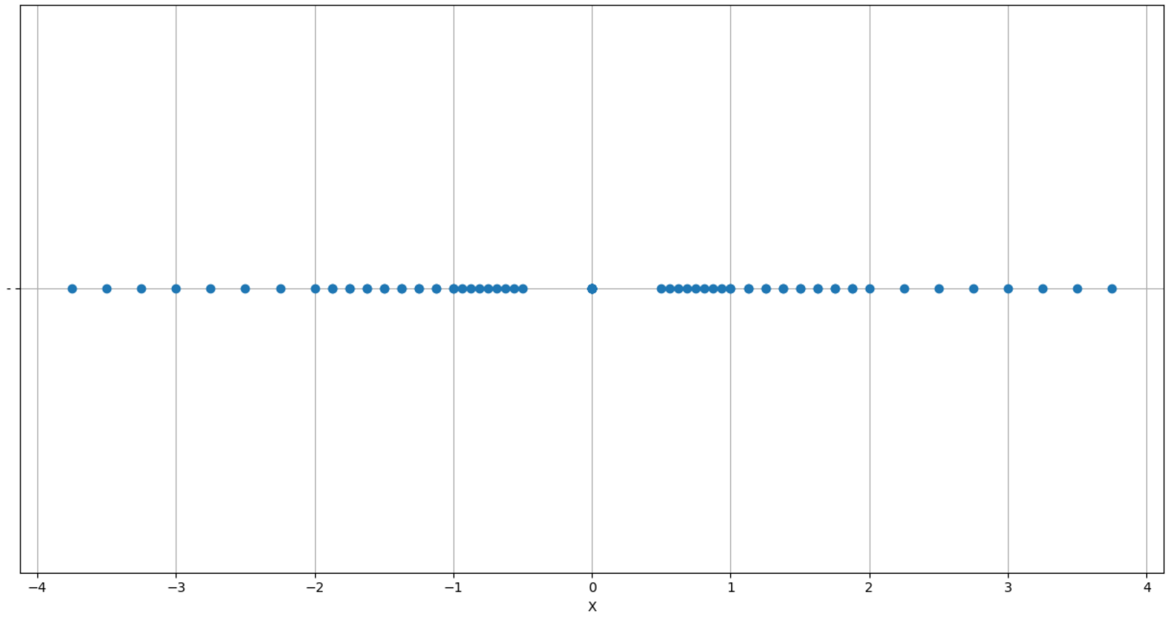
Рассмотрим модель представления чисел в IEEE-арифметике следующего вида:

$$S = \{\pm b_0, b_1 b_2 b_3 \cdot 2^{\pm a}\}$$

$$\{a, b_1, b_2, b_3\} \in \{0, 1\}$$

$b_0 = 1$ *кроме случая, когда* $a = b_i = 0$
а) Нарисовать множество S *на действительной оси. Сколько чисел в данной модели арифметики у Вас получилось?*
б) Чему равны машинные константы ε, UFL, OFL *в этой модели?*

Zhuravlev.va@phystech.edu



Легче всего найти OFL и UFL:

$$OFL = 3.75$$

$$UFL = 0.5$$

Для поиска ε нужно рассмотреть ближайшие точки:

$$\varepsilon = \frac{9}{16} - (0.5) = 0.0625$$

Всего чисел в этой модели:

$$N = 48 + 1 = 49$$

3 8.13

Вычислить относительную погрешность в определении значения функции

$$u = x^2 y^2 / z^4$$

Если известно:

$$x^* = 37.1, \; y^* = 9.87, \; z^* = 6.052$$

$$\Delta x = 0.1, \; \Delta y = 0.05, \; \Delta z = 0.02$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Delta r} = \begin{pmatrix} \Delta x^* \\ \Delta y^* \\ \Delta z^* \end{pmatrix}$$

найдем:

$$\vec{\nabla} u^* = \begin{pmatrix} |2xy^2/z^4| \\ |2yx^2/z^4| \\ |-4x^2y^2/z^5| \end{pmatrix}$$

Подставляя значения $\vec{r}$ в градиент найдем:

$$\Delta u = (\vec{\nabla} u, \vec{\Delta r}) = 2.872$$

$$u = 99.951$$

Относительная погрешность

$$\sigma \approx 0.0287$$

4 8.42

Разложим в точке $x = 3$ функцию в два различных ряда тейлора:

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + O(h^4)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + 4\frac{h^2}{2} f''(x) - 8\frac{h^3}{6} f'''(x) + O(h^4)$$

Т.к. нужно найти первую производную, а третья производная нам известна - давайте уберем из уравнения вторую производную, вычтя из второго 4 первых уравнения:

$$f(x-2h) - 4f(x-h) = -3f(x) + 2f'(x)h + 0 - \frac{2}{3} h^3 f'''(x) + O(h^4)$$

Сразу можно найти первую производную:

$$f'(3) = 13.5 + \frac{4}{3}$$

Т.к. в двух точках значения функции заданы неточно, найдем ошибку округления:

$$r_2 \leqslant \frac{2M_0\varepsilon_m}{h} = \frac{E}{h}$$

$$r_1 \leqslant \frac{M_4 h^3}{12}$$

Оптимальный шаг находится из уравнения

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{E}{h} + \frac{M_4 h^3}{12}\right) = 0 \Leftrightarrow h = \sqrt[4]{\frac{8M_0\varepsilon_m}{M_4}}$$

5 9.15

Часть II

Прикладная линейная алгебра

6 7.15

Пусть $\|\cdot\|$ *- норма в* $\mathfrak{R}^n$*, тогда норма*

$$\|x\|_* = \sup_y \left(\frac{(x,y)}{\|y\|}\right)$$

Zhuravlev.va@phystech.edu

тоже норма

Проверим все аксиомы:

1.
$$\|x\|_* = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

От противного:
$$x \neq 0 \to y = x \to \|x\|_* = \|x\| > 0$$

2.
$$\|x\|_* = \sup_{y:\|y\|=1} (x, y)$$
$$\|ax\|_* \overset{a\geq 0}{=} \sup_{y:\|y\|=1} (ax, y) = \sup_{y:\|y\|=1} a(x, y) = a \sup_{y:\|y\|=1} (x, y)$$
$$\|ax\|_* \overset{a<0}{=} \sup_{y:\|y\|=1} (ax, y) = \sup_{y:\|y\|=1} (x, ay) = \sup_{y:\|y\|=1} |a|(x, (-y)) = |a|\|x\|_*$$

3.
$$\sup_{y:\|y\|=1} (x + z, y) = \sup_{y:\|y\|=1} (x, y) + (z, y) \leq \sup_{t:\|t\|=1} (x, t) + \sup_{w:\|w\|=1} (z, w) = \|x\|_* + \|z\|_*$$

7 7.41

Показать, что существует система уравнений третьего порядка, для которой метод Гаусса–Зейделя сходится, а метод Якоби расходится.

Согласно теоремам о необходимых и достаточных условиях сходимости для метода якоби:
$$\det \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix} = 0$$
$$|\lambda| < 1$$

Для Зейделя-Гаусса:
$$\det \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix} = 0$$
$$|\lambda| < 1$$

Пример:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем λ_z, λ_J. Имеем:
$$\lambda_z = 0$$
$$\lambda_J = 2$$

Zhuravlev.va@phystech.edu

8 9.2(Г)

$$A = \begin{pmatrix} 65 & 72 \\ 72 & 82 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 137 \\ 154 \end{pmatrix}$$

Собственные числа матрицы A: $\lambda_1 = 146$ $\lambda_2 = 1$. Посчитаем число согласованности по операторной норме в евклидовой метрике:

$$\mu = \|A\|\|A^{-1}\| = \frac{\max(\lambda_i)}{\min(\lambda_j)} = 146$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq 146 \cdot 0.01$$

Минимум ошибки достигается на собственном векторе с минимальным собственным значением: $\begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix}$ а $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ - решение соответствующее этому вектору $\vec{b}$

$$\|\Delta X\| = \sqrt{2} \cdot 0.01$$

9 9.15

А) Найдем собственные числа матрицы:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4, 6, 8$$

Т.к. $\lambda_i > 0, \forall i \longrightarrow$ можем сразу сказать

$$\tau \in [0, \frac{2}{\lambda_{max}} = 1/4]$$

Б)

$$\tau \in (0, 1/4)$$

В) Аналогично пункту А)

$$\tau_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}} = \frac{1}{6}$$

10 9.23

$$x^{(k+1)} = (E - \tau A)x^{(k)} + \tau f$$

Найдем собственные числа A

$$\lambda_i = 1,\ 6,\ 23$$

$$\tau \in (0, \frac{1}{23})$$

$$q = \max|1 - \tau\lambda| = 0.98$$

2)

$$\tau_{opt} = \frac{2}{1 + 23} = \frac{1}{12}$$

$$q = |1 - \tau_{opt}| = \frac{11}{12}$$

Zhuravlev.va@phystech.edu

4) Как уже было указано в задаче 7.41 найдем определитель Якоби для матрицы A

$$\det\begin{pmatrix}18\lambda & -6 & -7\\ -6 & 6\lambda & 0\\ -7 & 0 & 6\lambda\end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda = 0, \pm\frac{\sqrt{(67/3)}}{6} < 1$$

т.е. метод Якоби устойчив

5) В методе Зейделя так же находим дискриминант Зейделя и приравниваем его к нулю:[1]

$$\lambda_{1,2} = 0$$

$$\lambda_3 = \frac{521}{648} < 1$$

Видим, что метод Зейделя тоже сходится.

[1] Очень интересные задачки!

Zhuravlev.va@phystech.edu