МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ФАКУЛЬТЕТ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

Математические основы Физики Для школьников

Журавлев Владимир

Северодвинск, 2019

Задачи ВОШ прошлых лет с решениями

Сборник задач Савченко

Теорию можно взять в:

- **Мякишев пятитомник**
- Сивухин пятитомник (институтский курс)
- Кириченко четырехтомник (институтский курс) (это Сивухин, из которого убрали все лишнее)

Мои контакты: vk.com/zuvla

Содержание

Часть I
Производная и её приложения. Дифференциальные операторы.

1 Производная как предел

Как ни странно, курс по физике стоит зачастую начинать с подкурса по математике. Я сделаю это по возможности строго. Но от вас потребуется при этом достаточная усидчивость и гибкость ума.

В принципе понятие производной появляется в математическом анализе, где формализуется понятие функции, ряда, интеграла и т.п.
Мы будем пытаться ввести подобие теоретико-множественного подхода, поэтому вы увидите несколько непривычный вам стиль письма, к которому, так или иначе, придется привыкнуть.
$\boxed{Definition:}$ **Функцией** называют правило, по которому элементам одного множества F сопоставляются элементы другого множества G. Пишут:

$$f : F \to G$$

Этими множествами могут быть, например, две вещественные оси. Функцией можно назвать отображение из одного алфавита в другой (из греческого в русский, например) или из интервала в полуось

$$f(x) = \frac{1}{x} - 1 : \ (0, 1) \to (0, +\infty)$$

Функцией так же можно назвать много что, например правило, которое каждому предмету ставит в соответствие его цвет. Чтобы избежать вот таких неплодотворных примеров, мы станем рассматривать числовые функции (из одного множества чисел в другое)

Так что же с производной? Рассмотрим функцию

$$f : F \subseteq \mathbb{R} \to G \subseteq \mathbb{R}$$

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называют предел

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \equiv \frac{df}{dx}$$

В этом определении написано больше, чем кажется на первый взгляд. Во-первых, существование предела подразумевает равенство левого и правого пределов, что уже довольно серьезное требование к функции, например функция $f := |x|$ в точке 0 имеет пределы $f'_L = -1 \neq f'_R = +1$ и поэтому её производная в этой точке не определена.
Производная, конечно, допускает наглядную геометрическую интерпретацию: производная в точке - тангенс угла наклона графика в этой точке.
Давайте найдем производную каких-нибудь функций:

$$f = x^2 \to \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = 2x$$

$$f = \cos(x), \ \frac{\cos(x_0 + \Delta x) - \cos(x_0)}{\Delta x} = \frac{\cos(x_0)\cos(\Delta x) - \sin(x)\sin(\Delta) - \cos(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{-\sin(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x} = -\sin(x)$$

Здесь я воспользовался первым замечательным пределом, а еще тем, что

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1-\cos(\epsilon)}{\epsilon}=0$$

Можете попробовать это доказать.

$$c'=0$$

$$x'=1$$

$\boxed{Definition:}$ **Дифференцируемой на множестве D (гладкой) функцией** называют функцию, у которой в каждой точке из D существует производная.
Например функция $|x|$ гладкой не является. Обычно гладкость функции хорошо видно на графике - у негладких функций появляются «изломы», подобно функции $|x|$

Наиболее важным свойством производной является то, что она, вообще говоря, является главным инструментом для исследования максимумов и минимумов функций. Нетрудно видеть, что если гладкая функция достигает своего локального минимума или максимума (экстремума) в какой-нибудь точке x_0, то в этой же точке $f'(x_0)=0$. Дома в докажете это утверждение.
Говорят, что **равенство нулю производной это необходимое условие экстремума**. (Речь о гладких функциях, $|x|$ - не гладкая функция.)

$\boxed{Exercise:}$ А какое достаточное? Приведите пример.[1]

У производной есть очень важное свойство:

$$(f+g)'=\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta(f(x)+g(x))}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}=f'(x)+g'(x)$$

И еще:

$$(\alpha f(x))'=\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta\alpha f(x)}{\Delta x}=\alpha f'(x)$$

Производной функции $f(x)$ так же называют функцию, которая в каждой точке совпадает с производной f в этой точке

$$f'(x)|_{x=x_0}\equiv f'(x_0)$$

Для функции x^2 мы видели, что $f'(x_0)=2x_0$, значит её производной будет

$$f'(x)=2x$$

В таких терминах, у производной можно заметить интересное свойство: производная ставит в соответствие каждой функции другую функцию. Чуть позже мы это немного формализуем.

А что будет если рассмотреть производную $f'(x)$ как независимую функцию, и взять её производную? Говорят о *производных высших порядков*. Обозначают так:

$$f^{(I)}\equiv f',\ f^{(II)}\equiv(f')'...$$

2 Операторы. Производная как оператор.

$\boxed{Definition:}$ **Оператором** называется правило, по которому каждому элементу одного множества функций ставится в соответствие элемент другого множества функций.[2]

[1] Для тех кто читает - достаточное условие это $f''\neq 0$ в некоторой окрестности x_0

[2] Меня всегда очень забавляло то, что мой семинарист по квантовой криптографии называет операторы операториками, полагая, что так становится понятнее

$\boxed{Exercise:}$ Приведите пример какого-нибудь множества функций и назовите несколько его элементов.

$\boxed{Exercise:}$ Приведите пример какого-нибудь оператора

$\boxed{Exercise:}$ Приведите пример оператора из множества нечетных функций во множество четных функций.

Рассмотрим оператор $\hat{-}$ и $\hat{3}$. Эти операторы действуют следующим образом:

$$\hat{-}f(x) = -f(x)$$

$$\hat{3}f(x) = 3f(x)$$

В левой части равенства написано какое-то абстрактное выражение, как для функций мы пишем $f(x)$, подразумевая под f некоторое правило, которое из x делает новый объект. А в правой части написан результат действия этим правилом на функцию, которая выступает в роли аргумента. Эта запись полностью аналогична вот такой:

$$f(x) = (x-1)^2$$

Только в роли «функции» выступает оператор, а в роли «аргумента» - произвольная функция из некоторого множества, подобно тому как мы выбираем аргумент функции, например берем точку из числовой оси.

Казалось бы, зачем плодить новые сущности, если можно просто писать минус перед функцией, или просто умножать её на три? Ответ прост - не всякий оператор можно так легко представить в виде умножения на три, или на -1

Еще бывают вот такие операторы:[3]

$$\hat{I} : \hat{I}f(x) = f(-x)$$

$$\hat{T}_a : \hat{T}_a f(x) = f(x-a)$$

Например:[4]

$$\hat{I}x^2 = x^2$$

$$\hat{I}x = -x$$

$$\hat{T}_1 \sin(x) = \sin(x-1)$$

$$\hat{T}_{\frac{\pi}{2}} cos(x) = -\sin(x)$$

Как вы видите, нельзя так же просто написать действие этого оператора на любую функцию, как это можно было сделать с $\hat{-}$ и $\hat{3}$

Далее мы рассмотрим понятие степени оператора. Возьмем какой-нибудь простой оператор. Например оператор

$$\hat{3} : \hat{3}f(x) \to 3f(x), \quad \hat{3}x^2 = 3x^2$$

Что будет, если дважды применить $\hat{3}$ к какой-нибудь функции?

$$\hat{3}(\hat{3}f(x)) = 9f(x) = \hat{9}f(x)$$

Поэтому вводят обозначение:

$$\hat{X}^2 = \hat{X}\hat{X}$$

Ну теперь-то пора рассказать вам страшную тайну, которую от вас скрывали учителя по физике. Помните, мы говорили, что производная ставит в соответствие одной функции - другую функцию? Вы правильно поняли - производная тоже оператор. Его обозначают вот так:

$$\frac{d}{dx} : \frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$$

Этот оператор *линеен*

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g$$

[3] Лучше никогда не обозначайте оператор $\hat{G}$

[4] Чрезмерное употребление тригонометрии вредит вашему здоровью

$\boxed{Exercise:}$ Приведите пример нелинейного оператора. Линейны ли $\hat{T}$, $\hat{I}$?

И теперь вы знаете, как красиво записать второй закон Ньютона:

$$mx''(t) = F(t) \Leftrightarrow m\left(\frac{d}{dt}\right)^2 x(t) = F(t) \leftrightarrow m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = F(t)$$

Только не перепутайте обозначения:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f'' \neq \left(\frac{df}{dx}\right)^2 = (f')^2$$

Я сделаю последнюю на сегодня нудную ремарку: строго говоря, оператором производной можно действовать только на дифференцируемые функции, но в физике обычно предполагают, что система описывается «достаточно хорошими» функциями и все наши действия обосновывать не нужно.

3 Производная сложной и обратной функции.

С помощью этого пункта решается задачка на 70 баллов.

Как вы уже наверняка знаете, производную можно и нужно уметь брать не только от самых простых функций. Например, при взятии производной от т.н. композиции функций, следует пользоваться правилом:

$$\boxed{f(g(x))' = f'_g g'_x}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\sin(x)} = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}}\cos(x)$$

Я хочу обратить в этом случае внимание на запись производной с помощью дифференциалов:

$$f(g(x))' = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} = f'_g g'_x$$

Умение находить производную очень важно в физике, смысл этого мы обсудим чуть дальше. Примерно на третьем занятии. Поэтому знать простейшие правила дифференцирования необходимо каждому.

Последнее, что мы сегодня обсудим из математики - обратная функция.

$\boxed{Definition:}$ **Обратной** к функции $f(x)$ называют функцию, такую что:

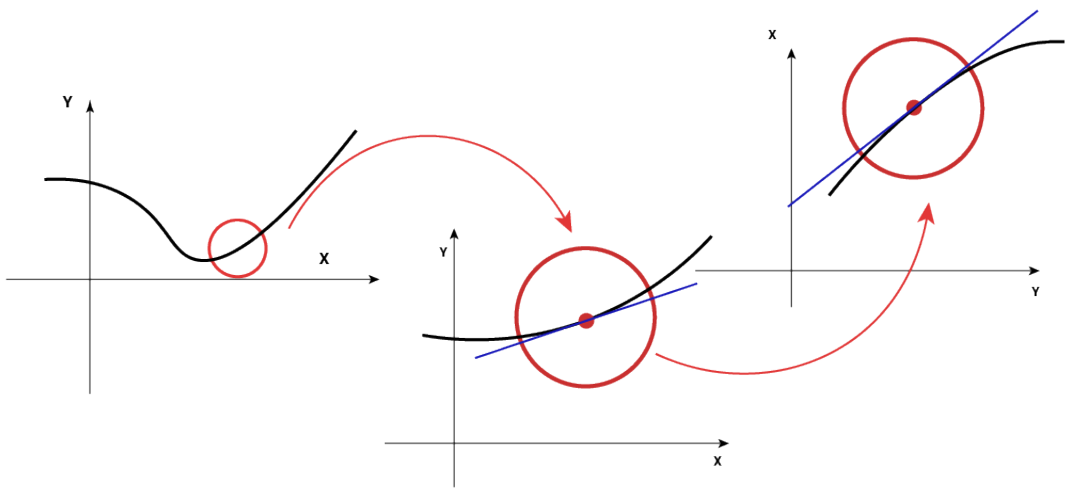
$$f^{-1}(f(x)) \equiv x$$

$\boxed{Exercise:}$ Приведите пример

$\boxed{Exercise:}$ Найдите обратную функцию для следующих функций:

$$x^2,\ e^x,\ \sin(x),\ \frac{1}{x}$$

Рассмотрим какую-нибудь дифференцируемую функцию $f(x)$ и нарисуем её график:



Давайте обратим наше внимание на поведение функции в этой красной окрестности. Мы можем рассматривать на этом участке функцию как зависимость $y = y(x)$, а можем рассмотреть обратную задачу: $x = x(y)$

Из геометрических соображений[5] следует

$$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}\frac{dx}{dy}|_{y=y(x_0)} = 1$$

Производная обратной функции это довольно важная вещь, например без неё не решить последнюю задачку домашнего задания по этой теме. Приведу пример, как можно это использовать: Можно, например, найти производную арксинуса:

$$y = \sin(x) \Rightarrow x = \arcsin(y)$$

$$\frac{d}{dy}\arcsin(y) = \frac{1}{(\frac{d}{dx}\sin(x))(y)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Не страшно, если что-то оказалось непонятным с первого раза. Ваша задача разобраться в этом в итоге, а не сразу.

4 Физика

В физике применений производной просто огромное количество. Прежде всего кинематика: Скоростью называют производную от пути по времени. Вы знаете, что средняя скорость вводится как

$$V_{av} = \frac{S}{t}$$

Мгновенной же скоростью называют отношение, смещения ко времени:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Т.е. зная зависимость координаты тела от времени всегда можно получить его скорость и ускорение. Действительно:

$$X = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$a(t) = a$$

Производную используют для нахождения минимумов и максимумов:

[5]Можете попробовать это доказать

4.1 Вводная задачка

Тело брошено под углом к горизонту, найдите максимальную высоту.
На паре я прокомментировал это тем, что в наивысшей точке траектории скорость обращается в ноль, но смысл кроется в том, что в ноль обращается именно производная координаты, которая в кинематике драматически совпадает со скоростью.

$$y = 0 + v_0 \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2}$$

$$y' = 0 \to v_y = 0,\ v\sin(\alpha) = gt_{max}$$

$$H = v_0 \sin(\alpha)t_{max} - gt_{max}^2/2$$

4.2 Энергетический и динамический подходы

Рассмотрим движение грузика на пружинке. Выпишите закон сохранения энергии и продифференцируйте его по времени.

$$\frac{dE}{dt} = 0 = mva + kxv \to v(ma + kx) = 0 \to ma = -kx,\ \forall x$$

Этот же прием можно использовать, чтобы получать уравнения движения для систем, где их написать не так уж и просто.

4.3 Обрыв

Тело бросают с края обрыва высотою H. На какое максимальное расстояние можно забросить камень при одной и той же начальной скорости v?

$$L = v\cos(\alpha)\tau$$

$$H + v\sin(\alpha)\tau - \frac{g\tau^2}{2} = 0$$

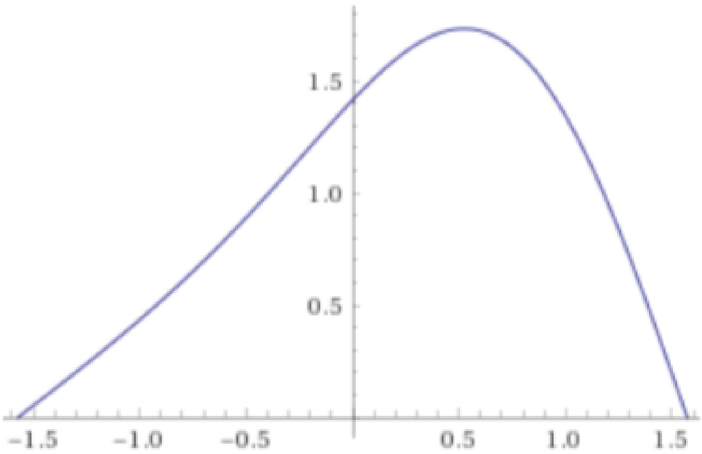
$$\tau^2 - \frac{2v\sin(\alpha)}{g}\tau - \frac{2H}{g} = 0$$

$$\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{2v\sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\frac{4v^2\sin^2(\alpha)}{g^2} + \frac{8H}{g}}\right)$$

$$L = v\cos(\alpha)\frac{1}{2}\left(\frac{2v\sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\frac{4v^2\sin^2(\alpha)}{g^2} + \frac{8H}{g}}\right)$$

$$L_{max} \leftrightarrow \frac{d}{d\alpha}L = 0$$

Характерный график:



В домашней работе вам предстоит проанализировать поведение этого горба.

4.4 Заключение по производным

Как мы с вами увидели, производную можно брать по определению - находить предел функции в каждой точке. Однако в случае сколько-нибудь громоздких функций, эта задача занимает огромное количество времени и сил - чтобы взять производную синуса мне потребовалось воспользоваться первым замечательным пределом, и еще одним менее известным. Понятное дело, все такие действия необходимо обосновывать, так что взятие производной от функции $e^{\sin(x)}$ превратится в настоящую пытку.
Поэтому Ньютон и еще несколько умных людей вывели правила взятия производной от различных комбинаций функций и посчитали производные для элементарных функций:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = fg' + f'g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$f(g(x))' = f'_g g'_x$$

Таблицу производных можно найти в интернете.

Я хочу, чтобы вы для себя сделали вывод о производной:

Производная - сильный инструмент исследования функций на экстремум. Это линейный оператор. А производная в точке это предел, допускающий геометрическую интерпретацию. Умение находить производную - чисто механическая задача (нужно пользоваться правилами, написанными выше, и подставлять производные элементарных функций), эта задача не сложнее раскрывания скобок в больших выражениях. Научится все это делать можно только прорешав некоторое количество примеров, которые можно найти в отдельном пункте ниже.

Часть II

Ряд Тейлора

Ряд Тейлора будет преследовать вас всю вашу осмысленную жизнь, если вы займетесь чем-нибудь более-менее разумным. Мы рассмотрим его с очень узкого направления, которое можно использовать в школьной физике.
Сначала я хочу дать определение бесконечно дифференцируемой функции:
$\boxed{Definition:}$ **бесконечно дифференцируемой** называется функция, у которой существует производные любого порядка.

$\boxed{Exercise:}$ Приведите примеры бесконечно дифференцируемых функций

$\boxed{Exercise:}$ Приведите пример функции, которая дифференцируема один раз, не дифференцируема дважды.

В курсе математического анализа доказывается, что любая бесконечно дифференцируемая функция представима своим рядом Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} (\frac{d}{dx})^k f(x)|_{x=x_0}$$

С первого раза с этим утверждением непросто бывает справиться, обдумайте его хорошенько на досуге. Тут на самом деле написан очень нетривиальный факт: поведение функции в **любой** точке оси, восстанавливается по значению функции в небольшой окрестности какой-нибудь определенной точки! Конечно, это верно только для бесконечно дифференцируемых функций, вам на курсе Теории Функции Комплексного Переменного расскажут много подобных нетривиальных вещей.
Обратите внимание, что в знаменателе стоит факториал k. Это значит, что все члены ряда тейлора, начиная с какого-нибудь номера, очень быстро убывают. Именно этим свойством и пользуются физики.

Сразу обратим внимание на то, что многочлены имеют конечный ряд Тейлора.
Нам не так уж и важно рассматривать свойства этого ряда, нам важно посмотреть на первые его элементы. Если мы рассматриваем поведение функции где-то вблизи точки x_0, то можно заметить, что члены высоких порядков оказываются очень малы. Давайте рассмотрим многочлен P(x) около точки $x_0 = 1$.

$$P(x) = x^2 + 3x + 2$$

Искать производные у него одно удовольствие:

$$P'(x_0) = 2 + 3 = 5$$

$$P''(x_0) = 2$$

$$P'''(x_0) = 0$$

Если написать ряд Тейлора:

$$P(x) = (1 + 3 + 2) + 5(x - 1) + \frac{2}{2}(x - 1)^2 = (6) + 5x - 5 + x^2 - 2x + 1 = x^2 + 3x + 2$$

В этом, конечно, нет ничего удивительного, как я уже сказал, у многочленов ряд Тейлора всегда конечный, а значит они точно представляются своими первыми элементами.
Нас, тем не менее, куда больше интересует первое равенство. Давайте посмотрим на его слагаемые в точке x = 1.1

$$P(x) = 6 + 5(0.1) + (0.1)^2 = 6 + 0.5 + 0.01$$

Как видите, если выкинуть последнее слагаемое, мы получим погрешность в 0.0015. В физических расчетах такими величинами часто пренебрегают, потому что погрешности в реальном эксперименте обычно больше. Поэтому целесообразно говорить о **пренебрежении** малыми величинами.
Как это можно использовать? Непосредственно в расчетах обычно не составляет проблем подставить в калькулятор выражение

$$X = \sqrt{1.03124} = 1.01550...$$

Однако часто в ходе решения задач получаются неприятные аналитические выражения, от которых хочется избавиться. Например, в середине задачи может возникнуть выражение

$$\sqrt{1+x}, 0 \simeq x \ll 1$$

Тогда нужно взять производную корня в точке 0, и разложить функцию до необходимого порядка малости:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow \frac{d}{dx}\sqrt{1+x}|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \Rightarrow \sqrt{1.03124} \approx 1 + \frac{0.03124}{2} = 1.01562$$

Еще важными оказываются функции:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\exp x \approx 1 + x$$

Конечно, это верно в приближении $x \ll 1$

Что-нибудь большее о рядах Тейлора вы можете узнать в интернете, там же в Википедии можете найти ряды большинства элементарных функций. Поупражняйтесь с рядами - буквально 15 минут и полученного опыта вам хватит до конца школы.

Часть III

Неопределенный интеграл

Умение брать интегралы еще в школе мне пригодилось огромное число раз. Например, на областной олимпиаде в задачке про темную материю я брал сферический интеграл. Интегралы как бы не входят в школьную программу в принципе, но в олимпиадах по физике они всплывают постоянно. Как вы увидите далее, на интегралах в принципе держится очень большая часть науки. Спасибо Ньютону и Лейбницу.

Я долго думал, как ввести неопределенный интеграл так, чтобы не повредить вашу психику. Попробуем более-менее стандартный подход.

Как мы уже увидели на прошлом занятии, у некоторых функций можно брать производную, и тоже получать некоторую функцию. Тогда говорят о дифференциальном операторе. Однако, каков он? Давайте рассмотрим две функции:

$$f(x) = x^2,\ g(x) = f(x) + C$$

Возьмем их производную:

$$\frac{d}{dx}(g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}C = \frac{d}{dx}f(x) = 2x$$

Оператор производной «слепляет» функции, которые различаются на константу. В этой связи естественно возникают следующие определения:
$\boxed{Definition:}$Первообразной функции $f(x)$ называют такую функцию $F(x)$, что

$$F'(x) \equiv f(x)$$

$\boxed{Exercise:}$ Найдите какую-нибудь первообразную функций x^2, $\sin(x)$, $\frac{1}{x}$

Вы уже поняли, что если вы нашли одну первообразную, то вы знаете бесконечно много первообразных, которые отличаются на константу. Поэтому вводят понятие неопределенного интеграла:
$\boxed{Definition:}$Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называют множество всех первообразных $f(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Можно выдохнуть.

Вообще говоря, последняя запись немного не согласуется с определением. если бы мы хотели написать множество всех первообразных, мы бы сделали это вот так:

$$\int f(x)dx = \{F(x)|F'(x) = f(x)\}$$

Однако оказывается, что действительно они все просто отличаются друг от друга на константу.

$\boxed{Exercise:}$ Является ли неопределенный интеграл оператором?

Как вы понимаете, сам по себе неопределенный интеграл вещь простая. Но это длится до того момента, как его становится необходимо взять.
Мы знаем правила дифференцирования элементарных функций, я выпишу некоторые из них, и сразу следствия для интегрирования:

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
nx^{n-1}	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$-1/x^2$	$1/x$	$\ln(\|x\|) + C$
-	$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$
-	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
e^x	e^x	e^x

Интегрирование функций почти всегда оказывается сложнее их дифференцирования, это связано с тем, что не существует таких же простых правил для взятия интеграла от композиции, произведения, частного функций, как у производной. Например, функцию $\sqrt{\sin(x)}$ продифференцировать очень просто, а её интеграл:

$$\int \sqrt{\sin(x)}dx = F(x) + C$$

В элементарных функциях не выражается. Это нормальная ситуация в математике - часто некоторая задача решается довольно просто, а вот обратная ей - сложно. Например найти простые множители, из которых состоит составное число сложно, а перемножить эти числа очень просто.

Следующим шагом при рассмотрении интегралов логично сделать изучение их свойств. Самое очевидное свойство - линейность. Это свойство есть прямое следствие линейности производной и определения неопределённого интеграла:

$$\int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

В этом можно убедиться, просто взяв производную от обеих частей равенства.
Поэтому если вы хотите найти первообразную многочлена:

$$\int (x^3 + 4)dx = \frac{x^4}{4} + 4x + C$$

Или любой другой линейной комбинации функций, достаточно просто сложить результаты интегрирования отдельных слагаемых и не забыть константу.

Есть весьма красивая теория интегрирования, связанная с *якобианом* преобразования, но как показывает опыт - знать это в школе редко бывает полезно, поэтому я просто дам вам без обоснования еще одно правило, которое позволит вам интегрировать более сложные функции:

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$$

$$\int (3x + 1)^6 dx = \frac{1}{7 \cdot 3}(3x + 1)^7 + C$$

Часть IV

Определенный интеграл

Эта часть появится позже.

Часть V

Простейшие дифференциальные уравнения

5 Что такое дифференциальное уравнение.

Для дифференциальных уравнений можно наплодить много определений. Мне нравится то, которому меня научили на Физтехе:
$\boxed{Definition}:$ **Дифференциальным уравнением** называется уравнение на **неизвестную функцию** $y(x)$ вида[6]

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x)..) = 0$$

Функция $F(...) = 0$ здесь просто некоторая функция большого числа неизвестных. Давайте я приведу несколько примеров:

$$f'(x) - x = 0$$

$$g''(x) + \omega^2 x = 0$$

$$h'(x) - h(x) = 0$$

Вообще это нормально задаваться вопросом поиска неизвестной функции, особенно с точки зрения физика - интересно найти закон движения тела, т.е. зависимость координаты от времени; интересно найти закон, по которому ток в цепи зависит от времени... и т.п.
Давайте попробуем угадать решения уравнений выше:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + D$$

$$g(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$$

$$h(x) = C\exp(x)$$

Можно ли сказать, что эти решения единственны? Т.е. не существует функций другого вида, которые тоже удовлетворяют этим уравнениям. В данном случае да. Детально это исследовать мы не будем.

Как вы понимаете, такое широкое определение не дает надежды на то, что для решения дифференциального уравнения будет существовать какой-то универсальный метод, как с квадратными уравнениями. Поэтому для дифференциальных уравнений приведена широкая классификация, знание, к какому типу принадлежит дифференциальное уравнение часто позволяет довольно быстро написать его решение.
Но сначала я хочу дать важную физическую ремарку.

6 Физика

Вы знаете много физических законов - я выпишу некоторые из них:

$$mx'' = F$$

$$\delta Q = dU + \delta A$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

$$LI' + CQ + IR = \sum \xi_i$$

[6] Конечно, хотя бы одна производная должна быть, иначе это обычное алгебраическое уравнение

На втором законе Ньютона и вовсе вся механика стоит. Так сложилось, что в физике все *уравнения динамики* оказываются дифференциальными уравнениями. Чаще всего вы пользуетесь алгебраическими уравнениями, которые на самом деле просто решения приведенных выше уравнений, найденные ранее кем-нибудь другим. Например из второго и третьего закона ньютона можно получить, что для любой пары тел:

$$\frac{d}{dt}p_1 = F_{12}$$
$$\frac{d}{dt}p_2 = F_{21}$$
$$F_{12} = -F_{21}$$
$$\frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0, \Rightarrow p_1 + p_2 = const$$

Эти рассуждения можно обобщить на любое количество тел (попробуйте это сделать) и получить, что в замкнутой системе импульс сохраняется. Как видите, в механике ЗСИ - следствие уравнений Ньютона.
Точно так же движение под действием постоянной силы это просто решение уравнения

$$x'' = \frac{F}{m}, \ x = A + Bt + \frac{F}{2m}t^2$$

И так далее. Главная моя мысль в следующем: **физика, это наука построенная на дифференциальных уравнениях.**

7 Ремарка о дифференциалах.

Вы уже заметили, что в первой части я определял производную как предел, и в то же время написал:

$$f' = \frac{df}{dx}$$

Это равенство можно воспринимать двумя путями: Во-первых это действие дифференциального оператора производной, согласно его определению. Во-вторых это отношение «Бесконечно малых» приращений функции к её аргументу, которые обозначают соответственно df и dx.
Так вот: $\boxed{Definition:}$**дифференциалом независимой переменной** называют её малое приращение.
Как вы понимаете, критерий малости редко определяют строго, дифференциал независимой - довольно естественное понятие.
$\boxed{Definition:}$**Дифференциалом функции независимой переменной** называют главную линейную часть приращения функции.
Смысл таких определений следующий - **если рассмотреть дифференцируемые функции вблизи какой-нибудь их точки, то в этой окрестности они ведут себя почти как линейные.** Причем чем меньше эта окрестность, тем лучше эти функции приближаются линейными. Это становится особенно понятным, если вы осознали формулу Тейлора - всеми слагаемыми, кроме $f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ можно пренебречь.
В случае функции одной переменной[7] дифференциалами можно оперировать как $dx = \Delta x$, $df = \Delta f$, поэтому часто переписывают вот так:

$$df = f'dx$$

[7]это важно!

8 Разделение переменных.

Сначала я хочу сделать математическое утверждение:

$$\boxed{F(x) = G(x) + C,\ C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow F'(x) = G'(x)}$$

Давайте теперь представим, что в левой части стоит сложная функция:

$$F(y(x)) = G(x) + C$$

$$F'(y)y'(x) = G'(x)$$

$$F'(y)dy = G'(x)dx$$

Теперь можно заметить, что искать решение нужно путем интегрирования правой и левой частей уравнения как независимых переменных:

$$\int F'(y)dy = \int G'(x)dx \Rightarrow F(y(x)) + C_1 = G(x) + C_2 \Rightarrow F(x) = G(x) + C$$

Это не самый тривиальный переход, но давайте разберем несколько примеров, станет понятнее.
Давайте попробуем решить уравнение:

$$f'(x) = f(x),\ \frac{df}{dx} = f,\ \int \frac{df}{f} = \int dx,\ \ln(f) + C = x$$

$$f(x) = \frac{1}{C}\exp(x),\ C \in \mathbb{R}$$

Можно подставить это в уравнение и убедиться, что это действительно верное решение.
Еще какое-нибудь уравнение:

$$f'(x) = -2xf(x)$$

$$\frac{df}{f} = -2xdx,\ \ln(f/C) = -x^2,\ f(x) = C\exp(-x^2)$$

$$f'(x)f(x) = A$$

$$\int fdf = \int Adx,\ f^2/2 = Ax + C,\ \Rightarrow f(x) = \sqrt{2(Ax + C)}$$

Мы только что рассмотрели целый класс дифференциальных уравнений, который называется *уравнения с разделяющимися переменными*. Это, возможно, единственный класс дифференциальных уравнений, который вам придется решать самим. Они называются так, потому что их можно представить в виде:

$$f(y)dy = g(x)dx$$

Т.е. разделить переменные x и y.
Давайте я приведу пример из физики: RL - контур, в котором в начале течет ток, а затем его предоставляют самому себе:

$$0 = I(t)R + LI'(t)$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt,\ \int \frac{dI}{I} = -\int \frac{R}{L}dt,\ \ln(I) = C + \frac{R}{L}t$$

$$I(t) = C\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),\ \tau = \frac{L}{R}$$

Т.е. ток в таком контуре будет асимптотически уменьшаться.
Как найти константу C? Из начальных условий. Например здесь видно, что в момент времени $t = 0$ ток по условию задачи был какой-то I_0. Экспонента становится единицей. Ну тогда $C = I_0$.

9 Линейные дифференциальные уравнения n-порядка.

$$F(x, y, y', y''...) = 0 \tag{1}$$

В школьном курсе физики почти все процессы описываются линейными ДУ n-порядка.

$\boxed{Definition:}$ **Порядком ДУ** называют его максимальную степень производной.

$\boxed{Definition:}$ Уравнение (1) называется **однородным**, если оно имеет вид:

$$F(y, y', y''...) = 0$$

И **неоднородным**, если оно имеет вид:

$$F(y, y', y''...) = G(x)$$

Приведу пример:

$$Lq'' + Rq' + Cq = \xi(t)$$

Это неоднородное ДУ 2 порядка

$$y'' = y$$

Однородное ДУ 2 порядка.

$$y' = x$$

Неоднородное ЛДУ 1 порядка

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^6 y(x) = 0$$

Короче говоря, ОЛДУ n-ого порядка имеет вид:

$$y^{(n)}(x) + a_{n_1} y^{(n-1)}(x) + ...a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \tag{2}$$

Как решать такие уравнения?

Есть один очень эффективный способ : Вы возможно уже заметили, что решение уравнения

$$y' = y, \Rightarrow y = C\exp(x)$$

$$y'' = -y, \Rightarrow y = A\exp(ix) + B\exp(-ix) = D\sin(x) + F\cos(x)$$

Поэтому решение ищут в виде:

$$\boxed{y = e^{\lambda x}}$$

Это центральное утверждение, которым вам придется пользоваться. Можете заметить, что подстановка экспоненты в уравнение (2) превращает его из дифференциального в алгебраическое. При дифференцировании из экспоненты получатся:

$$(\lambda^n + \lambda^{n-1}a_{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0$$

И если мы найдем все такие λ, (они могут быть и комплексными), то мы увидим, что сумма решений с произвольными коэффициентами будет решением. Давайте я поясню это на примере.

$$y'' = -\omega^2 y$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} = -\omega^2 e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 = -\omega^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

Только что мы нашли условия на λ, которое тождественно удовлетворяет уравнению. Поэтому мы нашли решения. Т.е. $y_1(x) = \exp(i\omega x)$ - решение, $y_2(x) = \exp(-i\omega x)$ тоже решение. Это уравнение линейно (проверьте!), поэтому решение уравнения дается:

$$A\exp(+i\omega x) + B\exp(-i\omega x) = D\cos(\omega x) + F\sin(\omega x) = G\cos(\omega x + \varphi)$$

Мы только что решили уравнение гармонических колебаний. Они встречаются везде, но особенно в электричестве и механике. Два неизвестных коэффициента D и F находят тоже из начальных условий.
Например, для грузика на пружинке можно задать его начальное положение - если он сначала находился в положении равновесия, то, конечно, выбросить нужно решение с косинусом: $D\cos(0) = 0 \;\Rightarrow D = 0$

Последнее математическое утверждение на сегодня: **решением неоднородного ДУ является: решение ОДУ + какое-угодно решение неоднородного ДУ**.
Если вы осознаете, все что написано в этой главе, то вы сможете решить очень широкий класс задач, которые часто вылезают даже на олимпиадах.

Давайте применим полученные навыки на практике.

10 Применение в физике

10.1 Уравнение равноускоренного движения

:

$$y''(t) = a(t) = const$$

Неоднородное ДУ 2 порядка. Сначала ищем решение однородного.

$$\lambda^2 = 0$$

$$\lambda = 0$$

Теперь нам не остается ничего кроме угадывания. Т.е. этот метод с подставкой оказался не эффективен. Что делать? Заметить, что здесь разделяются переменные.

$$y'' = v' = a$$

$$dv = adt \;\Rightarrow V(t) = at + C$$

$$dy = dt(at + C) \Rightarrow \int dy = \int (at + C)dt = \frac{at^2}{2} + Ct + D$$

Из начальных условий

$$C = V_0, D = x_0$$

10.2 Колебания с трением

Сначала я рассмотрю уравнение колебаний RLC-контура без внешней ЭДС:

$$Lq'' + Rq' + Cq = 0$$

$$mx'' = -\beta x' - kx$$

$$L\lambda^2 + R\lambda + C = 0$$

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Где я просто ввел обозначения $2\gamma = \frac{R}{L}$, $\omega_0^2 = \frac{C}{L}$

$$D = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$$

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Если $\gamma \geq \omega_0$ проводят простой анализ и говорят, что это движение с *сильным трением* и мы их рассматривать не будем (вы сами их проанализируете в домашней работе) А вот случай *слабого трения* интересен $\omega_0 > \gamma$:

$$\lambda = -\gamma \pm i\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} = \gamma \pm i\sqrt{|\omega^2|}$$

Если взять экспоненту и сложить два решения с одинаковыми начальными амплитудами:

$$Q(t) = \exp(-\gamma t)(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$$

Я хочу обратить внимание, что колебания затухают именно из-за активного сопротивления цепи, и колебания происходят на частоте меньшей чем свободные колебания.

Часть VI
Домашнее задание

11 Упражнения на производную

Если вы никогда до этого не брали производную, и познакомились с ней впервые на моем курсе, то во-первых, я вам не завидую, во-вторых вот несколько задачек, которые нужно решить по определению, тогда производная станет понятнее. Решить задачку нужно самому своими руками, даже если я этот же пример уже решил на доске.

11.1 В лоб

Возьмите производную по определению от следующих функций:

$$x^2,\ x^3,\ \frac{1}{x},\ \sqrt{x}$$

Попробуйте обобщить результат на функцию

$$x^n$$

Для функции x^2 постройте касательную и убедитесь, что её наклон действительно описывается производной.

11.2 Доказательство

Докажите следующие тождества:

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(fg)' = fg' + f'g$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Убедитесь, что последняя формула работает для функции[8]

$$\frac{1}{x}$$

11.3 Берем производную

Теперь, если вы знаете все правила написанные выше, вы сможете взять любую производную на свете. Таблица производных - этим можно пользоваться
И не забывайте о правиле дифференцирования сложной функции.
Найдите производные:

$$\sqrt{\sin(x)},\ \sin^2(x),\ \sqrt{x^2},\ \sin(2x^2+3x),\ \sqrt{x-3},\ \tan(x) \equiv \frac{\sin(x)}{\cos(x)},\ \arctan(x)$$

11.4 Задачка

Рассмотрите функцию

$$f(x) = \begin{cases} ax^2,\ x < x_0 \\ bx + c,\ x \geq x_0 \end{cases}$$

Найдите её производную, и условия на параметры a, b, при которых производная определена всюду.

[8] проявите немного сообразительности

11.5 Лемма Ферма

Покажите, что в точке экстремума дифференцируемой функции производная обращается в ноль.

12 День первый(125+70* баллов)

12.1 Упражнение(5+5+5 баллов)

Докажите тождества:

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{d}{dx}g + g\frac{d}{dx}f$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

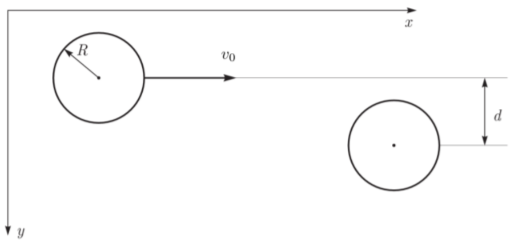
$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$$

12.2 Упражнение посложнее(15 баллов)

Рассмотрите произвольную гладкую функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[0, 1]$. Определим новую функцию $F(x) =$ площадь под графиком f(x), от 0 до x. Найдите $\frac{d}{dx}F(x)$.

12.3 Две шайбы(25 баллов)

На гладкой горизонтальной поверхности находятся две одинаковые гладкие шайбы радиуса R. Одной из шайб сообщают скорость v_0 вдоль оси x. При каком значении прицельного параметра d проекция на ось y скорости второй шайбы после абсолютно упругого удара максимальна?



12.4 Легкая задачка(25 баллов)

Проанализируйте (качественно) поведение горба из задачи №2, при изменении модуля скорости при фиксированной высоте H, и наоборот.[9]

12.5 Муха и Линза (30 баллов)

Из двойного фокуса собирающей линзы выползает муха и движется к линзе с постоянной скоростью v_0. Найдите зависимость скорости изображения мухи от времени.
Подсказка: самым элегантным способом будет получить уравнение на $\Gamma(x)$

12.6 Маяк* (15 + 70* баллов)

Лазерная указка установлена в горизонтальной плоскости на расстоянии H от бесконечно длинной стены. В начальный момент времени луч падает перпендикулярно стене. Указка начинает вращаться с угловой скоростью ω. Найдите скорость лазерного зайчика на стене в каждый момент времени. Сначала считайте, что свет двигается бесконечно быстро (15 баллов).
Теперь вспомните, что скорость света конечна и равна c, найдите скорость зайчика $v(t)$ (70* баллов).

[9] Подобные задачи, вообще говоря, несут большой педагогический смысл — умение понимать физическую составляющую задачи это очень важный навык.

13 День второй(55+40* баллов)

13.1 Закрепляем производную(15 баллов)

Покажите, что производная четной функции - нечетная функция, а нечетной - четная.

13.2 Операторы(15 баллов)

- На каком множестве определен оператор дифференцирования? (5 баллов)
- На каком множестве нужно определять оператор дифференцирования, чтобы результат действия $\frac{d}{dx}f = g(x)$ снова лежал в этом же множестве? (10 баллов)

13.3 Маятник (10 + 10 баллов)

Решите задачу о математическом маятнике в пределе малых углов с помощью взятия производной от его полной энергии. (10 баллов)

$$\varphi \ll 1$$

Оцените, при каких углах можно пользоваться использованным вами приближением

$$\sin(x) \approx x$$

Если допустимая погрешность этого приближения $\Delta = 0.05$ Также оцените при каких углах можно пользоваться формулой следующего порядка:

$$\sin(x) \approx x - x^3/6$$

При той же допустимой точности(10 баллов). Вы будете удивлены.

13.4 Формула Эйлера (15 баллов)

Найдите чему равно выражение

$$\exp(i\phi),\ \phi \in \mathbb{R}$$

Где i - мнимая единица:

$$i^2 = -1$$

13.5 Упражнение на ряд (10 баллов + 40* баллов)

Разложите в ряд Тейлора функцию

$$\frac{1}{1-x},\ x \ll 1$$

(Найдите коэффициенты при всех степенях x)
Отсюда можно сразу получить выражение для ряда функции

$$\frac{1}{1+x},\ x \ll 1$$

Сделайте это.
Теперь обратите внимание, что функция, вообще говоря, даже не является непрерывной, не то что дифференцируемой. Найдите при каких значениях x можно использовать ряд Тейлора для этой функции. Сделайте вывод о правомерности ваших действий в предыдущем пункте при условии $x \ll 1$ (40 баллов)

14 День четвертый(305+160* баллов)

14.1 Упражнения на разминку(5+5+5+10 баллов)

Решите ДУ:

$$y' = x$$

$$y'' = x$$

$$y' = y^2$$

$$y'' + y' = 4x$$

14.2 Квантовая механика (30 + 60* баллов)

Решите стационарное уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d}{dx}\right)^2\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\psi(x) = 0 : \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq L \end{cases}$$

Здесь E - энергия частицы. Найдите значения энергии, которые может принимать частица. Вспомните энергию в атоме водорода. Задумайтесь о смысле жизни. (60* баллов)

14.3 Парашютист(20 баллов)

Парашютист выпрыгивает из самолета и на скорости v_0 раскрывает парашют. Из-за чего он сразу начинает двигаться в среде с вязким трением и силой сопротивления $F = -kV$. Найдите скорость, с которой парашютист будет двигаться через большой промежуток времени (5 баллов). Найдите зависимость скорости парашютиста от времени. (15 баллов)

14.4 Обрыв v2.0 (60 баллов)

Камень бросили горизонтально с высоты H с начальной скоростью v. Сначала найдите, на какое максимальное расстояние камень может улететь от края обрыва.(15 баллов) Затем найдите вид траектории. Уравнения получатся некрасивыми.(45 баллов)

14.5 Вынужденные колебания(70+100* баллов)

Пусть теперь в RLC цепь подключено ЭДС, выдающее напряжение по гармоническому закону:

$$\xi(t) = \xi_0 e^{i\omega t}$$

Найдите вид колебаний в электрической цепи. (90 баллов)
Найдите зависимость амплитуды установившихся колебаний от ω, прокомментируйте результат в связи с понятием резонанса. (100* баллов)

Указание: ищите решение уравнения в комплексной форме, а ответ получите взятием действительной части от получившегося выражения.

14.6 Фазовые траектории (50 баллов)

Начертите фазовую траекторию гармонического осциллятора. (20 баллов)
Качественно начертите фазовую траекторию свободных колебаний RLC-контура.(30 баллов)

14.7 Задачка с олимпиады(50 баллов)

В RL-контуре стоит источник постоянного ЭДС ξ_0. В начальный момент времени цепь разомкнута. Цепь быстро замыкают, найдите зависимость тока от времени.