МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ФАКУЛЬТЕТ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

Семинары по общей физике для школьников

Журавлев Владимир

Северодвинск, 2019

Задачи ВОШ прошлых лет с решениями

Сборник задач Савченко

Теорию можно взять в:

- Мякишев пятитомник
- Сивухин пятитомник (институтский курс)
- Кириченко четырехтомник (институтский курс) (это Сивухин, из которого убрали все лишнее)

Часть I

Производная и её приложения. Дифференциальные операторы.

1 Математическое введение

Как ни странно, курс по физике стоит зачастую начинать с подкурса по математике. Я сделаю это по возможности строго, так как я не люблю рассуждения общего вида, которые ни к чему не приводят. Но от вас потребуется при этом достаточная усидчивость и гибкость ума.

Если вы считаете, что все знаете о производной, то вы глубоко заблуждаетесь.
В принципе понятие производной появляется в математическом анализе, где формализуется понятие функции, ряда, интеграла и т.п.
Мы будем пытаться ввести подобие теоретико-множественного подхода, поэтому вы увидите несколько непривычный вам стиль письма, к которому, так или иначе, придется привыкнуть.
$\boxed{\textit{Definition}:}$ Функцией называют правило, по которому элементам одного множества F сопоставляются элементы другого множества G. Пишут:

$$f : F \to G$$

Этими множествами могут быть, например, две вещественные оси. Функцией можно назвать отображение из одного алфавита в другой (из греческого в русский, например) или из интервала в полуось

$$f(x) = \frac{1}{x} - 1 : \ (0, 1) \to (0, +\infty)$$

Функцией так же можно назвать много что, например правило, которое каждому предмету ставит в соответствие его цвет. Чтобы избежать вот таких неплодотворных примеров, мы станем рассматривать числовые функции (из одного множества чисел в другое)

Так что же с производной? Рассмотрим функцию

$$f : F \subseteq \mathbb{R} \to G \subseteq \mathbb{R}$$

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называют предел

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \equiv \frac{df}{dx}$$

В этом определении написано больше, чем кажется на первый взгляд. Во-первых, существование предела подразумевает равенство левого и правого пределов, что уже довольно серьезное требование к функции, например функция $f := |x|$ в точке 0 имеет пределы $f'_L = -1 \neq f'_R = +1$ и поэтому её производная в этой точке не определена.
Производная, конечно, допускает наглядную геометрическую интерпретацию: производная в точке - тангенс угла наклона графика в этой точке.
Кроме того, производная это важный инструмент для изучения экстремумов: равенство нулю производной необходимое условие экстремума.

$\boxed{\textit{Exercise}:}$ А какое достаточное? Приведите пример.

Производной функции $f(x)$ так же называют функцию, которая в каждой точке совпадает с производной f в этой точке

$$f'(x)|_{x=x_0} \equiv f'(x_0)$$

В таких терминах, у производной можно заметить интересное свойство: производная ставит в соответствие каждой функции другую функцию. Сейчас мы это немного формализуем.
$\boxed{\textit{Definition}:}$Оператором называется правилом, по которому каждому элементу одного множества функций ставится в соответствие элемент другого множества функций.[1]

$\boxed{\textit{Exercise}:}$ Приведите пример какого-нибудь множества функций и назовите несколько его элементов.

$\boxed{\textit{Exercise}:}$ Приведите пример какого-нибудь оператора

$\boxed{\textit{Exercise}:}$ Приведите пример оператора из множества четных функций во множество нечетных функций. Обратите внимание, что сложнее придумать оператор из множества нечетных во множество четных

Еще бывают вот такие операторы:[2]

$$\hat{I} : \hat{I}f(x) = f(-x)$$

$$\hat{T}_a : \hat{T}_a f(x) = f(x-a)$$

Например:[3]

$$\hat{I}x^2 = x^2$$

$$\hat{I}x = -x$$

$$\hat{T}_1 \sin(x) = \sin(x-1)$$

$$\hat{T}_{\frac{\pi}{2}} cos(x) = -\sin(x)$$

Перерыв

Математическая часть часть скоро закончится.
Давайте рассмотрим какой-нибудь простой оператор. Например оператор

$$\hat{3} : \hat{3}f(x) \to 3f(x), \;\; \hat{3}x^2 = 3x^2$$

Что будет, если дважды применить $\hat{3}$ к какой-нибудь функции?

$$\hat{3}(\hat{3}f(x)) = 9f(x) = \hat{9}f(x)$$

Поэтому вводят обозначение:

$$\hat{X}^2 = \hat{X}\hat{X}$$

Ну теперь-то пора рассказать вам страшную тайну, которую от вас скрывали учителя по физике: вводят оператор производной (помните мы говорили, что производная подозрительно похожа на оператор?)

$$\frac{d}{dx} : \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

И теперь вы знаете, как красиво записать второй закон Ньютона:

$$mx''(t) = F(t) \Leftrightarrow m\left(\frac{d}{dt}\right)^2 x(t) = F(t) \leftrightarrow m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = F(t)$$

Я сделаю последнюю на сегодня нудную ремарку: строго говоря, оператором производной можно действовать только на дифференцируемые функции, но в физике обычно предполагают, что система описывается «достаточно хорошими» функциями и все наши действия обосновывать не нужно.

[1] Меня всегда очень забавляло то, что мой семинарист по квантовой криптографии называет операторы операториками, полагая, что так становится понятнее

[2] Лучше никогда не обозначайте оператор $\hat{G}$

[3] Чрезмерное употребление тригонометрии вредит вашему здоровью

2 Физика

2.1 Энергетический и динамический подходы

Рассмотрим движение грузика на пружинке. Выпишите закон сохранения энергии и продифференцируйте его по времени.

$$\frac{dE}{dt} = 0 = mva + kxv \to v(ma + kx) = 0 \to ma = -kx,\ \forall x$$

2.2 Обрыв

Тело бросают с края обрыва высотою H. На какое максимальное расстояние можно забросить камень при одной и той же начальной скорости v?

$$L = v\cos(\alpha)\tau$$

$$H + v\sin(\alpha)\tau - \frac{g\tau^2}{2} = 0$$

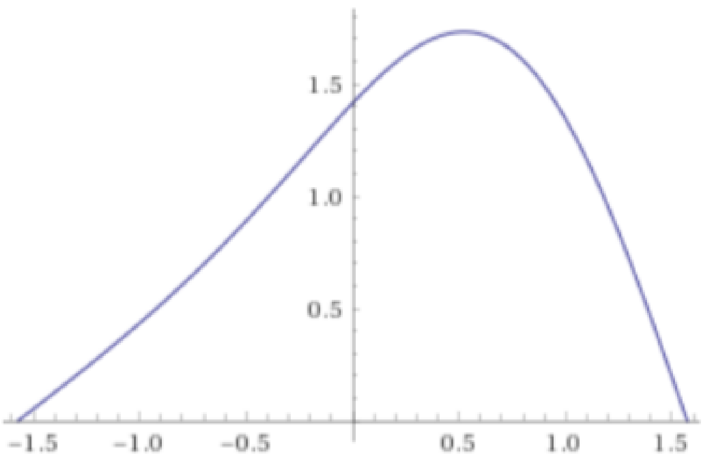
$$\tau^2 - \frac{2v\sin(\alpha)}{g}\tau - \frac{2H}{g} = 0$$

$$\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{2v\sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\frac{4v^2\sin^2(\alpha)}{g^2} + \frac{8H}{g}}\right)$$

$$L = v\cos(\alpha)\frac{1}{2}\left(\frac{2v\sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\frac{4v^2\sin^2(\alpha)}{g^2} + \frac{8H}{g}}\right)$$

$$L_{max} \leftrightarrow \frac{d}{d\alpha}L = 0$$

Характерный график:



$\boxed{Exercise:}$ Проанализируйте поведение горба при различных H

Часть II
Домашнее задание

3 День первый(90 баллов)

3.1 Упражнение(15 баллов)

Докажите тождества:

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{d}{dx}g + g\frac{d}{dx}f$$

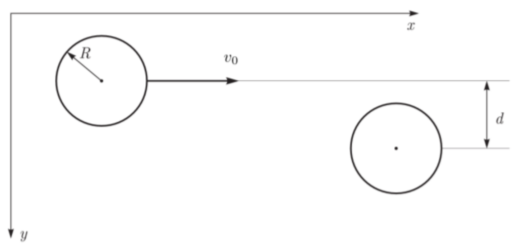
$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

3.2 Упражнение посложнее(20 баллов)

Рассмотрите произвольную гладкую функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[0, 1]$. Определим новую функцию $F(x) : F(0) = 0$, и при этом $F(x) =$ площадь под графиком f(x), от 0 до x. Найдите $\frac{d}{dx}F(x)$.

3.3 Две шайбы(30 баллов)

На гладкой горизонтальной поверхности находятся две одинаковые гладкие шайбы радиуса R. Одной из шайб сообщают скорость v_0 вдоль оси x. При каком значении прицельного параметра d проекция на ось y скорости второй шайбы после абсолютно упругого удара максимальна?



3.4 Легкая задачка(25 баллов)

Проанализируйте поведение горба из задачи №2, при изменении модуля скорости при фиксированной высоте H, и наоборот.