
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(Государственный университет)
ФАКУЛЬТЕТ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

Тормозное излучение плазмы

Журавлев Владимир, 621

1 Abstract

В этом вопросе по выбору для устного экзамена по общей физике качественным способом будет получена формула для тормозного излучения плазмы.

В рассматриваемой модели будут применены основные законы классической электродинамики, в предположении, что электроны и ионы в плазме находятся на достаточно больших расстояниях, и напряженности полей еще удовлетворительно описываются законами для свободных частиц.

2 Формула Лармора

В электродинамике нерелятивистских заряженных частиц используется формула Лармора для вычисления полных энергетических потерь излучающих частиц.

$$-\frac{dW}{dt} = P = \frac{2q^2 a^2}{3c^3} \quad (1)$$

Что очень напоминает формулу мощности излучающего диполя:

$$P = \oint_F \mathbf{S} d\mathbf{F} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2}{4\pi c^3} \int_0^\pi \sin^2 \theta 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{2\ddot{\mathbf{p}}^2}{3c^3} = \frac{2\ddot{\mathbf{p}}^2}{3c^3} \quad (2)$$

Примечание: Довольно редко мощность зависит от ускорения, а сила от третьей производной координат (т.н. сила радиационного трения):

$$\mathbf{F} = \frac{2q^2}{3c^3} \frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

3 Тормозное излучение

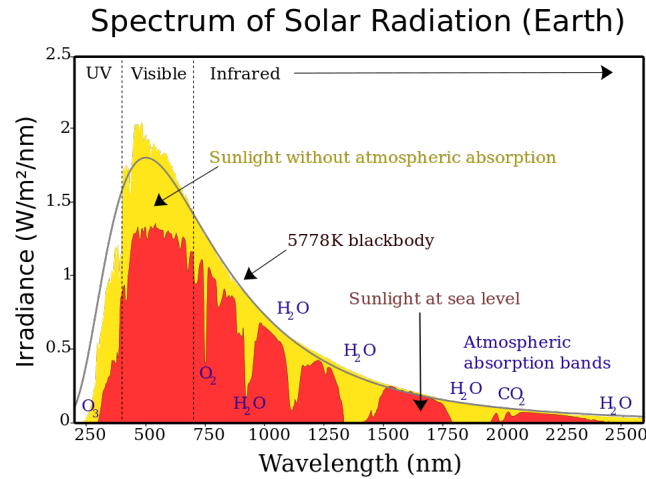
3.1 Плазма

Плазма представляет собой частично, или полностью ионизированный газ с примерно равными концентрациями положительных и отрицательных зарядов. Будем рассматривать плазму с малой плотностью, т.е. такую, которая хорошо описывается уравнениями для газов.

Плазма характеризуется несколькими основными параметрами: плотностью n_e , степенью ионизации Z , Температурой T .

Плазму выделяют в четвертое агрегатное состояние вещества, и большая часть массы вселенной приходится на плазму.

Наблюдаемый спектр излучения плазмы сплошной:



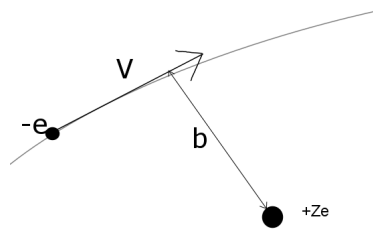
Атомная же теория предсказывает линейчатый спектр излучения вещества. Попробуем объяснить наблюдаемое явление с точки зрения классической электродинамики.

3.2 Гипотеза

Известно, что ускоренно движущиеся заряды излучают, если «проследить» за электроном в плазме, то он будет участвовать в огромном числе столкновений за секунду. Каждое столкновение вызывает сильные электромагнитные поля, напряженность которых растет с ростом степени ионизации плазмы. Электрон будет ускоряться и замедляться под действием этих полей, и согласно формуле (1) будет излучать. Оценим вклад этого излучения в общее излучение плазмы.

3.3 Получение формулы

Предположим, что электрон пролетает с прицельным параметром b рядом с массивным ионом $+Ze$:



Среднее время взаимодействия приближаем формулой (Если траектория гипербола):

$$\Delta t = \alpha \frac{b}{v}$$

Чтобы избежать ненужных «столкновений» с квантовыми эффектами, ограничим минимальный прицельный параметр: $b_{min} = \frac{h}{m_e v}$

Тогда силу взаимодействия будем приближать законом Кулона:

$$a = \frac{Ze^2}{mr^2}$$

Подставив в формулу (1):

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \frac{Z^2 e^4}{m^2 r^4} \quad (3)$$

Где q , m - заряд и масса ускоряемой частицы. Тут заметим, что мощность обратно квадрату массы, значит основной вклад в излучение должны давать легкие электроны. Ограничимся рассмотрением их движения.

Излученная энергия:

$$W = \langle P \rangle \Delta t \approx \alpha \frac{2q^2}{3c^3} \frac{Z^2 e^4}{vm_e^2 b^3}$$

$$W = Z^2 \Omega \frac{1}{vb^3}$$

Мы можем примерно вычислить энергию, излучаемую одним электроном.

Теперь нужно найти распределение электронов по прицельным параметрам и скоростям.

3.3.1 Скорость

Распределение Максвелла **по модулю** скорости:

$$dN(v) = 4\pi v^2 \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^3} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv = f(v)dv$$

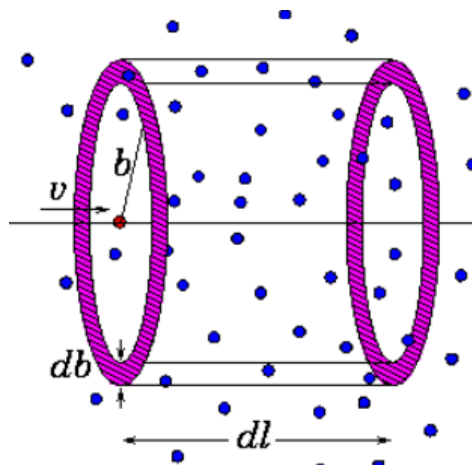
Тут уже важна невысокая температура плазмы ($T < 10^9 K$), чтобы кинетическая энергия определялась как $\frac{mv^2}{2}$

3.3.2 Прицельный параметр

При прицельном параметре b электрон за время dt будет испытывать «столкновения» количеством ионов:

$$\pi b^2 n_Z v dt$$

Тогда при прицельном параметре лежащем в промежутке $(b; b + db)$



$$dW = \pi b n_Z v dt$$

А если учесть все электроны с **этой же скоростью**¹ то получим

$$dW = 2\pi b n_Z n_e(v) v db dt = \pi b n_Z n_e f(v) v db dt$$

Теперь мы можем учесть вклад всех электронов в излучение:

$$dP(v, b) = Z^2 e^6 n_i n_e \beta \frac{1}{b^2} f^2(v) db dv$$

И взяв интеграл по прицельному параметру в пределах (b_{min}, r_d) , и по скорости в пределах от 0 до ∞ ² получим выражение мощности излучения в единице объема через характеристики плазмы:

$$P \sim T^{1/2} n_e n_Z Z^2$$

4 Полная Формула Зоммерфельда

$$P = Q T^{1/2} n_e n_Z Z^2$$

$$Q = 1.5 \cdot 10^{-27}$$

Где Q это числовой коэффициент, который я намеренно не получал, т.к. рассуждения носили прежде всего оценочный характер. Точный учет влияния квантовых эффектов лишь вносит дополнительный коэффициент, и несколько ограничивает b_{max} , которое становится еще меньше дебаевского радиуса.

Так же отмечу, что излучаемые фотоны так же ограничены в частотах³

$$\omega \in [\omega_p; \frac{mv^2}{2\hbar}]$$

Т.к. частоты ниже ω_p затухают в плазме, а электрон не может отдать больше энергии, чем имеет сам.

Все же остальные частоты в принципе могут быть излучены, что показывает, что спектр тормозного излучения плазмы сплошной.

5 Применение

Используя полученные формулы, можно посчитать, сколько энергии излучает один литр водородной плазмы при температуре $10^8 K$, $n_e = n_Z = 10^{16}$

$$P = 150 kW$$

Поэтому задачи получения и удержания плазмы - одна из главных задач человечества в 21 веке :)

¹Конечно, я имею ввиду скорости из промежутка $[v; v + dv]$

²т.к. пользовался распределением максвелла

³Имеются ввиду частоты, которые мы детектируем, а не которые могут быть излучены.