# UMF-exam

DGAP

May 2019

**Внимание! Составители не несут никакой ответственности за написанное!** Мы попытаемся все перепроверить, но будьте готовы ко всякому. Лучшим решением будет посомтреть все лекции, разобраться со всем там сказанным, а затем уже пользоваться этим файлом. Все, кто взял себе билет и не успел в дедлайн - пидорасы.
**Примечание для составителей:** используйте окружение \paper{номер билета}{формулировка билета}, чтобы автоматически добавить билет в оглавление, выделить ему новую страницу, оформить все билеты одинаковым шрифтом.
Для теорем используйте overleaf guide

## Содержание

## 1. Постановка задачи Коши для гиперболического в заданной области линейного дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Полуклассическое решение решение этой задачи в характеристических переменных, его существование и единственность

**Классификация** Основное уравнение:

$$\left(\widehat{L}+c(x)\right)u(x)=\left(\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{k=1}^{m}b_k(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x)\right)u(x)=f(x)$$

$x\in G$; $a_{ij}$, $b_k$, $c$, $f\in C(G)$; $u\in C^2(G)$, удовлетворяющая основному уравнению, называется **решением** поставленной задачи. $G$ - некоторая область в $\mathbb{R}^m$
Рассмотрим матрицу $(A(x))_{ij}=a_{ij}$, в общем случае она не является симметричной, но её всега можно сделать такой, в силу равенства смешанных производных ($\widetilde{A}_{ij}=(A_{ij}+Aji)/2$, уравнение не изменится) далее будем считать её симметричной, тогда:

- если $\det A=0$, то уравнение называется **параболическим** в точке
- если $\det A\neq 0$ и $A$ строго знакоопределена (все собственные значения одн ого знака), то уравнение называется **эллиптическим** в точке
- если $\det A\neq 0$ и $A$ строго знаконеопределена (существуют собственные значения разных знаков), то уравнение называется **гиперболическим** в точке

Если какое-то из условий выполняется во всех точках области, то говорят, что уравнение имеет такой тип в области.

**Преобразования основного уравнения уравнения** при гладкой замене в области $G\subset\mathbb{R}^m$. Рассматриваем $\xi=\xi(x)$ – взаимооднозначную функцию, $\xi\in C^2(G)$. И $J=\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial(\xi_1,\ldots,\xi_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}$ не вырождена в $G$. Обозначим $\xi(G)=D\subset\mathbb{R}^m$. Тогда существует $\xi^{-1}=x:D\to G$. Поймем, как приобразуется основное уравнение:

$$u(x)=u(x(\xi))=v(\xi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial v}{\partial\xi_s}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{s,l=1}^{m}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi_l\partial\xi_s}\frac{\partial\xi_l}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_i}+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial v}{\partial\xi_s}\frac{\partial^2\xi_s}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$\begin{aligned}\widehat{L}u(x)&=\sum_{i,j}^{m}\sum_{s,l=1}^{m}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial\xi_l\partial\xi_s}\frac{\partial\xi_l}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_i}+\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial\xi_s}\frac{\partial^2\xi_s}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{k}^{m}\sum_{s=1}^{m}b_k(x)\frac{\partial v}{\partial\xi_s}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_i}=\\&=\sum_{s,l=1}^{m}\left(\sum_{i,j}^{m}a_{ij}(x)\frac{\partial\xi_l}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial\xi_l\partial\xi_s}+\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}(x)\frac{\partial^2\xi_s}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{k}^{m}b_k(x)\frac{\partial\xi_s}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v}{\partial\xi_s}\end{aligned}\tag{1}$$

Получаем выражения для коэффицентов в новых координатах:

$$\tilde{c}(\xi)=c(x(\xi))$$

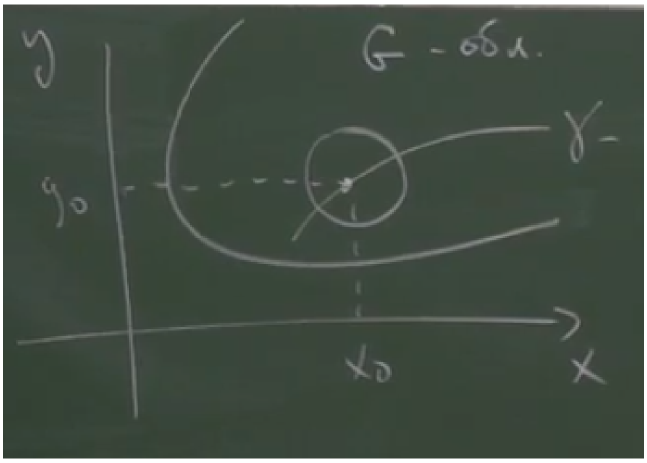
$$\tilde{b}_s(\xi)=\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}(x)\frac{\partial^2\xi_s}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{k}^{m}b_k(x)\frac{\partial\xi_s}{\partial x_i}$$

$$\tilde{a}_{sl}=\sum_{i,j}^{m}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial\xi_l}{\partial x_j}\Rightarrow\boxed{\tilde{A}=JAJ^T}$$

Для диагональных элементов $A$: $\tilde{a}_{ss}=(\nabla_x\xi_s)^TA(\nabla_x\xi_s)$

**Постановка задачи Коши** для гиперболического уравнения ($\lambda_i$ разных знаков)

$$\left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{2} b_k(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)\right) u(x) = f(x)$$




Введем обозначения $x_1 = x$, $x_2 = y$. В $G$ рассматриваем задачу Коши с граничными условиями на $\gamma$:

$$u\big|_\gamma = u_0 \in C^1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\gamma = u_1 \in C$$

$$u \in C^2(G\backslash\gamma) \bigcap C^1(G)$$

Пусть в точке $(x_0, y_0) \in G$ $a_{11} \neq 0$. В силу непрерывности $\exists$ окретсность $U_0 \subset G$, в которой $a_{11} \neq 0$. Пусть $F \in C^1(U_0)$ и $\nabla F \neq 0$ в $U_0$.

Хотим занулить диагональные элементы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Для этого сделаем характеристическую замену. Требуем $(\nabla F)^T A (\nabla F) = 0$ – как мы видели, такая замена занулит диагональный элемент.
$\nabla F = \begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \end{pmatrix}$. Получаем уравнение

$$a_{11}(F'_x)^2 + 2a_{12}F'_xF'_y + a_{22}(F'_y)^2 = 0$$

Предположим, что $F'_y \neq 0$ в $U_0$, если это не так, то переобозначим $U_0$. По теореме о неявной функции, уравнение $F(x,y) = const$ задает в $U_1 \subset U_0$ функцию $y = y(x)$. Причем дифференцируя обе части вырожения $F(x, y(x)) = const$, получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Что дает

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

Причем $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, так как $\det A < 0$ в силу знаконеопределенности $A$. Тогда пусть $F_+(x,y) = const$ и $F_-(x,y) = const$ интегральные кривые этих решений. Определим характеристическую замену

$$\begin{cases} \xi = F_+(x,y) = const = \xi(x,y) \\ \eta = F_-(x,y) = const = \eta(x,y) \end{cases}$$

В характеристических переменных в окрестности $V(\xi_0, \eta_0)$, $\xi_0 = \xi(x_0, y_0)$, $\eta_0 = \eta(x_0, y_0)$ уравнение запишется как

$$2\tilde{a}_{12}v''_{\xi\eta} + \tilde{b}_1 v'_\xi + \tilde{b}_2 v'_\eta + \tilde{c}v = \tilde{f}$$

Разделим на $2\tilde{a}_{12}$ и переобозначим коэффиценты.

$$v''_{\xi\eta} + d_1 v'_\xi + d_2 v'_\eta + ev = h$$

**Решение называется полуклассическим,** если $v \in C^1(V)$ и $\exists v_{\xi\eta} = v_{\eta\xi} \in C(V)$ и удовлетворяет в $V$ уравнению выше. Под действием характеристической замены $\gamma$ перейдет в $\tilde{\gamma}$.

$$\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x_\gamma(t) \\ y_\gamma(t) \end{pmatrix} \;\Big|\; t \in T \right\}$$

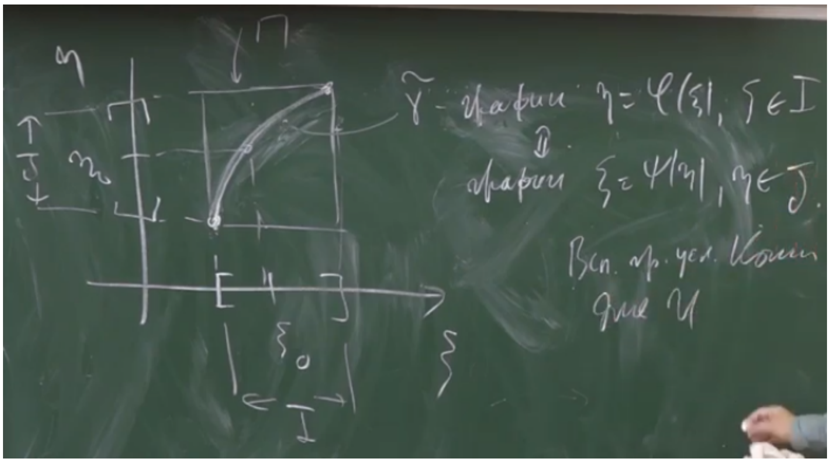
$T$ – числовой интервал. Тогда в характеристических координатах

$$\tilde{\gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_\gamma(t) = \xi(x_\gamma(t), y_\gamma(t)) \\ \eta_\gamma(t) = \eta(x_\gamma(t), y_\gamma(t)) \end{pmatrix} \;\Big|\; t \in T \right\}$$

$\gamma$ не должна касаться характеристик. Условие не касания характеристик записывается как

$$\dot{\xi}_\gamma = \xi_x \dot{x}_\gamma + \xi_y \dot{y}_\gamma = \left(\nabla\xi, \begin{pmatrix} \dot{x}_\gamma(t) \\ \dot{y}_\gamma(t) \end{pmatrix}\right) \neq 0$$

$$\dot{\eta}_\gamma = \eta_x \dot{x}_\gamma + \eta_y \dot{y}_\gamma = \left(\nabla\eta, \begin{pmatrix} \dot{x}_\gamma(t) \\ \dot{y}_\gamma(t) \end{pmatrix}\right) \neq 0$$



Значит по теореме об обратной функции $\exists I : \xi_0 \in intI$ и $K : \eta_0 \in intK$ отрезки, на которых функции обратимы. Введём $\varphi(\xi) = \eta_\gamma(\xi_\gamma^{-1}(\xi))$ и $\psi(\eta) = \xi_\gamma(\eta_\gamma^{-1}(\eta))$ Перепишем граничные условия:

$$v|_\gamma = v(\xi, \varphi(\xi)) = v_0(\xi) \in C^1(I)$$

$$u_1 = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\gamma = \frac{\partial u}{\partial(x,y)} \begin{pmatrix} -\dot{y}_\gamma(t) \\ \dot{x}_\gamma(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_\gamma^2 + \dot{y}_\gamma^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial(x,y)} = \frac{\partial v}{\partial(\xi,\eta)} J, J = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}$$

Подставляя эту замену во второе условие и дифференцируя первое, получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial(\xi,\eta)} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\xi) \end{pmatrix} = v_0'(\xi) \\ \frac{\partial v}{\partial(\xi,\eta)} J \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_\gamma(t) \\ \dot{y}_\gamma(t) \end{pmatrix} = w_1(\xi_\gamma^{-1}(\xi)) \end{cases}$$

Матрица $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ делает из вектора касательной вектор нормали к $\tilde{\gamma}$ Исследуем линейную зависимость столбцов $\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\xi) \end{pmatrix}$ и $J \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_\gamma(t) \\ \dot{y}_\gamma(t) \end{pmatrix}$. Если они линейно независимы, то $v_\xi'$ и $v_\eta'$ будут найдены как непрерывные функции. $\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\xi) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \dot{x}_\gamma(t) \\ \dot{y}_\gamma(t) \end{pmatrix}$ это касательные к $\tilde{\gamma}$, запсанные в разных параметризациях, таким образом они параллельны.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_\gamma(t) \\ \dot{y}_\gamma(t) \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_\gamma(t) \\ \dot{\eta}_\gamma(t) \end{pmatrix} \parallel J^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\xi) \end{pmatrix}$$

Исследуем линейную независимость $\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\xi) \end{pmatrix}$ и $J \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\xi) \end{pmatrix}$ Если вдруг

$$\exists \lambda = \lambda(\xi) : J \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\xi) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\xi) \end{pmatrix}$$

то

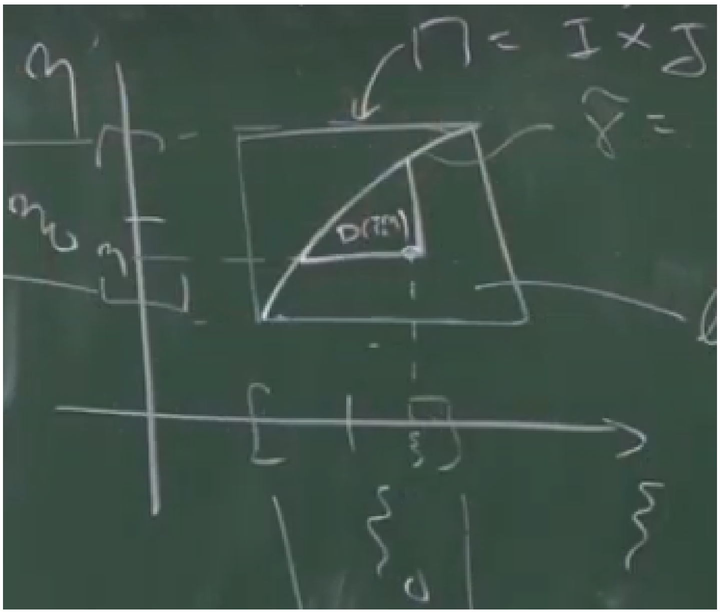
$$J \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) J^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\xi) \end{pmatrix} = 0$$

Но

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 > 0$$

а также $J$ и $J^{-1}$ не вырождены, следовательно произведение дает невырожденную матрицу. А невырожденная матрица на нетривиальном векторе нуля давать не может. Получили противоречие, такого $\lambda$ не существует. Следовательно, мы можем разрешить систему, поэтому будем считать, что нам известны граничные условия в терминах характеристических переменных

$$\begin{cases} v''_{\xi\eta} + d_1 v'_\xi + d_2 v'_\eta + ev = h \\ v(\xi, \varphi(\xi)) = v_0(\xi) \in C^1(I) \\ v'(\xi, \varphi(\xi)) = v_1(\xi) \in C(I) \end{cases}$$




Пусть имеется решение. Возьмем любую $(\xi, \eta) \in (I \times K)\backslash\gamma$. И рассмотрим "кривой треугольник"$D(\xi, \eta)$ как на картинке. Тогда мы можем проинтегрировать вторую производную по этому треугольнику.

$$\iint\limits_{D(\xi,\eta)} d\widehat{\xi} d\widehat{\eta}\, v_{\widehat{\xi}\widehat{\eta}} = -\iint\limits_{D(\xi,\eta)} d\widehat{\xi} d\widehat{\eta}\, (d_1 v'_\xi + d_2 v'_\eta + ev - h)$$

$$\iint\limits_{D(\xi,\eta)} d\widehat{\xi} d\widehat{\eta}\, v_{\widehat{\xi}\widehat{\eta}} = \int\limits_{\psi(\eta)}^{\xi} d\widehat{\xi} \int\limits_{\eta}^{\varphi(\widehat{\xi})} d\widehat{\eta}\, v_{\widehat{\xi}\widehat{\eta}} = \int\limits_{\psi(\eta)}^{\xi} d\widehat{\xi} \left( v_{\widehat{\xi}}(\widehat{\xi}, \varphi(\widehat{\xi})) - v_{\widehat{\xi}}(\widehat{\xi}, \eta) \right) = \int\limits_{\psi(\eta)}^{\xi} v_1(\alpha)\, d\alpha - v(\xi, \eta) + v_0(\psi(\eta))$$

Выражаем $v(\xi, \eta)$

$$\boxed{v(\xi, \eta) = v_0(\psi(\eta)) + \int\limits_{\psi(\eta)}^{\xi} v_1(\alpha)\, d\alpha + \int\limits_{\psi(\eta)}^{\xi} d\widehat{\xi} \int\limits_{\eta}^{\varphi(\widehat{\xi})} d\widehat{\eta}\, (d_1 v'_\xi + d_2 v'_\eta + ev - h)}$$

**Покажем, что решение существует и единственно** Рассмотрим отображение $\Phi : C^1(\Pi) \longrightarrow C^1(\Pi)$, $\Pi = I \times K$

$$\Phi(\omega) = v_0(\psi(\eta)) + \int\limits_{\psi(\eta)}^{\xi} v_1(\alpha)\, d\alpha + \int\limits_{\psi(\eta)}^{\xi} d\widehat{\xi} \int\limits_{\eta}^{\varphi(\widehat{\xi})} d\widehat{\eta}\, (d_1 \omega'_\xi + d_2 \omega'_\eta + e\omega - h)$$

Непосредственно дифференцируя, проверяем, что при естественной гладкости параметров для $v = \Phi(\omega)$ $\exists\, v_{\xi\eta} = v_{\eta\xi}$ и справеливо вложение $v \in C^1(\Pi)$. Тогда если существует $w$ такое, что $w = \Phi(w)$, то $w$ будет полуклассическим решение.

**Принцип сжимающих отображений Банаха (Дается без докозательства) 1.** $(Z, \rho)$ *– полное метрическое пространство.*
*$F$ – сжимающее отображение, т.е. $\exists\, q \in [0, 1)$ такое что $\rho(F(z_1), F(z_2)) \leqslant q\rho(z_1, z_2)$. Тогда $\exists!\, z^* \in Z$, такое что $F(z^*) = z^*$.*

Рассмотрим $\Pi_0 = I_0 \times K_0 \in \Pi$, $I_0 = \psi(K_0)$, $K_0 = \varphi(I_0)$. Введем метрику

$$\rho(v, w) = \max_{\Pi_0}|v - w| + \max_{\Pi_0}|v_\xi - w_\xi| + \max_{\Pi_0}|v_\eta - w_\eta|$$

$(C(\Pi_0), \rho)$ является полным. Покажем, что отображение $\Phi$ является сжимающим. Для этого проверяем, что справедливы следующие соотношения.

$$M = \max(\max_{\Pi}|d_1|, \max_{\Pi}|d_2|, \max_{\Pi}|e|)$$

$$|\Phi(w) - \Phi(v)|(\xi, \eta) \leqslant |I_0||K_0|M\rho(w, v)$$
$$|\Phi_\xi(w) - \Phi_\xi(v)|(\xi, \eta) \leqslant |K_0|M\rho(w, v)$$
$$|\Phi_\eta(w) - \Phi_\eta(v)|(\xi, \eta) \leqslant |I_0|M\rho(w, v)$$

Тогда

$$\rho(\Phi(z_1), \Phi(z_2)) \leqslant M(|I_0||K_0|+|I_0|+|K_0|)\rho(w, v)$$

Можем подобрать $|I_0|$ и $|K_0|$ так, что отображение будет сжимающим. Тогда решение существует и единственно.

**2. Пространства $D(G)$ и $D'(G)$ для открыторго множетсва $G \subseteq \mathbb{R}^m$. Обобщенное дифференцирование в $D'(G)$, теорема о равенстве обобщенных и классических производных порядка не выше $N$ в $D'(G) \cap C^N(G)$.**

**Определение.** *Пространство обобщенных функций Лорана-Шварца*

$$D(\mathbb{R}^m) = C_{\text{фин.}}(\mathbb{R}^m) \cap C^\infty(\mathbb{R}^m) = \{\varphi \in \mathbb{R}^m : \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m), supp(\varphi) \text{ - компакт}\}$$

**Определение.** *$D'(\mathbb{R}^m)$ - множество линейных непрерывных функционалов над $D(\mathbb{R}^m)$*

**Определение.** *Сходимость в $D(\mathbb{R}^m)$:*

$$\varphi_n \to^{D(\mathbb{R}^m)} \varphi \Leftrightarrow$$

1. *$\exists K \in \mathbb{R}^m$ - компакт: $supp(\varphi_n) \subset K \ \forall n$*

2. *$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m \ \partial^\alpha_{\text{кл.}} \varphi_n \overset{\mathbb{R}^m}{\rightrightarrows} \partial^\alpha_{\text{кл.}} \varphi, n \to \infty$*

**Определение.** *$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_M) \in \mathbb{N}_0^m$ - мультииндекс,*

$$\partial^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} ... (\frac{\partial}{\partial x_M})^{\alpha_M}, \text{ где } |\alpha| = \sum_{k=0}^{M} \alpha_k$$

**Определение.** *Пространство обобщенных функций Лорана-Шварца*

$$D(G) = \{\varphi \in D(\mathbb{R}^m) : supp(\varphi) \subset G\}$$

**Определение.** *Сходимость в $D(G)$:*

$$\varphi_n \xrightarrow{D(G)} \varphi \Leftrightarrow$$

1. *$\exists K \in \mathbb{R}^m$ - компакт: $supp(\varphi_n) \subset K \forall n$*

2. *$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m \ \partial^\alpha_{\text{кл.}} \varphi_n \rightrightarrows^G \partial^\alpha_{\text{кл.}} \varphi, n \to \infty$*

**Определение.** *$D'(G)$ - множество линейных непрерывных функционалов над $D(G)$*

**Определение.** *Дифференцирование в $D'(G)$:*

$$\forall f \in D'(G), \varphi \in D(G), \alpha \in \mathbb{N}_0^m$$

*обобщенная производная определяется как*

$$< \partial^\alpha f, \varphi > = < f, (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi >$$

**Определение.** *Пусть $G \in (R)^m$ - открытое множество. Определим опрератор*

$$L = \sum_{k=1}^{M} a_k(x) \partial_x^{\alpha(k)}$$

$$\alpha(1), \alpha(2), ..., \alpha(M) \in \mathbb{N}_0^M, a_k \in C^\infty(G)$$

**Определение.** *Определим действие $L$ в $D'(G)$:*

$$\forall f \in D'(G), \varphi \in D(G) \ \ < Lf, \varphi > = < f, L'\varphi > \text{ , где } L'\varphi = \sum_{k=0}^{M} (-1)^{|\alpha(k)|} \partial^{\alpha(k)} (a_k(x) \varphi(x))$$

**Теорема.** *О равенстве обобщенных и классических производных порядка не выше $N$ в $D'(G) \cap C^N(G)$:*

1. *Пусть* $f \in C^N(\mathbb{R}^m) \subset Loc_1(\mathbb{R}^m)$, $\varphi \in C_{\text{фин.}}(\mathbb{R}^m) \cap C^N(\mathbb{R}^m)$. *Пусть* $supp(\varphi) \in \Pi_r$, *где* $\Pi_r$ *- прямоугольник.*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m,\ |\alpha| <= N,\ \partial^\alpha f \in C(\mathbb{R}^m) \subset Loc_1(\mathbb{R}^m)$$

$$< \partial^\alpha f, \varphi >= \int_{\Pi_r} (\partial^\alpha f)\varphi dx =$$
$$= \int_{-r}^{r} dx_1 \int_{-r}^{r} dx_2 ... \int_{-r}^{r} dx_m [(\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial x_2})^{\alpha_2}...(\frac{\partial}{\partial x_m})^{\alpha_m} f(x)]\varphi(x)$$

*Интегрируем по частям по каждой компоненте, с учетом*

$$\partial^\beta \varphi(x)|_{x=\pm r} = 0 \forall \beta : |\beta| <= N$$

*получим:*

$$< \partial^\alpha f, \varphi >= (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m} \int_{-r}^{r} f(\partial^\alpha \varphi) dx =< f, (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi(x) >$$

*То есть, классическая и обобщенная производная совпадают.*

2. *Пусть* $f \in D'(G) \cap C^N(G)$, $\varphi \in D(G)$. *Тогда аналогично предыдущему пункту получим, что классическая и обобщенная производные порядка не выше* $N$ *равны.*

## 4. Нефинитность классического преобразования Фурье нетривиальной функции из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.Простр Л. Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и плотность $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ в нем. Классическое преобразование Фурье как линейное непрерывное преобразование пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и теорема обращения.

### 4.0. Вспомогательные теоремы

*В этом билете мы будем много пользоваться всякой констовской херней.*

***Т4.0.1 - Теорема Лебега об ограниченной сходимости (без док-ва)***
*1) Имеем последовательность $f_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, которая почти всюду сходится: $f_n \to f$ в $\mathbb{R}^n$*
*2) $\exists h \in L_1(\mathbb{R}^m) : |f_n| \leq h$ почти всюду в $x \in \mathbb{R}^m \forall n$.*
*Тогда $f_n$ и $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$, а также $\int\limits_{\mathbb{R}^m} f_n \longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^m} f$ при $n \to \infty$*

***Т4.0.2 - Теорема Фубини (без док-ва)***
*Имеем $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{C}$ - измерима по Лебегу; Притом такая, что $\int\limits_{\mathbb{R}^m} dx \int\limits_{\mathbb{R}^l} dy|f(x,y)| < +\infty$.*

*Тогда $f \in L_1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l)$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^l} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx \int\limits_{\mathbb{R}^l} dyf(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^l} dy \int\limits_{\mathbb{R}^m} dxf(x,y)$*

***Л4.0.1 - Свойство интеграла Лебега о его интегрируемости в среднем (без док-ва)***
$f \in L_1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l) \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(x+z) - f(x)|dx \longrightarrow 0$ *при* $z \to 0$ *в* $\mathbb{R}^m$.

***Т4.0.3 - Теорема Римана об осцилляции***
$f \in L_1(\mathbb{R}^m) \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(x,y)}f(x)dx \longrightarrow 0$ *при* $|y| \to \infty$.

***Док-во***: *пользуемся* ***Л4.0.1***. *Рассмотрим* $\int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(x,y)}f(x)dx$ *с* $x = z + \frac{\pi y}{|y|^2}$.

*Получим* $\int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(z,y)}e^{i\pi}f(z+\frac{\pi y}{|y|^2})dz = -\int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(x,y)}f(x+\frac{\pi y}{|y|^2})dx$. *Последний интеграл получается просто переобозначением индекса с $z$ на $x$.*
*Значит, мы получили* $|2\int e^{i(x,y)}f(x)dx| = |\int e^{i(x,y)}(f(x) - f(x+\frac{\pi y}{|y|^2}))dx| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^m}(f(x) - f(x+\frac{\pi y}{|y|^2})dx$.

*По* ***Л4.0.1*** *получаем справа 0 при* $|y| \to \infty$ ♠.

### 4.1. Из лекции 10 - нефинитность Фурье и пространство Шварца.

*Рассмотрим классическое Фурье для* $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$.
$F[f](y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(x,y)}f(x)dx, y \in \mathbb{R}^m$. *Заметим, что подинтегральная функция* $\in L_1(\mathbb{R}^m)\forall y \in \mathbb{R}^m$.

***Л4.1.1 - Непрерывность***
*Преобразование непрерывно: если $y \to y_0$ в $\mathbb{R}^m$, то $F[f](y) \to F[f](y_0)$.*
***Док-во***: $|e^{i(x,y)}f(x)| \leq f(x) \equiv h(x)$ *из* ***Т4.0.1*** *(Т Лебега). Пользуемся ей:*
$\lim\limits_{y\to y_0} F[f](y) = \int e^{i(x,y_0)}f(x)dx = F[f](y_0)$ ♠.

*Мы можем рассмотреть Фурье как функционал, которая будет действовать на пробные функции.*
$F[f](y) \subset Loc_1(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$
$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ *подействуем на эту* $\varphi$:
$$< F[f], \varphi >= \int\limits_{\mathbb{R}^m} dyF[f](y)\varphi(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy \int\limits_{\mathbb{R}^m} dxe^{i(x,y)}f(x)\varphi(y)$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} dy \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx|e^{i(x,y)}f(x)\varphi(y)| = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy|\varphi(y)| \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx|f(x)| < +\infty.$$
*Пользуемся Т Фубини (**Т4.0.2**):*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} dx f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy e^{i(x,y)}\varphi(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx f(x) F[\varphi](x) = < f, F[\varphi] >$$

*Обратим внимание, что Т Фубини прекрасно применяется, потому что $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^m)$, а $F[\varphi](x) \in BC(\mathbb{R}^m)$ - пространство непрерывных ограниченных функций. Значит, подинтегральная функция тоже $\in L_1(\mathbb{R}^m)$.*

*Рассмотрим некую $\varphi$ из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Пусть $supp(\varphi) \subset B_R(0)$ - шар радиуса $R$ с центром в нуле. Тогда $F[\varphi](x) = \int\limits_{B_R(0)} dy (iy) e^{i(x,y)}\varphi(y)$, и поскольку $\varphi(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, то по теореме о дифф. по параметру $F[\varphi] \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \Rightarrow$*

$$\partial_x^\alpha(F[\varphi](x)) = \int\limits_{B_R(0)} dy (iy)^\alpha e^{i(x,y)}\varphi(y) = F[(iy)^\alpha\varphi(y)](x).$$

*Финитность такого преобразования Фурье благополучно теряется; об этом следующая теорема.*

***Т4.1.1 - Нефинитность Фурье***

$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) : F[\varphi] \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \varphi \equiv 0$.

***Док-во (в 1D)***: *$F[\varphi] \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \Rightarrow \exists R > 0 : F[\varphi](y) = 0\ \forall|y| \geq R$; аналогично $\varphi(x) = 0\ \forall|x| \geq r$*

$$\int dx e^{i(x,y)}\varphi(x) = \int\limits_{-r}^{r} dx e^{i(x,y)}\varphi(x) = \int\limits_{-r}^{r} dx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} x^k \varphi(x)$$

$|\frac{(iy)^k}{k!}x^k\varphi(x)| \leq \frac{|y|^k r^k}{k!}\max\limits_{[-r;r]}|\varphi(x)|$ *- т. е. получились члены равномерно сходящегося ряда (по Т Вейерштрасса). Значит, можно переставить интеграл и ряд по Т об интегрировании равномерно сходящихся рядов.*

$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(iy)^k}{k!}\int\limits_{-r}^{r} x^k\varphi(x)dx = 0\ \forall|y| \geq R$. *Тогда по Т о единственности степ. ряда* $\int\limits_{-r}^{r} x^k\varphi(x)dx = 0$ *(*)*

*Разложим в Фурье по основной триг. системе на $[-r; r]$. Её можно записать как $\{e^{\frac{i\pi s x}{r}}; x \in [-r; r]; s \in \mathbb{Z}\}$.*

$\varphi(x) = \sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}\varphi_m e^{\frac{i\pi m x}{r}}\ \forall x \in [-r; r]$ *- равн. сх. триг. ряд Фурье на отрезке.*

$\varphi_m = \dfrac{\int\limits_{-r}^{r} e^{-\frac{i\pi m x}{r}}}{2r} = \frac{1}{2r}\int\limits_{-r}^{r} dx \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(\frac{-i\pi m}{r})^k \frac{x^k\varphi(x)}{k!}$. *Всё это дело сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, а значит, по Т об интегрировании равномерно сходящихся рядов ряд и интеграл можно переставить.*

$\varphi_m = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(\frac{-i\pi m}{r})^k\int\limits_{-r}^{r} x^k\varphi(x)dx = 0$ *(*)* $\forall m \in (Z)$ *Значит, если все коэф. $\varphi_m = 0$, то $\varphi \equiv 0$.* ♠

*Как дышать? Надо вводить другое пространство, из которого мы не будем вылетать после Фурье. Это есть не что иное, как пространство Шварца.*

***Опр. 1*** *Пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ Шварца пробных функций задается как $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m) | \forall\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m$ $x^\beta\partial_x^\alpha\varphi(x) \longrightarrow 0\ \forall|x| \to \infty\}$. Здесь $\alpha$, $\beta$ - мультииндексы.*

***Опр. 2*** *А еще можно задать пространство так: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m) | \forall\alpha \in \mathbb{N}_0^m\ \forall p \in \mathbb{R}\ |x|^p\partial_x^\alpha\varphi(x) \longrightarrow 0$ $\forall|x| \to \infty\}$.*

***Л4.1.2 - Эквивалентность определений***

***1 → 2:***

$$|x|^p \leq m^{\frac{p}{2}}\max_{k=1..m}|x_k^p| \leq m^{\frac{p}{2}}\sum_{k=1}^{m}|x_k|^p$$

$|x|^p|\partial_x^\alpha\varphi| \leq m^{\frac{p}{2}}\sum\limits_{k=1}^{m}|x_k|^p|\partial_x^\alpha\varphi(x)| \longrightarrow 0\ \forall|x| \to \infty\}$. ♠

***2 → 1:***

*$\forall\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m$:*

$|x^\beta\partial_x^\alpha\varphi| = |x_1|^{\beta_1}..|x_m|^{\beta_m}|\partial_x^\alpha\varphi| \leq |x|^{|\beta|}\partial_x^\alpha\varphi \longrightarrow 0\ \forall|x| \to \infty\}$. ♠

***T4.1.2 - Инвариантность относительно Фурье***
$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow F[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$
***Док-во:***
$F[\varphi] = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(x,y)}\varphi(x)dx.$
$\partial_y^\alpha e^{i(x,y)}\varphi(x) = |(ix)^\alpha \varphi(x) e^{i(x,y)}| \leq |x|^\alpha |\varphi(x)|$
*Так как* $\varphi \in (S)$, *то* $(1+|x|^{2m})|x|^\alpha|\varphi(x)| \to 0$ *и принадлежит* $C(\mathbb{R}^m)$. *Отсюда по Т Вейерштрасса имеем ограниченность* $|x|^\alpha|\varphi(x)| \leq \frac{M}{1+|x|^{2m}}$.
*Тогда по признаку Вейерштрасса в силу абс. интегрируемости* $\int\limits_{\mathbb{R}^m} \dfrac{dx}{1+|x|^{2m}}$ *мы получим равномерную по y сходимость интеграла* $\int dy \partial_y^\alpha e^{i(x,y)}\varphi(x)dx$. *Значит, можно дифференциировать по параметру.*
*Теперь разберёмся со степенью:* $y^\beta F[(ix)^\alpha \varphi(x)](y)$; *обозначим* $\psi(x) = (ix)^\alpha \varphi(x)$
*Проинтегрировав по частям* $|\beta|$ *раз, получим* $F[\partial_x^\beta \psi](y) = (-iy)^\beta F[\psi](y)$. *А значит,* $y^\beta F[\psi](y) = i^\beta F[\partial_x^\beta \psi]$.
*В итоге по Т Римана об осцилляции (**T4.0.3**)* $i^\beta F[\partial_x^\beta \psi] \longrightarrow 0$ *при* $|y| \to \infty$ ♠

***Опр. 3*** $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ *при* $n \to \infty$ *в* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, *если* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m$ $x^\beta \partial_x^\alpha \varphi_n(x) \longrightarrow\!\!\!\longrightarrow x^\beta \partial_x^\alpha \varphi(x)$ *при* $n \to \infty$. *Две стрелки обозначают равномерную сходимость.*
***Л4.1.3 - Плотность*** $\mathcal{S}$ ***в*** $\mathcal{D}$
$\varphi_n \longrightarrow \varphi$ *при* $n \to \infty$ *в* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, *если* $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ *при* $n \to \infty$ *в* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$
***Док-во:***
$\sup\limits_{\mathbb{R}^m}[|x|^p|\partial_x^\alpha(\varphi_n - \varphi)|] \leq R^p \max\limits_{B_R(0)}|\partial_x^\alpha(\varphi_n - \varphi)|$ ♠

*Отсюда тут же следует, что* $\mathcal{S}'$ *- это подмножество функционалов* $\mathcal{D}'$, *которые работают на суженном пространстве, ведь из сходимости в* $\mathcal{D}$ *следует сходимость в* $\mathcal{S}$.

### 4.2. Из лекции 11 - Классическое преобразование Фурье как линейное непрерывное преобразование пространства + Т обращения

*Очевидно, что классическое преобразование Фурье линейно. Покажем его непрерывность.*

***Л4.2.1 - Непрерывность***
*Если* $\varphi_n \to \varphi$ *в* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, *то* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m y^\beta \partial^\alpha F[\varphi_n - \varphi](y) \longrightarrow\!\!\!\longrightarrow 0$ *по* $y \in \mathbb{R}^m$.
***Док-во:***
*Проделаем те же вычисления, что и в **T4.1.2**:*
$y^\beta \partial^\alpha F[\varphi_n - \varphi](y) = y^\beta F[x^\alpha(\varphi_n - \varphi)(x)](y)$
$F[\partial^\beta \psi](y) = -(iy)^\beta F[\psi]$
*Соберём эти два соотношения в одно:* $y^\beta \partial^\alpha F[\varphi_n - \varphi](y) = -(i)^{(\beta+\alpha)} F[\partial^\beta(x^\alpha(\varphi_n - \varphi)(x))](y)$
*По определению сходимости в* $\mathcal{S}$ $|x|^p \partial^\beta(x^\alpha(\varphi_n - \varphi)) \longrightarrow\!\!\!\longrightarrow 0$ *в* $\mathbb{R}^m$ *при* $n \to \infty$; *тогда выбирая* $p = 0, 2m$, *получим:* $(1+|x|^{2m})\partial^\beta(x^\alpha(\varphi_n - \varphi)) \leq \varepsilon$ $\forall n \geq N(\varepsilon)$ $\forall x \in \mathbb{R}^m$.
*Окончательно* $|y^\beta \partial^\alpha F[\varphi_n - \varphi](y)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^m} |y^\beta \partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)(x)|dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^m} \dfrac{\varepsilon}{1+|x|^{2m}}dx \longrightarrow 0$ *при* $\varepsilon \to 0$. *То есть, наш интеграл равномерно сходится к нулю и тогда* $F[\varphi_n] - F[\varphi]$ *в* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. ♠

***T4.2.1 - Т обращения: main***

$\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^m} F[\varphi](y)dy = (2\pi)^m\varphi(0)$

***Док-во:***

$\forall\varphi,\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \int \varphi(y)F[\psi](y)dy = \int F[\varphi](x)\psi(x)dx$ *по Т Фубини (**T4.0.2**), т.к.* $\varphi,\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m); F[\varphi], F[\psi] \in L_1$

*Введём специальную функцию* $\psi_\varepsilon \stackrel{def}{=} e^{-\varepsilon|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)\ \forall\varepsilon > 0$. *Фурье от этой функции считается тупо в лоб с выделением полного квадрата показателя exp.*

$F[\psi_\varepsilon](y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx e^{i(xy)}e^{-\varepsilon|x|^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m} dz e^{-|z-\frac{iy}{2\sqrt{\varepsilon}}|^2}e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}^m}e^{-\frac{|\pi|^2}{4\varepsilon}}\prod\limits_{k=1}^m\int\limits_{\mathbb{R}} dt e^{-(t-\frac{iy_k}{2\sqrt{\varepsilon}})^2} = (\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}})^m e^{-\frac{|\pi|^2}{4\varepsilon}}$

*Предпоследний переход - это теорема Фубини (**T4.0.2**), сводящая кратный интеграл к повторному.*

*Последний в общем-то ясен, но для любителей попетушиться я принес вам покушать говнеца:*

*Рассмотрим* $\Phi(\xi) = \int e^{-(t-\xi)^2}$; $|\frac{d}{d\xi}e^{-(t-\xi)^2}| = |2(\xi - t)||e^{-(t-\xi)^2}| \leq 2(r+|t|)e^{-t^2+2|t|r+r^2} \in L_1(\mathbb{R})$ *При* $|\xi| \leq r$ *сходится равномерно* $\Rightarrow \exists\Phi'(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi}e^{-(t-\xi)^2}dt\ \forall|\xi| \leq r$.

*Значит, функция хорошая и по теореме единственности из ТФКП* $\Phi(\xi) = \Phi(\xi_{Re}) = \sqrt(\pi)$

*Таким образом, мы осилили Фурье и теперь можем пописать Фубини:* $\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(y)F[\psi_\varepsilon](y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} F[\varphi](x)\psi_\varepsilon(x)dx$

*Подставим нашу функцию:* $\int\limits_{\mathbb{R}^m}\varphi(y)(\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}})^m e^{-\frac{|\pi|^2}{4\varepsilon}}dy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} F[\varphi](x)e^{-\varepsilon|x|^2}dx$. *Правая часть интегрируется, потому что* $F[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subset L_1(\mathbb{R}^m)$.

$|F[\varphi](x)e^{-\varepsilon|x|^2}|dx \leq |F[\varphi](x)| \in L_1$.

*Тогда по Т Лебега об огр. сходимости (**T4.0.1**) получим* $\int F[\varphi](x)e^{-\varepsilon|x|^2}dx \longrightarrow \int F[\varphi](x)dx$ *при* $\varepsilon \to 0$.

*Тем временем в левой части после замены переменной в интеграле получим* $(\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}})^m(2\sqrt{\varepsilon})^m \int \varphi(2\sqrt{\varepsilon}z)e^{-|z|^2}dz$

*Подинтегральная функция оценивается:* $|\varphi(2\sqrt{\varepsilon}z)e^{-|z|^2}| \leq (\sup\limits_{\mathbb{R}^m}|\varphi|)e^{-|z|^2} \in L_1(\mathbb{R}^m)\forall z \in \mathbb{R}^m$

*Тогда по Т Лебега об огр. сходимости получим* $(2\sqrt{\pi})^m\varphi(0)(\int dte^{-t^2})^m$ ♠

***T4.2.2 - Т обращения: как мы привыкли ее видеть***

$\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow F[F[\varphi(x)](y)](z) = (2\pi)^m\varphi(-z)$

***Док-во:***

$F[F[\varphi(x)](y)](z) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy e^{i(y,z)}\int\limits_{\mathbb{R}^m} dx e^{i(x,y)}\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx e^{i(y,x+z)}\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy \int\limits_{\mathbb{R}^m} d\xi e^{i(y,\xi)}\varphi(\xi - z) =$

$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy F[\varphi(\xi - z)](y) = (2\pi)^m\varphi(-z)$ *по **T4.2.1*** ♠

*Дальше немножечко напряжем мозг и высрем вот это.*

***Опр. 4*** $F^{-1}[\varphi(x)](y) \stackrel{def}{=} \frac{1}{(2\pi)^m}F[\varphi(x)](-y) = \frac{1}{(2\pi)^m}F[\varphi(-x)](y)$

*gg wp спасибо всем кто прочитал эту хуйню*

**5. Пространство обобщенных функций $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Обобщенное преобразование в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ по всем или по части переменных, и его свойства, связанные с операцией обобщенного дифференцирования.**

**Определение.** *Пространство обобщенных функций Шварца $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ – множество линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Линейность и непрерывность в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ определяется так же, как и в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.*

**Определение.** $\forall\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ *обобщенной производной функционала $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ называется*

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi\rangle \overset{def}{=} (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi\rangle \ \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \tag{2}$$

**Определение.** *Пусть $\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ $\forall g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ : $\forall\alpha \in \mathbb{N}_0^m \hookrightarrow \partial^\alpha g$ имеет медленный рост. Тогда определено произведение функции $g$ на обобщенную функцию $f$ по следующему правилу:*

$$\langle gf, \varphi\rangle \overset{def}{=} \langle f, g\varphi\rangle \ \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \tag{3}$$

**Определение.** *Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Тогда определена замена переменных $z = Ax + b$ в обобщенной функции:*

$$\langle f(Ax+b), \varphi\rangle \overset{def}{=} \left\langle f(z), \frac{\varphi\left(A^{-1}(z-b)\right)}{|\det A|}\right\rangle \ \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \tag{4}$$

**Определение.** *Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Тогда можно определить обобщенное преобразование Фурье по следующему правилу:*

$$\langle F[f], \varphi\rangle \overset{def}{=} \langle f, F[\varphi]\rangle \ \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \tag{5}$$

***Замечание.*** *Для корректности данных выше определений необходимо доказывать линейность и непрерывность соответствующих функционалов. Линейность очевидна во всех случаях, а доказательство непрерывности приведем только для Фурье – в остальных определениях это либо очевидно, либо делается аналогично.*

*Доказательство.* Пусть задана последовательность пробных функций $\varphi_n \to \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Тогда $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m$ рассмотрим следующую функцию:

$$g(y) = y^\beta \partial^\alpha F[\varphi_n - \varphi](y) = y^\beta F[(ix)^\alpha(\varphi_n - \varphi)](y) = i^{\alpha+\beta} F[\partial^\beta(\varphi_n - \varphi)](y) \tag{6}$$

По определению сходимости в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$:

$$\forall p \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow |x|^p \partial^\beta(x^\alpha(\varphi_n - \varphi)) \rightrightarrows 0 \ (n \to \infty)$$

Тогда:

$$\exists\varepsilon : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \ \forall x \in \mathbb{R}^m \hookrightarrow (1 + |x|^{2m})\partial^\beta(x^\alpha(\varphi_n - \varphi)) \leqslant \varepsilon \tag{7}$$

Из (6) и (7) получаем:

$$|g(y)| = |y^\beta \partial^\alpha F[\varphi_n - \varphi](y)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\partial^\beta(x^\alpha(\varphi_n - \varphi)|\, dx \overset{n\geqslant N(\varepsilon)}{\leqslant} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\varepsilon}{1 + |x|^{2m}}\, dx = \varepsilon\frac{\pi S_m}{2m} \tag{8}$$

Таким образом $g(y) \rightrightarrows 0$ $(n \to \infty)$, а значит $F[\varphi_n] \to F[\varphi]$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. □

**Определение** (Обратное преобразование)**.** *Пользуясь теоремой об обращении можно определить обратное преобразование Фурье в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$:*

$$F^{-1}[f](x) \overset{def}{=} \frac{1}{(2\pi)^m} F[f](-x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \tag{9}$$

*Таким образом, мы получили, что обобщенное преобразование Фурье является изоморфизмом над $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, т.е., зная Фурьевый образ, можно найти саму функцию, и наоборот.*
*С помощью преобразования Фурье можно определить замену переменных в обобщенной функции для случая неквадратной матрицы перехода.*

**Определение** (Замена переменных в обобщенной функции)**.** *Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^l)$, $A \in \mathbb{R}^{l\times m}$ : $\operatorname{rg} A = l$, $b \in \mathbb{R}^l$. Тогда:*

$$\langle f(Ax+b), \varphi(x)\rangle \overset{def}{=} \left\langle F^{-1}[f](y), e^{i(b,y)} F[\varphi](A^T y)\right\rangle \ \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \tag{10}$$

*Докажем корректность такого определения.*

*Доказательство.* Из определения обратного преобразования следует:

$$\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^l)\ \exists h(y) = F^{-1}[f] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^l) : f(z) = F[h](z)$$

Тогда:

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)\ \langle f(z), \varphi(z)\rangle = \langle F[h(y)](z), \varphi(z)\rangle = \langle h(y), F[\varphi(z)](y)\rangle = \left\langle h(y), \int\limits_{\mathbb{R}^l} dz\, \varphi(z) e^{i(z,y)} \right\rangle$$

Рассмотрим теперь $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ $\forall y \in \mathbb{R}^l$ функцию:

$$\psi(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, \varphi(x) e^{i(Ax+b,y)} = e^{i(b,y)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, \varphi(x) e^{i(x,A^Ty)} = e^{i(b,y)} F[\varphi](A^T y)$$

Выясним, для каких $A$ выполнено вложение

$$\xi(y) = F[\varphi](A^T y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$$

Так как $F[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то $|z|^p|\partial_z^\beta F[\varphi](z) \to 0$ ($|z|\to \infty$). Заметим теперь, что:

$$\partial^\alpha \xi(y) \in \operatorname{span}\{\partial_z^\beta F[\varphi](z) \mid |\beta| \leqslant |\alpha|\}\Big|_{z=A^Ty}$$

Соответственно $\xi(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$ для таких матриц $A$, что $|A^T y|\to \infty$ ($|y|\to \infty$). Рассмотрим выражение $|A^Ty|^2 = y^T(AA^T)y$. Матрица $AA^T$ является симметрической матрицей размера $l \times l$, которая задает квадратичную форму. Для того, чтобы $y^T(AA^T)y \to \infty$ ($|y|\to \infty$), необходимо, чтобы все ее собственные числа были строго больше нуля, то есть матрица была бы невырожденной. Это возможно тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg} A = l$ ($\ker A^T = 0$). Непрерывность заданного функционала доказывается аналогично через представление □

*Рассмотрим теперь преобразование Фурье по части переменных.*

**Определение** (Преобразование Фурье по части переменных)**.** *Рассмотрим* $f(x,z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^l)$, $x \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^l$. *Тогда:*

$$\langle F_x[f(x,z)](y,z), \varphi(y,z)\rangle \overset{def}{=} \langle f(x,z), F_y[\varphi(y,z)](x,z)\rangle\ \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l) \tag{11}$$

*Докажем корректность этого определения.*

*Доказательство.* Для начала нужно показать, что $\psi(y,z) = F_x[\varphi(x,z)](y,z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$. Это означает, что:

$$\forall \alpha, \mu \in \mathbb{N}_0^m,\ \beta, \nu \in \mathbb{N}_0^l \hookrightarrow y^\mu z^\nu \partial_y^\alpha \partial_z^\beta \psi(y,z) \to 0\ (|y|+|z|\to \infty)$$

По теореме о дифференцировании несобственного интеграла:

$$y^\mu z^\nu \partial_y^\alpha \partial_z^\beta \psi(y,z) = y^\mu z^\nu \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, (ix)^\alpha e^{i(x,y)} \partial_z^\beta \varphi(x,z) = (*) \tag{12}$$

Теперь обозначим $\Phi(x,z) = (ix)^\alpha \partial_z^\beta \varphi(x,z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$. Далее проинтегрируем по частям выражение (12) и получим:

$$(*) = i^\mu z^\nu \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, e^{i(x,y)} \partial_x^\mu \Phi(x,z) \tag{13}$$

Если $|z|$ ограничен, то $|y|\to \infty$, а значит это выражение стремится к нулю в силу теоремы Римана об осцилляции. Если же $|z|\to \infty$, то в силу того, что $\Phi(x,z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$, получаем:

$$|\partial_x^\mu \Phi(x,z)| \leqslant \frac{C}{(1+|x|^{2m})(1+|z|^{2\nu+1})}$$

Тогда, подставляя это в (13), получаем такую оценку:

$$\left| z^\nu \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, e^{i(x,y)} \partial_x^\mu \Phi(x,z) \right| \leqslant \frac{C|z|^{|\nu|}}{1+|z|^{2\nu+1}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{dx}{1+|x|^{2m}} \to 0\ (|z|\to \infty) \tag{14}$$

Значит $\psi(y,z) = F_x[\varphi(x,z)](y,z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$. Линейность искомого функционала очевидна. Рассмотрим теперь непрерывность. Нужно доказать, что

$$\forall \alpha, \mu \in \mathbb{N}_0^m,\ \beta, \nu \in \mathbb{N}_0^l \hookrightarrow y^\mu z^\nu \partial_y^\alpha \partial_z^\beta F_x[(\varphi_n - \varphi)(x,z)](y,z) \rightrightarrows 0\ (n \to \infty) \tag{15}$$

Аналогично первой части доказательства, получаем:

$$y^\mu z^\nu \partial_y^\alpha \partial_z^\beta F_x[(\varphi_n - \varphi)(x,z)](y,z) = i^\mu z^\nu \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, e^{i(x,y)} \partial_x^\mu \Big( (ix)^\alpha \partial_z^\beta (\varphi_n - \varphi)(x,z) \Big) \tag{16}$$

Функция $\Phi_n(x,z) = \partial_x^\mu \Big( (ix)^\alpha \partial_z^\beta (\varphi_n - \varphi)(x,z) \Big) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$. Значит ее можно равномерно ограничить:

$$|\Phi_n(x,z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{(1+|x|^{2m})(1+|z|^{|\nu|})} \tag{17}$$

Тогда получаем, подставляя это в (16), получаем равномерную оценку:

$$|y^\mu z^\nu \partial_y^\alpha \partial_z^\beta F_x[(\varphi_n - \varphi)(x,z)](y,z)| \leqslant \varepsilon \frac{C|z|^{|\nu|}}{1+|z|^{|\nu|}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{dx}{1+|x|^{2m}} \tag{18}$$

При $\varepsilon \to 0$ эта штука равномерно стремится к нулю, что и доказывает непрерывность. □

***Наблюдение*** *Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^l)$. Тогда, как следует из теоремы Фубини:*

$$F[f(x,z)](a,b) = F_z[F_x[f(x,z)]](a,b) = F_x[F_z[f(x,z)]](a,b) \tag{19}$$

*Рассмотрим важное свойство преобразования Фурье.*

**Теорема** (О Фурье-образе производной обобщенной функции)**.** *Пусть $f(x,z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$. Тогда:*

$$F_x[\partial_x^\alpha \partial_z^\beta f(x,z)](y) = (-iy)^\alpha \partial_z^\beta F_x[f(x,z)](y)$$

*Доказательство.* Пусть $\varphi(y,z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$. Тогда:

$$\begin{aligned} \Big\langle F_x[\partial_x^\alpha \partial_z^\beta f(x,z)](y), \varphi(y,z) \Big\rangle &= \Big\langle f(x,z), (-1)^{|\beta|} \partial_z^\beta (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha F_y[\varphi(y,z)](x) \Big\rangle = \\ = \Big\langle f(x,z), (-1)^{|\alpha|+|\beta|} F_y[(iy)^\alpha \partial_z^\beta \varphi(y,z)](x) \Big\rangle &= \Big\langle F_x[f(x,z)](y), (-iy)^\alpha (-1)^{|\beta|} \partial_z^\beta \varphi(y,z)](x) \Big\rangle = \\ = \Big\langle \partial_z^\beta F_x[f(x,z)](y), (-iy)^\alpha \varphi(y,z)](x) \Big\rangle &= \Big\langle (-iy)^\alpha \partial_z^\beta F_x[f(x,z)](y), \varphi(y,z)](x) \Big\rangle \end{aligned} \tag{20}$$

□

**6..**

*Свёртка обобщённых функций в пространстве $S'(R^m)$.* ***Лемма о дифференцировании действия обобщённой функции на гладко зависящую от параметра основную функцию. Дифференцирование свёртки обобщённых функций***

*Пусть для $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ и $g \in S'(\mathbb{R}^m)$ $\exists$ такое $h \in S'(\mathbb{R}^m)$, что для $\forall$ срезки $\eta(x)$ и для $\forall$ $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$*

$$\exists\ \lim_{x\to+\infty}(f(x), \eta(x)_R(g(y), \varphi(x+y))) = (h(x), \varphi(x)$$

*Тогда $h(x)$ будем называть сверткой $f(x), g(x)$ и обозначать $h(x) = f(x) * g(x)$*

***Дифференцирование свёртки обобщённых функций***

*Пусть для $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ и $g \in S'(R^m)$ $\exists$ $f*g \in S'(\mathbb{R}^m)$ тогда $\forall \alpha \in N_0^m \exists f*(D^\alpha g)$ , $(D^\alpha f)*g$ и справедливы равенства:*

$$D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g) = (D^\alpha f) * g$$

***Доказательство.***

$$((\eta(\frac{x}{r})f(x)) * (D^\alpha g(x)), \varphi(x)) = (f(x), \eta(\frac{x}{r})((D^\alpha g(x)), \varphi(x+y)))$$

$$= (f(x), \eta(\frac{x}{r})(g(x), (-1)^\alpha D^\alpha \varphi(x+y))) = ((\eta(\frac{x}{r})f(x) * g(x), (-1)^\alpha D^\alpha \varphi(x))$$

*Так как по условию $\exists f * g$ то*

$$\exists \lim_{x\to+\infty}((\eta(\frac{x}{r})f(x) * g(x), (-1)^\alpha D^\alpha \varphi(x)) = ((f * g)(x), (-1)^\alpha D^\alpha \varphi(x)) = (D^\alpha(f * g)(x), \varphi(x)$$

*Следовательно*

$$\exists \lim_{x\to+\infty}((\eta(\frac{x}{r})f(x) * g(x), (-1)^\alpha D^\alpha \varphi(x)) = (D^\alpha(f * g)(x), \varphi(x))$$

*Мы доказали, что существует свертка*

$$f * (D^\alpha g) = D^\alpha(f * g)$$

*Докажем теперь, что $\exists$ свертка $(D^\alpha f) * g$*

$((\eta(\frac{x}{r})D^\alpha f(x)) * g(x),\varphi(x)) = (D^\alpha f(x),\eta(\frac{x}{r})(g(y),\varphi(x+y))) = (f(x),(-1)^\alpha D^\alpha(\eta(\frac{x}{r})(g(y),\varphi(x+y))))$

*По формуле Лейбница дифференцирования произведения функций*

$$D^\alpha(\eta(\frac{x}{r})(g(y), \varphi(x+y))) = \eta(\frac{x}{r})D^\alpha(g(y), \varphi(x+y)) + \psi_r(x)$$

*Где $\psi_r(x)$ является конечной линейной комбинацией функций*

$$D^\beta\eta(\frac{x}{r})D^\gamma(g(y), \varphi(x+y)) = D^\beta\eta(\frac{x}{r})(g(y), D^\gamma\varphi(x+y))$$

*Для всевозможных $\beta \in N^m$ и $\gamma \in N^m$ вида $\beta + \gamma = \alpha$*

*Покажем, что*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x), \psi_r(x)) = 0$$

*Для этого достаточно доказать, что для $\forall\beta \in N^m$ и $\gamma \in N^m$ вида $\beta + \gamma = \alpha$ выполнено*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x), D^\beta\eta(\frac{x}{r})(g(y), D^\beta\varphi(x+y))) = 0$$

*Зафиксируем $\beta$ и $\gamma$ и рассмотрим функцию*

$$\varsigma(z) = D^\beta\eta(z)$$

*Тогда*

$$D^\beta\eta(\frac{x}{r}) = \frac{1}{r^\beta}\varsigma(\frac{x}{r})$$

*Нам требуется показать, что*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x), \varsigma(\frac{x}{r})(g(y)D^\gamma\varphi(x+y) = 0$$

*Заметим, что $\varsigma(z) = 0$ при $|z|\leq 1$ Отсюда следует,что $\eta 1(z) = \eta(z) + \varsigma(z)$ является 1-срезкой*

*Поэтому, так как $\exists$ $f * g$*

$$((f * g)(x), D^\gamma\varphi(x)) = \lim_{x\to+\infty}(f(x), \eta 1(\frac{x}{r})(g(y), D^\gamma\varphi(x+y)))$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(f(x), \eta(\frac{x}{r})(g(y), D^{\gamma}\varphi(x+y))) + \lim_{x\to+\infty}(f(x), \varsigma(\frac{x}{r})(g(y), D^{\gamma}\varphi(x+y)))$$

$$= ((f*g)(x), D^{\gamma}\varphi(x)) + \lim_{x\to+\infty}(f(x), \varsigma(\frac{x}{r})(g(y), D^{\gamma}\varphi(x+y)))$$

*Отсюда получаем, что*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x), \varsigma(\frac{x}{r})(g(y), D^{\gamma}\varphi(x+y))) = 0$$

*Значит*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x), \varsigma(\frac{x}{r})(g(y)D^{\gamma}\varphi(x+y) = 0$$

*и*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x), \psi_r(x)) = 0$$

*Наконец*

$$((\eta(\frac{x}{r})D^{\alpha}f(x))*g(x), \varphi(x)) = (f(x), (-1)^{\alpha}(\eta(\frac{x}{r})(g(y), (-1)^{\alpha}D^{\alpha}\varphi(x+y)))) = (D^{\alpha}(f(x)*g(x)), \varphi(x))$$

*Мы получили, что*

$$(D^{\alpha}f)*g = D^{\alpha}(f*g)$$

*ч.т.д*

## 10. Функция Грина оператора Лапласа в $S'(\mathbb{R}^3)$ и вычисление в $S'(\mathbb{R}^3)$ обобщённого решения уравнения Пуассона с абсолютно интегрируемым на $\mathbb{R}^3$ источником, формула Пуассона

*Будем работать с уравнением Пуассона:*

$$\Delta U(x) = f(x)$$

*где* $f(x) \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^3)$, *т.е.* $\int\limits_{\mathbb{R}^3} |f(x)|\, dx$, $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^3)$ *и* $\langle f, g\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\varphi(x)dx$

*Функция Грина опекратора Лапласа:*

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|},\ x \in \mathbb{R}^3$$

*Т.е.* $\Delta E = \delta(x)$ *в* $S'(\mathbb{R}^3)$

*Для нахождения решения уравнения требуется доказать существование и найти свёртку:*

$$f(x) * E(X) \text{ в } S'(\mathbb{R}^3)$$

*По определению:*

$$\forall \varphi \in S'(\mathbb{R}^3)\ \forall \text{ 1-срезки } \eta_1\left(\frac{x}{R}\right) \in D(\mathbb{R}^3) \mapsto$$

$$\lim_{R\to\infty} \left\langle f(x), \eta_1\left(\frac{x}{R}\right)\langle E(y), \varphi(x+y)\rangle\right\rangle = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx f(x)\eta_1\left(\frac{x}{R}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{dy}{-4\pi}\frac{\varphi(x+y)}{|y|} \doteq$$

*Требуется доказать, что* $\exists C_\varphi > 0 : \left|\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(x+y)}{|y|}\right| \le C_\varphi,\ \forall x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ *Тогда*

$$\left|f(x)\eta_1\left(\frac{x}{R}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{dy}{-4\pi}\frac{\varphi(x+y)}{|y|}\right| \le \frac{MC_\varphi}{4\pi}\,|f(x)| \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^3)$$

*Т.е. выполнены условия теоремы Лебега об ограниченной сходимости*
*Докажем существование* $C_\varphi$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi(x+y)}{|y|}\right| \le \int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{|\varphi(x+y)|}{|y|} = /y = z - x/ = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varphi(z)}{|z-x|} \preccurlyeq$$

$$\left(\varphi \in S(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \exists M_\varphi > 0 :\ |\varphi(x)| \le \frac{M_\varphi}{1+|z|^4}\right)$$

$$\preccurlyeq \int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{M_\varphi}{(1+|z|^4)|z-x|} = /\text{в сфер. коорд.: } |z| = r, \alpha - \text{угол между } 0x \text{ и } 0z/ =$$

$$= 2\pi M_\varphi \int\limits_0^{+\infty}\frac{r^2dr}{1+r^4}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin(\alpha)d\alpha}{\sqrt{r^2+|x|^2-2r|x|\cos\alpha}} = /\cos\alpha = \xi/ =$$

$$= 2\pi M_\varphi \int\limits_0^{+\infty}\frac{r^2dr}{1+r^4}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\xi}{\sqrt{r^2+|x|^2-2r|x|\xi}} = (\text{по } Th \text{ Ньютона-Лейбница}) =$$

$$= 2\pi M_\varphi \int\limits_0^{+\infty}\frac{r^2dr}{1+r^4}\cdot\frac{r+|x|-|r-|x||}{r|x|} = \frac{2\pi M_\varphi}{|x|}\left(\int\limits_0^{|x|}\frac{r}{1+r^4}\cdot 2rdr + \int\limits_{|x|}^{+\infty}\frac{r}{1+r^4}\cdot 2|x|dr\right) \le$$

$$= (r \le |x| \text{ в 1-ом инт-ле, по 1-ому } r) \le |x|\arctan|x|^2 + |x|\left(\frac{\pi}{2} - \arctan|x|^2\right) = \pi^2 M_\varphi = C_\varphi$$

*Итак мы доказали существование* $C_\varphi$. *Теперь можно занести предел под интеграл и 1-срезка уходит:*

$$\mathrel{\mathring{=}} -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz \frac{f(x)\varphi(z)}{|z-x|} \mathrel{\mathring{=}}$$

*Т.к.*

$$\frac{|f(x)\varphi(z)|}{|z-x|} \leq \frac{M_\varphi |f(x)}{(1+|z|^4)|z-x|} \in \mathbb{L}_1(x \in \mathbb{R}^3,\ z \in \mathbb{R}^3)$$

*То по Th Фубини*

$$\mathrel{\mathring{=}} -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dz \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \frac{f(x)\varphi(z)}{|z-x|} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz \varphi(z) \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \frac{f(x)}{(-4\pi)|z-x|} = (\text{\textit{абс. сх. по} } z \in \mathbb{R}^3 \text{ \textit{по Th Фубини}}) =$$

$$= \left\langle -\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \frac{f(x)}{(-4\pi)|z-x|}, \varphi(z) \right\rangle$$

*Итак предел существует и не зависит от срезки.*
*Линейность следует из линейности интеграла по функции.*
*Осталось показать непрерывность:*

$$S(\mathbb{R}^3) \ni \varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz \varphi(z) \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \frac{f(x)}{(-4\pi)|z-x|} = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx dz \frac{f(x)\varphi(z)}{(-4\pi)|z-x|} \in \mathbb{C}$$

*Требуется доказать, что последний интегралл непрерывно зависит от* $\varphi$
*Пусть* $\varphi_n \to \varphi$ *в* $S(\mathbb{R}^3)$
*Тогда по определению:*

$$(1+|z|^4)|\varphi_n(z) - \varphi(z)| \rightrightarrows 0, (z \in \mathbb{R}^3, n \to \infty)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon) \forall z \in \mathbb{R}^3 \mapsto |\varphi_n - \varphi(z)| \leq \frac{\varepsilon}{1+|z|^4}$$

*Тогда*

$$\left| \left\langle -\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \frac{f(x)}{(-4\pi)|z-x|}, (\varphi_n - \varphi)(z) \right\rangle \right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx dz \frac{|f(x)||(\varphi_n - \varphi)(z)|}{(4\pi)|z-x|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx |f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|(\varphi_n - \varphi)(z)|}{|z-x|}$$

$$\leq /x \neq 0/ \leq \pi^2 \varepsilon ||f||_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}^3)|} \cdot \frac{1}{4\pi}$$

*Следовательно непрерывность по* $\varphi$ *есть.*

## 12. Вычисление методом регуляризации функции Грина оператора Даламбера в пространсте $S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ и обобщенное решение волнового уравнения с источником медленного роста, запаздывающий потенциал.

*Оператор Даламбера*

$$L=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-a^2\Delta_x$$

*где*

$$x\in\mathbb{R}^3$$

$$t\in\mathbb{R}$$

*Мы хотим найти функцию Грина* $\mathcal{E}(t,x)\in S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ *такую что*

$$L\mathcal{E}(t,x)=\delta(t,x)$$

$$\operatorname{supp}\mathcal{E}\subset\left\{t\geqslant 0,x\in\mathbb{R}^3\right\}$$

*Будем решать равносильное уравнение. Применим преобразование Фурье*

$$F\left[L\mathcal{E}(t,x)\right](\tau,y)=1$$

$$\left((-i\tau)^2-a^2\sum_{k=1}^{3}(-iy_k)^2\right)F\left[\mathcal{E}(t,x)\right](\tau,y)=1$$

$$(-\tau^2+a^2|y|^2)F\left[\mathcal{E}(t,x)\right](\tau,y)=1$$

*Рассмотрим многочлен*

$$P_L(\tau,y)=a^2|y|^2-\tau^2$$

*где*

$$y\in\mathbb{R}^3$$

$$\tau\in\mathbb{R}$$

*Заметим, что он не отделен от нуля, поэтому придется вводить регуляризацию. Рассмотрим другой многочлен*

$$P_\varepsilon(\tau,y)=a^2|y|^2-(\tau+i\varepsilon)^2$$

*и будем решать вспомогательную задачу в* $S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$

$$P_\varepsilon(\tau,y)v_\varepsilon(\tau,y)=1$$

$$|P_\varepsilon(\tau,y)|=|a|y|-\tau-i\varepsilon||a|y|-\tau+i\varepsilon|\geqslant\varepsilon^2$$

*Этот многочлен уже отделим от нуля поэтому существует и единственно решение уравнеиня в обобщенных функциях*

$$v_\varepsilon(\tau,y)=\frac{1}{P_\varepsilon(\tau,y)}$$

*Если бы существовал предел*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}F^{-1}\left[v_\varepsilon(\tau,y)\right](t,x)=g(t,x)$$

*то предельная функция решала бы наше уравнение, покажем это*

$$<P_LF[g],\varphi>=\lim_{\varepsilon\to+0}<v_\varepsilon,P_L\varphi>$$

*это можно сделать поскольку спаривание непрерывно. Добавим и вычтем*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}<v_\varepsilon,P_L\varphi>=\lim_{\varepsilon\to+0}<v_\varepsilon,P_\varepsilon\varphi>+\lim_{\varepsilon\to+0}<v_\varepsilon,(P_L-P_\varepsilon)\varphi>=$$

$$=<1,\varphi>+\lim_{\varepsilon\to+0}(2\tau i\varepsilon-\varepsilon^2)<v_\varepsilon,\varphi>$$

*Поскольку*

$$\lim_{\varepsilon\to+0} v_\varepsilon = F[g]$$

*второй член стремится к нулю. Тем самым мы показали, что предельная функция будет искомым решением. Давайте найдем этот предел. Для любой пробной функции*

$$\lim_{\varepsilon\to+0} < F^{-1}\left[\frac{1}{P_\varepsilon(\tau,y)}\right](t,x),\varphi(t,x) >= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy \int\limits_{\mathbb{R}} d\tau \frac{1}{a^2|y|^2-|\tau+i\varepsilon|^2}\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{\mathbb{R}^4} dtdx\ \varphi(t,x)e^{-it\tau-i(x,y)}$$

*Заметим, что подынтегральная функция абсолютно интегрируема при любом фиксированном* $y\neq 0$*(точка ноль не считается, это множество меры нуль, я в домике), т.е*

$$\frac{1}{a^2|y|^2-|\tau+i\varepsilon|^2}\ \varphi(t,x)\ e^{-it\tau-i(x,y)}\in\mathbb{L}_1\left[\tau\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^3\right]$$

*Поэтому воспользуемся чудесной теоремой Фубини и переставим интералы по* $d\tau$ *и* $dtdx$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\int\limits_{\mathbb{R}^4} dtdx\ \frac{\varphi(t,x)}{(2\pi)^4}\ e^{-i(x,y)}\int\limits_{\mathbb{R}} d\tau\frac{e^{-it\tau}}{a^2|y|^2-|\tau+i\varepsilon|^2}$$

*Интеграл по* $d\tau$ *вычислим методами ТФКП, два полюса хуе мое, вычеты, так паддажи ебана. Оба полюса находятся в нажней части комплексной плоскости. При* $t<0$ *контур нужно замыкать сверху, при* $t>0$ *- снизу (лемма Жордана). Поэтому при* $t<0$ *полюсы не попадают внутрь контура - интеграл обнуляется. Итого получаем*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} d\tau\frac{e^{-it\tau}}{a^2|y|^2-|\tau+i\varepsilon|^2} = -2\pi i\theta(t)\left(\frac{e^{-it(a|y|-i\varepsilon)}}{-2a|y|}+\frac{e^{-it(-a|y|-i\varepsilon)}}{2a|y|}\right) = 2\pi\theta(t)\ e^{-t\varepsilon}\ \frac{\sin at|y|}{a|y|}$$

*Подставим обратно и перепишем часть функции как Фурье по части переменных.*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\int\limits_{\mathbb{R}^4} dtdx\ \frac{\varphi(t,x)}{(2\pi)^3}\ e^{-i(x,y)}\ \theta(t)\ e^{-t\varepsilon}\ \frac{\sin at|y|}{a|y|} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\int\limits_{\mathbb{R}} dt\ \theta(t)\ e^{-t\varepsilon}\ \frac{\sin at|y|}{a|y|}\ F_x^{-1}[\varphi(t,x)](y)$$

*Фурье по части переменных от пробной функции является пробной функцией. Также заметим, что*

$$\theta(t)\ e^{-t\varepsilon}\ \frac{\sin at|y|}{a|y|}\leqslant t$$

$$t\ F_x^{-1}[\varphi(t,x)](y)\in\mathbb{L}_1(\mathbb{R}^4)$$

*Проверив, что подынтегральная функция мажорируется абсолютно интегрируемой, можем воспользоваться теоремой Лебега об огр.сходимости и внести предел под интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\int\limits_{\mathbb{R}} dt\ \theta(t)\ \lim_{\varepsilon\to+0} e^{-t\varepsilon}\ \frac{\sin at|y|}{a|y|}\ F_x^{-1}[\varphi(t,x)](y) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\int\limits_{\mathbb{R}} dt\ \theta(t)\ \frac{\sin at|y|}{a|y|}\ F_x^{-1}[\varphi(t,x)](y) =$$

$$=< \theta(t)\ \frac{\sin at|y|}{a|y|},\ F_x^{-1}[\varphi(t,x)](y) >=< F_y^{-1}\left[\theta(t)\ \frac{\sin at|y|}{a|y|}\right](t,x),\varphi(t,x) >$$

*Сейчас воспользуемся леммой, которую докажем позже*

$$F[\delta_R(x)](y) = \frac{4\pi R\sin R|y|}{|y|}$$

*Тогда получим*

$$F_y^{-1}\left[\theta(t)\frac{\sin at|y|}{a|y|}\right](x) = \theta(t)\frac{\delta_{at}(x)}{4\pi a^2 t}$$

*Подставим в свертку*

$$< \theta(t)\frac{\delta_{at}(x)}{4\pi a^2 t}, \varphi >= \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{|x|=at} dS_x \frac{\varphi(t,x)}{4\pi a^2 t} = /at=r/= \int\limits_0^{+\infty} dr \int\limits_{|x|=r} dS_x \frac{\varphi\left(\frac{|x|}{a},x\right)}{4\pi a^2|x|} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\left(\frac{|x|}{a},x\right)}{4\pi a^2|x|} = \int\limits_{\mathbb{R}^4} dtdx\ \varphi(t,x)\frac{\delta\left(t-\frac{|x|}{a}\right)}{4\pi|x|a^2} =< \frac{\delta\left(t-\frac{|x|}{a}\right)}{4\pi|x|a^2}, \varphi(t,x) >$$

*Итого получаем ответ в пространстве обобщенных функций(by bashka)*

$$\mathcal{E}(t,x) = \frac{\delta\left(t-\frac{|x|}{a}\right)}{4\pi|x|a^2}$$

*Докажем теперь лемму про Фурье образ дельта функции на сфере. Будем двигаться от ответа, так можно потому что Фурье преобразование взаимооднозначно. Пишем для любой пробной*

$$< F\left[\frac{\sin|x|k}{|x|}\right], \varphi >=< \frac{\sin|x|k}{|x|}, F[\varphi] >= \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\ \frac{\sin|x|k}{|x|} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\ e^{i(x,y)}\varphi(y) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|x|\leqslant R} dx\ \frac{\sin|x|k}{|x|} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\ e^{i(x,y)}\varphi(y)$$

*Подынтегральная функция*

$$\frac{\sin|x|k}{|x|}\ e^{i(x,y)}\ \varphi(y) \in \mathbb{L}_1\left[y\in\mathbb{R}^3,\ |x|\leqslant R\right]$$

*Поэтому используем чудесную теорему Фубини и меняем местами интегралы*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy \int\limits_{|x|\leqslant R} dx\ \frac{\sin|x|k}{|x|}\ e^{i(x,y)}\varphi(y)$$

*Как обычно переходим к сферическим координатам в интеграли по шару и интегрируем. Получаем (используя формулы для косинуса суммы и разности)*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\ \varphi(y)\frac{2\pi}{|y|}\int\limits_0^R dr\ 2\sin(|x|k)\sin(|y|r) = 2\pi \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\ \frac{\varphi(y)}{|y|}\left(\frac{\sin R(k-|y|)}{k-|y|} - \frac{\sin R(k+|y|)}{k+|y|}\right)$$

*Рассмотрим второе слагаемое, у которого подынтегральная функция абс. интегр*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\ \frac{\varphi(y)}{|y|}\frac{\sin R(k+|y|)}{k+|y|}$$

*Введем обозначение*

$$f(\rho) = \rho \int\limits_{|y|=1} \varphi(\rho y)dS_y \in \mathbb{L}_1[0,\infty] \cap C^\infty[0,\infty]$$

*Тогда*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_0^\infty d\rho\ f(\rho)\frac{\sin R(k+\rho)}{k+\rho} = \int\limits_k^\infty dt f(t-k)\frac{\sin tR}{t}$$

*Подынтрегральная функция мажорируется абс. интегрлремой f, поэтому по теореме Римана об осциляции этот интеграл стремится к нулю.*
*Рассмотрим теперь первое слагаемое*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\ \frac{\varphi(y)}{|y|}\frac{\sin R(|y|-k)}{|y|-k}$$

*Проводя те же рассуждения, что и с первым слагаемым*

$$\int\limits_0^\infty d\rho f(\rho)\frac{\sin R(\rho-k)}{\rho-k}=\int\limits_{-k}^\infty dtf(t+k)\frac{\sin Rt}{t}=\int\limits_{-k}^k dtf(t+k)\frac{\sin Rt}{t}+\int\limits_k^\infty dtf(t+k)\frac{\sin Rt}{t}$$

*Второй интеграл обнуляется в пределе по теорема Римана, как и в прошлый раз (подынтегральная функция мажорируется абс. интегрируемой бла бла бла). Рассмотрим первый интеграл, добавим и вычтем* $f(k)$

$$\int\limits_{-k}^k dtf(t+k)\frac{\sin Rt}{t}=\int\limits_{-k}^k dt(f(t+k)-f(k))\frac{\sin Rt}{t}+\int\limits_{-k}^k dtf(k)\frac{\sin Rt}{t}$$

*Здесь в первом интеграле*

$$\left|\frac{f(t+k)-f(k)}{t}\right|\leqslant\max_{[-k,k]}f^{'}$$

*Поскольку производная тоже абс. интегр на* $[-k,k]$, *то по теореме Римана этот интеграл тоже обнуляется в пределе* $R\to\infty$. *Что остается это*

$$\int\limits_{-k}^k dtf(k)\frac{\sin Rt}{t}=f(k)\int\limits_{-kR}^{kR}dz\frac{\sin z}{z}\to\pi f(k)=\frac{\pi}{k}\int\limits_{|x|=k}\varphi(x)dS_x$$

*Отсюда получаем*

$$F[\delta_k(y)](x)=\frac{4\pi k\sin k|x|}{|x|}$$

**13. 1) Формула Кирхгоффа решения обобщённой задачи Коши для однородного волнового уравнения в $S'(\mathbb{R}^4)$ при начальных условиях медленного роста. 2) Достаточные условия, при которых обобщёное решение становится классическим.**

*Формулировка: 1)*

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|z-x|=at} u_0(z)dS_z\right) + \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|z-x|=at} u_1(z)dS_z$$

*Для любых абсолютно интегрируемых функций медленного роста $u_0(x)$ и $u_1(x)$ (Интегрирование по поверхности).*
*2) $u_0(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$ и $u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$*

*Идея доказательства:*
*1) из 2 более простых задач - с одним однородным условием.*
*2) из непрерывности интеграла*

*Доказательство:*
*Я не вижу смысла его тут приводить, потому что оно есть в лекциях Константинова на страницах 339-352. А любые сокращения могут привести к потере смысла.*

*Указатель хода решения:*
*1) свертка с функцией Грина 339-340*
*2) анализ правой части свертки(принадлежность к $S(\mathbb{R}^4)$) 341-342*
*3) доказательство того, что интеграл по поверхности можно вынести из свертки(с введением и доказательством леммы) 343-346*
*4) свертка с производной функциии Грина 347*
*5) решение 1 задачи с однородным вторым условием 348*
*6) решение 2 задачи с однородным первым условием 349-351*
*7) вид при выполнении условия для классичности 352*

## 14. Сопряжённый оператор линейного оператора в гильбертовом пространстве. Область определения сопряжённого оператора. Теорема Фредгольма о связи множества значений линейного оператора и ядра его сопряжённого. Теорема о связи графиков линейного оператора и его сопряжённого.

*Предварительно разберём две теоремы, которые будут использоваться в дальнейшем. На экзамене первую из них доказывать точно не будет необходимости, вторую с какой-то вероятностью в этом вопросе смогут спросить, для введения основных определений по билету пользуемся следствием из второй теоремы. Так что эти теоремы упоминаем, формулируем, пользуемся ими, а доказываем только если очень попросят.*

**Теорема.** *(Рисса об ортогональном разложении, без доказательства) Пусть $L \subseteq \mathcal{H}$ - замкнутое подпространство. Тогда $L \oplus L^{\perp} = \mathcal{H}$*

**Теорема.** *(Рисса, Фреше) $\forall$ лин. и непр. $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \quad \exists!\, h_\varphi \in \mathcal{H} : \forall f \in \mathcal{H} \quad \varphi(f) = (f, h_\varphi)$ и верно $\forall$ лин. и непр. $\varphi, \psi : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \;\; h_{\varphi+\psi} = h_\varphi + h_\psi$ и $\forall \alpha \in \mathbb{C} \;\; h_{\alpha\varphi} = \overline{\alpha} h_\varphi$.*

*Доказательство.* Рассматриваем $L = \ker\varphi = \{f \in \mathcal{H} | \varphi(f) = 0\}$. $L$ - подпространство в $\mathcal{H}$. Так как $\varphi$ непр. $\Rightarrow L = \ker\varphi$ замкнуто в $\mathcal{H}$ (возьмём точку прикосновения множества $L$ и подберем последовательность Гейне из ядра, сходящуюся к ней. Все значения образов будут нули, значит, и предел будет нулевой, то есть точка прикосновения принадлежит $\ker\varphi$). Таким образом выполняются условия теоремы Рисса об ортогональном разложении и можно записать $\ker\varphi \oplus (\ker\varphi)^{\perp} = \mathcal{H}$. Далее есть две возможности:

1. $\ker\varphi = \mathcal{H} \quad \Rightarrow \forall f \in \mathcal{H}$ возьмем $h_\varphi = 0$.
2. $\ker\varphi \neq \mathcal{H} \Rightarrow \exists g \in (\ker\varphi)^{\perp} \setminus \{0\}$. Тогда $\forall f \in \mathcal{H}$ имеем $f = \underbrace{\frac{\varphi(f)}{\varphi(g)} g}_{\in (\ker\varphi)^{\perp}} + \underbrace{(f - \frac{\varphi(f)}{\varphi(g)} g)}_{\in \ker\varphi}$. Отсюда $(f, g) = \frac{\varphi(f)}{\varphi(g)}(g, g) \Rightarrow$

   $\varphi(f) = (f, \frac{\overline{\varphi(g)} g}{||g||^2})$. Итак, по полученному нами $g \in (\ker\varphi)^{\perp}$ удалось построить требуемый в условии теоремы $h_\varphi = \frac{\overline{\varphi(g)}}{||g||^2} g \in \mathcal{H}$.

Осталось доказать единственность найденного вектора. Пускай мы нашли второй вектор $\widetilde{h_\varphi} \in \mathcal{H}$: $\forall f \in \mathcal{H} \;\; \varphi(f) = (f, h_\varphi) = (f, \widetilde{h_\varphi}) \Rightarrow \forall f \in \mathcal{H} \;\; (f, h_\varphi - \widetilde{h_\varphi}) = 0$. В качестве $f$ возьмем $f = h_\varphi - \widetilde{h_\varphi}$. Тогда получаем $||h_\varphi - \widetilde{h_\varphi}||^2 = 0 \Rightarrow h_\varphi = \widetilde{h_\varphi}$, то есть единственность доказана. Теперь получим формулы для $h_{\varphi+\psi}$ и $h_{\alpha\varphi}$. $\forall f \in \mathcal{H} \;\; (\varphi + \psi)(f) = (f, h_{\varphi+\psi}) = \varphi(f) + \psi(f) = (f, h_\varphi + h_\psi)$, отсюда по свойству единственности и получаем $h_{\varphi+\psi} = h_\varphi + h_\psi$. Наконец $(\alpha\varphi)(f) = (f, h_{\alpha\varphi}) = \alpha\varphi(f) = \alpha(f, h_\varphi) = (f, \overline{\alpha} h_\varphi) \Rightarrow h_{\alpha\varphi} = \overline{\alpha} h_\varphi$

□

***Следствие****: Пусть $L \subset \mathcal{H}$ - подпространство. Тогда $\forall$ лин. и непр. $\varphi : L \to \mathbb{C} \quad \exists!\, h_\varphi \in \overline{L} : \forall f \in L \quad \varphi(f) = (f, h_\varphi)$ и верно $\forall$ лин. и непр. $\varphi, \psi : L \to \mathbb{C} \;\; h_{\varphi+\psi} = h_\varphi + h_\psi$ и $\forall \alpha \in \mathbb{C} \;\; h_{\alpha\varphi} = \overline{\alpha} h_\varphi$*

*Доказательство.* $\forall$ лин. и непр. $\varphi : L \to \mathbb{C} \quad \exists!$ лин. и непр. $\psi : \overline{L}. \to \mathbb{C}$. Это утверждение вряд ли придется доказывать на экзамене. Покуда у меня первый в списке из билетов про операторы, приведу упорядоченно леммы, которые вводил Константинов с самого начала и доведу их до доказательства нашего утверждения.

**Лемма.** *$\varphi : L \to \mathbb{C}$ - линейный функционал. Тогда $\varphi$ непрерывен на $L \Leftrightarrow \exists C_\varphi > 0 : |\varphi(f)| \leqslant C_\varphi ||f|| \quad \forall f \in L$. То есть непрерывность линейного функционала в нашем случае равносильна его липшицевости.*

*Доказательство.* Справа налево утверждение очевидно, ведь из липшицевости непрерывность гарантирована. $|\varphi(f) - \varphi(g)| = |\varphi(f - g)| \leqslant C_\varphi ||f - g|| \leqslant \varepsilon$, если $||f - g|| \leqslant \frac{\varepsilon}{C_\varphi + 1}$, получили даже больше чем непрерывность - равномерную непрерывность. Теперь доказываем слева направо. $\varphi$ непр. в нуле $\Rightarrow \exists\, \delta > 0\, \forall f \in L : ||f|| \leqslant \delta \Rightarrow |\varphi(f)| \leqslant 1. \Rightarrow \forall g \in L \setminus \{0\}$ рассмотрим $f = \delta \frac{g}{||g||} \Rightarrow ||f|| \leqslant \delta,\; f \in L$. Тогда $|\varphi(\delta \frac{g}{||g||})| \leqslant 1 \Rightarrow |\varphi(g)| \leqslant \frac{||g||}{\delta}$, то есть для ненулевых $g$ липшицевость обнаружена. Если $g = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0 \leqslant \frac{||0||}{\delta_\varphi}$. Получили искомую липшицевость. □

**Лемма.** *Пусть $L \subset \mathcal{H}$ - подпространство, $\varphi : L \to \mathbb{C}$ - линейный и непрерывный функционал. Тогда $\exists!\, \psi : \overline{L} \to \mathbb{C}$: $\psi$ линеен и непрерывен и $\psi|_L = \varphi$. (процедуру построения $\psi$ называем продолжением функционала на замыкание по непрерывности).*

*Доказательство.* $\forall f \in \overline{L} \quad \exists f_n \in L : f_n \overset{||\cdot||}{\to} f$ . Дальше смотрим на $\varphi(f_n)$. Расмотрим $|\varphi(f_n)-\varphi(f_m)|=|\varphi(f_n-f_m)|\leqslant C_\varphi||f_n-f_m||$. Норма разности $||f_n-f_m||$ стремится к нулю при устремлении индексов к $\infty$, тогда последовательность $\varphi(f_n)$ фундаментальная в $\mathbb{C}$ числовая последовательность. Следовательно, по критерию Коши для последовательностей в $\mathbb{C}$ $\quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(f_n) = \psi(g)$. Формально $\psi$ зависит не только от $g$, но и от выбора последовательностей $f_n$, но в действительности от выбора последовательности $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g \in \overline{L}$ не зависит, сразу это докажем. Пусть $h_n \in L \to g$, $f_n \in L \to g \in \overline{L}$, $\Rightarrow$ $|\varphi(h_n)-\varphi(f_n)|=|\varphi(h_n-f_n)|\leqslant C_\varphi||h_n-f_n||\to 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(h_n) = \lim\limits_{n\to}\varphi(f_n) = \psi(g) \in \mathbb{C}$. $\psi$ - продолжение $\varphi$ по непрерывности с $L$ на $\overline{L}$. Получим, что $\psi\big|_L = \varphi$. $\forall g \in L \Rightarrow f_n = g\, \forall n$. $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(f_n) = \psi(g) = \varphi(g)$.

Осталось доказать, что $\psi$ будет непрерывен и линеен на $\overline{L}$. Возьмем $\forall f, g \in \overline{L}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \exists f_n \in L : f_n \overset{||\cdot||}{\to} f$, $\exists g_n \in L : g_n \overset{||\cdot||}{\to} g \Rightarrow \alpha f_n + \beta g_n \overset{||\cdot||}{\to} \alpha f + \beta g$. $\psi(\alpha f+\beta g) = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi(\alpha f_n+\beta g_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha\varphi(f_n)+\beta\varphi(g_n) = \alpha\psi(f)+\beta\psi(g)$, так получили, что $\psi$ линеен на замыкании $\overline{L}$. Чтобы доказать его непрерывность, отыщем для него константу Липшица. Так как $\varphi$ линеен и непрерывен на $L$, то $\exists C_\varphi > 0 : |\varphi(f)|\leqslant C_\varphi||f|| \quad \forall f \in L$. Эта же $C_\varphi$ годится как константа Липшица для $\psi$: $\forall g \in \overline{L}\ \exists f_n \in L : f_n \overset{||\cdot||}{\to} g \Rightarrow |\psi(g)|=\lim\limits_{n\to\infty}|\varphi(f_n)|$, а $|\varphi(f_n)|\leqslant C_\varphi||f_n||\to C_\varphi||g||$. $|||f_n||-||g|||\leqslant ||f_n-g||\to 0$. Тогда $\psi(g) \leqslant C_\varphi||g||$. Следовательно $\psi : \overline{L} \to \mathbb{C}$ линеен и непрерывен. $\square$

Ну теперь-то мы стопудов не стесняемся сказать на экзамене, что $\forall$ лин. и непр. $\varphi : L \to \mathbb{C} \quad \exists! \quad h_\varphi \in \overline{L} : \quad \forall f \in L \quad \varphi(f) = (f, h_\varphi)$ и верно $\forall$ лин. и непр. $\varphi, \psi : L \to \mathbb{C} \quad h_{\varphi+\psi} = h_\varphi + h_\psi$ и $\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad h_{\alpha\varphi} = \overline{\alpha} h_\varphi$. Теперь посмотрим на $\overline{L}$. Это - замкнутое подпространство в $\mathcal{H}$. Само $\mathcal{H}$ полно, тогда $\overline{L}$ полно как замкнутое в полном. Так что $\overline{L}$ - тоже гильбертово. Тогда мы для этого $\overline{L}$ и для линейного непрерывного функционала $\psi$ запишем утверждение теоремы Рисса-Фреше: $\exists!\ h_\psi \in \overline{L} : \quad \psi(f) = (f, h_\psi) \quad \forall \psi \in \overline{L}$. Вспомним, что $\psi\big|_L = \varphi$, тогда на элементах $\forall f \in L$ эта формула будет выглядеть так $\varphi(f) = (f, h_\psi)$. Вот этот единственный $h_\psi \in \overline{L}$ и есть то, что мы искали как $h_\varphi$ при формулировке задачи. Свойства $h_\psi$ при суммировании функционалов и умножении на комплексные числа доказываются как и раньше для всего $\mathcal{H}$. $\square$

*Пусть $A : D(A) \to \mathcal{H}$ - линейный оператор. Желаем определить $A^*$ таким образом, чтобы было верно $(Af, g) = (f, A^*g) \ \ \forall f \in D(A) \ \ \forall g \in D(A^*)$. Для этого определим сначала, что такое $D(A^*)$.*

**Определение.** $D(A^*) = \{g \in \mathcal{H} | \forall f \in D(A) \to (Af, g) \in \mathbb{C}\} \ \Leftrightarrow\ \exists C_g > 0 : \ \forall f \in D(A) \quad |(Af, g)|\leqslant C_g||f||$

*То есть мы желаем, чтобы действие $f \to (Af, g)$ было непрерывным. Определенное таким образом $D(A^*)$ - линейное подпространство в $\mathcal{H}$, т.к. $0 \in D(A^*)$ с $C_0 = 1$ и $\forall g, h \in D(A^*), \alpha, \beta \in \mathbb{C}|(Af, g)|\leqslant |\alpha|(Af, g)+|\beta|(Af, h) \leqslant (|\alpha|C_g + |\beta|C_h)||f||$, то есть нашлась константа Липшица $C_{\alpha g+\beta h} = (|\alpha|C_g + |\beta|C_h)$, значит, $\alpha g + \beta h \in D(A^*)$. Теперь нам понадобится следствие из теоремы Рисса-Фреше. Мы имеем линейный и непрерывный функционал $f \to (Af, g)$ на $D(A^*)$. Значит, $\exists!\ h_g \in \overline{D(A)} : \quad \forall f \in D(A) \quad (Af, g) = (f, h_g)$. Тем самым мы подготовили почву для определения.*

**Определение.** *Сопряженным оператором $A^*$ называется $A^* : \mathrm{D}(A^*) \to \overline{\mathrm{D}(A)} \subseteq \mathcal{H}$ такой что $\forall g \in D(A^*) \quad A^*g = h_g$. При этом по определению $\forall f \in \mathrm{D}(A), \quad \forall g \in \mathrm{D}(A^*)(Af, g) = (f, A^*g)$*

**Теорема.** *(Фредгольма) Пусть $A : D(A) \to \mathcal{H}$ линейный оператор. Тогда $\ker A^* = (\Im A)^\perp$.*

*Доказательство.* $\forall g \in \ker A^* \Leftrightarrow \begin{cases} g \in \mathrm{D}(A^*), \\ A^*g = 0 \end{cases}$. Из записанных условий следует $\forall f \in \mathrm{D}(A) \quad (Af, g) = (f, A^*g) = (f, 0) = 0$. Поставим теперь задачу наоборот - пусть есть условие $\forall f \in \mathrm{D}(A) \quad (Af, g) = 0$, можно ли выяснить, что $g \in \mathrm{D}(A^*)$? Оказывается, можно, покажем это: пусть имеем $g \in \mathcal{H}$ такой, что $\forall f \in \mathrm{D}(A) \quad (Af, g) = 0$. Тогда строим функционал $\forall f \in \mathrm{D}(A) \quad f \to (Af, g) = 0$. Этот функционал получился непрерывен на $\mathrm{D}(A)$, так как липшицев с $C_g = 1$. Значит, к этому линейному и непрерывному функционалу мы можем предъявить сопряженный $A^*$, причем $g \in \mathrm{D}(A^*)$. Сведем результаты: $\forall f \in \mathrm{D}(A) \begin{cases} g \in \mathcal{H}, \\ (Af, g) = 0, \\ \forall f \in D(A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g \in \mathrm{D}(A^*), \\ (Af, g) = (f, A^*g) = 0 \end{cases}$

Последнее равенство (красное) выполняется $\forall f \in \mathrm{D}(A)$, значит, $A^*g = 0$, то есть $g \in \ker A^*$. Но исходили мы из того, что $\forall f \in \mathrm{D}(A) \quad (Af, g) = 0$, а это можно записать как $g \in (\Im A)^\perp$ ($\Im A = \{Af, f \in \mathrm{D}(A)\}$). Так мы и выяснили, что $\ker A^* = (\Im A)^\perp$. $\square$

**Теорема.** *(о связи графиков линейного оператора и его сопряженного) Пусть $A : D(A) \to \mathcal{H}$ линейный оператор. Тогда $\mathrm{Gr}A^* = (V\mathrm{Gr})^\perp \cap (\mathcal{H} \times \overline{\mathrm{D}(A)})$.*

*Доказательство.* Будем последовательно определять понятия, которые нам потребуются.

**Определение.** *$A : D(A) \to \mathcal{H}$ оператор, тогда* $\mathrm{Gr}A = \{\begin{pmatrix} f \\ Af \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : \quad f \in \mathrm{D}(A)\}$

Пространство $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ - это пространство столбцов из элементов $\mathcal{H}$ по 2 элемента. На этом пространстве вводится скалярное произведение по формуле: $\left(\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = (\varphi, f)_{\mathcal{H}} + (\psi, g)_{\mathcal{H}}$. Квадрат нормы элемента $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ тогда оказывается суммой квадратов норм элементов из столбцов. $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ с такой эвклидовой нормой полно. $\mathrm{Gr}A \subset \mathcal{H}\times\mathcal{H}$, причем $GrA$ - подпространство.
Будем теперь рассматривать график сопряжённого оператора.
$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \in \mathrm{Gr}A^* \Leftrightarrow \begin{matrix} g \in \mathrm{D}(A^*) \\ h \in \overline{\mathrm{D}(A)} \text{ вспоминаем теорему Рисса-Фреше, куда погружен } h_\varphi \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} g \in \mathrm{D}(A^*), \quad h \in \overline{\mathrm{D}(A)} \\ \forall f \in \mathrm{D}(A) \ \ (Af, g) = (f, h) \end{matrix} \Leftrightarrow$
Чтобы продолжить цепочку эквивалентных утверждений, заметим, что из $\forall f \in \mathrm{D}(A) \ \ (Af, g) = (f, h)$ и $h \in \overline{\mathrm{D}(A)}$ автоматически следует $g \in \mathrm{D}(A^*)$ по определению. Действительно, ведь $(Af, g) = (f, h)$ линейно и непрерывно (в правой части нет $A$ и $g$). (follow the red bracket)

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} h \in \overline{\mathrm{D}(A)} \\ \forall f \in \mathrm{D}(A) \ \ (Af, g) = (f, h) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall f \in \mathrm{D}(A) \ \ (-Af, g) + (f, h) = 0 \\ h \in \overline{\mathrm{D}(A)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall f \in \mathrm{D}(A) \quad \left(\begin{pmatrix} -Af \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = 0 \\ h \in \overline{\mathrm{D}(A)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

Теперь определим оператор $\mathrm{V} : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathcal{H}\times\mathcal{H}$, который переставляет элементы в столбцах местами и к элементу, который появился в 1 позиции, приписывает минус. $\begin{pmatrix} f \\ Af \end{pmatrix} \overset{\mathrm{V}}{\to} \begin{pmatrix} -Af \\ f \end{pmatrix}$. С помощью этого оператора, как видно, очень удобно выразить сомножитель в полученном нами скалярном произведении через график оператора $A$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall f \in \mathrm{D}(A) \quad \left(\mathrm{V}\begin{pmatrix} f \\ Af \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = 0 \\ h \in \overline{\mathrm{D}(A)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \in (\mathrm{V}\mathrm{Gr}A)^\perp \cap (\mathcal{H} \times \overline{\mathrm{D}(A)}).$$ □

***Замечание:*** *Введенный в доказательстве оператор* V *обладает свойствами:*

- *Линеен на $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$*
- $\mathrm{V}^2 = -\mathrm{I}$, $\mathrm{V}^{-1} = -\mathrm{V}$ *(левый и правый обратные)*
- *Изометричен* $\left\|\mathrm{V}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = \left\|\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ *(изометрический изоморфизм)*

## 16. Неравенство Фридрихса для функции $f \in C^1(\bar{G})$ и выпуклой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно–гладкой границей. Задача Дирихле в круге $K \subset \mathbb{R}^2$ для замыкания оператора Лапласа $\Delta : C^2(\bar{K}) \longrightarrow \mathbb{L}_2(K)$, существование и единственность ее решения.

**В билете используются равенство Парсеваля и теорема Бетто-Леви** *добавлю их формулировки сюда попозже*

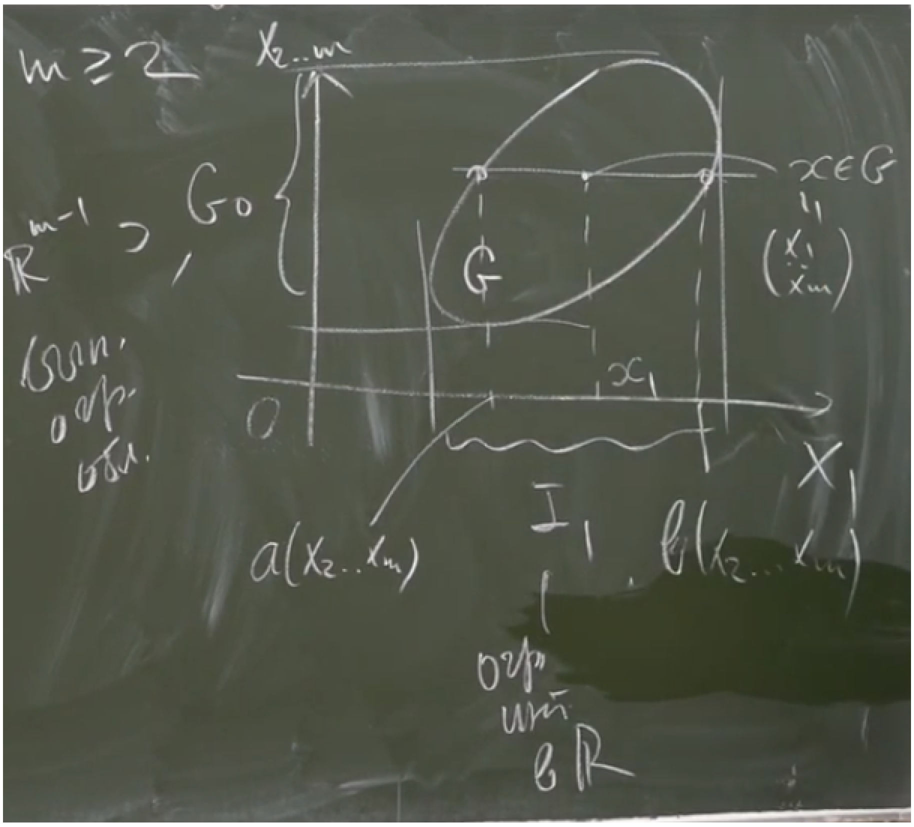
**Неравенство Фридрихса** *$G \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченное, выпуклое множество с кусочно-гладкой границей $\partial G$. Пусть $f \in C^1(\bar{G})$ и $f|_{\partial G}= 0$. Тогда*

$$\int\limits_G |f|^2 \leqslant (diamG)^2 \int\limits_G |\nabla f|^2$$

*Или в терминах $(L)_2$-нормы*

$$||f||_{\mathbb{L}_2(G)} \leqslant (diamG)||\nabla f||_{\mathbb{L}_2(G)}$$

*Докажем для $m \geqslant 2$, в случае $m = 1$ доказательство тривиально. Рассмотрим $x \in G$. $I_1$ — проекция $G$ ось $x_1$, а $G_0$ на оставшееся подпространство $\mathbb{R}^{m-1}$. При заданых $(x_2 \dots x_m)^T \in G_0$ в силу выпуклости $G$ $x_1 \in [a(x_2, \dots, x_m), b(x_2, \dots, x_m)] \subset I$, как изображено.*




*По Ньютону-Лейбницу и из-за того, что $f$ на границе ноль*

$$f(x) = f(x) - f(a(x_2, \dots, x_m)) = \int\limits_{a(x_2,\dots,x_m)}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x_2, \dots, x_m)\, dt$$

$$|f(x)| \leqslant \int\limits_{a(x_2,\dots,x_m)}^{x_1} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x_2, \dots, x_m)\right| dt \leqslant \int\limits_{a(x_2,\dots,x_m)}^{b(x_2,\dots,x_m)} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x_2, \dots, x_m)\right| dt \leqslant \sqrt{b-a}\sqrt{\int\limits_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x_2, \dots, x_m)\right|^2 dt}$$

*Здесь третье неравенство это Коши-Буняковскй. В силу того, что $|\frac{\partial f}{\partial x_1}| \leqslant |\nabla f|$, а $b(x_2, \dots, x_m) - a(x_2, \dots, x_m) \leqslant |I_1|$*

$$|f(x)|^2 \leqslant |I_1| \int\limits_{a(x_2,\dots,x_m)}^{b(x_2,\dots,x_m)} |\nabla f(t, x_2, \dots, x_m)|^2\, dt$$

*Интегрируем по области $G$*

$$\int\limits_G |f(x)|^2\, dx \leqslant |I_1| \int\limits_G \int\limits_{a(x_2,\dots,x_m)}^{b(x_2,\dots,x_m)} |\nabla f(t, x_2, \dots, x_m)|^2 \, dt\, dx \leqslant |I_1| \int\limits_{I_1} dx_1 \int\limits_{G_0} dx_2 \dots dx_m \int\limits_{a(x_2,\dots,x_m)}^{b(x_2,\dots,x_m)} |\nabla f(t, x_2, \dots, x_m)|^2 \, dt$$

*Проинтегрировав по $x_1$ и оценивая $|I_1|\leqslant DiamG$ получаем*

$$\int\limits_G |f(x)|^2\, dx \leqslant (diamG)^2 \int\limits_G |\nabla f(x)|^2\, dx$$

**Задача Дирихле для замыкания оператора Лапласа в круге**

$$\begin{cases} \bar{\Delta} u = 0, u \in D(\bar{\Delta}) \\ u|_{\partial K_R} = v \in \mathbb{L}_2(K_R) \end{cases}$$

*Это означет, что* $\exists\ u(N) \in D(\Delta) : \begin{cases} u(N) \xrightarrow{\mathbb{L}_2(K_R)} u \\ \Delta u(N) \xrightarrow{\mathbb{L}_2(K_R)} 0 \end{cases}$ *при* $N \to \infty$ *и* $||u(r, \bullet) - v(\bullet)||_{\mathbb{L}_2(K_R)} \to 0$ *при* $r \to R$.

*Рассмотрим следующие суммы*

$$u(N) = \sum_{n=-N}^{N} u_n(r) e^{in\varphi}$$

$$v(N) = \sum_{n=-N}^{N} v_n e^{in\varphi}$$

*Тогда $u(N)$ сойдется к решению, если*

$$\begin{cases} \Delta u(N) \xrightarrow{N \to \infty} 0 \\ u(N)|_{\partial K_R} = v(N) \end{cases}$$

*Покажем, что эти условия выполняются при* $u_n = v_n \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|}$. *Действительно* $\forall n \in N$ *справедливо*

$$\Delta(v_n \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{in\varphi}) = 0$$

*Теперь докажем сходимость к $u$. Для начала покажем, что*

$$u = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{in\varphi} \in \mathbb{L}_2(K_R)$$

*В силу равенства Парсеваля и теоремы Бетто-Леви*

$$\int\limits_{K_R} |u^2| = \int\limits_0^R dr\, r \int\limits_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|^2\, d\varphi = \int\limits_0^R dr\, r \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2 2\pi = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{N}} |v_n|^2 \int\limits_0^R r \left(\frac{r}{R}\right)^{2|n|} dr \leqslant \frac{R^2}{2} ||v||_{\mathbb{L}_2(K_R)} < +\infty$$

$$||u - u(N)||_{\mathbb{L}_2(K_R)} = \sum_{n > N} |v_n|^2 \int\limits_0^R r \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} dr \to 0$$

*В силу сходимости $\sum_{n \in \mathbb{N}} |v_n|^2$. Таким образом видим, что предъявленное и является решением.*

**Единственность этого решения** *Пусть решения два – $u$ и $w$. Тогда по определению $\exists$ такие сходящиеся к ним последовательности $u(N) \in C^2(\bar{K}_R)$ и $w(N) \in C^2(\bar{K}_R)$, что*

$$\begin{cases} \Delta u(N) \xrightarrow{N\to\infty} 0 \\ u(N)|_{\partial K_R} = v(N) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta w(N) \xrightarrow{N\to\infty} 0 \\ w(N)|_{\partial K_R} = v(N) \end{cases}$$

*Рассмотрим их разность $q(N) = u(N) - w(N)$*

$$\begin{cases} q(N) \xrightarrow{\mathbb{L}_2(K_R)} u - w \\ \Delta q(N) \xrightarrow{\mathbb{L}_2(K_R)} 0 \\ q(N)|_{\partial K_R} = 0 \end{cases}$$

*Воспользуемся формулой Грина*

$$\int\limits_{K_R} \Delta(q(N))q(\bar{N}) = \int\limits_{\partial K_R} \frac{\partial q(N)}{\partial n} q(\bar{N}) - \int\limits_{K_R} |\nabla q(N)|^2 = -\int\limits_{K_R} |\nabla q(N)|^2$$

*По этому и еще из-за неравенства Коши-Буняковского*

$$||\nabla(q(N))||_{\mathbb{L}_2(K_R)} = \int\limits_{K_R} |\nabla q(N)|^2 \leqslant \int\limits_{K_R} |\Delta(q(N))||q(\bar{N})| \leqslant ||\Delta(q(N))||_{\mathbb{L}_2(K_R)} ||q(\bar{N})||_{\mathbb{L}_2(K_R)} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

*Тогда по неравенству Фридрихса*

$$||q(N)||_{\mathbb{L}_2(K_R)} \leqslant 2R||\nabla(q(N))||_{\mathbb{L}_2(K_R)} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

*Таким образом $0 \leftarrow q(N) \to u - w$, а значит $u = w$*

**19. Самосопряжённый линейный оператор в гильбертовом пространстве, его плотная определённость, замкнутость и симметричность. Пример несамосопряженногозамкнутого плотно определенного симметричного оператора. Вещественность спектра самосопряженного оператора.**

**Вещественность спектра**

Далее в этом параграфе рассматриваем самосопряжённый оператор $A$.

**Утверждение 5.9.1.** *Справедливы следующие свойства:*
1) $(A(x), x) \in \mathbb{R}$ *для любого* $x \in \mathcal{H}$;
2) *точечный спектр оператора* $A$ *вещественен, т. е.* $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$;
3) *для любых двух различных собственных чисел оператора* $A$ *любые соответствующие им собственные векторы ортогональны;*
4) $\|A^n\| = \|A\|^n$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$, $r(A) = \|A\|$.

**Доказательство.** Свойство 1 следует из равенств

$$(A(x), x) = (x, A(x)) = \overline{(A(x), x)},$$

т. е. мнимая часть $\operatorname{Im}(A(x), x) = 0$. Рассмотрим произвольное собственное число $\lambda \in \sigma_p(A)$ оператора $A$. Пусть $x \in \operatorname{Ker} A_\lambda$ — собственный вектор $A$, соответствующий $\lambda$. Тогда получаем равенства $(A(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda\|x\|^2$. Следовательно, в силу свойства 1 получаем $\lambda = \frac{(A(x),x)}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$, т. е. свойство 2 доказано. Рассмотрим теперь два различных собственных числа

**21. Начально-краевая задача для однородного уравнения Шрёдингера с самосопряжённым линейным оператором в гильбертовом пространстве. Метод Фурье решения этой задачи и критерий её разрешимости. Оператор эволюции.**

**Общий вид постановки начально-краевой задачи:**

*Пусть $P(z)$ - полином степени $N$ (с комплексными коэффициентами), $u(t) \in \mathcal{H}$, $A$ - симметричный оператор над $\mathcal{H}$ , а $\bar{A}$ - его замыкание.*

$$\text{Начально краевая задача: } \stackrel{def}{=} \begin{cases} P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = \bar{A}u(t), \quad t > 0, \quad u(t) \in D(\bar{A}) \\ u(+0) = v_0(t) \in \mathcal{H} \\ u'(+0) = v_1(t) \in \mathcal{H} \\ ... \\ u^{(N-1)}(+0) = v_{N-1} \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{21}$$

***Примечание:*** *задача в том смысле «краевая», что область определения оператора содержит краевые условия, а функции рассматриваются из $D(\bar{A})$; начальные условия здесь - все остальные уравнения системы.*
***Важно***: *производная и предел понимаются в смысле нормы гильбертова пространства:*
*Говорят, что $\exists u'(t) \in \mathcal{H}, t > 0$ : Если существует предел:*

$$\exists \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\|u(t + \Delta t) - u(t)\|}{\Delta t} \stackrel{def}{=} u'(t), \quad t > 0 \tag{22}$$

*В силу этого определения получаются важные свойства производной и её коэффициентов Фурье. Выберем ортогональный базис собственных векторов ССО $\bar{A}$ в $\mathcal{H}$ и разложим $u(t)$ по нему:*

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n u_n(t)$$

*Пусть теперь $\exists u'(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e_n u_n'(t)$. Тогда по определению коэффициентов Фурье и производной получим:*

$$(u_n(t))' = \frac{u_n(t + \Delta t) - u_n(t)}{\Delta t} = \frac{(\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}, e_n)}{(e_n, e_n)} \to \frac{(u', e_n)}{(e_n, e_n)} = u_n'(t), \quad t \to 0$$

*Здесь мы воспользовались непрерывностью скалярного произведения по каждому из сомножителей. Т.е. производная коэфициента Фурье - коэфициент производной. Производные высших порядков определяются аналогично.*

*Замечание: из существования производной следует, что компоненты вектора производной равны продифференцированным компонентам вектора, обратное неверно, и в задачах нужно доказывать, что «кандидат» на решение действительно удовлетворяет определению (22)*

***Методом Фурье*** *называется разложение вектора $u(t)$ на копоненты по базису собственных векторов оператора $\bar{A}$, благодаря этому задача сводится к задаче Коши.*
*Теперь покажем это. Пусть $u(t) \in D(\bar{A}) \stackrel{\text{Равенство Парсеваля}}{\Leftrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^2 |u_n|^2 \|e_n\|^2 < \infty$ решение поставленной задачи. Тогда, т.к. все производные у $u(t)$ имеются, то нетрудно увидеть (в силу вышеуказанного свойства производной), что:*

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = \sum_{n}^{\infty} P\left(\frac{d}{dt}\right)u_n(t)e_n$$

*В то же время воспользуемся тем, что мы разложили векторы по собственным векторам симетричного самосопряженного оператора $\bar{A}$*

$$\bar{A}u(t) = \sum_{n}^{\infty} \lambda_n u_n e_n$$

*Приравнивания оба выражения в силу уравнения (21):*

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u_n(t) = \lambda_n u_n e_n, \quad t > 0$$

*Т.е. мы получили задачу Коши из теории обыкновенных диф. уравнений. Покажем, что остальные уравнения системы (21) являются начальными условиями для этого счетного набора задач Коши:*

$$u^{(k)}(+0) = v_k \overset{def:}{\Leftrightarrow} \lim_{t\to+0}\|u^{(k)}(t) - v_k\| \to 0$$

*Выражение выше можно ослабить, но получить более удобный результат:*

$$\|u^{(k)}(t) - v_k\| > |u_n^{(k)}(t) - (v_k)_n|\|e_n\| > 0$$

*По теореме о двух милиционерах получаем,*

$$u_n^{(k)}(0) = (v_k)_n$$

*Замечание: после решения всех задач Коши, необходимо проверить выполнение всех предположений, которые были сделаны для поиска решения:* $u(t) \in D(\bar{A})$, $\forall k \in \{1, ..N\} \hookrightarrow \exists u^{(k)}(t)$. *Если эти условия выполнены, получим единственность решения, согласно единственности и существованию решения задачи Коши.*

***Уравнение Шредингера***

$$\begin{cases} i\frac{d}{dt}u(t) = \bar{A}u(t), t > 0 \\ u(+0) = v_0 \end{cases}$$

*Воспользуемся методом Фурье и доказанными ранее свойствами:*

$$\begin{cases} i(u_n(t))' = \lambda_n u_n, t > 0 \\ u(+0) = v_0 \end{cases} \quad \to u_n(t) = e^{-i\lambda_n t}(v_0)_n \overset{def}{=} (e^{-it\bar{A}}v_0)_n$$

$$D(e^{-it\bar{A}}) = \mathcal{H}, \quad \|u(t)\| = \|e^{-it\bar{A}}v_0\| = \|v_0\|$$

*Этот оператор называется* ***оператором эволюции****. Последнее равенство очевидно из равенства Парсеваля. Это в свою очередь обозначает, что*

$$u(t) \in D(\bar{A}) \Leftrightarrow v_0 \in D(\bar{A}) \overset{def}{\Leftrightarrow} \sum_n^{\infty}|(v_0)_n|^2|\lambda_n|^2\|e_n\|^2 < +\infty$$

*Это* ***Критерий разрешимости уравнения Шредингера****. Не для каждой начально-краевой он такой. Например, может быть критерий вида*

$$\sum_n^{\infty}|(v_0)_n|^2|\lambda_n|\|e_n\|^2 < +\infty$$

*Замечание: примеры решения других начально-краевых задач есть по ссылке: тык1, тык2*

**22. Собственные числа и собственные функции оператора Лапласа в круговом секторе при однородном граничном условии. Функции Бесселя. Свойство ортогональности и свойства нулей функции Бесселя.**

*Короче, это первые три пункта методички Конста по Бесселям. Но, с другой стороны, это 12 страниц.*
*Проще почитать/распечатать тут*

## 23. Ортогональный базис в пространстве $\mathbb{L}_2(G)$ из собственных функций оператора Лапласа в круговом секторе $G \in \mathbb{R}^2$ при однородном граничном условии.

*Подготовка к билету: 318 - 332 страницы учебника Владимирова*