

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ФАКУЛЬТЕТ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

---

# СЕМИНАРЫ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Журавлев Владимир

Задачи ВОШ прошлых лет с решениями

Сборник задач Савченко

Теорию можно взять в:

- Мякишев пятитомник
- Сивухин пятитомник (институтский курс)
- Кириченко четырехтомник (институтский курс) (это Сивухин, из которого убрали все лишнее)

## Часть I

# Производная и её приложения.

## Дифференциальные операторы.

### 1 Математическое введение

Как ни странно, курс по физике стоит зачастую начинать с подкурса по математике. Я сделаю это по возможности строго, так как я не люблю рассуждения общего вида, которые ни к чему не приводят. Но от вас потребуется при этом достаточная усидчивость и гибкость ума.

Если вы считаете, что все знаете о производной, то вы глубоко заблуждаетесь.

В принципе понятие производной появляется в математическом анализе, где формализуется понятие функции, ряда, интеграла и т.п.

Мы будем пытаться ввести подобие теоретико-множественного подхода, поэтому вы увидите несколько непривычный вам стиль письма, к которому, так или иначе, придется привыкнуть.

**Definition :** Функцией называют правило, по которому элементам одного множества  $F$  сопоставляются элементы другого множества  $G$ . Пишут:

$$f : F \rightarrow G$$

Этими множествами могут быть, например, две вещественные оси. Функцией можно назвать отображение из одного алфавита в другой (из греческого в русский, например) или из интервала в полуось

$$f(x) = \frac{1}{x} - 1 : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$$

Функцией так же можно назвать много что, например правило, которое каждому предмету ставит в соответствие его цвет. Чтобы избежать вот таких неплодотворных примеров, мы станем рассматривать числовые функции (из одного множества чисел в другое)

Так что же с производной? Рассмотрим функцию

$$f : F \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G \subseteq \mathbb{R}$$

Производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называют предел

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \equiv \frac{df}{dx}$$

В этом определении написано больше, чем кажется на первый взгляд. Во-первых, существование предела подразумевает равенство левого и правого пределов, что уже довольно серьезное требование к функции, например функция  $f := |x|$  в точке 0 имеет пределы  $f'_L = -1 \neq f'_R = +1$  и поэтому её производная в этой точке не определена.

Производная, конечно, допускает наглядную геометрическую интерпретацию: производная в точке - тангенс угла наклона графика в этой точке.

Кроме того, производная это важный инструмент для изучения экстремумов: равенство нулю производной необходимое условие экстремума.

**Exercise :** А какое достаточное? Приведите пример.

Производной функции  $f(x)$  так же называют функцию, которая в каждой точке совпадает с производной  $f$  в этой точке

$$f'(x)|_{x=x_0} \equiv f'(x_0)$$

В таких терминах, у производной можно заметить интересное свойство: производная ставит в соответствие каждой функции другую функцию. Сейчас мы это немного формализуем.

**Definition:** Оператором называется правилом, по которому каждому элементу одного множества функций ставится в соответствие элемент другого множества функций.<sup>1</sup>

**Exercise:** Приведите пример какого-нибудь множества функций и назовите несколько его элементов.

**Exercise:** Приведите пример какого-нибудь оператора

**Exercise:** Приведите пример оператора из множества четных функций во множество нечетных функций.

Обратите внимание, что сложнее придумать оператор из множества нечетных во множество четных

Еще бывают вот такие операторы:<sup>2</sup>

$$\hat{I} : \hat{I}f(x) = f(-x)$$

$$\hat{T}_a : \hat{T}_a f(x) = f(x - a)$$

Например:<sup>3</sup>

$$\hat{I}x^2 = x^2$$

$$\hat{I}x = -x$$

$$\hat{T}_1 \sin(x) = \sin(x - 1)$$

$$\hat{T}_{\frac{\pi}{2}} \cos(x) = -\sin(x)$$

## Перерыв

Математическая часть часть скоро закончится.

Давайте рассмотрим какой-нибудь простой оператор. Например оператор

$$\hat{3} : \hat{3}f(x) \rightarrow 3f(x), \quad \hat{3}x^2 = 3x^2$$

Что будет, если дважды применить  $\hat{3}$  к какой-нибудь функции?

$$\hat{3}(\hat{3}f(x)) = 9f(x) = \hat{9}f(x)$$

Поэтому вводят обозначение:

$$\hat{X}^2 = \hat{X}\hat{X}$$

Ну теперь-то пора рассказать вам страшную тайну, которую от вас скрывали учителя по физике: вводят оператор производной (помните мы говорили, что производная подозрительно похожа на оператор?)

$$\frac{d}{dx} : \frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$$

И теперь вы знаете, как красиво записать второй закон Ньютона:

$$mx''(t) = F(t) \Leftrightarrow m \left( \frac{d}{dt} \right)^2 x(t) = F(t) \Leftrightarrow m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = F(t)$$

Я сделаю последнюю на сегодня нудную ремарку: строго говоря, оператором производной можно действовать только на дифференцируемые функции, но в физике обычно предполагают, что система описывается «достаточно хорошими» функциями и все наши действия обосновывать не нужно.

<sup>1</sup>Меня всегда очень забавляло то, что мой семинарист по квантовой криптографии называет операторы операториками, полагая, что так становится понятнее

<sup>2</sup>Лучше никогда не обозначайте оператор  $\hat{G}$

<sup>3</sup>Чрезмерное употребление тригонометрии вредит вашему здоровью

## 2 Физика

### 2.1 Энергетический и динамический подходы

Рассмотрим движение груза на пружинке. Выпишите закон сохранения энергии и продифференцируйте его по времени.

$$\frac{dE}{dt} = 0 = mva + kxv \rightarrow v(ma + kx) = 0 \rightarrow ma = -kx, \forall x$$

### 2.2 Обрыв

Тело бросают с края обрыва высотой  $H$ . На какое максимальное расстояние можно забросить камень при одной и той же начальной скорости  $v$ ?

$$L = v \cos(\alpha) \tau$$

$$H + v \sin(\alpha) \tau - \frac{g\tau^2}{2} = 0$$

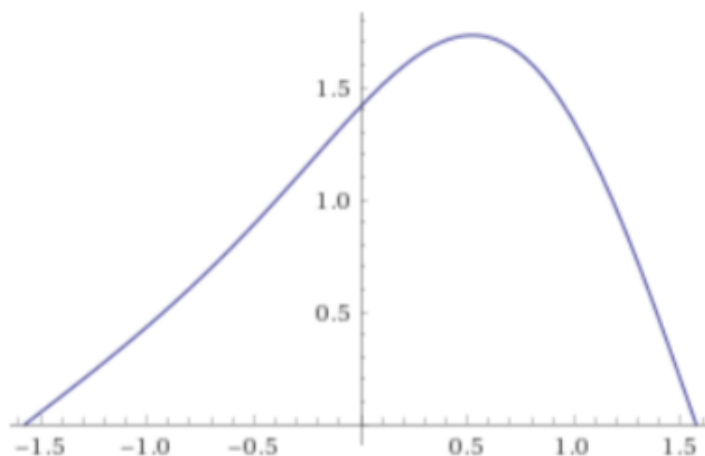
$$\tau^2 - \frac{2v \sin(\alpha)}{g} \tau - \frac{2H}{g} = 0$$

$$\tau = \frac{1}{2} \left( \frac{2v \sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\frac{4v^2 \sin^2(\alpha)}{g^2} + \frac{8H}{g}} \right)$$

$$L = v \cos(\alpha) \frac{1}{2} \left( \frac{2v \sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\frac{4v^2 \sin^2(\alpha)}{g^2} + \frac{8H}{g}} \right)$$

$$L_{max} \leftrightarrow \frac{d}{d\alpha} L = 0$$

Характерный график:



**Exercise :** Проанализируйте поведение горба при различных  $H$

## Часть II

# Домашнее задание

## 3 День первый

### 3.1 Упражнение

Докажите тождества:

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{d}{dx}g + g \frac{d}{dx}f$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

### 3.2 Упражнение посложнее

Рассмотрите произвольную **гладкую** функцию  $f(x)$ , определенную на отрезке  $[0, 1]$ . Определим новую функцию  $F(x) : F(0) = 0$ , и при этом  $F(x)$  = площадь под графиком  $f(x)$ , от 0 до  $x$ . Найдите  $\frac{d}{dx}F(x)$ .

### 3.3 Две шайбы

На гладкой горизонтальной поверхности находятся две одинаковые гладкие шайбы радиуса  $R$ . Одной из шайб сообщают скорость  $v_0$  вдоль оси  $x$ . При каком значении прицельного параметра  $d$  проекция на ось  $y$  скорости второй шайбы после абсолютно упругого удара максимальна?

