МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ФАКУЛЬТЕТ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ
621 ГРУППА

Вопрос по выбору

Дисперсия волн на поверхности жидкости. Закон дисперсии.

Журавлев Владимир

Долгопрудный, 2016

Дисперсия волн — в теории волн различие фазовых скоростей линейных волн в зависимости от их частоты. Дисперсию впервые описал Исаак Ньютон, наблюдая за разложением белого света в спектр. Разработанная им теория объясняла это явление различием скоростей распространения света в стекле.
Дисперсия наблюдается не для всех волн, например электромагнитное излучение в вакууме дисперсию не испытывает, в отличие от волн на поверхности водоемов.
Дисперсию волн, очевидно, требуется каким-то образом описывать, поэтому выберем в качестве характеристики дисперсии т.н. *дисперсионное выражение* или *закон дисперсии*, который связывает фазовую скорость волны с модулем ее волнового вектора.
Фазовая скорость - скорость перемещения точки, обладающей постоянной фазой колебательного движения в пространстве, вдоль заданного направления.
Волновой вектор - вектор, направление которого перпендикулярно фазовому фронту бегущей волны, а абсолютное значение равно волновому числу.

Закон дисперсии

Теперь получим критерий существования дисперсии и покажем, что не всяким волнам характерна дисперсия. Уравнение «классической» бегущей волны:

$$z(x,t) = A_0 cos(\omega t - kx) = A_0 cos(\phi(x,t)) \tag{1}$$

Получим выражение для фазовой скорости:

$$\phi(x,t) = const \Rightarrow \dot{\phi}(x,t) = 0 \Rightarrow \omega - k\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow V_\phi = \frac{\omega}{k}; \tag{2}$$

Для получения выражения для групповой скорости проанализируем две волны, у которых немного отличаются частоты и длины волн, но одинаковы амплитуды:

$$z_1 = A\cos(\omega t - kx)$$

$$z_2 = A\cos([\omega + d\omega]t - [k + dk]x)$$

По принципу суперпозиции:

$$z = z_1 + z_2 \approx 2A\cos(\frac{td\omega - xdk}{2})\cos(\omega t - kx)$$

Скорость максимума по аналогии с фазовой скоростью:

$$td\omega - xdk = 0$$

$$V_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kV_\phi)}{dk} = V_\phi + \frac{dV_\phi}{dk}$$

Очевидно, что при отсутствии дисперсии:

$$\frac{dV_\phi}{dk} \equiv 0$$

И при этом получаем:

$$V_{gr} \equiv V_\phi$$

Волны на поверхности жидкости

Для начала рассмотрим волны на «мелкой воде» т.е. когда длина волны гораздо больше, чем глубина водоема. Например длина *цунами* составляет по порядку десятки и сотни километров, что конечно же гораздо больше, чем глубина мирового океана. Рассмотрим следующую модель: волна, амплитуда которой значительно меньше чем глубина водоема, распространяется, приводя в движение все частицы жидкости до самого дна.

«Рассечем» волну двумя плоскостями, перпендикулярными волновому вектору. [Рисунок 1.] В силу несжимаемости воды массы входящей и выходящей воды равны :

$$\rho hvbdt = \rho Hubdt \Rightarrow u = v\frac{h}{H}$$

Теперь запишем II закон Ньютона (вообще-то уравнение Эйлера):

$$\rho v^2 bhdt - \rho u^2 bH = \frac{1}{2}\rho dt(hH^2 b - gh^2 b)$$

Раскрывая разность квадратов и преобразуя:

$$hv(v-u) = \frac{g}{2}(H-h)(H+h), h+H \approx 2h \Rightarrow v = \sqrt{gh}$$

Закон дисперсии для таких волн выглядит так:

$$\omega = k\sqrt{gh} \tag{3}$$

Видно, что фазовая скорость длинных волн не зависит от их волнового числа, поэтому длинные волны дисперсию практически не испытывают, а их скорость в наиболее глубоких местах океана достигает 300 м/с!.
Для коротких волн на глубокой волне рассуждения полностью аналогичны, за исключением одного: в движение уже вовлекается не вся жидкость, а лишь часть по порядку равная длине волны (водоем можно считать бесконечно глубоким, очевидно, что покой глубоких слоев жидкости не зависит от маленьких волн на поверхности). В таком приближении получаем:

$$V_\phi \sim \sqrt{g\lambda}$$

Или точнее:

$$V_\phi = \sqrt{\frac{g}{k}} = 2V_{gr}; \;\; \omega = \sqrt{gk}$$

Более точный расчет (с учетом сил поверхносного натяжения) показывает, что закон дисперсии коротких волн задается выражением:

$$\omega^2 = gk + (\sigma/\rho)k^3 \tag{4}$$

Что показывает существование локального минимума скорости волн:

$$V_\phi \approx 0.23m/s, \lambda \approx 1.7sm$$

Наконец, рассмотрим некоторые явления, которые подтвердят правильность построения нашей модели:

Волны на глубокой воде

Круги на воде