UMF-exam

DGAP

May 2019

Внимание! Составители не несут никакой ответственности за написанное! Мы попытаемся все перепроверить, но будьте готовы ко всякому. Лучшим решением будет посмотреть все лекции, разобраться со всем там сказанным, а затем уже пользоваться этим файлом. Все, кто взял себе билет и не успел в дедлайн - пидорасы. Все, кто оставляет за собой ошибки, тоже пидорасы.
Примечание для составителей: используйте окружение \paper{номер билета}{формулировка билета}, чтобы автоматически добавить билет в оглавление, выделить ему новую страницу, оформить все билеты одинаковым шрифтом.
Для теорем используйте overleaf guide

Содержание

1. Постановка задачи Коши для гиперболического в заданной области линейного дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Полуклассическое решение решение этой задачи в характеристических переменных, его существование и единственность

Это 3 лекции Конста (2,3 и 5), перед ботанием, удостоверьтесь, что готовы столько проглотить.
Классификация Условие уравнения: $x \in G$; a_{ij}, b_k, c, $f \in C(G)$ и само уравнение:

$$\left(\widehat{L}\right) u(x) = \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + c(x) \right) u(x) = f(x);$$

$u \in C^2(G)$, удовлетворяющая основному уравнению, называется **решением** поставленной задачи. G — некоторая область в $\mathbb{R}^m$
Рассмотрим матрицу $(A(x))_{ij} = a_{ij}$, в общем случае она не является симметричной, но её всега можно сделать такой, в силу равенства смешанных производных ($\widetilde{A}_{ij} = (A_{ij}+A_{ji})/2$, уравнение не изменится) далее будем считать её симметричной, тогда:

- если $\det A = 0$, то уравнение называется **параболическим** в точке
- если $\det A \neq 0$ и A строго знакоопределена (все собственные значения одного знака), то уравнение называется **эллиптическим** в точке
- если $\det A \neq 0$ и A строго знаконеопределена (существуют собственные значения разных знаков), то уравнение называется **гиперболическим** в точке

Если какое-то из условий выполняется во всех точках области, то говорят, что уравнение имеет такой тип в области.
Преобразования основного уравнения смотри тут при гладкой замене в области $G \subset \mathbb{R}^m$. Рассматриваем $\xi = \xi(x)$ – взаимооднозначную функцию, $\xi \in C^2(G)$. И $J = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial(\xi_1,\ldots,\xi_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}$ не выроджена в G. Обозначим $\xi(G) = D \subset \mathbb{R}^m$. Тогда существует $\xi^{-1} = x : D \to G$. Поймем, как преобразуется основное уравнение:

$$u(x) = u(x(\xi)) = v(\xi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial v}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{s,l=1}^{m} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_l \partial \xi_s} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial v}{\partial \xi_s} \frac{\partial^2 \xi_s}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\widehat{L}u(x) = \sum_{i,j}^{m} \sum_{s,l=1}^{m} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_l \partial \xi_s} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial \xi_s} \frac{\partial^2 \xi_s}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k}^{m} \sum_{s=1}^{m} b_k(x) \frac{\partial v}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_i} + c(x(\xi)) v(\xi) =$$
$$= \sum_{s,l=1}^{m} \left(\sum_{i,j}^{m} a_{ij}(x) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_i} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_l \partial \xi_s} + \sum_{s=1}^{m} \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 \xi_s}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k}^{m} b_k(x) \frac{\partial \xi_s}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v}{\partial \xi_s} + c(x(\xi)) v(\xi)$$

Получаем выражения для коэффицентов в новых координатах:

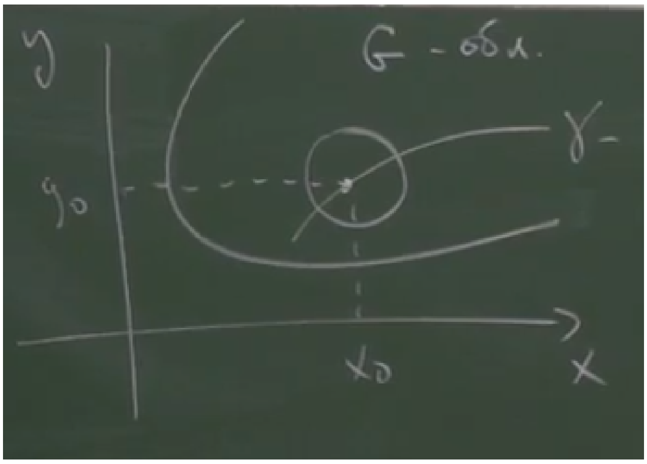
$$\tilde{c}(\xi) = c(x(\xi))$$

$$\tilde{b}_s(\xi) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 \xi_s}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k}^{m} b_k(x) \frac{\partial \xi_s}{\partial x_k}$$

$$\tilde{a}_{sl} = \sum_{i,j}^{m} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \Rightarrow \boxed{\tilde{A} = JAJ^T}$$

Для диагональных элементов A: $\tilde{a}_{ss} = (\nabla_x \xi_s)^T A (\nabla_x \xi_s)$ **Постановка задачи Коши** для гиперболического двумерного уравнения (λ_i разных знаков) из видоса

$$\left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{2} b_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + c(x) \right) u(x) = f(x) \tag{1}$$



Введем обозначения $x_1 = x$, $x_2 = y$. В G рассматриваем задачу Коши с граничными условиями на γ:

$$u|_{\gamma} = u_0 \in C^1(\gamma)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\gamma} = u_1 \in C(\gamma)$$

$$u \in C^2(G\backslash\gamma)\bigcap C^1(G)$$

Не забываем, что все коэффициенты непрерывны. Пусть в точке $X_0 = (x_0, y_0) \in G$: $a_{11} \neq 0$. В силу непрерывности $\exists$ окрестность $U_0 \subset G$, в которой $a_{11} \neq 0$.
Введем $F_i \in C^1(U_0)$ и $\nabla F \neq 0$ в U_0.

Хотим занулить диагональные элементы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Для этого сделаем характеристическую замену. Требуем $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{12} & 0 \end{pmatrix} = JAJ^T \Rightarrow (\nabla F_i)^T A(\nabla F_i) = 0$ для всех i.
$\nabla F_i = \begin{pmatrix} (F_i)'_x \\ (F_i)'_y \end{pmatrix}$. Получаем уравнение

$$a_{11}((F_i)'_x)^2 + 2a_{12}(F_i)'_x(F_i)'_y + a_{22}((F_i)'_y)^2 = 0$$

Предположим, что $(F_i)'_y \neq 0$ в U_0, если это не так, то переобозначим U_0.
Потребуем $A \in C(G)$ для однозначной разрешимости задачи Коши. Тогда мы локально решаем каждый из этих диффуров, получаем два семейства интегральных кривых. По теореме о неявной функции, уравнение $F_i(x, y) = const$ задает в $U_1 \subset U_0$ функцию $y_i = y_i(x)$. Продифференцируя уравнение $F_i(x, y_i(x)) = const$, получаем

$$\frac{dy_i}{dx} = -\frac{(F_i)'_x}{(F_i)'_y}$$

Что дает из решения квадратного уравнения

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

Заменим $X = (x, y)$. Тогда пусть $F_+(X)$ и $F_-(X)$ интегральные кривые этих решений ($i = \{+, -\}$).
Предположим, что $J = (\nabla F)^T = \begin{pmatrix} \nabla(F_+)^T \\ \nabla(F_-)^T \end{pmatrix}$ вырожден в X_1, то есть $\nabla F_+(X_1)$ и $\nabla F_-(X_1)$ - линейно зависимы. То есть $\nabla F_+(X_1) = \lambda \nabla F_-(X_1)$. Тогда из 2 предыдущих уравнений получим:

$$\frac{dy_+}{dx} = -\frac{(F_+)'_x}{(F_+)'_y} = -\frac{\lambda(F_-)'_x}{\lambda\,(F_-)'_y} = -\frac{(F_-)'_x}{(F_-)'_y} = \frac{dy_-}{dx} \Rightarrow a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$$

Но $\det(A) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ (из-за того, что тип гиперболический). Противоречие, значит J невырождено.
Определим **характеристическую замену**:

$$F(X) = \begin{cases} \xi = \xi(X) = F_+(X) \\ \eta = \eta(X) = F_-(X) \end{cases}$$

В характеристических переменных в окрестности $V = V(\xi(X_0), \eta(X_0))$, тогда уравнение запишется как

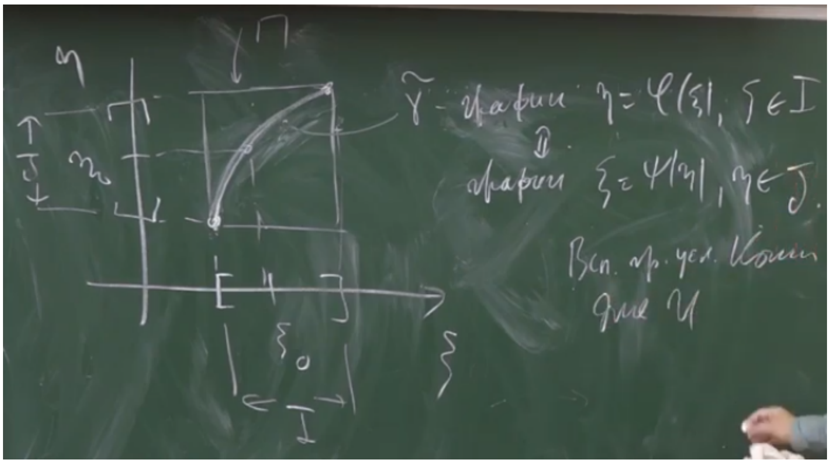
$$2\tilde{a}_{12}v''_{\xi\eta} + \tilde{b}_1 v'_{\xi} + \tilde{b}_2 v'_{\eta} + \tilde{c}v = \tilde{f} \tag{2}$$

Из неперерывности коэффициентов исходного дифура, новые коэффициенты тоже непрерывны в V. тут есть пример задачи
Решение называется <u>**полуклассическим**</u>(термин придуман Констом, будьте осторожны!), если а)$v \in C^1(V)$ и б)$\exists v_{\xi\eta} = v_{\eta\xi} \in C(V)$ и в)удовлетворяет в окрестности V уравнению 2. **Доказательство невырожденности**

замены: Пусть в точке $X_0 = (x_0, y_0) \in G$: $a_{11} \neq 0$. В силу непрерывности $\exists$ окрестность $U_0 \subset G$, в которой $a_{11} \neq 0$. Введем $F \in C^1(U_0)$ и $\nabla F \neq 0$ в U_0. Под действием характеристической замены граница γ перейдет в $\tilde{\gamma}$.

$$\gamma : X_\gamma(t) = \left\{ \begin{pmatrix} x_\gamma(t) \\ y_\gamma(t) \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in T \right\} \Rightarrow \tilde{\gamma} : F(t)_\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_\gamma(t) = \xi(x_\gamma(t), y_\gamma(t)) \\ \eta_\gamma(t) = \eta(x_\gamma(t), y_\gamma(t)) \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in T \right\}$$

где T - числовой интервал. $\tilde{\gamma}$ не должна касаться характеристик.(Почему? - по условию! На самом деле из-за невырожденности J) Следовательно условие не касания характеристик записывается через неравенство нулю производной по параметру t (обозначим точкой над, как будто это производная по времени): $\dot{F}_i(t)_\gamma = \Big(\nabla_x F_i, \dot{X}_\gamma(t) \Big) \neq 0$



Или в нашем случае для 2-мерной задачи

$$\dot{\xi}_\gamma = \xi_x \dot{x}_\gamma + \xi_y \dot{y}_\gamma \neq 0$$

$$\dot{\eta}_\gamma = \eta_x \dot{x}_\gamma + \eta_y \dot{y}_\gamma \neq 0$$

Значит по теореме об обратной функции $\exists I : \xi_0 \in \operatorname{Int} I$ и $\exists J : \eta_0 \in \operatorname{Int} J$ отрезки, на которых функции обратимы.
То есть $\xi = \xi_\gamma(t) \Rightarrow t = \xi_\gamma^{-1}(\xi)$.
Введём $\varphi(\xi) = \eta_\gamma(t) = \eta_\gamma(\xi_\gamma^{-1}(\xi))$.
Единичный вектор нормали к кривой: $n(t) = \begin{pmatrix} -\dot{y}_\gamma(t) \\ \dot{x}_\gamma(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_\gamma^2 + \dot{y}_\gamma^2}}$ $\Rightarrow$гран. условия:

$$\begin{cases} v|_\gamma = v(\xi, \varphi(\xi)) = v_0(\xi) \in C^1(I) \\ u_1 = \frac{\partial u}{\partial n}\big|_\gamma = \frac{\partial u}{\partial(x,y)} n = \frac{\partial u}{\partial(x,y)} \begin{pmatrix} -\dot{y}_\gamma(t) \\ \dot{x}_\gamma(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_\gamma^2 + \dot{y}_\gamma^2}} \end{cases}$$

По теореме о дифференцировании сложной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial(x,y)} = \frac{\partial v}{\partial(\xi,\eta)} \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial v}{\partial(\xi,\eta)} J$$

Подставляя эту замену во второе условие и дифференцируя первое: $v_\xi + v_\eta \varphi'(\xi) = v_0'(\xi)$, получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial(\xi,\eta)} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\xi) \end{pmatrix} = v_0'(\xi) \\ \frac{\partial v}{\partial(\xi,\eta)} J \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_\gamma(t) \\ \dot{y}_\gamma(t) \end{pmatrix} = u_1 \sqrt{\dot{x}_\gamma(t)^2 + \dot{y}_\gamma(t)^2} = w_1(t) = w_1(\xi_\gamma^{-1}(\xi)) \in C(J) \end{cases}$$

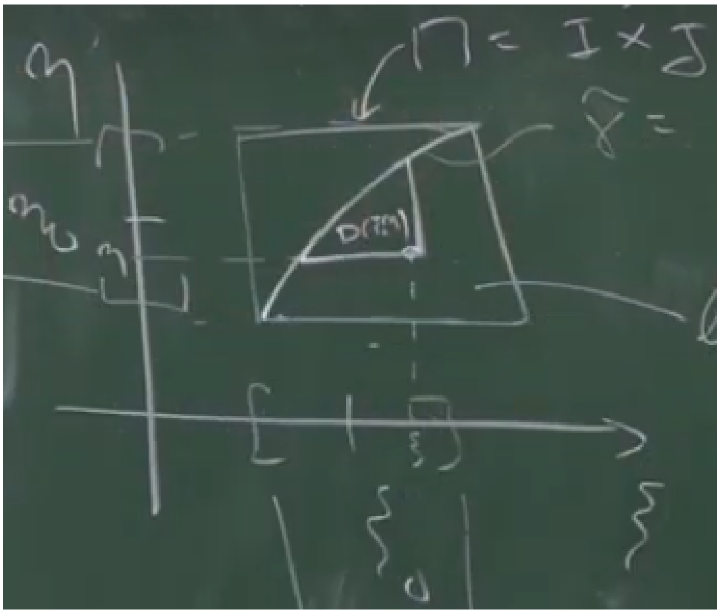
Исследуем линейную зависимость столбцов $\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\xi) \end{pmatrix}$ и $J \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_\gamma(t) \\ \dot{y}_\gamma(t) \end{pmatrix}$.
$\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\xi) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \dot{\xi}_\gamma(t) \\ \dot{\eta}_\gamma(t) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \dot{x}_\gamma(t) \\ \dot{y}_\gamma(t) \end{pmatrix}$ это касательные к $\tilde{\gamma}$ в разных параметризациях, значит $J^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\xi) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \dot{x}_\gamma(t) \\ \dot{y}_\gamma(t) \end{pmatrix}$.
Если они линейно независимы, то v_ξ' и v_η' будут найдены как непрерывные функции.
Если таки зависимы, то

$$\exists \lambda = \lambda(\xi) : J \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\xi) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\xi) \end{pmatrix} \Rightarrow J \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) J^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(\xi) \end{pmatrix} = 0$$

Условие равенства нулю не выполнено так как остальные матрицы невырождены, а:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 > 0$$

Значит такого λ не существует. Следовательно, мы можем разрешить систему, поэтому будем считать, что нам известны граничные условия в терминах характеристических переменных. **Найдем решение**:



$$\begin{cases} v''_{\xi\eta} + d_1 v'_\xi + d_2 v'_\eta + ev = h \\ v(\xi, \varphi(\xi)) = v_0(\xi) \in C^1(I) \\ v'(\xi, \varphi(\xi)) = v_1(\xi) \in C(I) \end{cases}$$

Пусть имеется решение. Возьмем любую $(\xi, \eta) \in (I \times K)\backslash\gamma$. И рассмотрим границу "кривого треугольника"$D(\xi, \eta)$ как на картинке. Проинтегрируем дифур по этой границе:

$$\iint\limits_{D(\xi,\eta)} d\widehat{\xi} d\widehat{\eta}\, v_{\widehat{\xi}\widehat{\eta}} = -\iint\limits_{D(\xi,\eta)} d\widehat{\xi} d\widehat{\eta}\,(d_1 v'_\xi + d_2 v'_\eta + ev - h)$$

Аналогично предыдущему, выразим
$\eta = \eta_\gamma(t) \Rightarrow t = \eta_\gamma^{-1}(\eta)$.
Введём $\psi(\eta) = \xi_\gamma(t) = \xi_\gamma(\eta_\gamma^{-1}(\eta))$. И вспомним, что
$\varphi(\xi) = \eta_\gamma(\xi_\gamma^{-1}(\xi))$

$$\iint\limits_{D(\xi,\eta)} d\widehat{\xi} d\widehat{\eta}\, v_{\widehat{\xi}\widehat{\eta}} = \int\limits_{\psi(\eta)}^{\xi} d\widehat{\xi} \int\limits_{\eta}^{\varphi(\widehat{\xi})} d\widehat{\eta}\, v_{\widehat{\xi}\widehat{\eta}} = \int\limits_{\psi(\eta)}^{\xi} d\widehat{\xi}\left(v_{\widehat{\xi}}(\widehat{\xi}, \varphi(\widehat{\xi})) - v_{\widehat{\xi}}(\widehat{\xi}, \eta)\right) = \int\limits_{\psi(\eta)}^{\xi} v_1(\alpha)\, d\alpha - v(\xi, \eta) + v_0(\psi(\eta))$$

Выражаем $v(\xi, \eta)$ и по сути находим решение:

$$\boxed{v(\xi, \eta) = v_0(\psi(\eta)) + \int\limits_{\psi(\eta)}^{\xi} v_1(\alpha)\, d\alpha + \int\limits_{\psi(\eta)}^{\xi} d\widehat{\xi} \int\limits_{\eta}^{\varphi(\widehat{\xi})} d\widehat{\eta}\,(v'_\xi d_1 + v'_\eta d_2 + ev - h)}$$

Покажем, что решение существует и единственно
Рассмотрим отображение $\Phi : C^1(\Pi) \to C^1(\Pi)$, $\Pi = I \times J$, заменив v на w

$$\Phi(\omega) = v_0(\psi(\eta)) + \int\limits_{\psi(\eta)}^{\xi} v_1(\alpha)\, d\alpha + \int\limits_{\psi(\eta)}^{\xi} d\widehat{\xi} \int\limits_{\eta}^{\varphi(\widehat{\xi})} d\widehat{\eta}\,(\omega'_\xi d_1 + \omega'_\eta d_2 + e\omega - h)$$

Непосредственно дифференцируя, проверяем, что при естественной гладкости параметров для $v = \Phi(\omega)$ $\exists\, v_{\xi\eta} = v_{\eta\xi}$ и справеливо вложение $v \in C^1(\Pi)$. Тогда если существует w такое, что $w = \Phi(w)$, то w будет полуклассическим решением.

Теорема (Принцип сжимающих отображений Банаха (без доказательства))**.** (Z, ρ) – полное метрическое пространство. F – сжимающее отображение, т.е. $\exists\, q \in [0, 1)$ такое что $\rho(F(z_1), F(z_2)) \leqslant q\rho(z_1, z_2)$. Тогда $\exists!\, z^* \in Z$, такое что $F(z^*) = z^*$.

Рассмотрим $\Pi_0 = I_0 \times K_0 \in \Pi$, $I_0 = \psi(K_0)$, $K_0 = \varphi(I_0)$. Введем метрику

$$\rho(v, w) = \max_{\Pi_0}|v - w| + \max_{\Pi_0}|v_\xi - w_\xi| + \max_{\Pi_0}|v_\eta - w_\eta|$$

$(C(\Pi_0), \rho)$ является полным. Покажем, что отображение Φ является сжимающим. Для этого проверяем, что справедливы следующие соотношения.

$$M = \max(\max_{\Pi}|d_1|, \max_{\Pi}|d_2|, \max_{\Pi}|e|)$$

$$|\Phi(w) - \Phi(v)|(\xi, \eta) \leqslant |I_0||K_0|M\rho(w, v)$$

$$|\Phi_\xi(w) - \Phi_\xi(v)|(\xi, \eta) \leqslant |K_0|M\rho(w, v)$$

$$|\Phi_\eta(w) - \Phi_\eta(v)|(\xi, \eta) \leqslant |I_0|M\rho(w, v)$$

Тогда

$$\rho(\Phi(w), \Phi(v)) \leqslant M(|I_0||K_0| + |I_0| + |K_0|)\rho(w, v)$$

Можем подобрать $|I_0|$ и $|K_0|$ так, что отображение будет сжимающим. Тогда решение существует и единственно.

2. Пространства $D(G)$ и $D'(G)$ для открытого множества $G \subseteq \mathbb{R}^m$. Обобщенное дифференцирование в $D'(G)$, теорема о равенстве обобщенных и классических производных порядка не выше N в $D'(G) \cap C^N(G)$.

Очень простой билет с 1 сложной конструкцией.Видеолекция Конста Сначала дадим 100500 определений:

Определение. Носителем непрерывной функции $\varphi(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ называют замыкание множества точек, на котором функция $\varphi(x)$ отлична от нуля. Обозначается $\operatorname{supp}(\varphi)$.

Определение. Пространство финитных (ограниченных) функций

$$C_{\text{фин.}}(\mathbb{R}^m) = \{\varphi \in \mathbb{R}^m \to C : \operatorname{supp}(\varphi) - \text{компакт в } \mathbb{R}^m\}$$

Определение. Пространство пробных функций

$$D(\mathbb{R}^m) = C_{\text{фин.}}(\mathbb{R}^m) \cap C^{\infty}(\mathbb{R}^m)$$

Определение. Мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_M) \in \mathbb{N}_0^M$,

$$\partial^{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_M}\right)^{\alpha_M}, \text{ где } |\alpha| = \sum_{k=0}^{M} \alpha_k$$

Определение. Сходимость в $D(\mathbb{R}^m)$: $\varphi_n \overset{D(R^m)}{\to} \varphi \Leftrightarrow$

1. $\exists K \in \mathbb{R}^m$ - компакт: $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K \ \forall n$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m \ \partial^{\alpha}_{\text{кл.}} \varphi_n \overset{\mathbb{R}^m}{\Longrightarrow} \partial^{\alpha}_{\text{кл.}} \varphi, \ n \to \infty$ или что эквивалентно: $\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left| |\varphi_n^{(p)}(x) - \varphi^{(p)}(x) \right| | = 0$

Определение. Функционалом $f(x)$ над пространством пробных функций D называют правило, которое сопоставляет каждой пробной функции $\varphi(x)$ некоторое комплексное число, обозначают символами $\langle f(x); \varphi(x) \rangle$.

Определение. Функционал $f(x)$ называют линейным, если для любых $\alpha, \beta \in C$ и $\varphi, \psi \in D$ выполняется условие:

$$\langle f(x), \alpha\varphi(x) + \beta\psi(x) \rangle = \alpha \langle f(x), \varphi(x) \rangle + \beta \langle f(x), \psi(x) \rangle$$

Определение. Линейный функционал $f(x)$ называют непрерывным в D, если для любой последовательности основных функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, такой что $\varphi_n(x) \overset{D}{\to} \varphi(x), \ n \to \infty \ \exists \lim_{n\to\infty} \langle f(x), \varphi_n(x) \rangle - \langle f(x), \varphi(x) \rangle = 0$

Определение. $D'(\mathbb{R}^m)$ - множество линейных непрерывных функционалов над $D(\mathbb{R}^m)$

Рассмотрим множество $G \subseteq \mathbb{R}^m$

Определение. Пространство пробных функций на множестве $G \subseteq \mathbb{R}^m$

$$D(G) = \{\varphi \in D(\mathbb{R}^m) : \operatorname{supp}(\varphi) \subset G\}$$

Определение. Сходимость в $D(G)$:

$$\varphi_n \xrightarrow{D(G)} \varphi \Leftrightarrow$$

1. $\exists K \in G$ - компакт: $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K \ \forall n$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m \ \partial^{\alpha}_{\text{кл.}} \varphi_n \overset{G}{\rightrightarrows} \partial^{\alpha}_{\text{кл.}} \varphi, \ n \to \infty$ или что эквивалентно: $\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in G} ||\varphi_n^{(p)}(x) - \varphi^{(p)}(x)|| = 0$

Определение. $D'(G)$ - множество линейных непрерывных функционалов над $D(G)$

Определение. Дифференцирование в $D'(G)$:

$$\forall f \in D'(G), \ \varphi \in D(G), \ \alpha \in \mathbb{N}_0^m$$

обобщенная производная определяется как

$$\langle \partial^{\alpha} f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^{\alpha} \varphi \rangle$$

(Откуда? - пример в $\mathbb{R}$: $(f'(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -(f(x), \varphi'(x)), \varphi \in D$ при условии регулярности f, то есть возможности отождествить функцию функционалом)(дельта функция нерегулярна (сингулярна) и ее нельзя так представлять)

Определение. Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^m$ - открытое множество. Определим оператор

$$L = \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\partial_x^{\alpha(k)}$$

$$\alpha(1), \alpha(2), ..., \alpha(N) \in \mathbb{N}_0^m, a_k \in C^\infty(G)$$

Определение. Определим действие L в $D'(G)$:

$$\forall f \in D'(G), \varphi \in D(G)\ \ \langle Lf, \varphi\rangle = \left\langle f, L'\varphi \right\rangle, \text{ где } L'\varphi = \sum_{k=0}^{M}(-1)^{|\alpha(k)|}\partial^{\alpha(k)}(a_k(x)\varphi(x))$$

Определение. Определим множество локально-интегрируемых функций:

$$\mathrm{Loc}_1 = \{f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C} \mid \int\limits_K |f(x)|dx < +\infty\}$$

Где $K \subset \mathbb{R}^m$ - любой компакт.
Докажем теорему билета

Теорема. О равенстве обобщенных и классических производных порядка не выше N в $D'(G) \cap C^N(G)$:

1. Пусть $f \in C^N(\mathbb{R}^m) \subset Loc_1(\mathbb{R}^m)$, $\varphi \in C_{\text{фин.}}(\mathbb{R}^m) \cap C^N(\mathbb{R}^m)$. Пусть $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \Pi_r$, где Π_r - прямоугольник.

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m,\ |\alpha| \leq N,\ \partial^\alpha f \in C(\mathbb{R}^m) \subset Loc_1(\mathbb{R}^m)$$

   Конст вводит определение правила действия на пробные функции, как интеграл по всему пространству от произведения функций. В конечномерном пространстве такое определение удовлетворяет принадлежности $D'(G)$.

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi\rangle = \int_{\Pi_r}(\partial^\alpha f)\varphi dx =$$

$$= \int_{-r}^{r} dx_1 \int_{-r}^{r} dx_2 ... \int_{-r}^{r} dx_m \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m} f(x)\right]\varphi(x)$$

   Интегрируем по частям по каждой компоненте, с учетом

$$\partial^\beta \varphi(x)|_{x=\pm r} = 0,\ \ \forall \beta : |\beta| \leq N$$

   получим:

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi\rangle = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m}\int_{-r}^{r} f(\partial^\alpha \varphi)dx = \left\langle f, (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi(x)\right\rangle$$

   То есть, классическая и обобщенная производная совпадают.

2. Пусть $f \in D'(G) \cap C^N(G)$, $\varphi \in D(G)$. Тогда аналогично предыдущему пункту получим, что классическая и обобщенная производные порядка не выше N равны. пример задачи из D' на полчаса

3. Постановка обобщенной задачи Коши в пространстве $D'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$. Теорема о корректности определения обобщенного решения этой задачи: достаточно гладкое обобщенное решение является и классическим решением.

Вообще это 4 лекции Конста(с 7 по 10)(в которых он определяет основные операции в S') начало взято отсюда
Постановка обобщенной задачи: пусть $g \in D'(G)$. Тогда функция $u \in D'(G)$ называется обобщенным решением (решением в $D'(G)$) задачи $Lu = g$ (где L' и L определены из прошлого билета) если

$$\forall \varphi \in D(G),\ \langle Lu, \varphi \rangle = \langle u, L'\varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$$

Теорема. Корректность обобщенного решения: пусть $N = \max\limits_k(|\alpha(k)|)$, $f \in C(G) \subset Loc_1(G) \subset D'(G)$

1. $\Rightarrow$ Пусть $u \in C^N(G)$ удовлетворяет классическому уравнению. Тогда u является обобщенным решением (то есть в $D'(G)$), т.е.

$$\forall \varphi \in D(G)\ \ \langle Lu, \varphi \rangle = \big\langle u, L'\varphi \big\rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

$$\int_G u(x)(L'\varphi(x))dx = \int_G f(x)\varphi(x)dx$$

Доказательство:

(a) Предположим, что для φ $\exists \Pi$ - открытый прямоугольный параллелепипед: $\operatorname{supp}\varphi \Subset \Pi \Subset G$. Тогда

$$\langle Lu, \varphi \rangle = \big\langle u, L'\varphi \big\rangle = \int_G u(x)L'\varphi(x)dx = \int_\Pi u(x)L'\varphi(x)dx = (*)$$

$u \in C^N(G)$, поэтому можно интегрировать по частям

$$(*) = \int_\Pi (Lu(x))\varphi(x)dx = \int_\Pi f(x)\varphi(x)dx =$$

$$= \int_G f(x)\varphi(x)dx = \langle f, \varphi \rangle$$

(b) Общая ситуация: $\varphi \in D(G)$, обозначим $K = \operatorname{supp}(\varphi) \Subset G$ - компактный носитель φ. Определим

$$\forall x\ \forall \varepsilon\ \ \Pi_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : |x_k - y_k| < \varepsilon\ \forall k \in \overline{1, m}\}$$

Так как G - открытое множество, то

$$\forall x \in G\ \exists \varepsilon(x) > 0 : \Pi_{\varepsilon(x)}(x) \subset G$$

Таким образом,

$$\forall x \in K \exists \varepsilon(x) : \Pi_{\varepsilon(x)}(x) \subset G$$

Получим открытое покрытие компакта:

$$P = \{\Pi_{\varepsilon(x)}(x), x \in K\}$$

Введем без доказательства вспомогательную лемму:

Лемма. о разбиении единицы: Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ - компакт. P - его открытое покрытие. Тогда существуют функции $\psi_1, ..., \psi_l \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$:

i. $0 \leq \psi_k(x) \leq 1\ \forall k \in \overline{1, l}$
ii. $\forall k \in \overline{1, l}\ \exists V_k \in P : \operatorname{supp}(\psi_k) \subset V_k$
iii. $\sum_{k=1}^l \psi_k(x) = 1\ \forall x \in K$

Заметим, что $K \subset \cup_{k=1}^l V_k$ - конечное подпокрытие. По лемме о разбиении единицы

$$\exists \psi_1, ..., \psi_k \in D(\mathbb{R}^m) : \operatorname{supp}(\psi_k) \subset \Pi_{\varepsilon(x)k)} = V_k$$

$$\langle Lu, \varphi \rangle = \big\langle u, L'\varphi \big\rangle = \int_G u(x)(L'\varphi(x))dx = \int_K u(x)(L'\varphi(x))dx =$$

$$= \int_K u(x)(L' \sum_{k=1}^{l} \psi_k(x)\varphi(x))dx = \sum_{k=1}^{l} \int_K u(x)(L'\psi_k(x)\varphi(x))dx = (**)$$

Так как $\mathrm{supp}(\psi_k) = V_k = K \cap \Pi_{\varepsilon(x_k)}(x_k)$, получим:

$$(**) = \sum_{k=1}^{l} \int_{K\cap\Pi_{\varepsilon(x_k)}(x_k)} u(x)(L'\psi_k(x)\varphi(x))dx = (**)$$

Так как $\mathrm{supp}(\varphi) = K$, получим:

$$(**) = \sum_{k=1}^{l} \int_{\Pi_{\varepsilon(x_k)}} u(x)(L'\psi_k(x)\varphi(x))dx = (**)$$

Используя первую часть доказательства, получим:

$$(**) = \sum_{k=1}^{l} \int_{\Pi_{\varepsilon(x_k)}} (Lu(x))\psi_k(x)\varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{l} \int_K (Lu(x))\psi_k(x)\varphi(x)dx =$$

$$\int_K (Lu(x))\varphi(x)dx = \int_G (Lu(x))\varphi(x)dx = \int_G f(x)\varphi(x)dx = \langle f, \varphi\rangle$$

Таким образом, эта часть теоремы доказана.

2. $\Leftarrow$ Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$ - открытое множество, $u \in C^N(G)$, $f \in C(G)$. Пусть u - обобщенное решение уравнения $Lu = f$ (решение в $D'(G)$), то есть

$$\forall\varphi \in D(G) \ \ \langle Lu, \varphi\rangle = \big\langle u, L'\varphi\big\rangle = \langle f, \varphi\rangle$$

Тогда u - классическое решение уравнения в G, то есть

$$\forall x \in G \ Lu(x) = f(x)$$

Доказательство: из первой части теоремы известно, что

$$\langle Lu, \varphi\rangle = \int_G u(x)(L'\varphi(x))dx = \int_G (Lu(x)), \varphi(x)dx$$

Из условия теоремы следует, что

$$\int_G u(x)(L\varphi(x))dx = \int_G (Lu(x)), \varphi(x)dx = \int_G f(x)\varphi(x)dx$$

Введем обозначение $\omega(x) = (Lu(x)) - f(x) \ \forall x \in G$, $\omega \in C(G)$

$$\int_G \omega(x)\varphi(x)dx = 0 \ \forall\varphi \in D(G)$$

Очевидно, что $\omega(x) = 0 \ \forall x \in G$, что означает

$$(Lu(x)) = f(x) \ \forall x \in G$$

то есть, u является классическим решением, ч.т.д.

Снова 100500 определений.

Определение. Пусть $f \in D'(\mathbb{R}^m), G \in \mathbb{R}^m$ - открытое множество. Будем говорить, что $f|_G = 0$, если $\forall\varphi \in D(G) \ \langle f, \varphi\rangle = 0$

Определение. Носитель обобщенной функции:

$$\mathrm{supp}(f) = \mathbb{R}^m \setminus G, \ G: \ G \subset \mathbb{R}^m, \ G - \text{открытое}, \ f|_G = 0$$

Определение. Прямое произведение обобщенных функций (определяем только для δ, потому что для остальных функций мы слишком тупые): $\forall g \in D'(\mathbb{R}^m),\ \forall \varphi \in D(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$

$$\langle g(x)\delta(t), \varphi(t,x)\rangle = \langle g(x), \varphi(0,x)\rangle$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k_{\text{об.}} (g(x)\delta(t)) = g(x)\delta^{(k)}(t)$$

Постановка обобщенной задачи Коши: пусть $f \in D'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m) : \operatorname{supp}(f) \subset \{t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^m)\}$. Пусть $u_0, ..., u_{l-1} \in D'(\mathbb{R}^m)$. Пусть $P = a_0 z^l + a_1 z^{l-1} + ... + a_{l-1}z + a_l$ - комплексный многочлен. Найти

$$u(t,x) \in D'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m) : supp(u) \subset \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^m\}$$

удовлетворяющую уравнению

$$(P(\frac{\partial}{\partial t}) - L_x)u(t,x) = f(t,x) + \sum_{j=1}^{l} u_{j-1}(x) \sum_{k=j}^{l} a_{l-k}\delta^{(k-j)}(t)$$

Теорема. Пусть $u_0, ..., u_l \in C(\mathbb{R}^m)$, $f \in C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^m)$. Если u - решение соответсвующей классической задачи, то, продолжая $u = 0$, $f = 0$ при $t < 0$, получим, что $u \in D'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ и является обобщенным решением соотвествующей обобщенной задачи Коши.
Доказательство: следует из теоремы "Корректность обобщенного решения".

Теорема. Пусть $u_0, ..., u_l \in C(\mathbb{R}^m)$, $f \in C(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^m)$, $f(x) = 0\ \forall t \leq 0, x \in \mathbb{R}^m$. Пусть

$$u \in C^{l,N}_{t,x}(t > 0, x \in \mathbb{R}^m) \cap C^{l,0}_{t,x}(t \leq 0, x \in \mathbb{R}^m),\ u(t,x) = 0\ \forall t < 0, x \in \mathbb{R}^m$$

является решением обобщенной задачи Коши. Тогда u является классическим решением соответсвующие классической задачи Коши.
Доказательство: так как $u_{j-1}(x)\delta^{(k-j)}(x) = 0$ при $t > 0, x \in \mathbb{R}^m\ \forall j \in 1, l\ \forall k \in j, l$, то

$$\left\langle u_{j-1}(x)\delta^{(k-j)}(x), \varphi \right\rangle = 0$$

Следовательно,

$$\forall \varphi \in D(t > 0, x \in \mathbb{R}^m)\ \left\langle (P(\frac{\partial}{\partial t}) - L_x)_{\text{об.}} u, \varphi \right\rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

$$(P(\frac{\partial}{\partial t}) - L_x)_{\text{об.}} u = f \text{ в } D'(t > 0, x \in \mathbb{R}^m)$$

При этом u и f - достаточно гладкие функции. Отсюда, по теореме о корректности обобщенного решения, получим, что уравнение выполняется как классическое.
Осталось разобраться с граничными условиями. Рассмотрим $\forall \varphi \in D(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$. По условию теоремы

$$\left\langle (P(\frac{\partial}{\partial t}) - L_x)_{\text{об.}} u, \varphi \right\rangle = \langle f, \varphi \rangle + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=j}^{l} a_{l-k} \int_{\mathbb{R}^m} dx u_{j-1}(x)\varphi_t^{(k-j)}(0,x)(-1)^{k-j}$$

По определению

$$\left\langle (P(\frac{\partial}{\partial t}) - L_x)_{\text{об.}} u, \varphi \right\rangle = \left\langle u, P(-\frac{\partial}{\partial t})\varphi - L'_x\varphi \right\rangle =$$

$$= \left\langle (P(\frac{\partial}{\partial t}) - L_x)_{\text{кл.}} u, \varphi \right\rangle + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=j}^{l} a_{l-k} \int_{\mathbb{R}^m} dx u^{(j-1)}(x)\varphi_t^{(k-j)}(0,x)(-1)^{k-j}$$

Сокращая все, что не нужно, получим

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=j}^{l} a_{l-k} \int_{\mathbb{R}^m} dx(u^{(j-1)}(x) - u_{j-1}(x))\varphi_t^{(k-j)}(0,x)(-1)^{k-j} = 0$$

Подбирая разные φ, получим, что $u^{(j-1)}(x) = u_{j-1}(x)$. Получим, что u является классическим решением соответствующей классической задачи Коши.

4. Нефинитность классического преобразования Фурье нетривиальной функции из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Пространство Л. Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и плотность $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ в нем. Классическое преобразование Фурье как линейное непрерывное преобразование пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и теорема обращения.

4.0. Вспомогательные теоремы

В этом билете мы будем много пользоваться всякой констовской херней. Объемный билет!

Теорема. 0.1 - Теорема Лебега об ограниченной сходимости (без док-ва)
1) Имеем последовательность $f_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, которая почти всюду сходится: $f_n \to f$ в $\mathbb{R}^m$
2) $\exists h \in L_1(\mathbb{R}^m) : |f_n| \leq h$ почти всюду в $x \in \mathbb{R}^m \forall n$.
Тогда f_n и $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$, а также $\int\limits_{\mathbb{R}^m} f_n \to \int\limits_{\mathbb{R}^m} f$ при $n \to \infty$
Под почти подразумевается везде кроме множества Лебеговой меры нуль.

Теорема. 0.2 - Теорема Фубини (без док-ва)
Имеем $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{C}$ - измерима по Лебегу; Притом такая, что $\int\limits_{\mathbb{R}^m} dx \int\limits_{\mathbb{R}^l} dy |f(x,y)| < +\infty$.
Тогда $f \in L_1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l)$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx \int\limits_{\mathbb{R}^l} dy f(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^l} dy \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx f(x,y)$

Лемма. 0.1 - Свойство интеграла Лебега о его интегрируемости в среднем (без док-ва)
$f \in L_1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l) \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(x+z) - f(x)| dx \to 0$ при $z \to 0$ в $\mathbb{R}^l$.

Теорема. 0.3 - Теорема Римана об осцилляции
$f \in L_1(\mathbb{R}^m) \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(x,y)} f(x)dx \to 0$ при $|y| \to \infty$.

Док-во: пользуемся **Л0.1**. Рассмотрим $\int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(x,y)} f(x)dx$ с $x = z + \frac{\pi y}{|y|^2}$.

Получим $\int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(z,y)} e^{i\pi} f(z + \frac{\pi y}{|y|^2})dz = -\int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(x,y)} f(x + \frac{\pi y}{|y|^2})dx$. Последний интеграл получается просто переобозначением индекса с z на x.
Значит, мы получили $|2\int e^{i(x,y)} f(x)dx| = |\int e^{i(x,y)} f(x)dx + \int e^{i(x,y)} f(x)dx| = |\int e^{i(x,y)} (f(x) - f(x + \frac{\pi y}{|y|^2}))dx| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^m} (f(x) - f(x + \frac{\pi y}{|y|^2}))dx$.
По **Л0.1** получаем справа 0 при $|y| \to \infty$ ♠.

4.1. Из лекции 10 - нефинитность Фурье и пространство Шварца.

Рассмотрим классическое Фурье для $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$.
$F[f](y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(x,y)} f(x)dx, y \in \mathbb{R}^m$. Заметим, что подинтегральная функция $\in L_1(\mathbb{R}^m) \forall y \in \mathbb{R}^m$.

Лемма. 1.1 - Непрерывность
Преобразование непрерывно: если $y \to y_0$ в $\mathbb{R}^m$, то $F[f](y) \to F[f](y_0)$.
Док-во: $|e^{i(x,y)}f(x)| \leq f(x) \equiv h(x)$ из **T0.1** (Т Лебега). Пользуемся ей:
$\lim\limits_{y\to y_0} F[f](y) = \int e^{i(x,y_0)}f(x)dx = F[f](y_0)$ ♠.

Мы можем рассмотреть Фурье как функционал, который будет действовать на пробные функции.
$F[f](y) \subset Loc_1(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$
$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ подействуем на эту φ:
$$\langle F[f](y), \varphi(y)\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dyF[f](y)\varphi(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy \int\limits_{\mathbb{R}^m} dxe^{i(x,y)}f(x)\varphi(y)$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} dy \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx|e^{i(x,y)}f(x)\varphi(y)| = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy|\varphi(y)| \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx|f(x)| < +\infty.$$
Пользуемся Т Фубини (**T0.2**):
$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} dxf(x) \int\limits_{\mathbb{R}^m} dye^{i(x,y)}\varphi(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dxf(x)F[\varphi](x) = \langle f(x), F[\varphi](x)\rangle$$
Обратим внимание, что Т Фубини прекрасно применяется, потому что $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^m)$, а $F[\varphi](x) \in C(\mathbb{R}^m) \cap C_{\text{фин.}}(\mathbb{R}^m)$ - пространство непрерывных ограниченных функций. Значит, подинтегральная функция тоже $\in L_1(\mathbb{R}^m)$.

Рассмотрим некую φ из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Пусть $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B_R(0)$ - шар радиуса R с центром в нуле. Тогда $F[\varphi](x) = \int\limits_{B_R(0)} dye^{i(x,y)}\varphi(y)$, и поскольку $\varphi(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, то по теореме о дифф. по параметру $F[\varphi] \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \Rightarrow \partial_x^\alpha(F[\varphi](x)) = \int\limits_{B_R(0)} dy(iy)^{|\alpha|}e^{i(x,y)}\varphi(y) = F[(iy)^{|\alpha|}\varphi(y)](x)$.
Финитность такого преобразования Фурье благополучно теряется; об этом следующая теорема.

Теорема. 1.1 - Нефинитность Фурье
$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) : F[\varphi] \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \varphi \equiv 0$.
Док-во (в 1D): $F[\varphi] \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \Rightarrow \exists R > 0 : F[\varphi](y) = 0\ \forall|y| \geq R$; аналогично $\varphi(x) = 0\ \forall|x| \geq r$
$$\int dxe^{i(x,y)}\varphi(x) = \int\limits_{-r}^{r} dxe^{i(x,y)}\varphi(x) = \int\limits_{-r}^{r} dx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!}x^k\varphi(x)$$
$|\frac{(iy)^k}{k!}x^k\varphi(x)| \leq \frac{|y|^k r^k}{k!} \max\limits_{[-r;r]}|\varphi(x)|$ - т. е. получились члены равномерно сходящегося ряда (по Т Вейерштрасса). Значит, можно переставить интеграл и ряд по Т об интегрировании равномерно сходящихся рядов.
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} \int\limits_{-r}^{r} x^k\varphi(x)dx = 0\ \forall|y| \geq R$. Тогда по Т о единственности степ. ряда $\int\limits_{-r}^{r} x^k\varphi(x)dx = 0$ (*)
Разложим в Фурье по основной триг. системе на $[-r; r]$. Её можно записать как $\{e^{\frac{i\pi sx}{r}}; x \in [-r; r]; s \in \mathbb{Z}\}$.
$\varphi(x) = \sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} \varphi_m e^{\frac{i\pi mx}{r}}\ \forall x \in [-r; r]$ - равн. сх. триг. ряд Фурье на отрезке.
$\varphi_m = \dfrac{\int\limits_{-r}^{r} e^{-\frac{i\pi mx}{r}}\varphi(x)dx}{2r} = \frac{1}{2r}\int\limits_{-r}^{r} dx \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(\frac{-i\pi m}{r})^k \frac{x^k\varphi(x)}{k!}$. Всё это дело сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, а значит, по Т об интегрировании равномерно сходящихся рядов ряд и интеграл можно переставить.
$\varphi_m = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(\frac{-i\pi m}{r})^k \int\limits_{-r}^{r} x^k\varphi(x)dx = 0$ (*) $\forall m \in (Z)$ Значит, если все коеф. $\varphi_m = 0$, то $\varphi \equiv 0$. ♠

Как дышать? Надо вводить другое пространство, из которого мы не будем вылетать после Фурье. Это есть не что иное, как пространство Шварца.

Определение. 1 Пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ Шварца пробных функций задается как $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m) | \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m$ $x^\beta \partial_x^\alpha \varphi(x) \to 0 \ \forall |x| \to \infty\}$. Здесь α, β - мультииндексы.

Определение. 2 А еще можно задать пространство так: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m) | \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m \ \forall p \in \mathbb{R} \ |x|^p \partial_x^\alpha \varphi(x) \to 0$ $\forall |x| \to \infty\}$.

Лемма. 1.2 - Эквивалентность определений
1 $\to$ 2:
$|x|^p \leq m^{\frac{p}{2}} \max\limits_{k=1..m} |x_k^p| \leq m^{\frac{p}{2}} \sum\limits_{k=1}^m |x_k|^p$
$|x|^p |\partial_x^\alpha \varphi| \leq m^{\frac{p}{2}} \sum\limits_{k=1}^m |x_k|^p |\partial_x^\alpha \varphi(x)| \to 0 \ \forall |x| \to \infty\}$. ♠
2 $\to$ 1:
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m$:
$|x^\beta \partial_x^\alpha \varphi| = |x_1|^{\beta_1} .. |x_m|^{\beta_m} |\partial_x^\alpha \varphi| \leq |x|^{|\beta|} \partial_x^\alpha \varphi \to 0 \ \forall |x| \to \infty\}$. ♠

Теорема. 1.2 - Инвариантность относительно Фурье
$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow F[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$
Док-во:
$F[\varphi] = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i(x,y)} \varphi(x) dx.$
$\partial_y^\alpha e^{i(x,y)} \varphi(x) = |(ix)^\alpha \varphi(x) e^{i(x,y)}| \leq |x|^\alpha |\varphi(x)|$
Так как $\varphi \in (S)$, то $(1 + |x|^{2m}) |x|^\alpha |\varphi(x)| \to 0$ и принадлежит $C(\mathbb{R}^m)$. Отсюда по Т Вейерштрасса имеем ограниченность $|x|^\alpha |\varphi(x)| \leq \frac{M}{1+|x|^{2m}}$.
Тогда по признаку Вейерштрасса в силу абс. интегрируемости $\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{dx}{1 + |x|^{2m}}$ мы получим равномерную по y сходимость интеграла $\int dy \partial_y^\alpha e^{i(x,y)} \varphi(x) dx$. Значит, можно дифференциировать по параметру.
Теперь разберёмся со степенью: $y^\beta F[(ix)^\alpha \varphi(x)](y)$; обозначим $\psi(x) = (ix)^\alpha \varphi(x)$
Проинтегрировав по частям $|\beta|$ раз, получим $F[\partial_x^\beta \psi](y) = (-iy)^\beta F[\psi](y)$. А значит, $y^\beta F[\psi](y) = i^\beta F[\partial_x^\beta \psi]$.
В итоге по Т Римана об осцилляции (**T0.3**) $i^\beta F[\partial_x^\beta \psi] \to 0$ при $|y| \to \infty$ ♠

Определение. 3 $\varphi_n \to \varphi$ при $n \to \infty$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, если $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m$ $x^\beta \partial_x^\alpha \varphi_n(x) \rightrightarrows x^\beta \partial_x^\alpha \varphi(x)$ при $n \to \infty$. Две стрелки обозначают равномерную сходимость.

Лемма. 1.3 - Плотность $\mathcal{D}$ в $\mathcal{S}$
$\varphi_n \to \varphi$ при $n \to \infty$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, если $\varphi_n \to \varphi$ при $n \to \infty$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$
Док-во:
$\sup\limits_{\mathbb{R}^m} [|x|^p |\partial_x^\alpha (\varphi_n - \varphi)|] \leq R^p \max\limits_{B_R(0)} |\partial_x^\alpha (\varphi_n - \varphi)|$ ♠

Отсюда тут же следует, что $\mathcal{S}'$ - это подмножество функционалов $\mathcal{D}'$, которые работают на расширенном пространстве, ведь из сходимости в $\mathcal{D}$ следует сходимость в $\mathcal{S}$.

4.2. Из лекции 11 - Классическое преобразование Фурье как линейное непрерывное преобразование пространства + Т обращения

Очевидно, что классическое преобразование Фурье линейно. Покажем его непрерывность.

Лемма. 2.1 - Непрерывность
Если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m y^\beta \partial^\alpha F[\varphi_n - \varphi](y) \rightrightarrows 0$ по $y \in \mathbb{R}^m$.
Док-во:
Проделаем те же вычисления, что и в **Т4.1.2**:
$y^\beta \partial^\alpha F[\varphi_n - \varphi](y) = y^\beta F[(ix)^\alpha (\varphi_n - \varphi)(x)](y)$
$F[\partial^\beta \psi](y) = -(iy)^\beta F[\psi]$
Соберём эти два соотношения в одно: $y^\beta \partial^\alpha F[\varphi_n - \varphi](y) = -(i)^{(\beta+\alpha)} F[\partial^\beta (x^\alpha (\varphi_n - \varphi)(x))](y)$
По определению сходимости в $\mathcal{S}$ $|x|^p \partial^\beta (x^\alpha (\varphi_n - \varphi)) \rightrightarrows 0$ в $\mathbb{R}^m$ при $n \to \infty$; тогда выбирая $p = 0, 2m$, получим: $(1 + |x|^{2m}) \partial^\beta (x^\alpha (\varphi_n - \varphi)) \le \varepsilon \ \forall n \ge N(\varepsilon) \ \forall x \in \mathbb{R}^m$.
Окончательно $|y^\beta \partial^\alpha F[\varphi_n - \varphi](y)| \le \int\limits_{\mathbb{R}^m} |y^\beta \partial^\alpha (\varphi_n - \varphi)(x)| dx \le \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\varepsilon}{1 + |x|^{2m}} dx \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. То есть, наш интеграл равномерно сходится к нулю и тогда $F[\varphi_n] \to F[\varphi]$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. ♠

Теорема. 2.1 - Т обращения: main
$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^m} F[\varphi](y) dy = (2\pi)^m \varphi(0)$
Док-во:
$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \int \varphi(y) F[\psi](y) dy = \int F[\varphi](x) \psi(x) dx$ по Т Фубини (**Т0.2**), т.к. $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m); F[\varphi], F[\psi] \in L_1$
Введём специальную функцию $\psi_\varepsilon \overset{def}{=} e^{-\varepsilon |x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \ \forall \varepsilon > 0$. Фурье от этой функции считается тупо в лоб с выделением полного квадрата показателя exp.
$F[\psi_\varepsilon](y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx e^{i(xy)} e^{-\varepsilon |x|^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} dz e^{-|z - \frac{iy}{2\sqrt{\varepsilon}}|^2} e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}^m} e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}} \prod\limits_{k=1}^m \int\limits_{\mathbb{R}} dt e^{-(t - \frac{iy_k}{2\sqrt{\varepsilon}})^2} = (\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}})^m e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}}$
Предпоследний переход - это теорема Фубини (**Т0.2**), сводящая кратный интеграл к повторному.
Последний в общем-то ясен, но для любителей попетушиться я принес вам покушать говнеца:
Рассмотрим $\Phi(\xi) = \int e^{-(t-\xi)^2}$; $|\frac{d}{d\xi} e^{-(t-\xi)^2}| = |2(\xi - t)||e^{-(t-\xi)^2}| \le 2(r + |t|) e^{-t^2 + 2|t|r + r^2} \in L_1(\mathbb{R})$ При $|\xi| \le r$ сходится равномерно $\Rightarrow \exists \Phi'(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi} e^{-(t-\xi)^2} dt \ \forall |\xi| \le r$.

Значит, функция хорошая и по теореме единственности из ТФКП $\Phi(\xi) = \Phi(\xi_{Re}) = \sqrt(\pi)$
Таким образом, мы осилили Фурье и теперь можем пописать Фубини: $\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) F[\psi_\varepsilon](y) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} F[\varphi](x) \psi_\varepsilon(x) dx$

Подставим нашу функцию: $\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) (\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}})^m e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}} dy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} F[\varphi](x) e^{-\varepsilon |x|^2} dx$. Правая часть интегрируется, потому что $F[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subset L_1(\mathbb{R}^m)$.
$|F[\varphi](x) e^{-\varepsilon |x|^2}| dx \le |F[\varphi](x)| \in L_1$.
Тогда по Т Лебега об огр. сходимости (**Т0.1**) получим $\int F[\varphi](x) e^{-\varepsilon |x|^2} dx \to \int F[\varphi](x) dx$ при $\varepsilon \to 0$.

Тем временем в левой части после замены переменной в интеграле получим $(\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}})^m (2\sqrt{\varepsilon})^m \int \varphi(2\sqrt{\varepsilon} z) e^{-|z|^2} dz$

Подинтегральная функция оценивается: $|\varphi(2\sqrt{\varepsilon} z) e^{-|z|^2}| \le (\sup\limits_{\mathbb{R}^m} |\varphi|) e^{-|z|^2} \in L_1(\mathbb{R}^m) \forall z \in \mathbb{R}^m$

Тогда по Т Лебега об огр. сходимости получим $(2\sqrt{\pi})^m \varphi(0) (\int dt e^{-t^2})^m$ ♠

Теорема. 2.2 - Т обращения: как мы привыкли ее видеть
$\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow F[F[\varphi(x)](y)](z) = (2\pi)^m\varphi(-z)$
Док-во:
$$F[F[\varphi(x)](y)](z) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy e^{i(y,z)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx e^{i(x,y)}\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy \int\limits_{\mathbb{R}^m} d\xi e^{i(y,x+z)}\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx e^{i(y,\xi)}\varphi(\xi - z) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} dy F[\varphi(\xi - z)](y) = (2\pi)^m\varphi(-z) \text{ по } \mathbf{T2.1} \ \spadesuit$$

Дальше немножечко напряжем мозг и высрем вот это.

Определение. 4 $F^{-1}[\varphi(x)](y) \overset{def}{=} \frac{1}{(2\pi)^m}F[\varphi(x)](-y) = \frac{1}{(2\pi)^m}F[\varphi(-x)](y)$

5. Пространство обобщенных функций $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Обобщеннное преобразование Фурье в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ по всем или по части переменных, и его свойства, связанные с операцией обобщенного дифференцирования.

Определение. Пространство обобщенных функций Шварца $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ – множество линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Линейность и непрерывность в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ определяется так же, как и в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$.

Определение. $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m$ обобщенной производной функционала $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ называется

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle \overset{def}{=} (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \tag{3}$$

Определение. Пусть $\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)\ \forall g \in C^\infty(\mathbb{R}^m) : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m \hookrightarrow \partial^\alpha g$ имеет медленный рост. Тогда определено произведение функции g на обобщенную функцию f по следующему правилу:

$$\langle gf, \varphi \rangle \overset{def}{=} \langle f, g\varphi \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \tag{4}$$

Определение. Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m),\ A \in \mathbb{R}^{m\times m},\ b \in \mathbb{R}^m$. Тогда определена замена переменных $z = Ax + b$ в обобщенной функции:

$$\langle f(Ax+b), \varphi \rangle \overset{def}{=} \left\langle f(z), \frac{\varphi\left(A^{-1}(z-b)\right)}{|\det A|} \right\rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \tag{5}$$

Определение. Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Тогда можно определить обобщенное преобразование Фурье по следующему правилу:

$$\langle F[f], \varphi \rangle \overset{def}{=} \langle f, F[\varphi] \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \tag{6}$$

Замечание. Для корректности данных выше определений необходимо доказывать линейность и непрерывность соответствующих функционалов. Линейность очевидна во всех случаях, а доказательство непрерывности приведем только для Фурье – в остальных определениях это либо очевидно, либо делается аналогично.

Доказательство. Пусть задана последовательность пробных функций $\varphi_n \to \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m$ рассмотрим следующую функцию:

$$g(y) = y^\beta \partial^\alpha F[\varphi_n - \varphi](y) = y^\beta F[(ix)^\alpha(\varphi_n - \varphi)](y) = i^{\alpha+\beta} F[\partial^\beta (x^\alpha(\varphi_n - \varphi))](y) \tag{7}$$

По определению сходимости в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$:

$$\forall p \in \mathbb{N}_0 \hookrightarrow |x|^p \partial^\beta (x^\alpha(\varphi_n - \varphi)) \rightrightarrows 0 \ (n \to \infty)$$

Тогда:

$$\exists \varepsilon : \forall n \geqslant N(\varepsilon)\ \forall x \in \mathbb{R}^m \hookrightarrow (1 + |x|^{2m}) \partial^\beta (x^\alpha(\varphi_n - \varphi)) \leqslant \varepsilon \tag{8}$$

Из (7) и (8) получаем:

$$|g(y)| = |y^\beta \partial^\alpha F[\varphi_n - \varphi](y)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\partial^\beta (x^\alpha(\varphi_n - \varphi)|\, dx \overset{n \geqslant N(\varepsilon)}{\leqslant} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\varepsilon}{1 + |x|^{2m}}\, dx = \varepsilon \frac{\pi S_m}{2m} \tag{9}$$

Таким образом $g(y) \rightrightarrows 0 \ (n \to \infty)$, а значит $F[\varphi_n] \to F[\varphi]$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. □

Определение (Обратное преобразование)**.** Пользуясь теоремой об обращении можно определить обратное преобразование Фурье в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$:

$$F^{-1}[f](x) \overset{def}{=} \frac{1}{(2\pi)^m} F[f](-x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \tag{10}$$

Таким образом, мы получили, что обобщенное преобразование Фурье является изоморфизмом над $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, т.е., зная Фурьевый образ, можно найти саму функцию, и наоборот.
С помощью преобразования Фурье можно определить замену переменных в обобщенной функции для случая неквадратной матрицы перехода.

Определение (Замена переменных в обобщенной функции)**.** Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^l),\ A \in \mathbb{R}^{l\times m} : \operatorname{rg} A = l,\ b \in \mathbb{R}^l$. Тогда:

$$\langle f(Ax+b), \varphi(x) \rangle \overset{def}{=} \left\langle F^{-1}[f](y), e^{i(b,y)} F[\varphi](A^T y) \right\rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \tag{11}$$

Докажем корректность такого определения.

Доказательство. Из определения обратного преобразования следует:

$$\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^l)\ \exists h(y) = F^{-1}[f] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^l) : f(z) = F[h](z)$$

Тогда:

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)\ \langle f(z), \varphi(z)\rangle = \langle F[h(y)](z), \varphi(z)\rangle = \langle h(y), F[\varphi(z)](y)\rangle = \left\langle h(y), \int\limits_{\mathbb{R}^l} dz\, \varphi(z) e^{i(z,y)} \right\rangle$$

Рассмотрим теперь $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)\ \forall y \in \mathbb{R}^l$ функцию:

$$\psi(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, \varphi(x) e^{i(Ax+b,y)} = e^{i(b,y)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, \varphi(x) e^{i(x,A^T y)} = e^{i(b,y)} F[\varphi](A^T y)$$

Выясним, для каких A выполнено вложение

$$\xi(y) = F[\varphi](A^T y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$$

Так как $F[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то $|z|^p|\partial_z^\beta F[\varphi](z) \to 0$ $(|z|\to \infty)$. Заметим теперь, что:

$$\partial^\alpha \xi(y) \in \operatorname{span}\{\partial_z^\beta F[\varphi](z) \mid |\beta| \leqslant |\alpha|\}\Big|_{z=A^T y}$$

Соответственно $\xi(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$ для таких матриц A, что $|A^T y| \to \infty$ $(|y|\to \infty)$. Рассмотрим выражение $|A^T y|^2 = y^T(AA^T)y$. Матрица AA^T является симметрической матрицей размера $l \times l$, которая задает квадратичную форму. Для того, чтобы $y^T(AA^T)y \to \infty$ $(|y|\to \infty)$, необходимо, чтобы все ее собственные числа были строго больше нуля, то есть матрица была бы невырожденной. Это возможно тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg} A = l$ $(\ker A^T = 0)$. Непрерывность заданного функционала доказывается аналогично через представление ☐

Рассмотрим теперь преобразование Фурье по части переменных.

Определение (Преобразование Фурье по части переменных)**.** Рассмотрим $f(x,z) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{l+m}),\ x \in \mathbb{R}^m,\ z \in \mathbb{R}^l$. Тогда:

$$\langle F_x[f(x,z)](y,z), \varphi(y,z)\rangle \overset{def}{=} \langle f(x,z), F_y[\varphi(y,z)](x,z)\rangle\ \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{l+m}) \tag{12}$$

Докажем корректность этого определения.

Доказательство. Для начала нужно показать, что $\psi(y,z) = F_x[\varphi(x,z)](y,z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{l+m})$. Это означает, что:

$$\forall \alpha, \mu \in \mathbb{N}_0^m,\ \beta, \nu \in \mathbb{N}_0^l \hookrightarrow y^\mu z^\nu \partial_y^\alpha \partial_z^\beta \psi(y,z) \to 0\ (|y|+|z|\to \infty)$$

По теореме о дифференцировании несобственного интеграла:

$$\xi(y,z) = y^\mu z^\nu \partial_y^\alpha \partial_z^\beta \psi(y,z) = y^\mu z^\nu \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, (ix)^\alpha e^{i(x,y)} \partial_z^\beta \varphi(x,z) \tag{13}$$

Далее проинтегрируем по частям выражение (13) и, обозначив $\Phi(x,z) = \partial_x^\mu \Big((ix)^\alpha \partial_z^\beta \varphi(x,z)\Big) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{l+m})$, получим:

$$\xi(y,z) = i^\mu z^\nu \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, e^{i(x,y)} \partial_x^\mu \Big((ix)^\alpha \partial_z^\beta \varphi(x,z)\Big) = i^\mu z^\nu F_x\left[\Phi(x,z)\right](y)$$

Чтобы сделать оценку, воспользуемся тем фактом, что $\Delta_x \Phi(x,z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{l+m})$, а также:

$$F_x[\Delta_x \Phi(x,z)](y) = \sum_{k=1}^m F_x\left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\Phi(x,z)\right](y) = -|y|^2 F_x[\Phi(x,z)](y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{l+m})$$

Тогда получаем:

$$\xi(y,z) = -\frac{i^\mu z^\nu}{1+|y|^2} F_x\left[\Delta_x \Phi(x,z) - \Phi(x,z)\right](y) \tag{14}$$

В силу того, что $\Delta_x \Phi(x,z) - \Phi(x,z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{l+m})$:

$$|\Delta_x \Phi(x,z) - \Phi(x,z)| \leqslant \frac{C}{(1+|x|^{2m})(1+|z|^{2\nu+1})}$$

Тогда, подставляя это в (14), получаем такую оценку:

$$|\xi(y,z)| \leqslant \frac{C|z|^{|\nu|}}{(1+|z|^{2\nu+1})(1+|y|^2)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{dx}{1+|x|^{2m}} \to 0 \ (|y|+|z| \to \infty) \tag{15}$$

Значит $\psi(y,z) = F_x[\varphi(x,z)](y,z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{l+m})$. Линейность искомого функционала очевидна. Рассмотрим теперь непрерывность. Нужно доказать, что

$$\forall \alpha, \mu \in \mathbb{N}_0^m,\ \beta, \nu \in \mathbb{N}_0^l \hookrightarrow y^\mu z^\nu \partial_y^\alpha \partial_z^\beta F_x[(\varphi_n - \varphi)(x,z)](y,z) \rightrightarrows 0 \ (n \to \infty) \tag{16}$$

Аналогично первой части доказательства, получаем:

$$y^\mu z^\nu \partial_y^\alpha \partial_z^\beta F_x[(\varphi_n - \varphi)(x,z)](y,z) = i^\mu z^\nu \int\limits_{\mathbb{R}^m} dx\, e^{i(x,y)} \partial_x^\mu \Big((ix)^\alpha \partial_z^\beta (\varphi_n - \varphi)(x,z) \Big) \tag{17}$$

Функция $\Phi_n(x,z) = \partial_x^\mu \Big((ix)^\alpha \partial_z^\beta (\varphi_n - \varphi)(x,z) \Big) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{l+m})$. Значит ее можно равномерно ограничить:

$$|\Phi_n(x,z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{(1+|x|^{2m})(1+|z|^{|\nu|})} \tag{18}$$

Тогда получаем, подставляя это в (17), получаем равномерную оценку:

$$|y^\mu z^\nu \partial_y^\alpha \partial_z^\beta F_x[(\varphi_n - \varphi)(x,z)](y,z)| \leqslant \varepsilon \frac{C|z|^{|\nu|}}{1+|z|^{|\nu|}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{dx}{1+|x|^{2m}} \tag{19}$$

При $\varepsilon \to 0$ эта штука равномерно стремится к нулю, что и доказывает непрерывность. □

Наблюдение Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{l+m})$. Тогда, как следует из теоремы Фубини:

$$F[f(x,z)](a,b) = F_z[F_x[f(x,z)]](a,b) = F_x[F_z[f(x,z)]](a,b) \tag{20}$$

Рассмотрим важное свойство преобразования Фурье.

Теорема (О Фурье-образе производной обобщенной функции)**.** Пусть $f(x,z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{l+m})$. Тогда:

$$F_x[\partial_x^\alpha \partial_z^\beta f(x,z)](y) = (-iy)^\alpha \partial_z^\beta F_x[f(x,z)](y)$$

Доказательство. Пусть $\varphi(y,z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{l+m})$. Тогда:

$$\begin{aligned} \Big\langle F_x[\partial_x^\alpha \partial_z^\beta f(x,z)](y), \varphi(y,z) \Big\rangle &= \Big\langle f(x,z), (-1)^{|\beta|} \partial_z^\beta (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha F_y[\varphi(y,z)](x) \Big\rangle = \\ &= \Big\langle f(x,z), (-1)^{|\alpha|+|\beta|} F_y[(iy)^\alpha \partial_z^\beta \varphi(y,z)](x) \Big\rangle = \Big\langle F_x[f(x,z)](y), (-iy)^\alpha (-1)^{|\beta|} \partial_z^\beta \varphi(y,z) \Big\rangle = \\ &= \Big\langle \partial_z^\beta F_x[f(x,z)](y), (-iy)^\alpha \varphi(y,z) \Big\rangle = \Big\langle (-iy)^\alpha \partial_z^\beta F_x[f(x,z)](y), \varphi(y,z) \Big\rangle \end{aligned} \tag{21}$$

□

6. Свёртка обобщённых функций в пространстве $S'(\mathbb{R}^m)$. Лемма о дифференцировании действия обобщённой функции на гладко зависящую от параметра основную функцию. Дифференцирование свёртки обобщённых функций

Пусть для $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ и $g \in S'(\mathbb{R}^m)$ $\exists$ такое $h \in S'(\mathbb{R}^m)$, что для $\forall$ срезки $\eta(x)$ и для $\forall$ $\varphi \in S(\mathbb{R}^m)$

$$\exists \lim_{r\to+\infty} \left\langle f(x), \eta\left(\frac{x}{r}\right)\langle g(y), \varphi(x+y)\rangle \right\rangle = \langle h(x), \varphi(x)\rangle$$

Тогда $h(x)$ будем называть сверткой $f(x), g(x)$ и обозначать $h(x) = f(x) * g(x)$

Лемма. о дифференцировании действия
Пусть $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \to C$ такая, что $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l)$ и $\forall p \in \mathbb{N}_0,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m,\ \forall \beta \in \mathbb{N}_0^l,\ \forall R > 0$ выполнена равномерная сходимость $|z|^p D_z^\beta D_y^\alpha \varphi(y,z) \to 0$ при $z \to \infty$ для $|y| < R$, то $\psi(y) = \langle g(z), \varphi(y,z)\rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\forall g \in S'(\mathbb{R}^l)$ и $D_y^\alpha \psi(y) = \langle g(z), D_y^\alpha \varphi(y,z)\rangle$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный вектор $e \in \mathbb{R}^m$, и зафиксируем $y \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{\psi(y+te) - \psi(y)}{t} = \left\langle g(z), \frac{\varphi(y+te,z) - \varphi(y,z)}{t}\right\rangle$$

Нам необходимо доказать, что

$$\left\langle g(z), \frac{\varphi(y+te,z) - \varphi(y,z)}{t}\right\rangle \to \langle g(z), (\nabla_y \varphi(y,z), e)\rangle \ \text{ при } t \to 0$$

А именно, $\forall p \in \mathbb{N}_0,\ \forall \beta \in \mathbb{N}_0^l$

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^l} |z|^p \left| D_z^\beta \left(\frac{\varphi(y+te,z) - \varphi(y,z)}{t} - (\nabla_y \varphi(y,z), e)\right)\right| \to 0 \text{ при } t \to 0$$

Обозначим $h(y,z) = D_z^\beta \varphi(y,z)$, тогда

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^l} |z|^p \left| \left(\frac{h(y+te,z) - h(y,z)}{t} - (\nabla_y h(y,z), e)\right)\right| \to 0 \text{ при } t \to 0$$

По теореме Лагранжа

$$\frac{h(y+te,z) - h(y,z)}{t} = (\nabla_y h(y+\zeta e,z), e)$$

Применим теорему Лагранжа второй раз, а именно: обозначим $f(\tau) = (\nabla_y h(y+\tau e,z), e)$, тогда

$$f(\zeta) - f(0) = f'(\xi)\zeta,$$

где $f'(\tau) = (h''_{yy}(y+\tau e,z)e, e)$. Следовательно, нам надо показать, что

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^l} |z|^p |(h''_{yy}(y+\xi e,z)e,e)||\zeta| \to 0,\ t \to 0$$

Обозначим $R = |y| + |e|$ пусть $|t| < 1$ тогда $y_1 = |y+\xi e| < R$. По условию леммы

$$|z|^p |(h''_{yy}(y_1,z)e,e)| \to 0,\ |z| \to \infty \text{ равномерно при } y_1 < R$$

Следовательно существует такое M, что

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^l} |z|^p |(h''_{yy}(y_1,z)e,e)| < M$$

И окончательно

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^l} |z|^p |(h''_{yy}(y+\xi e,z)e,e)| \cdot |\zeta| < M|\zeta| < M|t| \to \ \text{ при } t \to 0$$

Ч.Т.Д. $\square$

Дифференцирование свёртки обобщённых функций
Пусть для $f \in S'(\mathbb{R}^m)$ и $g \in S'(\mathbb{R}^m)$ $\exists\ f * g \in S'(\mathbb{R}^m)$ тогда $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m$ $\exists f * (D^\alpha g)$, $(D^\alpha f) * g$ и справедливы равенства:

$$D^\alpha (f * g) = f * (D^\alpha g) = (D^\alpha f) * g.$$

Доказательство.

$$\left\langle \left(\eta\left(\frac{x}{r}\right) f(x)\right) * (D^\alpha g(x)), \varphi(x)\right\rangle = \left\langle f(x), \eta\left(\frac{x}{r}\right) \langle (D^\alpha g(x)), \varphi(x+y)\rangle \right\rangle =$$
$$= \left\langle f(x), \eta\left(\frac{x}{r}\right) \langle g(x), (-1)^\alpha D^\alpha \varphi(x+y)\rangle \right\rangle = \left\langle \eta\left(\frac{x}{r}\right) f(x) * g(x), (-1)^\alpha D^\alpha \varphi(x)\right\rangle \quad (22)$$

Так как по условию $\exists f * g$ то

$$\exists \lim_{r\to+\infty} \left\langle \eta\left(\frac{x}{r}\right) f(x) * g(x), (-1)^\alpha D^\alpha \varphi(x)\right\rangle = \langle (f*g)(x), (-1)^\alpha D^\alpha \varphi(x)\rangle = \langle D^\alpha (f*g)(x), \varphi(x)\rangle$$

Следовательно,

$$\exists \lim_{r\to+\infty} \left\langle (\eta\left(\frac{x}{r}\right) f(x) * g(x), (-1)^\alpha D^\alpha \varphi(x)\right\rangle = \langle D^\alpha (f*g)(x), \varphi(x)\rangle.$$

Мы доказали, что существует свертка

$$f * (D^\alpha g) = D^\alpha (f * g).$$

Докажем теперь, что $\exists$ свертка $(D^\alpha f) * g$.

$$\left\langle \left(\eta\left(\frac{x}{r}\right) D^\alpha f(x)\right) * g(x), \varphi(x)\right\rangle = \left\langle D^\alpha f(x), \eta\left(\frac{x}{r}\right) \langle g(y), \varphi(x+y)\rangle \right\rangle =$$
$$= \left\langle f(x), (-1)^\alpha D^\alpha \left(\eta\left(\frac{x}{r}\right) \langle g(y), \varphi(x+y)\rangle\right)\right\rangle \quad (23)$$

По формуле Лейбница дифференцирования произведения функций

$$D^\alpha \left\langle \eta\left(\frac{x}{r}\right) \langle g(y), \varphi(x+y)\rangle \right\rangle = \eta\left(\frac{x}{r}\right) D^\alpha \langle g(y), \varphi(x+y)\rangle + \psi_r(x),$$

где $\psi_r(x)$ является конечной линейной комбинацией функций

$$D^\beta\ \eta\left(\frac{x}{r}\right) D^\gamma \langle g(y), \varphi(x+y)\rangle = D^\beta \eta\left(\frac{x}{r}\right) \langle g(y), D^\gamma \varphi(x+y)\rangle$$

для всевозможных $\beta \in \mathbb{N}^m$ и $\gamma \in \mathbb{N}^m$ вида $\beta + \gamma = \alpha$.
Покажем, что $\lim_{r\to+\infty} \langle f(x), \psi_r(x)\rangle = 0$. Для этого достаточно доказать, что для $\forall \beta \in \mathbb{N}^m$ и $\gamma \in \mathbb{N}^m$ вида $\beta+\gamma = \alpha$ выполнено

$$\lim_{r\to+\infty} \langle f(x), D^\beta \eta \left\langle \eta\left(\frac{x}{r}\right) \langle g(y), D^\beta \varphi(x+y)\rangle \right\rangle = 0.$$

Зафиксируем β и γ и рассмотрим функцию

$$\zeta(z) = D^\beta \eta(z).$$

Тогда

$$D^\beta \eta\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r^\beta} \zeta\left(\frac{x}{r}\right).$$

Нам требуется показать, что

$$\lim_{r\to+\infty} \left\langle f(x), \zeta\left(\frac{x}{r}\right) \langle g(y), D^\gamma \varphi(x+y)\rangle \right\rangle = 0.$$

Заметим, что $\zeta(z) = 0$ при $|z| \leq 1$. Отсюда следует, что $\eta_1(z) = \eta(z) + \zeta(z)$ является 1-срезкой. Поэтому, так как $\exists\ f * g$

$$\langle (f*g)(x), D^\gamma \varphi(x)\rangle = \lim_{r\to+\infty} \left\langle f(x), \eta_1\left(\frac{x}{r}\right) \langle g(y), D^\gamma \varphi(x+y)\rangle \right\rangle =$$
$$= \lim_{r\to+\infty} \left\langle f(x), \eta\left(\frac{x}{r}\right) \langle g(y), D^\gamma \varphi(x+y)\rangle \right\rangle + \lim_{r\to+\infty} \left\langle f(x), \zeta\left(\frac{x}{r}\right) \langle g(y), D^\gamma \varphi(x+y)\rangle \right\rangle =$$
$$= \langle (f*g)(x), D^\gamma \varphi(x)\rangle + \lim_{r\to+\infty} \left\langle f(x), \zeta\left(\frac{x}{r}\right) \langle g(y), D^\gamma \varphi(x+y)\rangle \right\rangle. \quad (24)$$

Отсюда получаем, что
$$\lim_{r\to+\infty}\left\langle f(x),\zeta\left(\frac{x}{r}\right)\langle g(y),D^{\gamma}\varphi(x+y)\rangle\right\rangle=0.$$
Значит,
$$\lim_{r\to+\infty}\left\langle f(x),\zeta\left(\frac{x}{r}\right)\langle g(y)D^{\gamma}\varphi(x+y)\rangle\right\rangle=0$$
$$\lim_{r\to+\infty}\langle f(x),\psi_r(x)\rangle=0.$$
Наконец,
$$\begin{multline}\left\langle\left(\eta\left(\frac{x}{r}\right)D^{\alpha}f(x)\right)*g(x),\varphi(x)\right\rangle=\\=\left\langle f(x),(-1)^{\alpha}\left(\eta\left(\frac{x}{r}\right)\langle g(y),(-1)^{\alpha}D^{\alpha}\varphi(x+y)\rangle\right)\right\rangle=\\=\langle D^{\alpha}(f(x)*g(x)),\varphi(x)\rangle. \quad (25)\end{multline}$$
Мы получили, что
$$(D^{\alpha}f)*g=D^{\alpha}(f*g)$$
Ч.Т.Д.

7. Лемма об интегрировании действия. Преобразование Фурье обобщённой функции как действие на комплексную экспоненту. Преобразование Фурье свёртки обобщённых функций.

Лемма. Пусть $\varphi(x, y) \in S((R)^m \times (R)^l)$
Рассмотрим функции

$$\psi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^l} \varphi(x, y) dy \in S(\mathbb{R}^m)$$

$$\psi_R(x) = \int\limits_{|y| \leq R} \varphi(x, y) dy \in S(\mathbb{R}^m)$$

$$f(x) \in S'(\mathbb{R}^m)$$

Утверждение леммы заключается в том, что

$$\langle f(x); \psi(x) \rangle = \lim_{R \to \infty} \langle f(x); \psi_R(x) \rangle = \lim_{R \to \infty} \int\limits_{|y| \leq R} \langle f(x); \varphi(x, y) \rangle \, dy$$

Доказательство. Докажем сперва, что

$$\psi_R \xrightarrow[R \to \infty]{S(\mathbb{R}^m)} \psi \ , \tag{1}$$

Для этого выберем $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m$ и $\forall p \in \mathbb{N}_0$,
Утверждение (1) равносильно тому, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} |x|^p \partial_x^\alpha |\psi(x) - \psi_R(x)| \to 0, R \to \infty$$

Но

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} |x|^p \partial_x^\alpha |\psi(x) - \psi_R(x)| \leq \int\limits_{|y| > R} dy |x|^p |\partial_x^\alpha \varphi(x, y)|$$

В силу того, что $\varphi(x, y) \in S((R)^m \times (R)^l)$

$$\partial_x^\alpha \varphi(x, y) \leq \frac{C}{(1 + |x|)^{p+1} (1 + |y|^{2l})}$$

Из этого следует, что

$$\int\limits_{|y| > R} dy |x|^p |\partial_x^\alpha \varphi(x, y)| \leq sup \frac{|x|}{(1 + |x|)^{p+1}} \int\limits_{|y| > R} \frac{dy}{1 + |y|^{2l}} \to 0$$

Утверждение (1) доказано.

Воспользуемся леммой 2.2.9. из Конста.

Лемма 2.2.9. *Пусть обобщённая функция $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, функция $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{k+l})$, а функция $b(z)$ для $z \in \mathbb{R}^l$ является непрерывной функцией медленного роста. Тогда для любого $R > 0$ справедливо равенство:*

$$\left\langle f(y), \int\limits_{|z|<R} dz\, b(z)\, \psi(y,z) \right\rangle = \int\limits_{|z|<R} dz\, b(z) \left\langle f(y), \psi(y,z) \right\rangle .$$

Доказательство. Пусть P — разбиение шара $|z| < R$ измеримыми непересекающимися множествами $A_1, \ldots, A_N$ мелкости

$$|P| = \max_{i \in \overline{1,N}} \operatorname{diam}(A_i).$$

Рассмотрим сумму Римана интеграла $\int\limits_{|z|<R} dz\, b(z)\, \psi(y,z)$ для разбиения P и произвольных векторов $z_i \in A_i$ для любого $i \in \overline{1,N}$:

$$\sigma_P(y) = \sum_{i=1}^{N} b(z_i) \psi(y, z_i) \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{A_i} dz\, b(z_i) \psi(y, z_i),$$

В силу линейности функционала f, справедливо равенство

$$\left\langle f(y), \sigma_P(y) \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} b(z_i) \left\langle f(y), \psi(y, z_i) \right\rangle \mu(A_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{A_i} dz\, b(z_i) \left\langle f(y), \psi(y, z_i) \right\rangle .$$

Так как при $|P| \to 0$ имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{N} b(z_i) \left\langle f(y), \psi(y, z_i) \right\rangle \mu(A_i) \to \int\limits_{|z|<R} dz\, b(z) \left\langle f(y), \psi(y,z) \right\rangle ,$$

то мы имеем равенство

$$\lim_{|P| \to 0} \left\langle f(y), \sigma_P(y) \right\rangle = \int\limits_{|z|<R} dz\, b(z) \left\langle f(y), \psi(y,z) \right\rangle .$$

Очевидно, что $\sigma_P \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$. Если мы докажем, что

$$\sigma_P(y) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)}{\to} \int\limits_{|z|<R} dz\, b(z)\, \psi(y,z), \tag{2.2.11}$$

то получим равенство

$$\lim_{|P| \to 0} \left\langle f(y), \sigma_P(y) \right\rangle = \left\langle f(y), \int\limits_{|z|<R} dz\, b(z)\, \psi(y,z) \right\rangle,$$

т. е. утверждение леммы будет доказано. Определим функцию $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ по формуле

$$\eta(y) = \int\limits_{|z|<R} dz\, b(z)\, \psi(y,z), \quad y \in \mathbb{R}^k.$$

Для доказательства соотношения (2.2.11) нам требуется показать, что для любого числа $q \in \mathbb{N}_0$ и мультииндекса $\alpha \in \mathbb{N}_0^k$ выполнено:

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^k} \left(|y|^q \left| D_y^\alpha \sigma_P(y) - D_y^\alpha \eta(y) \right| \right) \to 0 \quad \text{при} \quad |P| \to 0.$$

Покажем это последнее соотношение. Так как функция $b(z)$ имеет медленный рост, то она ограничена на шаре $|z| < R$, т. е. существует число $M > 0$, такое, что $|b(z)| \le M$ при $|z| < R$. В силу вложения $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{k+l})$ имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists d > 0 : \quad \forall y \in \mathbb{R}^k : \quad |y| > d, \quad \forall z \in \mathbb{R}^l \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad |y|^q \left| D_y^\alpha \psi(y,z) \right| \le \varepsilon.$$

Следовательно, при $|y| > d$ получаем:

$$|y|^q \left| D_y^\alpha \sigma_P(y) - D_y^\alpha \eta(y) \right| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^N \int\limits_{A_i} dz\, |b(z)||y|^q \left(\left| D_y^\alpha \psi(y, z_i) \right| + \left| D_y^\alpha \psi(y, z) \right| \right) \le$$
$$\le \sum_{i=1}^N \int\limits_{A_i} dz\, 2M\varepsilon = \int\limits_{|z|<R} dz\, 2M\varepsilon = R^l V_l 2M\varepsilon,$$

где $V_l = \int\limits_{|z|<1} dz$ — объём единичного шара в $\mathbb{R}^l$.

Далее, функция $\binom{y}{z} \mapsto |y|^q b(z) D_y^\alpha \psi(y, z)$, по условию, непрерывна по совокупности переменных y и z на R^{k+l}, и, поэтому, является равномерно непрерывной на компакте $|y| \le d$ и $|z| \le R$ в силу теоремы Кантора. Это, в частности, означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \gamma > 0 : \quad \forall y \in \mathbb{R}^k,\ z_1 \in \mathbb{R}^l,\ z_2 \in \mathbb{R}^l :$$
$$|z_1| \le R,\ |z_2| \le R,\ |z_1 - z_2| \le \gamma,\ |y| \le d \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad |y|^q \left| b(z_1) D_y^\alpha \psi(y, z_1) - b(z_2) D_y^\alpha \psi(y, z_2) \right| \le \varepsilon.$$

Следовательно, если для заданного числа $\varepsilon > 0$ мелкость разбиения P удовлетворяет неравенству $|P| \le \gamma$, то при $|y| \le d$ получаем:

$$|y|^q \left| D_y^\alpha \sigma_P(y) - D_y^\alpha \eta(y) \right| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^N \int\limits_{A_i} dz\, |y|^q \left| b(z_i) D_y^\alpha \psi(y, z_i) - b(z) D_y^\alpha \psi(y, z) \right| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^N \int\limits_{A_i} dz\, \varepsilon = \int\limits_{|z|<R} dz\, \varepsilon = R^l V_l \varepsilon.$$

Следовательно, мы доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\gamma > 0$, такое, что для любого разбиения P шара $|z| < R$ мелкости $|P| \le \gamma$ и для любого $y \in \mathbb{R}^k$ справедливо неравенство:

$$|y|^q \left| D_y^\alpha \sigma_P(y) - D_y^\alpha \eta(y) \right| \le R^l V_l (1 + 2M)\varepsilon.$$

Это доказывает соотношение (2.2.11). ■

Итого получаем:

$$\langle f(x), \psi(x) \rangle \overset{(1)}{=} \lim_{R\to\infty} \langle f(x), \psi_R(x) \rangle \overset{2.2.9}{=} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|y|\le R} \langle f(x); \varphi(x, y) \rangle\, dy$$

□

Преобразование фурье обобщенной функции как действие на комплексную экспоненту и преобразование фурье свертки обобщенных функций - из главы 2.8. конспекта Конста(стр. 176-183)

2.8 Преобразование Фурье как действие на комплексную экспоненту

Заметим, что для произвольной абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}^m$ функции $f(x)$ её классическое преобразование Фурье

$$\mathcal{F}\left[\, f(x) \,\right](y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{i(x,y)}\, dx$$

имеет для каждого $y \in \mathbb{R}^m$ формальный вид действия регулярного функционала $f(x)$ на бесконечно гладкую функцию $e^{i(x,y)}$. Хотя при любом фиксированном $y \in \mathbb{R}^m$ функция $e^{i(x,y)} \notin \mathcal{S}\,(\mathbb{R}^m)$, но для любой срезки $\eta_R(x)$ имеем вложение:

$$\eta_R(x) e^{i(x,y)} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}\,(\mathbb{R}^m)\,.$$

Зафиксировав срезку $\eta_1(x) \in \mathcal{D}\,(\mathbb{R}^m)$, для любого числа $R > 0$ определим R—срезку вида $\eta_1\left(\frac{x}{R}\right)$. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}^m$ имеет место очевидное предельное соотношение:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{i(x,y)}\, dx = \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) e^{i(x,y)}\, dx = \\ = \lim_{R \to +\infty} \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) e^{i(x,y)} \right\rangle$$

Действительно, для любого $R > 0$ имеем:

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{i(x,y)}\, dx - \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) e^{i(x,y)}\, dx \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{|x|>R} f(x) \left(1 - \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right)\right) e^{i(x,y)}\, dx \right| \leq \\ \leq \left(1 + \sup_{z \in \mathbb{R}^m} |\eta_1(z)|\right) \int\limits_{|x|>R} |f(x)|\, dx \to 0$$

при $R \to +\infty$. Действуя по аналогии, теперь для произвольной обобщённой функции $f(x) \in \mathcal{S}'\,(\mathbb{R}^m)$ и любого числа $R > 0$ мы можем определить функцию

$$\phi_R(y) = \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) e^{i(x,y)} \right\rangle, \qquad y \in \mathbb{R}^m.$$

Рассмотрим функцию

$$\xi_R(x,y) = \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) e^{i(x,y)}, \qquad x \in \mathbb{R}^m, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Так как для любого $y \in \mathbb{R}^m$ носитель функции $x \mapsto \xi_R(x,y)$ совпадает с носителем срезки $\eta_1\left(\frac{x}{R}\right)$ и не зависит от y, то функция $\xi_R(x,y)$, очевидно, удовлетворяет условиям леммы 2.2.1. Действительно, пусть носитель функции $\eta_1(x)$ содержится в шаре радиуса $r > 1$. Тогда для любого $|x| > Rr$ и произвольных $y \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$, $\beta \in \mathbb{N}_0^m$ и $p \in \mathbb{N}_0$ получаем:

$$|x|^p D_y^\beta D_x^\alpha \xi_R(x,y) = 0,$$

т. е. имеет место соотношение:

$$|x|^p D_y^\beta D_x^\alpha \xi_R(x,y) \overset{y \in \mathbb{R}^m}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty.$$

Справедливо очевидное равенство:

$$D_x^\alpha e^{i(x,y)} = (ix)^\alpha e^{i(x,y)} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^m.$$

По лемме 2.2.1 получаем, что $\phi_R(y) \in C^\infty\,(\mathbb{R}^m)$, и для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ справедливо равенство:

$$D_y^\alpha \phi_R(y) = \left\langle f(x), D_y^\alpha \xi_R(x,y) \right\rangle = \\ = \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) D_y^\alpha e^{i(x,y)} \right\rangle = \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) (ix)^\alpha e^{i(x,y)} \right\rangle =$$

Далее, для любой функции $\varphi(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ имеем:

$$\phi_R(y)\varphi(y) = \langle f(x), \xi_R(x,y)\varphi(y)\rangle, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Так как функция $\xi_R(x,y)\varphi(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2m})$, то, в силу леммы 2.2.9, для любого $n \in \mathbb{N}$ получаем:

$$\int\limits_{|y|<n} \phi_R(y)\varphi(y)\,dy = \left\langle f(x), \int\limits_{|y|<n} \xi_R(x,y)\varphi(y)\,dy \right\rangle.$$

По лемме 2.2.8, при $n \to \infty$ имеет место соотношение:

$$\int\limits_{|y|<n} \xi_R(x,y)\varphi(y)\,dy \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)}{\to} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \xi_R(x,y)\varphi(y)\,dy.$$

Следовательно, существует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \phi_R(y)\varphi(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{|y|<n} \phi_R(y)\varphi(y)\,dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\langle f(x), \int\limits_{|y|<n} \xi_R(x,y)\varphi(y)\,dy \right\rangle = \left\langle f(x), \int\limits_{\mathbb{R}^m} \xi_R(x,y)\varphi(y)\,dy \right\rangle.$$

Таким образом, для любого $R > 0$ имеет место равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) e^{i(x,y)} \right\rangle dy =$$

$$= \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) e^{i(x,y)}\,dy \right\rangle =$$

$$= \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) \mathcal{F}\left[\varphi(y)\right](x) \right\rangle.$$

Так как отображение $\varphi \mapsto \left\langle f(x), \eta_1\left(\frac{x}{R}\right) \mathcal{F}\left[\varphi(y)\right](x) \right\rangle$ является линейным и непрерывным на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, то из полученного равенства следует, что функция $\phi_R(y) = \left\langle f(x), \eta_1\left(\frac{x}{R}\right) e^{i(x,y)} \right\rangle$ определяет регулярный функционал в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$:

$$\langle \phi_R(y), \varphi(y)\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \phi_R(y)\varphi(y)\,dy = \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) \mathcal{F}\left[\varphi(y)\right](x) \right\rangle \quad (2.8.1)$$

для любой функции $\varphi(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Теперь в равенстве (2.8.1) хотелось бы перейти к пределу при $R \to +\infty$. Этому поможет следующая

Лемма 2.8.1. *Для любой основной функции $\psi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ выполнено:*

$$\eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) \psi(x) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)}{\to} \psi(x) \quad \text{при} \quad R \to +\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ и $p \in \mathbb{N}_0$. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, \alpha, p) > 0: \quad \forall\, |x| > \delta \quad \Rightarrow \quad |x|^p \left|D_x^\alpha \psi(x)\right| < \varepsilon.$$

Заметим, что $D_x^\alpha\left(\left(\eta_1\left(\frac{x}{R}\right) - 1\right)\psi(x)\right)$ имеет вид конечной линейной комбинации слагаемых вида $D_x^\beta\left(\eta_1\left(\frac{x}{R}\right) - 1\right) D_x^\gamma \psi(x)$ для произвольных мультииндексов β и γ вида $\beta + \gamma = \alpha$. Поэтому нам достаточно показать, что для таких β и γ имеет место соотношение

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m} \left(|x|^p D_x^\beta\left(\eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) - 1\right) D_x^\gamma \psi(x)\right) \to 0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty.$$

При $|x| \le R$ имеет место равенство:

$$D_x^\beta\left(\eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) - 1\right) = 0.$$

Определим число

Применяя лемму 2.8.1 для функции $\psi(x) = \mathcal{F}\left[\varphi(y)\right](x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, получаем:

$$\eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right)\mathcal{F}\left[\varphi(y)\right](x) \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)}{\to} \mathcal{F}\left[\varphi(y)\right](x) \quad \text{при} \quad R \to +\infty.$$

Отсюда находим, что существует

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(y)\left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) e^{i(x,y)}\right\rangle dy =$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right)\mathcal{F}\left[\varphi(y)\right](x)\right\rangle =$$
$$= \left\langle f(x), \mathcal{F}\left[\varphi(y)\right](x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\left[f(x)\right](y), \varphi(y)\right\rangle.$$

Следовательно, мы доказали, что в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ имеет место предельное соотношение:

$$\left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) e^{i(x,y)}\right\rangle \overset{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)}{\to} \mathcal{F}\left[f(x)\right](y) \quad \text{при} \quad R \to +\infty, \qquad (2.8.2)$$

которое проясняет смысл преобразования Фурье обобщённой функции $f(x)$ в терминах действия на комплексную экспоненту $e^{i(x,y)}$.

Задача 2.8.2. Пусть обобщённые функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат пространству $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Пусть $\mathcal{F}\left[g\right](y) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, и для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ функция $D^\alpha \mathcal{F}\left[g\right](y)$ имеет медленный рост. Тогда существует свёртка $f * g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, и имеет место равенство

$$\mathcal{F}\left[f * g\right](y) = \mathcal{F}\left[f\right](y)\,\mathcal{F}\left[g\right](y). \qquad (2.8.3)$$

Решение. Обозначим $h(y) = \mathcal{F}\left[g\right](y)$. Так как функция $h(y)$ бесконечно дифференцируема, и её частные производные любого порядка имеют медленный рост, то, согласно определению 2.1.14, в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ определено произведение $h(y)$ на любую обобщённую функцию. Зафиксируем произвольные функцию $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и 1–срезку $\eta_1(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Нам требуется доказать, что существует предел

$$\lim_{R\to+\infty} \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right)\left\langle g(y), \mathcal{F}\left[\varphi\right](x+y)\right\rangle\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\left[f\right](z), h(z)\varphi(z)\right\rangle.$$

Имеем:

$$\left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right)\left\langle g(y), \mathcal{F}\left[\varphi\right](x+y)\right\rangle\right\rangle =$$
$$\left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right)\left\langle \mathcal{F}^{-1}\left[h(z)\right](y), \mathcal{F}\left[\varphi(z)\right](x+y)\right\rangle\right\rangle =$$
$$= \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right)\left\langle h(z), \mathcal{F}_y^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\varphi\right](x+y)\right](z)\right\rangle\right\rangle$$

Заметим, что

$$\mathcal{F}\left[\varphi\right](x+y) = \mathcal{F}\left[\varphi(z)e^{i(x,z)}\right](y).$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\mathcal{F}_y^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\varphi\right](x+y)\right](z) = \varphi(z)e^{i(x,z)}.$$

Отсюда получаем, что

$$\left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right)\left\langle g(y), \mathcal{F}\left[\varphi\right](x+y)\right\rangle\right\rangle =$$
$$= \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right)\left\langle h(z), \varphi(z)e^{i(x,z)}\right\rangle\right\rangle =$$
$$= \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^m} dz\, h(z)\varphi(z)e^{i(x,z)}\right\rangle$$

Введём в рассмотрение функцию

$$\psi(x,z) = \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right)\varphi(z)e^{i(x,z)}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad z \in \mathbb{R}^m.$$

Далее, в силу леммы 2.2.9, имеет место равенство:

$$\left\langle f(x), \int\limits_{|z|<n} dz\, h(z)\psi(x,z) \right\rangle = \int\limits_{|z|<n} dz\, h(z) \left\langle f(x), \psi(x,z) \right\rangle.$$

Следовательно, получаем:

$$\left\langle f(x), \int\limits_{\mathbb{R}^m} dz\, h(z)\psi(x,z) \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle f(x), \int\limits_{|z|<n} dz\, h(z)\psi(x,z) \right\rangle =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{|z|<n} dz\, \left\langle f(x), h(z)\psi(x,z) \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dz\, h(z) \left\langle f(x), \psi(x,z) \right\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} dz\, h(z)\varphi(z) \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) e^{i(x,z)} \right\rangle.$$

Итак, мы показали, что:

$$\left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) \left\langle g(y), \mathcal{F}\left[\,\varphi\,\right](x+y) \right\rangle \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m} dz\, h(z)\varphi(z) \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) e^{i(x,z)} \right\rangle$$

Тогда, в силу соотношения (2.8.2), получаем:

$$\lim_{R\to+\infty} \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) \left\langle g(y), \mathcal{F}\left[\,\varphi\,\right](x+y) \right\rangle \right\rangle =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^m} dz\, h(z)\varphi(z) \left\langle f(x), \eta_1\left(\tfrac{x}{R}\right) e^{i(x,z)} \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\left[\,f\,\right](z), h(z)\varphi(z) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \mathcal{F}\left[\,f\,\right](z)\, h(z), \varphi(z) \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\left[\,f\,\right](z)\, \mathcal{F}\left[\,g\,\right](z), \varphi(z) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\,f\,\right](z)\, \mathcal{F}\left[\,g\,\right](z)\right](x), \mathcal{F}\left[\varphi(z)\right](x) \right\rangle.$$

Следовательно, доказано существование свёртки обобщённых функций $f(x)$ и $g(x)$, которая имеет вид:

$$(f*g)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\,f\,\right](z)\, \mathcal{F}\left[\,g\,\right](z)\right](x).$$

Отсюда немедленно следует равенство

$$\mathcal{F}\left[\,f*g\,\right](z) = \mathcal{F}\left[\,f\,\right](z)\, \mathcal{F}\left[\,g\,\right](z),$$

что и требовалось. □

8. Функция Грина линейного дифференциального оператора в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Достаточное условие существования единственной функции Грина. Функция Грина оператора $\triangle - k^2$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ для фиксированного $k > 0$, и ее предел при $k \to +0$.

Определение. Пусть $L : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m);\ L = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \partial_x^{\alpha(k)};\ \alpha(k) \in \mathbb{N}_0^m,\ a_k \in \mathbb{C}\ \forall k = \overline{1, N}$ - линейный дифференциальный оператор в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Тогда функция $\mathcal{E}(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ называется **функцией Грина** оператора L, если в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ выполняется:

$$L\mathcal{E}(x) = \delta(x) \tag{26}$$

Взяв Фурье от левой и правой частей, имеем в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$:

$$F\left[L\mathcal{E}(x)\right](y) = \left(\sum_{k=1}^{N} a_k (-iy)^{\alpha(k)}\right) F\left[\mathcal{E}\right](y) = 1 \tag{27}$$

Обозначим многочлен $\left(\sum\limits_{k=1}^{N} a_k (-iy)^{\alpha(k)}\right)$ за $P_L(y)$:

$$P_L(y) = \left(\sum_{k=1}^{N} a_k (-iy)^{\alpha(k)}\right), \tag{28}$$

и будем говорить, что многочлен $P_L(y)$ **отделен от нуля**, если $\exists C > 0 :\ |P_L(y)|\ \geq C > 0\ \forall y \in \mathbb{R}^m$. Если $P_L(y)$ отделен от нуля, то, очевидно,

$$\frac{1}{P_L(y)} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m)$$

$$\left|\partial_y^{\beta} \frac{1}{P_L(y)}\right| = \frac{|Q(y)|}{|P_L(y)|^{|\beta|+1}} \leq \frac{1}{C^{|\beta|+1}} \left|Q(y)\right|,$$

где $|Q_L(y)|$ - некоторый многочлен. Таким образом, $\frac{1}{P_L(y)}$ - бесконечно гладкая функция на $\mathbb{R}^m$, а все ее производные - функции медленного роста. Отсюда следует **достаточное условие существования единственной функции Грина**.

Лемма (Достаточное условие существования единственной функции Грина)**.** Пусть $P_L(y)$ отделен от нуля в $\mathbb{R}^m$. Тогда уравнение $L\mathcal{E}(x) = \delta(x)$ имеет единственное решение в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, причем

$$\mathcal{E}(x) = F^{-1}\left[\frac{1}{P_L(y)}\right](x). \tag{29}$$

Доказательство. Ну действительно, поскольку $P_L(y)$ отделен от нуля в $\mathbb{R}^m$, то как было показано выше, $\frac{1}{P_L(y)}$ бесконечно гладкая в $\mathbb{R}^m$, и все ее производные - функции медленного роста, а значит определено умножение на $\frac{1}{P_L(y)}$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Отсюда:

$$P_L(y)F\left[\mathcal{E}\right](y) = 1 \Longleftrightarrow F\left[\mathcal{E}\right](y) = \frac{1}{P_L(y)} \Longleftrightarrow \mathcal{E}(x) = F^{-1}\left[\frac{1}{P_L(y)}\right](x).$$

□

Более того, если $P_L(y)$ отделим на $\mathbb{R}^m$, то $\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ уравнение $Lu(x) = f(x);\ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ имеет единственное решение:

$$u(x) = F^{-1}\left[\frac{1}{P_L(y)}F[f](y)\right](x) \tag{30}$$

Функция Грина оператора $\triangle - k^2$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $\triangle_x - k^2 = L : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3),\ x \in \mathbb{R}^3,\ k > 0$ - фиксированное число. Решаем уравнение $L\mathcal{E}(x) = \delta(x)$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Находим $P_L(y) = -|y|^2 - k^2 \leq k^2 < 0\ \forall y \in \mathbb{R}^3$, т.е. многочлен

отделен от нуля. А значит, из достаточного условия существования единственной функции Грина, единственное решение в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ имеет вид:

$$\mathcal{E}(x) = F^{-1}\left[-\frac{1}{|y|^2 + k^2}\right](x). \tag{31}$$

Посчитаем эту функцию. Для этого $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ запишем:

$$\langle \mathcal{E}(x), \varphi(x)\rangle = \left\langle F\left[\mathcal{E}\right](y), F^{-1}\left[\varphi\right](y)\right\rangle = -\left\langle \frac{1}{|y|^2+k^2}, \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx e^{-i(x,y)}\varphi(x)\right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \underbrace{dy \frac{1}{|y|^2+k^2} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx e^{-i(x,y)}\varphi(x)}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)}}_{\in L_1(\mathbb{R}^3)}$$

К сожалению, нам не удастся в лоб переставить интегралы по Фубини, поскольку в $\mathbb{R}^3$ функция $\frac{e^{i(x,y)}\varphi(x)}{|y|^2+k^2}$ не является абсолютно сходящейся по y - у y слишком маленькая степень. С другой стороны, $\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx e^{-i(x,y)}\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, поскольку фурье от пробной функции - пробная функция. При этом, $\frac{1}{|y|^2+k^2}$ ограничена. Произведение ограниченной функции на пробную, естественно, даст функцию абсолютно сходящуюся по y. Поэтому можно воспользоваться свойством непрерывности интеграла Лебега по убыванию множеств (см. Карасевские лекции теорема 5.63), что мы и сделаем:

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{|y|\leq R} dy \frac{1}{|y|^2+k^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx e^{-i(x,y)}\varphi(x) =$$

Теперь опять посмотрим на функцию $\frac{e^{i(x,y)}\varphi(x)}{|y|^2+k^2}$. Покажем, что она $\in L_1(x \in \mathbb{R}^3, |y| \leq R)$. Ну действительно, учитывая, что $\frac{1}{|y|^2+k^2} \leq \frac{1}{k^2}\ \forall y \in \mathbb{R}^3$,

$$\int\limits_{|y|\leq R} dy \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \frac{|\varphi(x)|}{|y|^2+k^2} = \int\limits_{|y|\leq R} \frac{dy}{|y|^2+k^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx|\varphi(x)| \leq \frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{k^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx|\varphi(x)| \leq +\infty$$

Отлично, тогда мы можем радостно переставить интегралы **по Фубини**:

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\varphi(x) \underbrace{\int\limits_{|y|\leq R}\frac{e^{-i(x,y)}}{|y|^2+k^2}dy}_{\forall x \neq 0} =$$

Для $x = 0$ интеграл по y сходиться не будет при $R \to +\infty$, как уже обсуждалось выше, поэтому эту точку мы просто выкидываем, потому что для интеграла Лебега множества меры нуль роли не играют. Проинтегрируем интеграл по y в сферических координатах, где сонаправим ось z с направлением вектора x. Тогда имеем $(x, y) = |x| \cdot r \cdot \cos\alpha$, где $\alpha \in [0;\ \pi]$ - полярный угол, а $r = |y| \in [0; R]$.

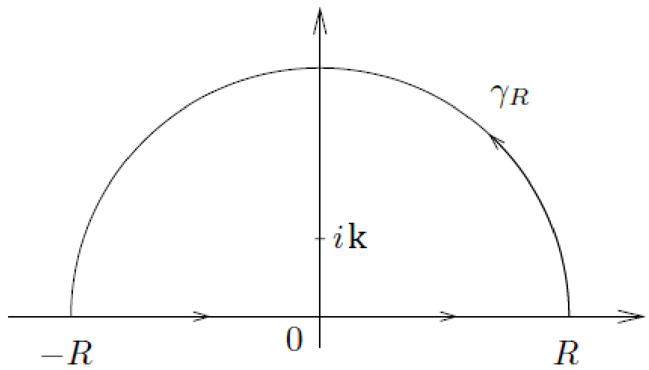
$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\varphi(x)\int\limits_0^R \frac{r^2 dr}{r^2+k^2} 2\pi \underbrace{\int\limits_0^\pi d\alpha \sin\alpha\ e^{-i|x|r\cos\alpha}}_{\tau = \cos\alpha} =$$

Считаем промежуточный интеграл по τ:

$$\int_{-1}^{1} d\tau \ e^{-i|x|r\tau} = \frac{-2i\sin(|x|r)}{-i|x|r} = \frac{2\sin(|x|r)}{|x|r}$$

Подставляя, замечаем, что функция по r - четная, а значит интеграл можно переписать для удобства:

$$= -\frac{2}{(2\pi)^2}\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} dx\frac{\varphi(x)}{|x|}\underbrace{\int_0^R \frac{r\sin(|x|r)dr}{r^2+k^2}}_{=\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\frac{r\sin(|x|r)dr}{r^2+k^2}} == -\frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} dx\frac{\varphi(x)}{|x|}\mathrm{Im}\int_{-R}^{R}\frac{re^{i|x|r}dr}{r^2+k^2}$$



Рассмотрим комплексный интеграл $\int\limits_{\gamma_R}\frac{ze^{i|x|z}dz}{z^2+k^2}$ по контору γ_R, изображенному на схеме. У подыинтегральной функции есть полюс первого порядка в точке ik. Соответственно, интеграл даст не нуль при $\forall R > k$. Согласно теореме Коши, получаем:

$$\int_{\gamma_R}\frac{ze^{i|x|z}dz}{z^2+k^2} = 2\pi i \ \operatorname*{res}_{ik} \ \frac{ze^{i|x|z}}{z^2+k^2} = 2\pi i\frac{e^{i|x|ik}}{2} = \pi i e^{-|x|k}$$

Отсюда получаем,

$$\underbrace{\int_{-R}^{R}\frac{re^{i|x|r}dr}{r^2+k^2}}_{\to\pi i e^{-|x|k}, \ R\to+\infty} = \pi i e^{-|x|k} - \underbrace{\int_{C_R}\frac{ze^{i|x|z}dz}{z^2+k^2}}_{\to 0, \ R\to+\infty},$$

где последний интеграл стремится к нулю при $R\to+\infty$ по лемме Жордана. Нам необходимо обосновать занесение предела под знак интеграла в выражении

$$-\frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} dx\frac{\varphi(x)}{|x|}\mathrm{Im}\int_{-R}^{R}\frac{re^{i|x|r}dr}{r^2+k^2}$$

Для этого проверим условия теоремы Лебега об ограниченной сходимости. Нам нужно предъявить абсолютно интегрируемую функцию, которая мажорирует нашу подыинтегральную функцию для любого R.Покажем, что подойдет функция $h(x) = \frac{|\varphi(x)|}{|x|}\cdot M$, где M - некоторая константа, которую предстоит выяснить. Оценим φ как $|\varphi(x)|\leq\frac{C}{1+|x|^4}, \ C>0, \ \forall x\in\mathbb{R}^3$, поскольку $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\varphi(x)|}{|x|}dx \leq 4\pi\int_0^{+\infty}\frac{r^2Cdr}{r(1+r^4)} = 2\pi C\int_0^{+\infty}\frac{dr^2}{r(1+(r^2)^2)} = \pi^2 C < +\infty$$

Отсюда $\frac{|\varphi(x)|}{|x|} \in L_1(\mathbb{R}^3)$, а значит и $h(x)$ тоже. Докажем теперь, что

$$\exists R_0 > k\ \exists M > 0 : \forall x \neq 0\ \forall R \geq R_0 \Rightarrow \left| \int\limits_{-R}^{R} \frac{re^{i|x|r}dr}{r^2+k^2} \right| \leq M$$

Имеем следующую оценку:

$$\left| \int\limits_{-R}^{R} \frac{re^{i|x|r}dr}{r^2+k^2} \right| \leq \underbrace{\left|\pi i e^{-|x|k}\right|}_{=\pi e^{-|x|k} < \pi} + \left| \int\limits_{C_R} \frac{ze^{i|x|z}dz}{z^2+k^2} \right|$$

Показатель экспоненты всегда меньше нуля, поэтому оценили сверзу π, для интеграла по полуокружности оценим следующим образом:

$$\left| \int\limits_{C_R} \frac{ze^{i|x|z}dz}{z^2+k^2} \right| \leq \int\limits_{C_R} \frac{|z|\left|e^{i|x|z}\right||dz|}{|z^2+k^2|} \leq \int\limits_{C_R} \frac{R}{R^2-k^2}|dz| = \frac{\pi R^2}{R^2-k^2} \leq 2*\pi$$

Где мы использовали $|z| = R$, $\left|z^2+k^2\right| \geq |z|^2 - k^2 = R^2-k^2$, $\left|e^{i|x|z}\right| = e^{-|x|\mathrm{Im}z} < 1$, $\mathrm{Im}z \geq 0\ \forall z \in C_R$, $x \neq 0$. В последнем переходе мы потребовали $R^2 \geq k^2$.

Таким образом, мы нашли $R_0 = \sqrt{2}k$ и $M = 3\pi$ и теперь можем воспользоваться теоремой Лебега об ограниченной сходимости.

$$-\frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \frac{\varphi(x)}{|x|} \mathrm{Im} \int\limits_{-R}^{R} \frac{re^{i|x|r}dr}{r^2+k^2} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \frac{\varphi(x)}{|x|} \mathrm{Im}\pi i e^{-|x|k} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \underbrace{\left(-\frac{e^{-|x|k}}{4\pi|x|}\right)}_{\in L_1(\mathbb{R}^3)} \varphi(x) = \left\langle -\frac{e^{-|x|k}}{4\pi|x|}, \varphi(x) \right\rangle$$

Отсюда получаем искомую функцию Грина:

$$\boxed{\mathcal{E}(x) = -\frac{e^{-|x|k}}{4\pi|x|}} \tag{32}$$

Предел $k \to +0$

Зададимся вопросом существования предела $\lim\limits_{k\to+0} \mathcal{E}_k$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, где $\mathcal{E}_k(x) = -\frac{e^{-|x|k}}{4\pi|x|}$ - функция Грина с параметром k.
Для этого $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ запишем действие:

$$\lim_{k\to+0} \langle \mathcal{E}_k(x), \varphi(x) \rangle = -\frac{1}{4\pi} \lim_{k\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \frac{\varphi(x)}{|x|} e^{-|x|k} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \frac{\varphi(x)}{|x|} = \left\langle -\frac{1}{4\pi|x|}, \varphi(x) \right\rangle$$

Легко видеть, что $\forall k > 0,\ \forall x \neq 0 \left|\frac{\varphi(x)}{|x|} e^{-|x|k}\right| \leq \left|\frac{\varphi(x)}{|x|}\right| \in L_1(\mathbb{R}^3)$, как обсуждалось ранее в этом билете. Поэтому мы смогли воспользоваться теоремой Лебега об ограниченной сходимости и занесли предел под знак интеграла. Таким

образом, мы построили функционал, который очевидно является линейным. Осталось доказать его непрерывность по $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Для этого проверим следующее:

$$\varphi_n \overset{S(R^3)}{\to} \varphi \Longrightarrow \langle \mathcal{E}_0, \varphi_n \rangle \overset{C}{\to} \langle \mathcal{E}_0, \varphi \rangle$$

Поскольку $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, то имеем следующую оценку:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon)\ \forall\ n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{1 + |x^4|}\ \forall x \in \mathbb{R}^3$$

Но тогда

$$|\langle \mathcal{E}_{\prime}, \varphi_n - \varphi \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{dx}{|x|(1 + |x|^4)} = \frac{\varepsilon}{4\pi} 4\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\varepsilon\pi}{4}\ \rightarrow\ 0$$

Так, мы показали, что в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ существует предел

$$\lim_{k \to +0} \mathcal{E}_k = \mathcal{E}_0 = -\frac{1}{4\pi|x|}$$

Осталось продемонстрировать, что он является также функцией Грина оператора Лапласа, т.е. $\triangle_x \mathcal{E}_0(x) = \delta(x)$. Для этого $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ запишем:

$$\langle \triangle \mathcal{E}_0, \varphi \rangle = \langle \mathcal{E}_0, \triangle \varphi \rangle = \lim_{k \to +0} \langle \mathcal{E}_k, \triangle \varphi \rangle = \lim_{k \to +0} \left(\left\langle \mathcal{E}_k, (\triangle - k^2)\varphi \right\rangle + k^2 \left\langle \mathcal{E}_k, \varphi \right\rangle \right) =$$

$$= \lim_{k \to +0} \left(\langle \delta, \varphi \rangle + k^2 \left\langle \mathcal{E}_k, \varphi \right\rangle \right) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

Таким образом, мы показали, что функция Грина уравнения Лапласа действительно может быть получена как предельный переход функции Грина уравнения $\left(\triangle_x - k^2\right) \mathcal{E}_k(x) = \delta(x)$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$

9. Метод регуляризации и вычисление функции Грина оператора Гельмгольца $\Delta + k^2$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ для фиксированного $k > 0$, и ее предел при $k \to +0$ как функция Грина опретаора Лапласа

это конец 14 - начало 15 лекции, но можно в принципе с начала 15-ой смотреть
Ищем функцию Грина оператора Гельмгольца:

$$L = \Delta_x + k^2 : S'(\mathbb{R}^3) \to S'(\mathbb{R}^3),\ k \text{ - фикс. число}$$

$$(\Delta_x + k^2)\mathcal{E}_k(x) = \delta(x)$$

$$(k^2 - |y^2|)F[\mathcal{E}_k] = 1$$

$$P_L(y) = k^2 - |y^2| \text{ не отделен от нуля } \Rightarrow$$

Для поиска частного решения проведем процедуру **регуляризации** (добавим малый мнимый параметр, чтобы отделиться от нуля):

$$P_\varepsilon(y) = k^2 - |y|^2 + i\varepsilon,\ \varepsilon > 0$$

$$|P_\varepsilon(y)| \geqslant \varepsilon > 0\ \forall y \in \mathbb{R}^3$$

Раз теперь мы можем делить, рассмотрим решение:

$$P_\varepsilon(y)u_\varepsilon(y) = 1 \text{ в } S'(\mathbb{R}^3)$$

$$u_\varepsilon(y) = \frac{1}{k^2 - |y|^2 + i\varepsilon} \in S'(\mathbb{R}^3)$$

$$w_\varepsilon(x) \overset{den}{=} F^{-1}[u_\varepsilon(y)](x)$$

Если $\exists \lim\limits_{\varepsilon \to +0} w_\varepsilon(x) = w_0(x)$ в $S'(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{\varepsilon \to +0} u_\varepsilon(y) = u_0(y)$ и $w_0(x) = F^{-1}[u_0](x)$, то :

$$\langle (k^2 - |y|^2)u_0(y),\ \varphi(y)\rangle = \lim_{\varepsilon \to +0}\langle u_\varepsilon(y),\ (k^2 - |y|^2 \pm i\varepsilon)\varphi(y)\rangle = \langle 1,\ \varphi(y)\rangle - \lim_{\varepsilon \to +0} \underbrace{i\varepsilon}_{0} \underbrace{\langle u_\varepsilon(y),\ \varphi(y)\rangle}_{\langle u_0(y),\ \varphi(y)\rangle \in \mathbb{C}}$$

$$\Rightarrow\ (k^2 - |y|^2)u_0(y) = 1$$

$$(k^2 + \Delta)w_0 = \delta(x)$$

$$w_0 = \mathcal{E}_k \text{ - одна из функций Грина}$$

Итак, $\forall \varphi\ \in\ S(\mathbb{R}^3)$

$$\langle w_\varepsilon,\ \varphi(y)\rangle = \langle F^{-1}[u_\varepsilon(y)](x),\ \varphi(x)\rangle = \langle u_\varepsilon(y),\ F^{-1}[\varphi(x)](y)\rangle = \langle \frac{1}{k^2 + i\varepsilon - |y|^2},\ \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\ e^{-i(x,y)}\varphi(x)\rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\frac{dy}{k^2 + i\varepsilon - |y|^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\ e^{-i(x,y)}\varphi(x)}_{\in L_1(x \in \mathbb{R}^3),\ y} =$$

10. Функция Грина оператора Лапласа в $S'(\mathbb{R}^3)$ и вычисление в $S'(\mathbb{R}^3)$ обобщённого решения уравнения Пуассона с абсолютно интегрируемым на $\mathbb{R}^3$ источником, формула Пуассона

Будем работать с уравнением Пуассона:

$$\Delta U(x) = f(x)$$

где $f(x) \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^3)$, т.е. $\int\limits_{\mathbb{R}^3} |f(x)|\, dx$, $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^3)$ и $\langle f, g\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\varphi(x)dx$

Функция Грина опекратора Лапласа (была получена в билетах 8 и 9, как предел функции Грина оператора Гельмгольца при $k \to +0$):

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|},\ x \in \mathbb{R}^3$$

Т.е. $\Delta E = \delta(x)$ в $S'(\mathbb{R}^3)$

Для нахождения решения уравнения требуется доказать существование и найти свёртку:

$$f(x) * E(X) \text{ в } S'(\mathbb{R}^3)$$

По определению:

$$\forall \varphi \in S'(\mathbb{R}^3)\ \forall \text{ 1-срезки } \eta_1\left(\frac{x}{R}\right) \in D(\mathbb{R}^3) \mapsto$$

$$\lim_{R\to\infty}\left\langle f(x), \eta_1\left(\frac{x}{R}\right)\langle E(y), \varphi(x+y)\rangle\right\rangle = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx f(x)\eta_1\left(\frac{x}{R}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{dy}{-4\pi}\frac{\varphi(x+y)}{|y|} \mathrel{\mathring{=}}$$

Требуется доказать, что $\exists C_\varphi > 0 : \left|\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{dy\varphi(x+y)}{|y|}\right| \leq C_\varphi,\ \forall x \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ Тогда

$$\left|f(x)\eta_1\left(\frac{x}{R}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{dy}{-4\pi}\frac{\varphi(x+y)}{|y|}\right| \leq \frac{MC_\varphi}{4\pi}\,|f(x)| \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^3)$$

Т.е. выполнены условия теоремы Лебега об ограниченной сходимости

Докажем существование C_φ

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{dy\varphi(x+y)}{|y|}\right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{|dy\varphi(x+y)|}{|y|} = /y = z - x/ = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{dz|\varphi(z)|}{|z-x|} \preccurlyeq$$

$$\left(\varphi \in S(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \exists M_\varphi > 0:\ |\varphi(x)| \leq \frac{M_\varphi}{1+|z|^4}\right)$$

$$\preccurlyeq \int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{dzM_\varphi}{(1+|z|^4)|z-x|} = /\text{в сфер. коорд.: } |z| = r, \alpha - \text{угол между 0x и 0z}/=$$

$$= 2\pi M_\varphi\int\limits_0^{+\infty}\frac{r^2dr}{1+r^4}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin(\alpha)d\alpha}{\sqrt{r^2+|x|^2-2r|x|\cos\alpha}} = /\cos\alpha = \xi/=$$

$$= 2\pi M_\varphi\int\limits_0^{+\infty}\frac{r^2dr}{1+r^4}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\xi}{\sqrt{r^2+|x|^2-2r|x|\xi}} = (\text{по Th Ньютона-Лейбница}) =$$

$$= 2\pi M_\varphi\int\limits_0^{+\infty}\frac{r^2dr}{1+r^4}\cdot\frac{r+|x|-|r-|x||}{r|x|} = \frac{2\pi M_\varphi}{|x|}\left(\int\limits_0^{|x|}\frac{r}{1+r^4}\cdot 2rdr + \int\limits_{|x|}^{+\infty}\frac{r}{1+r^4}\cdot 2|x|dr\right) \leq$$

$$= (r \leq |x| \text{ в 1-ом инт-ле, по 1-ому r}) \leq |x|\arctan|x|^2 + |x|\left(\frac{\pi}{2} - \arctan|x|^2\right) = \pi^2 M_\varphi = C_\varphi$$

Итак мы доказали существование C_φ. Теперь можно занести предел под интеграл и 1-срезка уходит:

$$\mathrel{\mathring{=}} -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz \frac{f(x)\varphi(z)}{|z-x|} \mathrel{\mathring{=}}$$

Т.к.

$$\frac{|f(x)\varphi(z)|}{|z-x|} \leq \frac{M_\varphi |f(x)}{(1+|z|^4)|z-x|} \in \mathbb{L}_1(x\in\mathbb{R}^3,\ z\in\mathbb{R}^3)$$

То по Th Фубини

$$\mathrel{\mathring{=}} -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dz \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \frac{f(x)\varphi(z)}{|z-x|} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz\varphi(z) \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \frac{f(x)}{(-4\pi)|z-x|} = (\text{абс. сх. по } z\in\mathbb{R}^3 \text{ по Th Фубини}) =$$

$$= \left\langle -\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \frac{f(x)}{(-4\pi)|z-x|}, \varphi(z) \right\rangle$$

Итак предел существует и не зависит от срезки.
Линейность следует из линейности интеграла по функции.
Осталось показать непрерывность:

$$S(\mathbb{R}^3) \ni \varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz\varphi(z) \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \frac{f(x)}{(-4\pi)|z-x|} = \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dxdz \frac{f(x)\varphi(z)}{(-4\pi)|z-x|} \in \mathbb{C}$$

Требуется доказать, что последний интеграл непрерывно зависит от φ
Пусть $\varphi_n \to \varphi$ в $S(\mathbb{R}^3)$
Тогда по определению:

$$(1+|z|^4)|\varphi_n(z)-\varphi(z)| \rightrightarrows 0, (z\in\mathbb{R}^3, n\to\infty)$$

$$\forall\varepsilon>0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon) \forall z\in\mathbb{R}^3 \mapsto |\varphi_n - \varphi(z)| \leq \frac{\varepsilon}{1+|z|^4}$$

Тогда

$$\left| \left\langle -\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \frac{f(x)}{(-4\pi)|z-x|}, (\varphi_n-\varphi)(z) \right\rangle \right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} dxdz \frac{|f(x)||(\varphi_n-\varphi)(z)|}{(4\pi)|z-x|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx|f(x)\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{dz|(\varphi_n-\varphi)(z)|}{|z-x|}$$

$$\leq /x\neq 0/ \leq \pi^2\varepsilon ||f||_{\mathbb{L}_1(\mathbb{R}^3)|}\cdot\frac{1}{4\pi}$$

Следовательно непрерывность по φ есть. Итак, решение уравнения:

$$U(z) = f(z) * E(z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \frac{f(x)}{|z-x|}$$

11. Вторая гладкость на открытом множестве $G \in \mathbb{R}^3$ обобщённого решения уравнения Пуассона в $S'(\mathbb{R}^3)$ с абсолютно интегрируемым на $\mathbb{R}^3$ и непрерывно-дифференцируемым на G источником

Теорема. Пусть $G \in \mathbb{R}^3$ открытое множество, $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^3) \cap C^1(G)$.
Тогда функция $U(z) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \dfrac{f(x)}{|z-x|} \in C^2(G)$

Доказательство.

$$\forall x_0 \in G\ \exists r_0 > 0 :\ B_{2r_0}(x_0) \in G,\ B_{2r_0}(x_0) = x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| \leq 2r_0$$

$$\text{Тогда } \forall x \in B_{r_0}(x_0) \Rightarrow B_{r_0}(x_0) \subset B_{2r_0}(x_0) \subset G$$

Обозначим

$$M_0 = \max_{z \in B_{2r_0}(x_0)} |f(z)| < +\infty$$

$$M_1 = \max_{z \in B_{2r_0}(x_0)} |\nabla f(z)| < +\infty$$

$$h(t) = f(x + t(y - x))$$

$$\forall y, x \in B_{2r_0}(x_0)\ \exists \xi \in (0,1) :\ |f(y) - f(x)| = |h(1) - h(0)| \leq |(\nabla f(x + \xi(y - x)), y - x)| \leq M_1 |y - x|$$

Шаг 1: Анализируем первую гладкость

$$\forall z \neq x \text{ рассмотрим } \nabla_x \left(-\frac{f(x)}{4\pi|x - z|} \right) = \frac{f(z)(x - z)}{4\pi|x - z|^3} \eqqcolon g(x, z)$$

Требуется доказать, что

$$\forall x \in B_{r_0}(x_0) \mapsto \int\limits_{|z - x_0| \geq 2r_0} dz g(x, z) \text{ сх. р-но. по } x \in B_{r_0}(x_0)$$

$$\text{и } \int\limits_{|z - x_0| \leq \varepsilon} dz g(x, z) \rightrightarrows 0, (\varepsilon \to +0)$$

Докажем первое утверждение

$$|z - x_0| \geq 2r_0,\ x \in B_{r_0}(x_0)$$

$$\Rightarrow |x - z| \geq |z - x_0| - |x - x_0| \geq r_0$$

$$\Rightarrow |g(x, z)| = \frac{|f(z)|}{4\pi|x - z|^2} \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^3) \text{ и не зависит от } x \in B_{r_0}(x_0)$$

Тогда

$$\left| \int\limits_{|z - x_0|} g(x, z) dz \right| \leq \int\limits_{|z - x_0| \geq R \geq 2r_0} \left| \frac{|f(z)|}{4\pi|x - z|^2} \right| \rightrightarrows 0,\ x \in B_{r_0}(x_0) \text{ (по признаку Вейерштрасса)}$$

Докажем второе утверждение

$$|z - x| \leq \varepsilon \leq r_0,\ |x - x_0| \leq r_0$$

$$\int\limits_{|z - x| \leq \varepsilon} dz |g(x, z) \leq \int\limits_{|z - x| \leq \varepsilon} dz \frac{M_0}{4\pi|z - x|^2} = /\text{сферические координаты}/ = M_0 \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{r^2 dr}{r^2} = M_0 \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int\limits_{|z - x| \leq \varepsilon} dz |g(x, z)| \rightrightarrows 0,\ (\varepsilon \to 0),\ x \in B_{2r_0}(x_0)$$

Итак

$$U \in C^1(B_{r_0}(x_0)) \text{ и } \nabla_x U(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz,\ \forall x \in B_{r_0}(x_0)$$

Шаг 2: Анализ второй гладкости

$$\forall x \in B_{r_0}(x_0) \text{ рассмотрим } \nabla_x U(x) = \int\limits_{B_{2r_0}(x_0)} dz g(x,z) + \int\limits_{|z-x_0|>2r_0} dz g(x,z) =$$

$$= \int\limits_{B_{2r_0}(x_0)} dz \frac{(f(z)-f(x))(x-z)}{4\pi(x-z)^3} + f(x) \int\limits_{B_{2r_0}(x_0)} dz \frac{(x-z)}{4\pi|x-z|^3} + \int\limits_{|z-x_0|>2r_0} dz g(x,z)$$

Исследуем каждое из трёх слагаемых

а) $\int\limits_{|z-x_0|>2r_0} dz g(x,z)$

Рассмотрим $\forall k = 1,2,3,\ |z-x_0| \geq 2r_0,\ x \in B_{r_0}(x_0)$

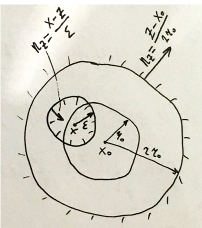
$$\frac{\partial}{\partial x_k} g(x,z) = \psi_k(x,z) = \frac{f(z)e_k}{4\pi|x-z|^3} - \frac{3f(x)(x-z)(x_k-z_k)}{4\pi|x-z|^5}$$

$$\text{т.к. } |x-z| \geq |x_0-z|_|x-x_0| \geq 2r_0 - r_0 = r_0$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k} g(x,z)\right| \leq \frac{|f(x)|}{4\pi r_0^3} + \frac{3|f(x)|}{4\pi r_0^3} = \frac{|f(x)|}{\pi r_0^3} \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^3),\ (x \in B_{r_0}(x_0), |z-x_0| \geq 2r_0)$$

$$\Rightarrow \int\limits_{|z-x_0|>2r_0} \psi_k(x,z)dz \text{ сх. р-но. по } x \in B_{r_0}(x_0) \text{ по пр. Вейерштрасса}$$

б) $f(x) \int\limits_{B_{2r_0}(x_0)} dz \frac{(x-z)}{4\pi|x-z|^3}$



Рассмотрим $\forall x \in B_{r_0}(x_0)$

$$\int\limits_{B_{2r_0}(x_0)} dz \frac{(x-z)}{|x-z|^3} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{B_{2r_0}(x_0) \setminus B_\varepsilon(x)} dz \frac{(x-z)}{|x-z|^3} = \left(x \neq z,\ \frac{x-z}{|x-z|^3} = \nabla_z \frac{1}{|x-z|}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{B_{2r_0}(x_0) \setminus B_\varepsilon(x)} dz \left(\nabla_z \frac{1}{|x-z|}\right) \mathrel{\mathring{=}}$$

Теорема. Гаусса-Остроградского (без док.)
Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^3$ ограниченая область с кусочно гладкой границей.
Пусть $\Phi \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$.
Тогда $\int\limits_{\Omega} \nabla\Phi dz = \int\limits_{\partial\Omega} \Phi_{n_z} dS_z$, где n_z – поле еденичных внешних нормалей к границе $\partial\Omega$ по отношению к Ω.

Рассмотрим $\int\limits_{\Omega} \frac{\partial\Phi}{\partial z_k} dz = \left(divF_k = \frac{\partial\Phi}{\partial z_k}\right) = \int\limits_{\Omega} divF_k dz = (\text{Г.О.}) = \int\limits_{\partial\Omega} (F_k, n_z) dS_z = \int\limits_{\partial\Omega} \Phi(n_z)_k dS_z$ Суммируюя по k=1,2,3

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\Phi dz = \int\limits_{\partial\Omega} \Phi_{n_z} dS_z$$

$$\mathrel{\mathring{=}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{B_{2r_0}(x_0) \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{n_z}{|x-z|} dS_z = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|z-x|=\varepsilon} \frac{(x-z)}{\varepsilon \cdot \varepsilon} dS_z + \int\limits_{|z-x_0|=2r_0} \frac{(z-x_0)}{2r_0|x-z|} dS_z$$

Предел первого интеграла равен нулю $\left|\int\limits_{|z-x|=\varepsilon} \frac{(x-z)}{\varepsilon^2} dS_z\right| \leq 4\pi\varepsilon \to 0$

Таким образом получаем по теореме о дифференцировании собственного интеграла по параметру (с учётом $|x-z| \geq r_0 > 0$) функцию из $C^\infty(x \in B_{r_0}(x_0))$

Тогда с учётом $f(x) \in C^1(x \in B_{r_0}(x_0))$:

$$f(x) \int\limits_{B_{2r_0}(x_0)} dz \frac{(x-z)}{4\pi|x-z|^3} = f(x) \int\limits_{|z-x_0|=2r_0} \frac{(z-x_0)}{2r_0|x-z|} dS_z \in C^1(x \in B_{r_0}(x_0))$$

в) $\int\limits_{B_{2r_0}(x_0)} dz \frac{(f(z)-f(x))(x-z)}{4\pi(x-z)^3}$

Рассмотрим $\forall z \neq x,\ z \in B_{r_0}(x_0),\ x \in B_{r_0}(x_0)$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{(f(z)-f(x))(x-z)}{|x-z|^3}\right) = h_k(x,z) =$$

$$= -\frac{f'_{x_k}(x)(x-z)}{|x-z|^3} + \frac{(f(z)-f(x))e_k}{|x-z|^3} - \frac{3(f(z)-f(x))(x-z)(x_k-z_k)}{|x-z|^5}$$

где e_k – k-ый базисный вектор

Требуется доказать, что

$$\int\limits_{|z-x|\leq\varepsilon} h_k(x,z)dz \rightrightarrows 0,\ (0 < \varepsilon \leq r)$$

Оценим интеграл:

$$\int\limits_{|z-x|\leq\varepsilon} |h_k(x,z)|dz \leq (|f(z)-f(x)| \leq M_1|z-x|) \leq \int\limits_{|z-x|\leq\varepsilon} dz \left(\frac{M_1}{|z-x|^2} + \frac{M_1}{|z-x|^2} + \frac{3M_1}{|z-x|^2}\right) =$$

$$= (|z-x| = r \leq \varepsilon) = 5M_1 \cdot 4\pi \int\limits_0^\varepsilon \frac{r^2 dr}{r^2} = 20M_1\pi\varepsilon,\ (\forall x \in B_{r_0}(x_0))$$

Таким образом получили по $x \in B_{r_0}(x_0)$ равномерную оценку.

Итак вторая гладкость доказана:

$$U \in C^2(B_{2r_0}(x_0)),\ \forall x \in B_{r_0}(x_0),\ (B_{2r_0}(x_0) \subset G)$$

□

Замечание 1: Из доказательства теоремы следуют соотношения:

$$\nabla_x U(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{f(z)(x-z)}{4\pi|x-z|^3} dz$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \nabla_x U(x) = \int\limits_{B_{2r_0}(x_0)} h_k(x,z)dz + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(f(x) \int\limits_{|z-x_0|=2r_0} \frac{(z-x_0)}{8\pi r_0|x-z|} dS_z\right) + \int\limits_{|z-x_0|\geq 2r_0} \psi(x,z)dz$$

$$\forall x_0 \in G,\ B_{2r_0}(x_0) \subset G$$

Замечание 2: По теореме о корректности обобщённого решения по отношению к классическому

$$\forall x \in G\ \exists \Delta_{\text{кл.}} U(x) = f(x),\ \text{где } U(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{f(z)}{4\pi|x-z|} dz,\ f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^3) \cap C^1(G)$$

12. Вычисление методом регуляризации функции Грина оператора Даламбера в пространсте $S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ и обобщенное решение волнового уравнения с источником медленного роста, запаздывающий потенциал.

Оператор Даламбера

$$L = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - a^2\Delta_x$$

где

$$x \in \mathbb{R}^3$$

$$t \in \mathbb{R}$$

Мы хотим найти функцию Грина $\mathcal{E}(t,x) \in S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ такую что

$$L\mathcal{E}(t,x) = \delta(t,x)$$

$$\operatorname{supp}\mathcal{E} \subset \left\{t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Будем решать равносильное уравнение. Применим преобразование Фурье

$$F\left[L\mathcal{E}(t,x)\right](\tau,y) = 1$$

$$\left((-i\tau)^2 - a^2\sum_{k=1}^{3}(-iy_k)^2\right)F\left[\mathcal{E}(t,x)\right](\tau,y) = 1$$

$$(-\tau^2 + a^2|y|^2)F\left[\mathcal{E}(t,x)\right](\tau,y) = 1$$

Рассмотрим многочлен

$$P_L(\tau,y) = a^2|y|^2 - \tau^2$$

где

$$y \in \mathbb{R}^3$$

$$\tau \in \mathbb{R}$$

Заметим, что он не отделен от нуля, поэтому придется вводить регуляризацию. Рассмотрим другой многочлен

$$P_\varepsilon(\tau,y) = a^2|y|^2 - (\tau + i\varepsilon)^2$$

и будем решать вспомогательную задачу в $S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$

$$P_\varepsilon(\tau,y)v_\varepsilon(\tau,y) = 1$$

$$|P_\varepsilon(\tau,y)| = |a|y| - \tau - i\varepsilon||a|y| - \tau + i\varepsilon| \geqslant \varepsilon^2$$

Этот многочлен уже отделим от нуля поэтому существует и единственно решение уравнеиня в обобщенных функциях

$$v_\varepsilon(\tau,y) = \frac{1}{P_\varepsilon(\tau,y)}$$

Если бы существовал предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0} F^{-1}\left[v_\varepsilon(\tau,y)\right](t,x) = g(t,x)$$

то предельная функция решала бы наше уравнение, покажем это

$$< P_L F[g], \varphi > = \lim_{\varepsilon\to+0} < v_\varepsilon, P_L\varphi >$$

это можно сделать поскольку спаривание непрерывно. Добавим и вычтем

$$\lim_{\varepsilon\to+0} < v_\varepsilon, P_L\varphi > = \lim_{\varepsilon\to+0} < v_\varepsilon, P_\varepsilon\varphi > + \lim_{\varepsilon\to+0} < v_\varepsilon, (P_L - P_\varepsilon)\varphi > =$$

$$= < 1, \varphi > + \lim_{\varepsilon\to+0} < (2\tau i\varepsilon - \varepsilon^2)v_\varepsilon, \varphi >$$

Поскольку

$$\lim_{\varepsilon\to+0} v_\varepsilon = F[g]$$

второй член стремится к нулю. Тем самым мы показали, что предельная функция будет искомым решением. Давайте найдем этот предел. Для любой пробной функции

$$\lim_{\varepsilon\to+0} < F^{-1}\left[\frac{1}{P_\varepsilon(\tau,y)}\right](t,x), \varphi(t,x) >= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy \int\limits_{\mathbb{R}} d\tau \frac{1}{a^2|y|^2 - |\tau+i\varepsilon|^2}\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{\mathbb{R}^4} dtdx\ \varphi(t,x)e^{-it\tau - i(x,y)}$$

Заметим, что подынтегральная функция абсолютно интегрируема при любом фиксированном $y \neq 0$(точка ноль не считается, это множество меры нуль, я в домике), т.е

$$\frac{1}{a^2|y|^2 - |\tau+i\varepsilon|^2}\ \varphi(t,x)\ e^{-it\tau - i(x,y)} \in \mathbb{L}_1\left[\tau\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^3\right]$$

Поэтому воспользуемся чудесной теоремой Фубини и переставим интералы по $d\tau$ и $dtdx$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy \int\limits_{\mathbb{R}^4} dtdx\ \frac{\varphi(t,x)}{(2\pi)^4}\ e^{-i(x,y)}\int\limits_{\mathbb{R}} d\tau\frac{e^{-it\tau}}{a^2|y|^2 - |\tau+i\varepsilon|^2}$$

Интеграл по $d\tau$ вычислим методами ТФКП, два полюса хуе мое, вычеты, так паддажи ебана. Оба полюса находятся в нажней части комплексной плоскости. При $t<0$ контур нужно замыкать сверху, при $t>0$ - снизу (лемма Жордана). Поэтому при $t<0$ полюсы не попадают внутрь контура - интеграл обнуляется. Итого получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} d\tau\frac{e^{-it\tau}}{a^2|y|^2 - |\tau+i\varepsilon|^2} = -2\pi i\theta(t)\left(\frac{e^{-it(a|y|-i\varepsilon)}}{-2a|y|} + \frac{e^{-it(-a|y|-i\varepsilon)}}{2a|y|}\right) = 2\pi\theta(t)\ e^{-t\varepsilon}\ \frac{\sin at|y|}{a|y|}$$

Подставим обратно и перепишем часть функции как Фурье по части переменных.

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy \int\limits_{\mathbb{R}^4} dtdx\ \frac{\varphi(t,x)}{(2\pi)^3}\ e^{-i(x,y)}\ \theta(t)\ e^{-t\varepsilon}\ \frac{\sin at|y|}{a|y|} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy \int\limits_{\mathbb{R}} dt\ \theta(t)\ e^{-t\varepsilon}\ \frac{\sin at|y|}{a|y|}\ F_x^{-1}[\varphi(t,x)](y)$$

Фурье по части переменных от пробной функции является пробной функцией. Также заметим, что

$$\theta(t)\ e^{-t\varepsilon}\ \frac{\sin at|y|}{a|y|} \leqslant t$$

$$t\ F_x^{-1}[\varphi(t,x)](y) \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}^4)$$

Проверив, что подынтегральная функция мажорируется абсолютно интегрируемой, можем воспользоваться теоремой Лебега об огр.сходимости и внести предел под интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy \int\limits_{\mathbb{R}} dt\ \theta(t)\ \lim_{\varepsilon\to+0} e^{-t\varepsilon}\ \frac{\sin at|y|}{a|y|}\ F_x^{-1}[\varphi(t,x)](y) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy \int\limits_{\mathbb{R}} dt\ \theta(t)\ \frac{\sin at|y|}{a|y|}\ F_x^{-1}[\varphi(t,x)](y) =$$

$$=< \theta(t)\ \frac{\sin at|y|}{a|y|},\ F_x^{-1}[\varphi(t,x)](y) >=< F_y^{-1}\left[\theta(t)\ \frac{\sin at|y|}{a|y|}\right](t,x), \varphi(t,x) >$$

Сейчас воспользуемся леммой, которую докажем позже

$$F[\delta_R(x)](y) = \frac{4\pi R\sin R|y|}{|y|}$$

Тогда получим

$$F_y^{-1}\left[\theta(t)\frac{\sin at|y|}{a|y|}\right](x) = \theta(t)\frac{\delta_{at}(x)}{4\pi a^2 t}$$

Подставим в свертку

$$< \theta(t)\frac{\delta_{at}(x)}{4\pi a^2 t}, \varphi >= \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{|x|=at} dS_x \frac{\varphi(t,x)}{4\pi a^2 t} = /at = r/ = \int\limits_0^{+\infty} dr \int\limits_{|x|=r} dS_x \frac{\varphi\left(\frac{|x|}{a}, x\right)}{4\pi a^2 |x|} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\left(\frac{|x|}{a}, x\right)}{4\pi a^2 |x|} = \int\limits_{\mathbb{R}^4} dtdx\ \varphi(t,x)\frac{\delta\left(t - \frac{|x|}{a}\right)}{4\pi |x| a^2} =< \frac{\delta\left(t - \frac{|x|}{a}\right)}{4\pi |x| a^2}, \varphi(t,x) >$$

Итого получаем ответ в пространстве обобщенных функций(by bashka)

$$\mathcal{E}(t,x) = \frac{\delta\left(t - \frac{|x|}{a}\right)}{4\pi |x| a^2}$$

Докажем теперь лемму про Фурье образ дельта функции на сфере. Будем двигаться от ответа, так можно потому что Фурье преобразование взаимооднозначно. Пишем для любой пробной

$$< F\left[\frac{\sin|x|k}{|x|}\right], \varphi >=< \frac{\sin|x|k}{|x|}, F[\varphi] >= \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\ \frac{\sin|x|k}{|x|} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\ e^{i(x,y)}\varphi(y) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|x|\leqslant R} dx\ \frac{\sin|x|k}{|x|} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\ e^{i(x,y)}\varphi(y)$$

Подынтегральная функция

$$\frac{\sin|x|k}{|x|}\ e^{i(x,y)}\ \varphi(y) \in \mathbb{L}_1\left[y \in \mathbb{R}^3,\ |x| \leqslant R\right]$$

Поэтому используем чудесную теорему Фубини и меняем местами интегралы

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy \int\limits_{|x|\leqslant R} dx\ \frac{\sin|x|k}{|x|}\ e^{i(x,y)}\varphi(y)$$

Как обычно переходим к сферическим координатам в интеграли по шару и интегрируем. Получаем (используя формулы для косинуса суммы и разности)

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\ \varphi(y)\frac{2\pi}{|y|} \int\limits_0^R dr\ 2\sin(rk)\sin(|y|r) = 2\pi \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\ \frac{\varphi(y)}{|y|} \left(\frac{\sin R(k-|y|)}{k-|y|} - \frac{\sin R(k+|y|)}{k+|y|}\right)$$

Рассмотрим второе слагаемое, у которого подынтегральная функция абс. интегр

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\ \frac{\varphi(y)}{|y|}\frac{\sin R(k+|y|)}{k+|y|}$$

Введем обозначение

$$f(\rho) = \rho \int\limits_{|y|=1} \varphi(\rho y) dS_y \in \mathbb{L}_1[0,\infty] \cap C^{\infty}[0,\infty]$$

Тогда

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_0^{\infty} d\rho\ f(\rho)\frac{\sin R(k+\rho)}{k+\rho} = \int\limits_k^{\infty} dt f(t-k)\frac{\sin tR}{t}$$

Подынтрегральная функция мажорируется абс. интегриремой f, поэтому по теореме Римана об осциляции этот интеграл стремится к нулю.
Рассмотрим теперь первое слагаемое

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} dy\ \frac{\varphi(y)}{|y|}\frac{\sin R(|y|-k)}{|y|-k}$$

Проводя те же рассуждения, что и с первым слагаемым

$$\int\limits_0^\infty d\rho f(\rho)\frac{\sin R(\rho-k)}{\rho-k}=\int\limits_{-k}^\infty dt f(t+k)\frac{\sin Rt}{t}=\int\limits_{-k}^k dt f(t+k)\frac{\sin Rt}{t}+\int\limits_k^\infty dt f(t+k)\frac{\sin Rt}{t}$$

Второй интеграл обнуляется в пределе по теорема Римана, как и в прошлый раз (подынтегральная функция мажорируется абс. интегриремой бла бла бла). Рассмотрим первый интеграл, добавим и вычтем $f(k)$

$$\int\limits_{-k}^k dt f(t+k)\frac{\sin Rt}{t}=\int\limits_{-k}^k dt(f(t+k)-f(k))\frac{\sin Rt}{t}+\int\limits_{-k}^k dt f(k)\frac{\sin Rt}{t}$$

Здесь в первом интеграле

$$\left|\frac{f(t+k)-f(k)}{t}\right|\leqslant\max_{[-k,k]}f^{'}$$

Поскольку производная тоже абс. интегр на $[-k,k]$, то по теореме Римана этот интеграл тоже обнуляется в пределе $R\to\infty$. Что остается это

$$\int\limits_{-k}^k dt f(k)\frac{\sin Rt}{t}=f(k)\int\limits_{-kR}^{kR}dz\frac{\sin z}{z}\to\pi f(k)=\frac{\pi}{k}\int\limits_{|x|=k}\varphi(x)dS_x$$

Отсюда получаем

$$F[\delta_k(y)](x)=\frac{4\pi k\sin k|x|}{|x|}$$

13. 1) Формула Кирхгоффа решения обобщённой задачи Коши для однородного волнового уравнения в $S'(\mathbb{R}^4)$ при начальных условиях медленного роста. 2) Достаточные условия, при которых обобщёное решение становится классическим.

Формулировка: 1)

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|z-x|=at} u_0(z)dS_z\right) + \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|z-x|=at} u_1(z)dS_z$$

Для любых абсолютно интегрируемых функций медленного роста $u_0(x)$ и $u_1(x)$ (Интегрирование по поверхности).
2) $u_0(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$ и $u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$

Идея доказательства:
1) из 2 более простых задач - с одним однородным условием.
2) из непрерывности интеграла

Доказательство:
Я не вижу смысла его тут приводить, потому что оно есть в лекциях Константинова на страницах 339-352. А любые сокращения могут привести к потере смысла.

Указатель хода решения:
1) действие на функцию Грина 339-340
2) анализ правой части действия(принадлежность к $S(\mathbb{R}^4)$) 341-342
3) доказательство того, что интеграл по поверхности можно вынести из действия(с введением и доказательством леммы) 343-346
4) действие на производную функциии Грина 347
5) решение 1 задачи с однородным вторым условием 348
6) решение 2 задачи с однородным первым условием 349-351
7) вид при выполнении условия для классичности 352

14. Сопряжённый оператор линейного оператора в гильбертовом пространстве. Область определения сопряжённого оператора. Теорема Фредгольма о связи множества значений линейного оператора и ядра его сопряжённого. Теорема о связи графиков линейного оператора и его сопряжённого.

Предварительно разберём две теоремы, которые будут использоваться в дальнейшем. На экзамене первую из них доказывать точно не будет необходимости, вторую с какой-то вероятностью в этом вопросе смогут спросить, для введения основных определений по билету пользуемся следствием из второй теоремы. Так что эти теоремы упоминаем, формулируем, пользуемся ими, а доказываем только если очень попросят.

Теорема. (Рисса об ортогональном разложении, без доказательства) Пусть $L \subseteq \mathcal{H}$ - замкнутое подпространство. Тогда $L \oplus L^{\perp} = \mathcal{H}$

Теорема. (Рисса, Фреше) $\forall$ лин. и непр. $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \quad \exists!\, h_\varphi \in \mathcal{H} : \forall f \in \mathcal{H} \quad \varphi(f) = (f, h_\varphi)$ и верно $\forall$ лин. и непр. $\varphi, \psi : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \quad h_{\varphi+\psi} = h_\varphi + h_\psi$ и $\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad h_{\alpha\varphi} = \overline{\alpha} h_\varphi$.

Доказательство. Рассматриваем $L = \ker\varphi = \{f \in \mathcal{H} | \varphi(f) = 0\}$. L - подпространство в $\mathcal{H}$. Так как φ непр. $\Rightarrow L = \ker\varphi$ замкнуто в $\mathcal{H}$ (возьмём точку прикосновения множества L и подберем последовательность Гейне из ядра, сходящуюся к ней. Все значения образов будут нули, значит, и предел будет нулевой, то есть точка прикосновения принадлежит $\ker\varphi$). Таким образом выполняются условия теоремы Рисса об ортогональном разложении и можно записать $\ker\varphi \oplus (\ker\varphi)^{\perp} = \mathcal{H}$. Далее есть две возможности:

1. $\ker\varphi = \mathcal{H} \quad \Rightarrow \forall f \in \mathcal{H}$ возьмем $h_\varphi = 0$.

2. $\ker\varphi \neq \mathcal{H} \Rightarrow \exists g \in (\ker\varphi)^{\perp} \backslash \{0\}$. Тогда $\forall f \in \mathcal{H}$ имеем $f = \underbrace{\dfrac{\varphi(f)}{\varphi(g)} g}_{\in (\ker\varphi)^{\perp}} + \underbrace{(f - \dfrac{\varphi(f)}{\varphi(g)} g)}_{\in \ker\varphi}$. Отсюда $(f, g) = \frac{\varphi(f)}{\varphi(g)}(g, g) \Rightarrow$

   $\varphi(f) = (f, \frac{\overline{\varphi(g)} g}{||g||^2})$. Итак, по полученному нами $g \in (\ker\varphi)^{\perp}$ удалось построить требуемый в условии теоремы $h_\varphi = \frac{\overline{\varphi(g)}}{||g||^2} g \in \mathcal{H}$.

Осталось доказать единственность найденного вектора. Пускай мы нашли второй вектор $\widetilde{h_\varphi} \in \mathcal{H}$: $\forall f \in \mathcal{H} \ \varphi(f) = (f, h_\varphi) = (f, \widetilde{h_\varphi}) \Rightarrow \forall f \in \mathcal{H} \quad (f, h_\varphi - \widetilde{h_\varphi}) = 0$. В качестве f возьмем $f = h_\varphi - \widetilde{h_\varphi}$. Тогда получаем $||h_\varphi - \widetilde{h_\varphi}||^2 = 0 \Rightarrow h_\varphi = \widetilde{h_\varphi}$, то есть единственность доказана. Теперь получим формулы для $h_{\varphi+\psi}$ и $h_{\alpha\varphi}$. $\forall f \in \mathcal{H} \quad (\varphi + \psi)(f) = (f, h_{\varphi+\psi}) = \varphi(f) + \psi(f) = (f, h_\varphi + h_\psi)$, отсюда по свойству единственности и получаем $h_{\varphi+\psi} = h_\varphi + h_\psi$. Наконец $(\alpha\varphi)(f) = (f, h_{\alpha\varphi}) = \alpha\varphi(f) = \alpha(f, h_\varphi) = (f, \overline{\alpha} h_\varphi) \Rightarrow h_{\alpha\varphi} = \overline{\alpha} h_\varphi$

□

Следствие: Пусть $L \subset \mathcal{H}$ - подпространство. Тогда $\forall$ лин. и непр. $\varphi : L \to \mathbb{C} \quad \exists! \ h_\varphi \in \overline{L} : \ \forall f \in L \quad \varphi(f) = (f, h_\varphi)$ и верно $\forall$ лин. и непр. $\varphi, \psi : L \to \mathbb{C} \quad h_{\varphi+\psi} = h_\varphi + h_\psi$ и $\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad h_{\alpha\varphi} = \overline{\alpha} h_\varphi$

Доказательство. $\forall$ лин. и непр. $\varphi : L \to \mathbb{C} \quad \exists!$ лин. и непр. $\psi : \overline{L}. \to \mathbb{C}$. Это утверждение вряд ли придется доказывать на экзамене. Покуда у меня первый в списке из билетов про операторы, приведу упорядоченно леммы, которые вводил Константинов с самого начала и доведу их до доказательства нашего утверждения.

Лемма. $\varphi : L \to \mathbb{C}$ - линейный функционал. Тогда φ непрерывен на $L \Leftrightarrow \exists C_\varphi > 0 : |\varphi(f)| \leqslant C_\varphi ||f|| \quad \forall f \in L$. То есть непрерывность линейного функционала в нашем случае равносильна его липшицевости.

Доказательство. Справа налево утверждение очевидно, ведь из липшицевости непрерывность гарантирована. $|\varphi(f) - \varphi(g)| = |\varphi(f - g)| \leqslant C_\varphi ||f - g|| \leqslant \varepsilon$, если $||f - g|| \leqslant \frac{\varepsilon}{C_\varphi + 1}$, получили даже больше чем непрерывность - равномерную непрерывность. Теперь доказываем слева направо. φ непр. в нуле $\Rightarrow \exists\, \delta > 0\, \forall f \in L : ||f|| \leqslant \delta \Rightarrow |\varphi(f)| \leqslant 1. \Rightarrow \ \forall g \in L \setminus \{0\}$ рассмотрим $f = \delta\frac{g}{||g||} \Rightarrow ||f|| \leqslant \delta, \ f \in L$. Тогда $|\varphi(\delta\frac{g}{||g||})| \leqslant 1 \Rightarrow |\varphi(g)| \leqslant \frac{||g||}{\delta}$, то есть для ненулевых g липшицевость обнаружена. Если $g = 0 \Rightarrow \ \varphi(0) = 0 \leqslant \frac{||0||}{\delta_\varphi}$. Получили искомую липшицевость. □

Лемма. Пусть $L \subset \mathcal{H}$ - подпространство, $\varphi : L \to \mathbb{C}$ - линейный и непрерывный функционал. Тогда $\exists!\, \psi : \overline{L} \to \mathbb{C}$: ψ линеен и непрерывен и $\psi|_L = \varphi$. (процедуру построения ψ называем продолжением функционала на замыкание по непрерывности).

Доказательство. $\forall f \in \overline{L} \quad \exists f_n \in L : f_n \overset{||\cdot||}{\to} f$. Дальше смотрим на $\varphi(f_n)$. Расмотрим $|\varphi(f_n)-\varphi(f_m)|= |\varphi(f_n-f_m)|\leqslant C_\varphi||f_n-f_m||$. Норма разности $||f_n-f_m||$ стремится к нулю при устремлении индексов к ∞, тогда последовательность $\varphi(f_n)$ фундаментальная в $\mathbb{C}$ числовая последовательность. Следовательно, по критерию Коши для последовательностей в $\mathbb{C}$ $\quad\exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(f_n) = \psi(g)$. Формально ψ зависит не только от g, но и от выбора последовательностей f_n, но в действительности от выбора последовательности $f_n \overset{n\to\infty}{\to} g \in \overline{L}$ не зависит, сразу это докажем. Пусть $h_n \in L \to g$, $f_n \in L \to g \in \overline{L}$, $\Rightarrow$ $|\varphi(h_n) - \varphi(f_n)|= |\varphi(h_n - f_n)|\leqslant C_\varphi||h_n - f_n||\to 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(h_n) = \lim\limits_{n\to} \varphi(f_n) = \psi(g) \in \mathbb{C}$. ψ - продолжение φ по непрерывности с L на $\overline{L}$. Получим, что $\psi\big|_L = \varphi$. $\forall g \in L \Rightarrow f_n = g\,\forall n$. $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(f_n) = \psi(g) = \varphi(g)$.

Осталось доказать, что ψ будет непрерывен и линеен на $\overline{L}$. Возьмем $\forall f, g \in \overline{L}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \exists f_n \in L : f_n \overset{||\cdot||}{\to} f$, $\exists g_n \in L : g_n \overset{||\cdot||}{\to} g \Rightarrow \alpha f_n + \beta g_n \overset{||\cdot||}{\to} \alpha f + \beta g$. $\psi(\alpha f+\beta g) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\alpha f_n+\beta g_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha\varphi(f_n)+\beta\varphi(g_n) = \alpha\psi(f)+\beta\psi(g)$, так получили, что ψ линеен на замыкании $\overline{L}$. Чтобы доказать его непрерывность, отыщем для него константу Липшица. Так как φ линеен и непрерывен на L, то $\exists C_\varphi > 0 : |\varphi(f)|\leqslant C_\varphi||f|| \quad \forall f \in L$. Эта же C_φ годится как константа Липшица для ψ: $\forall g \in \overline{L}\ \exists f_n \in L : f_n \overset{||\cdot||}{\to} g \Rightarrow |\psi(g)|= \lim\limits_{n\to\infty} |\varphi(f_n)|$, а $|\varphi(f_n)|\leqslant C_\varphi||f_n||\to C_\varphi||g||$. $|||f_n||-||g|||\leqslant ||f_n-g||\to 0$. Тогда $\psi(g) \leqslant C_\varphi||g||$. Следовательно $\psi : \overline{L} \to \mathbb{C}$ линеен и непрерывен. □

Ну теперь-то мы стопудов не стесняемся сказать на экзамене, что $\forall$ лин. и непр. $\varphi : L \to \mathbb{C} \quad \exists! \quad h_\varphi \in \overline{L} : \quad \forall f \in L \quad \varphi(f) = (f, h_\varphi)$ и верно $\forall$ лин. и непр. $\varphi, \psi : L \to \mathbb{C} \quad h_{\varphi+\psi} = h_\varphi + h_\psi$ и $\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad h_{\alpha\varphi} = \overline{\alpha} h_\varphi$. Теперь посмотрим на $\overline{L}$. Это - замкнутое подпространство в $\mathcal{H}$. Само $\mathcal{H}$ полно, тогда $\overline{L}$ полно как замкнутое в полном. Так что $\overline{L}$ - тоже гильбертово. Тогда мы для этого $\overline{L}$ и для линейного непрерывного функционала ψ запишем утверждение теоремы Рисса-Фреше: $\exists!\ h_\psi \in \overline{L} : \quad \psi(f) = (f, h_\psi) \quad \forall \psi \in \overline{L}$. Вспомним, что $\psi\big|_L = \varphi$, тогда на элементах $\forall f \in L$ эта формула будет выглядеть так $\varphi(f) = (f, h_\psi)$. Вот этот единственный $h_\psi \in \overline{L}$ и есть то, что мы искали как h_φ при формулировке задачи. Свойства h_ψ при суммировании функционалов и умножении на комплексные числа доказываются как и раньше для всего $\mathcal{H}$. □

Пусть $A : \mathrm{D}(A) \to \mathcal{H}$ - линейный оператор. Желаем определить A^* таким образом, чтобы было верно $(Af, g) = (f, A^*g) \quad \forall f \in \mathrm{D}(A) \quad \forall g \in \mathrm{D}(A^*)$. Для этого определим сначала, что такое $\mathrm{D}(A^*)$.

Определение. $\mathrm{D}(A^*) = \{g \in \mathcal{H} | \forall f \in \mathrm{D}(A) \to (Af, g) \in \mathbb{C}\} \Leftrightarrow \exists C_g > 0 : \forall f \in \mathrm{D}(A) \quad |(Af, g)|\leqslant C_g||f||$

То есть мы желаем, чтобы действие $f \to (Af, g)$ было непрерывным. Определенное таким образом $D(A^*)$ - линейное подпространство в $\mathcal{H}$, т.к. $0 \in D(A^*)$ с $C_0 = 1$ и $\forall g, h \in \mathrm{D}(A^*)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $|(Af, g + h)|\leqslant |\alpha|(Af, g) + |\beta|(Af, h) \leqslant (|\alpha|C_g + |\beta|C_h)||f||$, то есть нашлась константа Липшица $C_{\alpha g+\beta h} = (|\alpha|C_g + |\beta|C_h)$, значит, $\alpha g + \beta h \in \mathrm{D}(A^*)$. Теперь нам понадобится следствие из теоремы Рисса-Фреше. Мы имеем линейный и непрерывный функционал $f \to (Af, g)$ на $\mathrm{D}(A^*)$. Значит, $\exists!\ h_g \in \overline{\mathrm{D}(A)} : \quad \forall f \in \mathrm{D}(A) \quad (Af, g) = (f, h_g)$. Тем самым мы подготовили почву для определения.

Определение. Сопряженным оператором A^* называется $A^* : \mathrm{D}(A^*) \to \overline{\mathrm{D}(A)} \subseteq \mathcal{H}$ такой что $\forall g \in D(A^*) \quad A^*g = h_g$. При этом по определению $\forall f \in \mathrm{D}(A), \quad \forall g \in \mathrm{D}(A^*) (Af, g) = (f, A^*g)$

Теорема. (Фредгольма) Пусть $A : \mathrm{D}(A) \to \mathcal{H}$ линейный оператор. Тогда $\ker A^* = (\Im A)^\perp$.

Доказательство. $\forall g \in \ker A^* \Leftrightarrow \begin{cases} g \in \mathrm{D}(A^*), \\ A^*g = 0 \end{cases}$. Из записанных условий следует $\forall f \in \mathrm{D}(A) \quad (Af, g) = (f, A^*g) = (f, 0) = 0$. Поставим теперь задачу наоборот - пусть есть условие $\forall f \in \mathrm{D}(A) \quad (Af, g) = 0$, можно ли выяснить, что $g \in \mathrm{D}(A^*)$? Оказывается, можно, покажем это: пусть имеем $g \in \mathcal{H}$ такой, что $\forall f \in \mathrm{D}(A) \quad (Af, g) = 0$. Тогда строим функционал $\forall f \in \mathrm{D}(A) \quad f \to (Af, g) = 0$. Этот функционал получился непрерывен на $\mathrm{D}(A)$, так как липшицев с $C_g = 1$. Значит, к этому линейному и непрерывному функционалу мы можем предъявить сопряженный A^*, причем $g \in \mathrm{D}(A^*)$. Сведем результаты: $\forall f \in \mathrm{D}(A) \begin{cases} g \in \mathcal{H}, \\ (Af, g) = 0, \\ \forall f \in \mathrm{D}(A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g \in \mathrm{D}(A^*), \\ (Af, g) = (f, A^*g) = 0 \end{cases}$

Последнее равенство (красное) выполняется $\forall f \in \mathrm{D}(A)$, значит, $A^*g = 0$, то есть $g \in \ker A^*$. Но исходили мы из того, что $\forall f \in \mathrm{D}(A) \quad (Af, g) = 0$, а это можно записать как $g \in (\Im A)^\perp$ $(\Im A = \{Af, f \in \mathrm{D}(A)\})$. Так мы и выяснили, что $\ker A^* = (\Im A)^\perp$. □

Теорема. (о связи графиков линейного оператора и его сопряженного) Пусть $A : \mathrm{D}(A) \to \mathcal{H}$ линейный оператор. Тогда $\mathrm{Gr} A^* = (V \mathrm{Gr} A)^\perp \cap (\mathcal{H} \times \overline{\mathrm{D}(A)})$.

Доказательство. Будем последовательно определять понятия, которые нам потребуются.

Определение. $A : \mathrm{D}(A) \to \mathcal{H}$ оператор, тогда $\mathrm{Gr}A = \{\begin{pmatrix} f \\ Af \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : \quad f \in \mathrm{D}(A)\}$

Пространство $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ - это пространство столбцов из элементов $\mathcal{H}$ по 2 элемента. На этом пространстве вводится скалярное произведение по формуле: $\left(\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = (\varphi, f)_{\mathcal{H}} + (\psi, g)_{\mathcal{H}}$. Квадрат нормы элемента $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ тогда оказывается суммой квадратов норм элементов из столбцов. $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ с такой эвклидовой нормой полно. $\mathrm{Gr}A \subset \mathcal{H}\times\mathcal{H}$, причем $\mathrm{Gr}A$ - подпространство.
Будем теперь рассматривать график сопряжённого оператора.

$$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \in \mathrm{Gr}A^* \Leftrightarrow \begin{matrix} g \in \mathrm{D}(A^*) \\ h \in \overline{\mathrm{D}(A)} \text{ вспоминаем теорему Рисса-Фреше, куда погружен } h_\varphi \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} g \in \mathrm{D}(A^*), \quad h \in \overline{\mathrm{D}(A)} \\ \forall f \in \mathrm{D}(A) \;\; (Af, g) = (f, h) \end{matrix} \Leftrightarrow$$

Чтобы продолжить цепочку эквивалентных утверждений, заметим, что из $\forall f \in \mathrm{D}(A) \;\; (Af, g) = (f, h)$ и $h \in \overline{\mathrm{D}(A)}$ автоматически следует $g \in \mathrm{D}(A^*)$ по определению. Действительно, ведь $(Af, g) = (f, h)$ линейно и непрерывно (в правой части нет A и g). (follow the red bracket)

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} h \in \overline{\mathrm{D}(A)} \\ \forall f \in \mathrm{D}(A) \;\; (Af, g) = (f, h) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall f \in \mathrm{D}(A) \;\; (-Af, g) + (f, h) = 0 \\ h \in \overline{\mathrm{D}(A)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall f \in \mathrm{D}(A) \quad \left(\begin{pmatrix} -Af \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = 0 \\ h \in \overline{\mathrm{D}(A)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

Теперь определим оператор $\mathrm{V} : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathcal{H}\times\mathcal{H}$, который переставляет элементы в столбцах местами и к элементу, который появился в 1 позиции, приписывает минус. $\begin{pmatrix} f \\ Af \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{V}} \begin{pmatrix} -Af \\ f \end{pmatrix}$. С помощью этого оператора, как видно, очень удобно выразить сомножитель в полученном нами скалярном произведении через график оператора A.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall f \in \mathrm{D}(A) \quad \left(\mathrm{V}\begin{pmatrix} f \\ Af \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = 0 \\ h \in \overline{\mathrm{D}(A)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \in (\mathrm{V}\mathrm{Gr}A)^\perp \cap (\mathcal{H} \times \overline{\mathrm{D}(A)}).$$ □

Замечание: Введенный в доказательстве оператор V обладает свойствами:

- Линеен на $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$
- $\mathrm{V}^2 = -\mathrm{I}$, $\mathrm{V}^{-1} = -\mathrm{V}$ (левый и правый обратные)
- Изометричен $\left\|\mathrm{V}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = \left\|\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ (изометрический изоморфизм)

15. Критерий замыкаемости плотно определённого линейного оператора в гильбертовом пространстве. Пример незамыкаемого плотно определённого оператора. Замыкаемость оператора Лапласа $\Delta : C^2(\overline{G}) \to \mathbb{L}_2(G)$ для ограниченной области $G \subset \mathbb{R}_m$ с кусочно–гладкой границей.

Определение. $A : \mathrm{D}(A) \to \mathcal{H}$ линейный оператор. Будем называть его плотно определенным, если $\overline{\mathrm{D}(A)} = \mathcal{H}$.

Определение. $A : \mathrm{D}(A) \to \mathcal{H}$ линейный оператор. A называем замкнутым, если $\mathrm{Gr}A$ замкнут в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Определение. $A : \mathrm{D}(A) \to \mathcal{H}$ линейный оператор. Пусть множество $\overline{\mathrm{Gr}A} = \mathrm{Gr}T$ для некоторого линейного оператора $T : \mathrm{D}(T) \to \mathcal{H}$. Тогда говорят, что $T = \overline{A}$ - замыкание A.

Теорема. (Критерий замыкаемости) $A : \mathrm{D}(A) \to \mathcal{H}$ линейный оператор, плотно определён. Тогда $\overline{\mathrm{Gr}A}$ является графиком линейного оператора $\overline{A} : \mathrm{D}(\overline{A}) \to \mathcal{H} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathrm{D}(A^*)} = \mathcal{H}$, т.е A^* плотно определён.

Доказательство. 1. Докажем сначала справа налево. Запишем для плотно определенных операторов A, A^* теорему о связи графиков: $\mathrm{Gr}A^* = (\mathrm{V}\mathrm{Gr}A)^\perp \cap (\mathcal{H} \times \overline{\mathrm{D}(A)})$; $\quad \mathrm{Gr}A^{**} = (\mathrm{V}\mathrm{Gr}A^*)^\perp \cap (\mathcal{H} \times \overline{\mathrm{D}(A^*)})$. В силу того, что операторы плотно определены, эти равенства переходят в $\mathrm{Gr}A^* = (\mathrm{V}\mathrm{Gr}A)^\perp$; $\quad \mathrm{Gr}A^{**} = (V\mathrm{Gr}A^*)^\perp$. Хотелось бы подставить первое полученное выражение во второе, но чтобы произвести дальнейшие сокращения, необходимо доказать лемму о вынесении V из под знака ортогонального дополнения:

Лемма. $L \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ - подпространство. Тогда $(\mathrm{V}L)^\perp = \mathrm{V}(L)^\perp$

Доказательство. $\forall \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \in (\mathrm{V}L)^\perp \Leftrightarrow \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L \quad (\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -g \\ f \end{pmatrix}) = 0 \Leftrightarrow \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L \quad (-\varphi, g) + (\psi, f) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L \quad (-\psi, f) + (\varphi, g) = 0 \Leftrightarrow \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (\mathrm{V} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{V} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \in L^\perp \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \in \mathrm{V}^{-1}L^\perp = -\mathrm{V}L^\perp$
$L^\perp$ - подпространство и $\mathrm{V}L^\perp$, значит, тоже подпространство. Значит, знак минус перед ним не играет никакой роли $-\mathrm{V}L^\perp = \mathrm{V}L^\perp$. Тогда получаем $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \in \mathrm{V}L^\perp$. $\square$

Теперь подставляем: $\mathrm{Gr}A^{**} = (\mathrm{V}(\mathrm{V}\mathrm{Gr}A)^\perp)^\perp = (\mathrm{V}^2(\mathrm{Gr}A)^\perp)^\perp = (-(\mathrm{Gr}A)^\perp)^\perp$. Снова имеем знак минус перед подпространством и снова его игнорируем. $\mathrm{Gr}A^{**} = ((\mathrm{Gr}A)^\perp)^\perp$. Докажем еще одну лемму.

Лемма. $L \subset \mathcal{H}$ - подпространство. Тогда $L^{\perp\perp} = \overline{L}$

Доказательство. $L \subset L^{\perp\perp}$ (элементы $L^{\perp\perp}$ - это ортогональные ортогональным к элементам L. Ясно, что элементы L ортогональны ортогональным к себе). Так как $L^{\perp\perp}$ замкнуто, $\overline{L} \subset L^{\perp\perp}$. $\overline{L}$ гильбертово как замкнутое в гильбертовом. Тогда для него справедлива теорема Рисса: $\overline{L} \oplus N = L^{\perp\perp}$, $\quad N \perp \overline{L}$. $\quad N = (\overline{L})^\perp \cap L^{\perp\perp}$. Если мы докажем, что $N = \varnothing$, то лемма будет доказана. Докажем лемму:

Лемма. $L^\perp = \overline{L}^\perp$

Доказательство. $\overline{L}^\perp \subset L^\perp$, т.к если элемент ортонален замыканию множества, то и самому множеству ортогонален. Докажем $L^\perp \subset \overline{L}^\perp$. Пусть $g \in L^\perp \Leftrightarrow \quad \forall f \in L \quad (f, g) = 0$. По оределению замыкания оператора $\forall f \in L, \quad \forall h \in \overline{L} \quad \exists f_n \in L : \quad f_n \to h. \quad (f_n, g) \to (h, g)$. Слева стоит последовательность из одних нулей, значит и стремится она к нулю, то есть $h \perp g$ и $g \in \overline{L}^\perp$. $\square$

Пользуемся доказанной леммой, получаем $N = (\overline{L})^\perp \cap L^{\perp\perp} = (L)^\perp \cap L^{\perp\perp} = \varnothing$ (только нулевой элемент ортогонален сам себе). $\square$

Теперь получаем $\mathrm{Gr}A^{**} = ((\mathrm{Gr}A)^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Gr}A}$. Видим, что замыкание графика $\overline{\mathrm{Gr}A}$ является графиком линейного оператора A^{**}, значит по определению замыкание у A есть и равно оно A^{**}.

2. Теперь доказываем слева направо. Нам требуется увидеть равенство $\overline{\mathrm{D}(A^*)} = \mathcal{H}$. Берем $\forall h \in (\mathrm{D}(A^*))^\perp$ и составляем конструкцию $\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \in (\mathrm{Gr}A^*)^\perp$. Вложение здесь соблюдается, потому что $\forall g \in \mathrm{D}(A^*) \quad (\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ A^*g \end{pmatrix}) = (h, g) + (0, A^*g) = 0$. Но по теореме о связи графиков для плотно определённого $A \quad (\mathrm{Gr}A^*)^\perp = (\mathrm{V}\mathrm{Gr}A)^{\perp\perp} \overset{\text{лемма}}{=} \overline{\mathrm{V}\mathrm{Gr}A}$. Тут нам снова нужна лемма, на этот раз для того, чтобы вынести V из-под замыкания.

Лемма. $L \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ - подпространство. Тогда $\overline{\mathrm{V}L} = \mathrm{V}\overline{L}$

Доказательство. $\forall \begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} \in \overline{\mathrm{V}L} \Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix}f_n\\ g_n\end{pmatrix}: \quad \begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{V}\begin{pmatrix}f_n\\ g_n\end{pmatrix} = \lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix}-g_n\\ f_n\end{pmatrix}$

Получилось $\begin{cases} g_n \to -\varphi \\ f_n \to \psi \end{cases}$ в $\mathcal{H}$ при $n \to \infty \Leftrightarrow$ $\overline{L}$ содержит $\begin{pmatrix}\psi\\ -\varphi\end{pmatrix} = \mathrm{V}\begin{pmatrix}-\varphi\\ -\psi\end{pmatrix} \Leftrightarrow$. Тогда $\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \mathrm{V}^2\begin{pmatrix}-\varphi\\ -\psi\end{pmatrix} \in$ $\mathrm{V}\overline{L}$ □

Тогда $\overline{\mathrm{V}\mathrm{Gr}A} = \mathrm{V}\overline{L}$. Таким образом $(\mathrm{Gr}A^*)^\perp = \mathrm{V}\overline{\mathrm{Gr}A}$. Тогда $\begin{pmatrix}h\\ 0\end{pmatrix} \in \mathrm{V}\mathrm{Gr}\overline{A}$. Тогда $\begin{pmatrix}0\\ h\end{pmatrix} \in \mathrm{Gr}\overline{A} \Rightarrow h = \overline{A}0 = 0$, так как $\overline{A}$ - линейный оператор. Значит, $(\mathrm{D}(A^*))^\perp = \varnothing$ и доказано, что A^* плотно определён. Ну и покуда он плотно определен, то из рассуждений пункта 1 $\overline{A} = A^{**}$.

□

Пример. (незамыкаемого плотно определённого оператора) Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}$, в нём ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=1}^\infty$. $||f||^2 = \sum\limits_{n=1}^\infty |f_n|^2 < +\infty$. Рассмотрим еще плотное подпространство в $\mathcal{H}$ $\quad L = \{f \in \mathcal{H} \Big| \sum\limits_{n=1}^\infty |f_n| < +\infty\}$ (плотное, потому что содержит в себе все e_n). Тогда $\overline{L} = \mathcal{H}$, но $L \neq \mathcal{H}$ (есть, например, $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{e_n}{n}$, суммируемый с квадратом, но абсолютно расходящийся ряд). Далее рассмотрим оператор $A:$ $L \to \mathcal{H}$, $\quad \mathrm{D}(A) = L$ с таким действием $(Af) = (\sum\limits_{n=1}^\infty f_n)\cdot e_1$. $\Im A = Lin\, e_1$ (линейная оболочка первого базисного вектора). Найдём $A^*: \quad \mathrm{D}(A^*) \to \mathcal{H} = \overline{L} = \overline{\mathrm{D}(A)}$. Пусть $g \in \mathrm{D}(A)$. $|(Af, g)| = |\sum\limits_{n=1}^\infty f_n| \cdot |(e_1, g)| \leqslant C_g||f||$. Если мы находим константу C_g, то это эквивалентно утверждению, что отображение $f \to \sum\limits_{n=1}^\infty f_n$ линейно и непрерывно на L. Рассмотрим два случая:

1. $(e_1, g) = 0 \Rightarrow \quad C_g = 1$ подойдёт, но о непрерывности исследуемого отображения ничего не говорит.
2. $(e_1, g) \neq 0 \Rightarrow \quad \forall f \in L \quad |\sum\limits_{n=1}^\infty f_n| \leqslant \dfrac{C_g}{|(e_1, g)|}||f||$ оценка, гарантирующая непрерывность.

Но это отображение всегда разрывно, потому второй случай никогда не будет реализовываться. Докажем это, предъявив последовательность, члены которой стремятся по норме в L к нулю, но при этом модуль суммы которой к нулю стремиться не будет. Пусть $f_n(N) = \begin{cases} 0, & n < N,\ n > 2N \\ \frac{1}{n}, & n \in \overline{N, 2N} \end{cases}$. $\quad ||f(N)|| = \sqrt{\sum\limits_{N}^{2N} \frac{1}{n^2}} \to 0, \quad N \to \infty$ (остаток сходящегося ряда). Но оценим модуль суммы $\forall N \in \mathbb{N} \quad |\sum\limits_{n=1}^\infty f_n(N)| = \sum\limits_{N}^{2N} \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}$. Так что исследуемый оператор точно разрывен. А значит $(e_1, g) \neq 0$ невозможно, то есть $(e_1, g) = 0$. Так как g - это произвольный вектор из области определения сопряжённого оператора, $\mathrm{D}(A^*) = (Line_1)^\perp$. Тогда $\forall f \in L, \quad \forall g \in \mathrm{D}(A^*) \quad (Af, g) = 0$. Действие $f \to (Af, g)$ для f, g из их областей определения становится тривиальным - обнулением, при этом оно линейно и непрерывно и применима Теорема Рисса-Фреше и можно записать $\exists!\, h_g \in \mathcal{H} = \overline{L}: \quad (Af, g) = (f, h_g) = 0$. $h_g = 0$ нам подходит, а других быть не может в силу единственности. Тогда $A^*g = h_g = 0$. Тем самым мы описали и область определения сопряженного оператора и его действие: $A^*: (Lin\, e_1)^\perp \to \mathcal{H}, \forall g \perp e_! \quad A^*g = 0$. Увидим на этом примере утверждение теоремы Фредгольма: $\ker A^* = \mathrm{D}(A^*) = (Lin\, e_1)^\perp = (\Im A)^\perp$. Пронаблюдаем теперь, что этот оператор не имеет замыкания. Он всюду плотный, так как L плотно в $\mathcal{H}$. Нам необходимо исседовать замыкание графика $\overline{\mathrm{Gr}A}$, является ли оно графиком какого-нибудь линейного оператора. Мы покажем, что не является, доказав, что в замыкание графика входит вектор вида $\begin{pmatrix}0\\ e_1\end{pmatrix}$ (у линейного оператора если первый элемент ноль, то второй, равный действию оператора на первый, тоже ноль). Соберем такую конструкцию $f(N) = \sum\limits_{n=m_N}^{m_{N+1}} \frac{e_n}{n}$.

Существует такая возрастающая последовательность m_N, что $\forall N \quad 1 \leqslant \sum\limits_{n=m_N}^{m_{N+1}} \frac{1}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{m_{N+1}}$. Элементы такой последовательности стремятся к нулю по норме при $N \to \infty$ (аналогично было выше для $m_N = N$ и $m_{N+1} = 2N$). А действие оператора A на этот элемент L даёт $Af(N) = (\sum\limits_{n=m_N}^{m_{N+1}} \frac{1}{n})e_1 \; \overset{\mathcal{H}}{e_1}$ (смотрим выше, так и определяли m_N, чтобы этот ряд суммировался в единицу). Мы переходили к пределу по Гейне-последовательности, значит, получили точку замыкания графика, причем её вид $\begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \end{pmatrix}$ - та самая недопустимая ситуация, в которой замыкание графика не может быть графиком линейного оператора и оператор A не имеет замыкания на L. Это можно увидеть и по критерию: область определения сопряженного оператора (все векторы, ортогональные линейной оболочке базисного e_1) не полна в $\mathcal{H}$.

16. Неравенство Фридрихса для функции $f \in C^1(\bar{G})$ и выпуклой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно–гладкой границей. Задача Дирихле в круге $K \subset \mathbb{R}^2$ для замыкания оператора Лапласа $\Delta : C^2(\bar{K}) \to \mathbb{L}_2(K)$, существование и единственность ее решения.

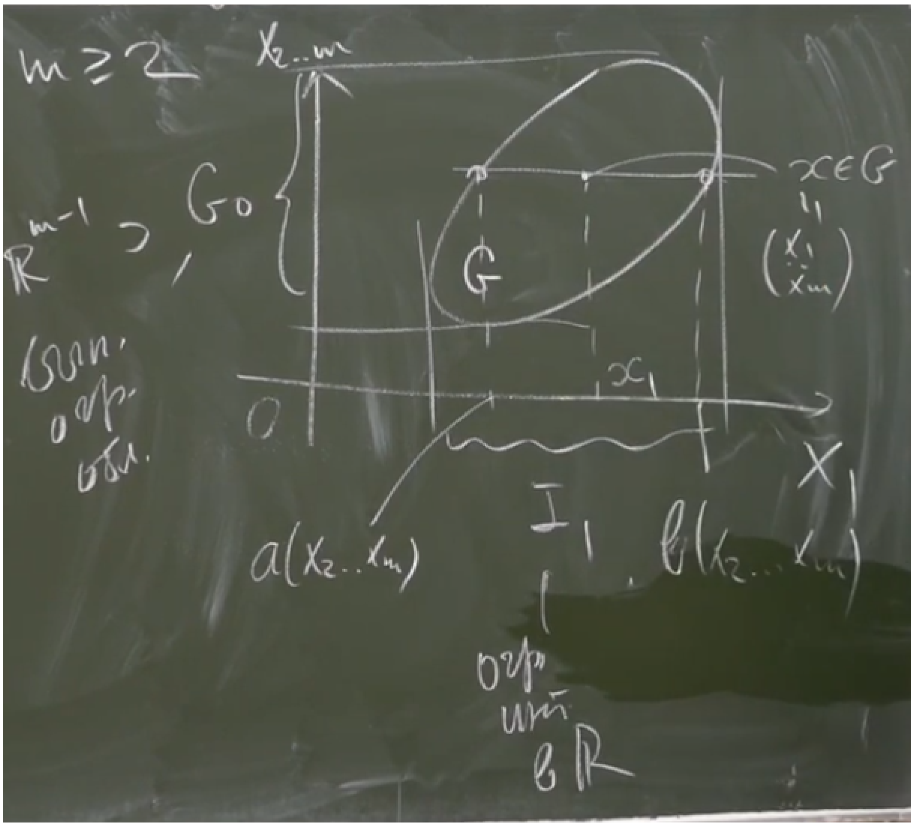
Неравенство Фридрихса $G \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченное, выпуклое множество с кусочно-гладкой границей ∂G. Пусть $f \in C^1(\bar{G})$ и $f|_{\partial G}= 0$. Тогда

$$\int\limits_G |f|^2 \leqslant (\mathrm{diam} G)^2 \int\limits_G |\nabla f|^2$$

Или в терминах $(L)_2$-нормы

$$||f||_{\mathbb{L}_2(G)} \leqslant (\mathrm{diam} G)||\nabla f||_{\mathbb{L}_2(G)}$$

Докажем для $m \geqslant 2$, в случае $m = 1$ доказательство тривиально. Рассмотрим $x \in G$. I_1 — проекция G ось x_1, а G_0 на оставшееся подпространство $\mathbb{R}^{m-1}$. При заданых $(x_2 \dots x_m)^T \in G_0$ в силу выпуклости G $x_1 \in [a(x_2, \dots, x_m), b(x_2, \dots, x_m)] \subset I$, как изображено.



По Ньютону-Лейбницу и из-за того, что f на границе ноль

$$f(x) = f(x) - f(a(x_2, \dots, x_m)) = \int\limits_{a(x_2,\dots,x_m)}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x_2, \dots, x_m)\, dt$$

$$|f(x)| \leqslant \int\limits_{a(x_2,\dots,x_m)}^{x_1} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x_2, \dots, x_m)\right| dt \leqslant \int\limits_{a(x_2,\dots,x_m)}^{b(x_2,\dots,x_m)} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x_2, \dots, x_m)\right| dt \leqslant \sqrt{b-a}\sqrt{\int\limits_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x_2, \dots, x_m)\right|^2 dt}$$

Здесь третье неравенство это Коши-Буняковскй. В силу того, что $|\frac{\partial f}{\partial x_1}| \leqslant |\nabla f|$, а $b(x_2, \dots, x_m) - a(x_2, \dots, x_m) \leqslant |I_1|$

$$|f(x)|^2 \leqslant |I_1| \int\limits_{a(x_2,\dots,x_m)}^{b(x_2,\dots,x_m)} |\nabla f(t, x_2, \dots, x_m)|^2\ dt$$

Интегрируем по области G

$$\int\limits_G |f(x)|^2\,dx \leqslant |I_1| \int\limits_G \int\limits_{a(x_2,\ldots,x_m)}^{b(x_2,\ldots,x_m)} |\nabla f(t,x_2,\ldots,x_m)|^2\;dt\,dx \leqslant |I_1| \int\limits_{I_1} dx_1 \int\limits_{G_0} dx_2\ldots dx_m \int\limits_{a(x_2,\ldots,x_m)}^{b(x_2,\ldots,x_m)} |\nabla f(t,x_2,\ldots,x_m)|^2\;dt$$

Проинтегрировав по x_1 и оценивая $|I_1| \leqslant DiamG$ получаем

$$\int\limits_G |f(x)|^2\,dx \leqslant (\mathrm{diam}G)^2 \int\limits_G |\nabla f(x)|^2\,dx$$

Задача Дирихле для замыкания оператора Лапласа в круге

$$\begin{cases} \bar{\Delta}u = 0, u \in D(\bar{\Delta}) \\ u|_{\partial K_R} = v \in \mathbb{L}_2(K_R) \end{cases}$$

Это означает, что $\exists\; u(N) \in D(\Delta) : \begin{cases} u(N) \xrightarrow{\mathbb{L}_2(K_R)} u \\ \Delta u(N) \xrightarrow{\mathbb{L}_2(K_R)} 0 \end{cases}$
при $N \to \infty$ и $||u(r,\bullet) - v(\bullet)||_{\mathbb{L}_2(K_R)} \to 0$ при $r \to R$. Рассмотрим следующие суммы

$$u(N) = \sum_{n=-N}^{N} u_n(r) e^{in\varphi}$$

$$v(N) = \sum_{n=-N}^{N} v_n e^{in\varphi}$$

Тогда $u(N)$ сойдется к решению, если

$$\begin{cases} \Delta u(N) \xrightarrow{N\to\infty} 0 \\ u(N)|_{\partial K_R} = v(N) \end{cases}$$

Покажем, что эти условия выполняются при $u_n = v_n \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|}$. Действительно $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\Delta(v_n \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{in\varphi}) = 0$$

Теперь докажем сходимость к u. Для начала покажем, что

$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{in\varphi} \in \mathbb{L}_2(K_R)$$

В силу равенства Парсеваля и теоремы Бетто-Леви

$$\int\limits_{K_R} |u^2| = \int\limits_0^R dr\, r \int\limits_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|^2\,d\varphi = \int\limits_0^R dr\, r \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2 2\pi = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n|^2 \int\limits_0^R r \left(\frac{r}{R}\right)^{2|n|}\,dr \leqslant \frac{R^2}{2} ||v||_{\mathbb{L}_2(K_R)} < +\infty$$

$$||u - u(N)||_{\mathbb{L}_2(K_R)} = \sum_{n>N} |v_n|^2 \int\limits_0^R r \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|}\,dr \to 0$$

В силу сходимости $\sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n|^2$. Таким образом видим, что предъявленное u является решением.

Единственность этого решения Пусть решения два – u и w. Тогда по определению $\exists$ такие сходящиеся к ним последовательности $u(N) \in C^2(\bar{K}_R)$ и $w(N) \in C^2(\bar{K}_R)$, что

$$\begin{cases} \Delta u(N) \xrightarrow{N\to\infty} 0 \\ u(N)|_{\partial K_R} = v(N) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta w(N) \xrightarrow{N\to\infty} 0 \\ w(N)|_{\partial K_R} = v(N) \end{cases}$$

Рассмотрим их разность $q(N) = u(N) - w(N)$

$$\begin{cases} q(N) \xrightarrow{\mathbb{L}_2(K_R)} u - w \\ \Delta q(N) \xrightarrow{\mathbb{L}_2(K_R)} 0 \\ q(N)|_{\partial K_R} = 0 \end{cases}$$

Воспользуемся формулой Грина

$$\int\limits_{K_R} \Delta(q(N))\bar{q(N)} = \int\limits_{\partial K_R} \frac{\partial q(N)}{\partial n}\bar{q(N)} - \int\limits_{K_R} |\nabla q(N)|^2 = -\int\limits_{K_R} |\nabla q(N)|^2$$

По этому и еще из-за неравенства Коши-Буняковского

$$||\nabla(q(N))||_{\mathbb{L}_2(K_R)} = \int\limits_{K_R} |\nabla q(N)|^2 \leqslant \int\limits_{K_R} |\Delta(q(N))||\bar{q(N)}| \leqslant ||\Delta(q(N))||_{\mathbb{L}_2(K_R)}||\bar{q(N)}||_{\mathbb{L}_2(K_R)} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Тогда по неравенству Фридрихса

$$||q(N)||_{\mathbb{L}_2(K_R)} \leqslant 2R||\nabla(q(N))||_{\mathbb{L}_2(K_R)} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Таким образом $0 \leftarrow q(N) \to u - w$, а значит $u = w$

Задача Дирихле в шаре $B \subset \mathbb{R}^3$ для замыкания оператора Лапласа $\Delta : C^2(\overline{B}) \to \mathbb{L}_2(B)$, существование и единственность ее решения.

$$\begin{cases} \overline{\Delta} u = 0, u \in D(\overline{\Delta}) \\ u|_{\partial K_R} = v \in L_2(\partial K_R) \Leftrightarrow ||u(r, ...) - v(...)||_{L_2(\partial K_R)} \to 0 (r \to R - 0) \end{cases}$$

Докажем, что решение существует:

$$\overline{\Delta} u = 0, u \in D(\overline{\Delta}) \Leftrightarrow \exists u(N) \overset{\mathbb{H}}{\to} u(N \to \infty), \Delta u(N) \overset{\mathbb{H}}{\to} 0(N \to \infty), \mathbb{H} = L_2(K_R) \Leftrightarrow (u, 0)^T \in Gr_{\overline{\Delta}}$$

Будем рассматривать конечные суммы фурье

$$u(N) = \sum_{n=-N}^{N} u_n(r) e^{in\varphi}, u_n(r) \in C^2[0, R] \Rightarrow u_n(r) \in C^2(\overline{K_R})$$

$$u(N)|_{r=R} = \sum_{n=-N}^{N} v_n e^{in\varphi} = v(N) \overset{L_2(\partial K_R)}{\to} v(N \to \infty)$$

Тогда задача выглядит так:

$$\begin{cases} \Delta u(N) = 0, \forall N \\ u(N)|_{r=R} = v(N) \end{cases}$$

Построим решение так:

$$u_n(r) = v_n (\frac{r}{R})^{|n|}, \forall n \in (-N, N)$$

Нужно проверить сходиться ли наша функция теперь:

$$\sum_{n=-N}^{N} v_n(\frac{r}{R})^{|n|}e^{in\varphi} \xrightarrow{?} u \textbf{ в } L_{2(K_R)}$$

Если она и сходиться, то к следующему ряду. Нужно проверить, лижит ли он в $L_{2(K_R)}$

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n(\frac{r}{R})^{|n|}e^{in\varphi}$$

Тогда

$$u \in L_{2(K_R)} \Leftrightarrow \int_{K_R} |u|^2 = \int_0^R drr \int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|^2 d\varphi =$$

$$\overset{\text{Равенство Парсеваля}}{=} \int_0^R drr \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n(r)|^2 2\pi =$$

$$\overset{Th.\text{Б. Леве}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|^2 2\pi \int_0^R (\frac{r}{R})^{2|n|} rdr \leqslant \frac{R^2}{2}||v||^2 < +\infty \text{ в } L_{2(\partial K_R)}$$

Получается, что u действительно пренадлежит $L_{2(K_R)}$ и к ней сходятся частичные суммы. Рассмотрим разность:

$$||u - u(N)||^2_{L_{2(K_R)}} \overset{\text{Равенство Парсеваля и } Th. \text{ Б. Леве}}{=} \sum_{|n|_N} |v_n|^2 2\pi \int_0^R (\frac{r}{R})^{|n|} rdr \leqslant \sum_{|n|>N} |v_n|^2 \pi R^2 \to 0(N\to\infty),$$

$$\text{т.к.} \sum_{|n|>N} |v_n|^2 < +\infty$$

Таким образом:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n(\frac{r}{R})^{|n|}e^{in\varphi} = u \in D(\overline{\Delta}), \overline{\Delta}u = 0, \text{т.к. } lim_{N\to\infty}(\Delta u(N)) = 0, \text{а } u(N) \overset{L_{2(K_R)}}{\to} u, u(N) \in D(\Delta)$$

Посмотрим на граничные условия:

$$||u(r,...) - v(...)||_{L_2(\partial K_R)} \overset{\text{Равенство Парсеваля}}{=} \sum_{n\in\mathbf{Z}} |v_n|^2 (1 - (\frac{r}{R})^{|n|})^2 2\pi, 0 < r < R,$$

$$1 - (\frac{r}{R})^{|n|} \leqslant 1, \text{ значит, ряд сходится равномерно по теореме Вейерштрасса(ограничили разложением } v_n) \Rightarrow$$

$$1 - (\frac{r}{R})^{|n|} \to 0(r \to R), \Rightarrow \sum_{n\in\mathbf{Z}} \to 0$$

Существование доказано.

17. Собственные числа и собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами на сфере $S \subset \mathbb{R}^3$, сферические функции. Ортогональный базис в пространстве $\mathbb{L}_2(S)$ из сферических функций.

Сферические координаты в $\mathbb{R}^3$

Сферические координаты определяются как

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta; \\ y = r\sin\varphi\sin\theta; \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \qquad \text{где} \qquad \begin{cases} r \in [0, +\infty); \\ \varphi \in [0, 2\pi); \\ \theta \in [0, \pi). \end{cases}$$

Далее S — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, определяемая как

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Работаем с комплекснозначными функциями $f(\varphi, \theta)$ в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2(S)$ со скалярными произведением

$$(f, g) = \int\limits_S f(\varphi,\theta)\,\overline{g(\varphi,\theta)}\,dS = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta\,(\varphi,\theta)\,\overline{g(\varphi,\theta)}, \quad f, g \in \mathbb{L}_2(S).$$

Таким образом, будем говорить, что функция $f : S \to \mathbb{C}$ лежит в $\mathbb{L}_2(S)$, если ее норма

$$\|f\|_{\mathbb{L}_2(S)} = \sqrt{(f, f)} < +\infty.$$

Оператор Лапласа в сферических координатах

Оператор Лапласа определим как сумму его радиальной и угловой части:

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\varphi,\theta}, \quad \Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \quad \Delta_{\varphi,\theta} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Определение 17.1: Угловая часть оператора Лапласа $\Delta_{\varphi,\theta} : C_2(S) \to \mathbb{L}_2(S)$ называется *оператором Лапласа–Бельтрами.*

Утверждение 17.1: Оператор $\Delta_{\varphi,\theta} : C_2(S) \to \mathbb{L}_2(S)$ является симметричным оператором, то есть справедливо равенство

$$(\Delta_{\varphi,\theta} f, g) = (f, \Delta_{\varphi,\theta} g), \quad \forall f, g \in C_2(S).$$

► Рассмотрим для $f, g \in C_2(S)$ скалярное произведение

$$(\Delta_{\varphi,\theta} f, g) = \int\limits_S (\Delta_{\varphi,\theta} f)\,\overline{g}\,dS = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\theta\sin\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\,(\Delta_{\varphi,\theta} f)\,\overline{g} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\left(\sin\theta f'_\theta\right)'_\theta \overline{g} + \frac{f''_{\varphi\varphi}\overline{g}}{\sin\theta} \right).$$

Второе слагаемое интегрируем по частям по φ два раза:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, f''_{\varphi\varphi}\overline{g} = \left(f'_\varphi\overline{g} - f\overline{g}'_\varphi\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} + \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, f\overline{g}''_{\varphi\varphi}.$$

Первое слагаемое равно нулю, так как функции f и g дважды непрерывно дифференцируемы. Следовательно, периодичны вместе со своими первыми производными. Меняем местами интегралы, используя теорему Фубини и выполняем интегрирование по частям по θ для первого слагаемого:

$$
\begin{aligned}
(\Delta_{\varphi,\theta} f, g) &= \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\theta \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \left(\left(\sin\theta f'_\theta\right)'_\theta \overline{g} + f\overline{g}''_{\varphi\varphi} \right) = \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0} \left[\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\sin\theta f'_\theta \overline{g} \Bigg|_{\theta=\varepsilon}^{\theta=\pi-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\theta\, f'_\theta \sin\theta\, \overline{g}'_\theta \right) + \int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \,\frac{f\overline{g}''_{\varphi\varphi}}{\sin\theta} \right] = \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0} \left[\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\left(\sin\theta f'_\theta\, \overline{g} - \sin\theta f\, \overline{g}'_\theta\right) \Bigg|_{\theta=\varepsilon}^{\theta=\pi-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\theta f \left(\overline{\sin\theta g'_\theta}\right)'_\theta \right) + \int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\theta \int\limits_0^{2\pi} \frac{f\overline{g}''_{\varphi\varphi}}{\sin\theta} \right] = \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0} \left\{ \int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left[f\left(\sin\theta g'_\theta\right)'_\theta + \frac{f\overline{g}''_{\varphi\varphi}}{\sin\theta} \right] + \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(f'_\theta \overline{g} - f\overline{g}'_\theta\right)\sin\theta \Bigg|_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \right\}.
\end{aligned}
$$

Первое слагаемое в фигурных скобках дает $(f, \Delta_{\varphi,\theta} g)$. Во втором слагаемом функция $(f'_\theta \overline{g} - f\overline{g}'_\theta)$ непрерывна, а $\sin\theta \xrightarrow{\theta\to\varepsilon,\pi-\varepsilon} 0$. Следовательно, по теореме о непрерывной зависимости интеграла от параметра, можем внести предел внутрь и получить, что второе слагаемое равно нулю. $\square$

Утверждение 17.2: Оператор $\Delta_{\varphi,\theta}$ является отрицательно полуопределенным оператором.

► Рассматривая такое же скалярное произведение, в котором $f = g$, и интегрируя по частям каждое слагаемое только один раз, находим:

$$
\begin{aligned}
(\Delta_{\varphi,\theta} f, f) &= \lim_{\varepsilon\to+0} \left\{ \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left[\cancel{\left(\sin\theta f'_\theta\right) \overline{f} \Bigg|_{\theta=\varepsilon}^{\theta=\pi-\varepsilon}} - \int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\theta \sin\theta \left|f'_\theta\right|^2 \right] + \right. \\
&\left. + \int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\theta \left[\cancel{\frac{f'_\varphi \overline{f}}{\sin\theta} \Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}} - \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{\left|f'_\varphi\right|^2}{\sin\theta} \right] \right\} = -\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left[\sin\theta \left|f'_\theta\right|^2 + \frac{\left|f'_\varphi\right|^2}{\sin\theta} \right] \le 0.
\end{aligned}
$$

Причем равенство нулю достигается только на постоянных функциях. $\square$

Следствие: Любое собственное значение оператора Лапласа–Бельтрами является вещественным неположительным числом. Ядром оператора $\Delta_{\varphi,\theta}$ является подпространство, состоящее из всех функций-констант. Собственные функции оператора $\Delta_{\varphi,\theta}$, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в пространстве $\mathbb{L}_2(S)$.

Собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами

Определение 17.2: Собственные функции оператора $\Delta_{\varphi,\theta}$ называются сферическими функциями.

Так как $\mathbb{L}_2(S)$ представима в виде

$$
\mathbb{L}_2(S) = \mathbb{L}_{2,\sin\theta}[0,\pi] \otimes \mathbb{L}_2[0,2\pi],
$$

и мы знаем что в $\mathbb{L}_2[0,2\pi]$ есть базис $\left\{e^{in\varphi}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$, будем искать собственные функции в виде $v(\theta)e^{in\varphi} = u(\varphi,\theta)$, где $0 \ne v(\theta) \in C^2[0,2\pi]$. Запишем уравнение на собственные значения:

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{\varphi,\theta}\left(\exp\left(in\varphi\right) v(\theta)\right) = \left(\frac{d^2 v(\theta)}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{dv(\theta)}{d\theta} - \frac{k^2 v(\theta)}{\sin^2\theta} \right) \exp\left(in\varphi\right) = \lambda \exp\left(in\varphi\right) v(\theta); \\
&v''(\theta) + \operatorname{ctg}\theta v'(\theta) - \frac{n^2}{\sin^2\theta} v(\theta) = \lambda v(\theta), \quad 0 < \theta < \pi, \quad v(\theta) = v_n(\theta), \quad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Наша цель — разыскать $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ ортогональный базис $\left\{v_{m,n}(\theta)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющий уравнению на собственные значения. Таким образом, для каждого из базисных векторов $v_n(\theta)$ у нас будет ортогональный базис. По теореме о базисе в тензорном произведении двух гильбертовых пространств, ортогональным базисом в $\mathbb{L}_2(S)$ будет тензорное произведение ортогональных базисов.

Поиск собственных функций: Сузим область поиска на бесконечно дифференцируемые функции $v_n \in C^\infty(0,\pi)$ и $\forall n \in \mathbb{Z}$ рассмотрим оператор

$$\Delta_n = \frac{d^2}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{d}{d\theta} - \frac{n^2}{\sin^2\theta} I, \quad \Delta_n : C^\infty(0,\pi) \to C^\infty(0,\pi).$$

Здесь $I : C^\infty(0,\pi) \to C^\infty(0,\pi)$ — единичный оператор. В этих терминах задача формулируется как

$$\Delta_{-n} = \Delta_n v = \lambda v, \quad v \in C^\infty(0,\pi), \quad \theta \in (0,\pi), \quad v \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим оператор

$$\boxed{A_n = \frac{1}{\sin^n\theta}\frac{d}{d\theta}\sin^n\theta = \frac{d}{d\theta} + n\operatorname{ctg}\theta I, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad A_n : C^\infty(0,\pi) \to C^\infty(0,\pi)}.$$

Утверждение 17.3: Выполнено следующее соотношение:

$$\boxed{A_{n+1}A_{-n} = \Delta_n + n(n+1)I : C^\infty(0,\pi) \to C^\infty(0,\pi)}.$$

► Подействуем оператором, стоящим в левой части, на функцию $v \in C^\infty(0,\pi)$:

$$\begin{aligned}
&A_{n+1}A_{-n}v = A_{n+1}(v' - nv\operatorname{ctg}\theta) = v'' + \frac{n}{\sin^2\theta}v - n\operatorname{ctg}\theta\left(v' - n\operatorname{ctg}\theta v\right) = \\
&= v'' + \operatorname{ctg}\theta v' + v\left(\frac{n}{\sin^2\theta} - n(n+1)\underbrace{\operatorname{ctg}^2\theta}_{\frac{1}{\sin^2\theta}-1}\right) = v'' + \operatorname{ctg}\theta v + v\left(\frac{n-(n+1)n}{\sin^2\theta} + n(n+1)\right) = \\
&= \Delta_n v + n(n+1)v \quad \forall\, v \in C^\infty(0,\pi). \quad \square
\end{aligned}$$

Утверждение 17.4: Выполнено следующее соотношение:

$$\boxed{\Delta_{n-1}A_n = A_n\Delta_n, \quad n \in \mathbb{Z}}.$$

► Выполняя замену $n+1 \to -n$, $n \in \mathbb{Z}$ в утверждении 17.3, находим:

$$A_{-n}A_{n+1} = \Delta_{n+1} + n(n+1)I \Longrightarrow A_{n+1}A_{-n}A_{n+1} = A_{n+1}\Delta_{n+1} + n(n+1)A_{n+1}. \tag{*}$$

С другой стороны, сразу пользуясь результатом утверждения 17.3 и умножая справа на A_{n+1} получаем:

$$A_{n+1}A_{-n}A_{n+1} = \Delta_n A_{n+1} + n(n+1)A_{n+1}. \tag{**}$$

Используя равенство левых частей в (*) и (**), находим:

$$\Delta_n A_{n+1} = A_{n+1}\Delta_{n+1} \Longrightarrow \Delta_{n-1}A_n = A_n\Delta_n \text{ на } C^\infty(0,\pi), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Фиксируем $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$A_{-n} = \sin^n\theta\frac{d}{d\theta}\sin^{-n}\theta.$$

Очевидно, что функция $v_n(\theta) = \sin^n(\theta)$ лежит в $C^\infty(0,\pi)$, а также лежит в ядре оператора A_{-n}:

$$v_n(\theta) = \sin^n(\theta) \in C^\infty(0,\pi), \quad A_{-n}v_n = 0.$$

Следовательно, из утверждения 17.3 следует, что

$$A_{n+1}A_{-n}v_n = 0 = \Delta_n v_n + n(n+1)v_n \Longrightarrow \Delta_n v_n = -n(n+1)v_n.$$

Одна собственная функция найдена. Далее, пользуясь утверждением 17.4, получаем:

$$\Delta_{n-1}A_n v_n = A_n\Delta_n v_n = -n(n+1)A_n v_n \Longrightarrow v_{n-1} = A_n v_n, \quad \Delta_{n-1}v_{n-1} = -n(n+1)v_{n-1}.$$

Нашли еще одну собственную функцию v_{n-1}. Сделаем еще одну итерацию процесса:

$$\Delta_{n-2}A_{n-1} = A_{n-1}\Delta_{n-1} \Longrightarrow \Delta_{n-2}A_{n-1}v_{n-1} = -n(n+1)A_{n-1}v_{n-1} \Longrightarrow v_{n-2} = A_{n-1}v_{n-1}.$$

Если для $k \in \mathbb{N}_0$ имеем $v_{n-k} \in C^\infty(0,\pi)$, то

$$\Delta_{n-k}v_{n-k} = -n(n+1)v_{n-k} \Longrightarrow \Delta_{n-k-1}A_{n-k}v_{n-k} = A_{n-k}\Delta_{n-k}v_{n-k} = -n(n+1)v_{n-k};$$
$$\Delta_{n-k-1}v_{n-k-1} = -n(n+1)v_{n-k-1}.$$

Утверждение 17.5: Для собственной функции $v_{n-k}(\theta)$ справедлива явная формула:

$$\boxed{v_{n-k}(\theta) = \frac{1}{\sin^{n-k}\theta}\left(\frac{d}{\sin\theta d\theta}\right)^k \sin^{2n}\theta, \quad k \in \mathbb{N}_0}.$$

► Доказательство проведем по индукции. Мы знаем, что $v_n(\theta) = \sin^n\theta$ и знаем, что $v_{n-1} = A_n v_n$. Тогда

$$v_{n-1} = A_n v_n = \frac{1}{\sin^n\theta}\frac{d}{d\theta}\sin^2\theta v_n(\theta) = \frac{1}{\sin^{n-1}\theta}\left(\frac{d}{\sin\theta d\theta}\right)^1 \sin^{2n}\theta.$$

База индукции (для $k=0$) очевидна: для $v_n(\theta)$ имеем:

$$v_n(\theta) = \frac{1}{\sin^n\theta}\left(\frac{d}{\sin\theta d\theta}\right)^0 \sin^{2n}\theta = \sin^n\theta.$$

Построим общую формулу. Предположим, что

$$v_{n-k}(\theta) = \frac{1}{\sin^{n-k}\theta}\left(\frac{d}{\sin\theta d\theta}\right)^k \sin^{2n}\theta, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

тогда

$$v_{n-k-1} = A_{n-k}v_{n-k} = \frac{1}{\sin^{n-k}\theta}\frac{d}{d\theta}\cancel{\sin^{n-k}\theta}\frac{1}{\cancel{\sin^{n-k}\theta}}\left(\frac{d}{\sin\theta d\theta}\right)^k \sin^{2n}\theta = \frac{1}{\sin^{n-k-1}\theta}\left(\frac{d}{\sin\theta d\theta}\right)^{k+1} \sin^{2n}\theta. \ \square$$

Выполняя замену $k - n \to m,\ m \in \{-n,\dots,n\}$, получим:

$$v_{-m}(\theta) = \sin^m\theta\left(\frac{d}{\sin\theta d\theta}\right)^{n+m} \sin^{2n}\theta, \quad \Delta_m v_{-m}(\theta) = -n(n+1)v_{-m}(\theta).$$

Так как мы искали функции из $C^\infty(0,\pi)$, из этого набора необходимо выбрать функции v_{-m}, соответствующие целым неотрицательным m.

Выражение через полиномы Лежандра: Введем замену $\tau = \cos\theta \in [-1,1]$. Тогда

$$-\frac{d}{\sin\theta d\theta} = \frac{d}{d\tau}, \quad \sin^2\theta = 1-\tau^2.$$

Для собственных функций $v_{-m}(\theta)$ получаем выражение:

$$v_{-m}(\theta) = (-1)^{m+k}(1-\tau^2)^{m/2}\left(\frac{d}{d\tau}\right)^m\left(\frac{d}{d\tau}\right)^n\left(1-\tau^2\right)^n.$$

Определение 17.3:

- Для $n \in \mathbb{N}_0$ *полиномом Лежандра* степени n называется многочлен

$$\boxed{P_n(\tau) = \left(\frac{d}{d\tau}\right)^n (1-\tau^2)^n, \quad \tau \in [-1,1], \quad n \in \mathbb{N}_0}.$$

- Для $m \in \mathbb{N}_0$ *присоединенным полиномом Лежандра* называется многочлен

$$\boxed{P_{n,m}(\tau) = (1-\tau^2)^{m/2}\left(\frac{d}{d\tau}\right)^{n+m}\left(1-\tau^2\right)^n, \quad \tau \in [-1,1], \quad n,m \in \mathbb{N}_0}.$$

Таким образом, для собственных функций $v_{-m}(\theta)$ имеем (постоянный множитель можно опустить):

$$v_{-m}(\cos\theta) = P_{n,m}(\cos\theta).$$

Окончательно, получаем выражение для сферических функций $Y_{n,m}(\varphi,\theta)$:

$$\boxed{Y_{n,m}(\varphi,\theta) = P_{n,|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}, \quad \theta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0,2\pi], \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \{-n,\dots,n\}}.$$

Для них выполнено

$$Y_{n,m}(\varphi,\theta) \in C^2(S), \quad \Delta_{\varphi,\theta} = -n(n+1)Y_{n,m}(\varphi,\theta) \Longrightarrow \lambda_n = -n(n+1).$$

Полнота системы сферических функций

Утверждение 17.6: Система сферических функций ортогональна. При $k_1 \neq k_2$ присоединенные полиномы Лежандра $P_{k_1,m}(\cos\theta)$ и $P_{k_2,m}(\cos\theta)$ ортогональны на $\mathbb{L}_{2,\sin\theta}[0,\pi]$.

► Рассмотрим числа $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$, $m_1 \in \{-k_1, \ldots, k_1\}$ и $m_2 \in \{-k_2, \ldots, k_2\}$. Если $m_1 \neq m_2$, то ортогональность сферических функций Y_{k_1,m_1} и Y_{k_2,m_2} автоматически следует из ортогональности мнимых экспонент $\exp(im_1\varphi)$ и $\exp(im_2\varphi)$. Действительно, если рассмотрим скалярное произведение, получим:

$$(Y_{k_1,m_1}, Y_{k_2,m_2}) = \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi e^{i\varphi(m_1-m_2)}}_{=0} \int\limits_0^{\pi} d\theta \, \sin\theta \, P_{n_1,|m_1|}(\cos\theta) P_{n_2,|m_2|}(\cos\theta) = 0.$$

Пусть теперь $m_1 = m_2 = m$ и $k_1 \neq k_2$. Сферические функции $Y_{k_1,m}$ и $Y_{k_2,m}$ отвечают различным собственным значениям λ_{k_1} и λ_{k_2}. Так как оператор $\Delta_{\varphi,\theta}$ симметричен на $C_2(S)$, его собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Отсюда:

$$0 = (Y_{k_1,m}, Y_{k_2,m}) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \, \sin\theta \, P_{k_1,|m|}(\cos\theta) P_{k_2,|m|} \cos(\theta) = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} P_{k_1,|m|}(\tau) P_{k_2,|m|}(\tau) d\tau. \quad \square$$

Утверждение 17.7: Для любого $m \geq 0$ система функций

$$\left\{ P_{k,m} \;\middle|\; k \geq m \right\}$$

образует ортогональный базис в пространстве $\mathbb{L}_2[-1,1]$.

► Ортогональность доказана в утверждении 17.6. Докажем теперь полноту. Для этого зафиксируем прозвольную функцию $f \in \mathbb{L}_2[-1,1]$ и покажем, что ее можно приблизить полиномами Лежандра с заданной наперед точностью $\varepsilon > 0$. Так как $\mathbb{L}_2[-1,1]$ всюду плотно в $C[-1,1]$, то

$$\exists \, g \in C[-1,1] : \; \|f - g\|_{\mathbb{L}_2[-1,1} \leq \varepsilon.$$

Для любого $\delta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ рассмотрим

$$\psi_\delta(\tau) \in C[-1,1] : \; [-1,1] \to [0,1],$$

для которой выполнено

$$\begin{cases} \psi_\delta(\tau) = 1, & \tau \in [-1+2\delta, 1-2\delta], \\ \psi_\delta(\tau) = 0, & \tau \in [-1,-1+\delta] \cup [1-\delta, 1]. \end{cases}$$

Определим $g_\delta(\tau) = g(\tau)\psi_\delta(\tau)$. Тогда

$$\|g - g_\delta\|_{\mathbb{L}_2} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} |g(\tau)|^2 (1 - \psi_\delta(\tau))^2 d\tau} \leq \sqrt{M^2 4\delta} = 2M\sqrt{\delta}, \quad \text{где } M = \|g\|_C = \max_{\tau \in [-1,1]} |g(\tau)|.$$

При $\delta \leq \left(\frac{\varepsilon}{2M+1}\right)^2$ выполнено

$$\|g - g_\delta\|_{\mathbb{L}_2} \leq \varepsilon \Longrightarrow \|f - g_\delta\|_{\mathbb{L}_2} \leq 2\varepsilon.$$

Введем новую непрерывную функцию (another one) h_δ:

$$h_\delta(\tau) = \begin{cases} \frac{g_\delta(\tau)}{(\sqrt{1-\tau^2})^m}, & \tau \in [-1+\delta, 1-\delta], \\ 0, & \tau \in [-1,-1+\delta] \cup [1-\delta, 1]. \end{cases}$$

Справедливо равенство $g_\delta(\tau) = \left(\sqrt{1-\tau^2}\right)^m h_\delta(\tau)$. По теореме Вейерштрасса существует такой многочлен $T(\tau)$ порядка p, что

$$\|h_\delta - T(\tau)\|_C \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Но многочлен $T(\tau)$ может быть выражен через линейную комбинацию многочленов Лежандра. Тогда

$$\left\|g_\delta(\tau) - \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_s P_{m+s,m}(\tau)\right\| = \left\|\left(\sqrt{1-\tau^2}\right)^m (h_\delta(\tau) - T(\tau))\right\|_{\mathbb{L}_2} \leq \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} |h_\delta(\tau) - T(\tau)|^2 \, d\tau} = \varepsilon.$$

Таким образом, выполнено неравенство

$$\|f - \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_s P_{m+s,m}(\tau)\|_{\mathbb{L}_2} \leq 3\varepsilon.$$

Отсюда следует, что система полиномов Лежандра является полной в пространстве $\mathbb{L}_2[-1,1]$. $\square$

18. Неравенство Фридрихса для функции $f \in C^1(\overline{G})$ и выпуклой ограничесной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно-гладкой границей. Задача Дирихле в шаре $B \subset \mathbb{R}^3$ для замыкания оператора Лапласа $\Delta : C^2(\overline{B}) \to \mathbb{L}_2(B)$, существование и единственность ее решения.

Неравенство Фридрихса Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$ - ограничесная выпуклая область в $\mathbb{R}^m$ с кусочно гладкой ∂G и функция $f \in C^1(\overline{G})$, $f|_{\partial G}=0$, тогда $\int_G |f|^2 \leqslant (diam(G))^2 \int_G |\nabla f|^2$. Т.е. $||f||_{L_2(G)} \leqslant diam(G)||\nabla f||_{L_2(G)}$
Док-во:

1. Случай $m = 1$

$$G = (a, b), -\infty < a < b < +\infty, f \in C^1[a, b], f(a) = f(b) = 0$$

Возьмем произвольную x из интервала (a, b). Тогда:

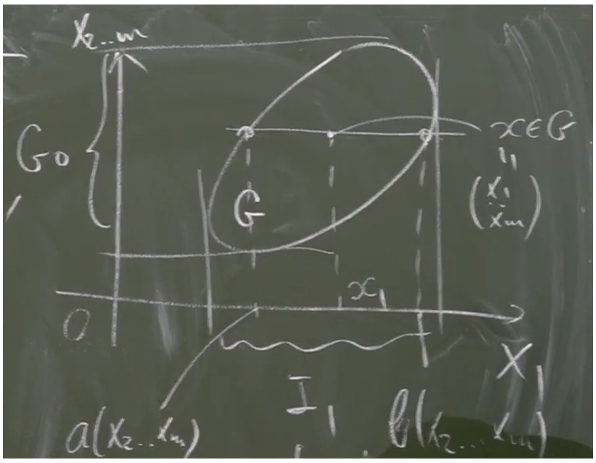
$$f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt - \text{формула Ньютона-Лейбница}$$

$$|f(x)| \leqslant \int_a^b |f'(t)|dt \leqslant \int_a^b |f'(t)|dt \overset{\text{Неравенство Коши-Буняковского}}{\leqslant} \sqrt{\int_a^b dt}\sqrt{\int_a^b |f'(t)|^2 dt} = \sqrt{b-a}||f'(t)||^2_{L_2(a,b)}$$

Получаем:

$$||f||^2_{L_2(a,b)} = \int_a^b |f(x)|^2 dx \leqslant \int_a^b dx(b-a)||f'||^2_{L_2(a,b)} = (b-a)^2||f'||^2_{L_2(a,b)}. \Rightarrow ||f||_{L_2(a,b)} \leqslant (b-a)||f'||_{L_2(a,b)}$$

2. Случай $m \geq 2$.. Выделим ось x_1. Нашу выпуклую область G спроектируем на x_1 - I_1 - огранчиенный интервал в $\mathbb{R}$ и ортоганальное дополение $G_0 \subset \mathbb{R}^{m-1}$ - выпуклая ограниченная область. Зафиксируем точку $x = (x_1, ..., x_m)^T$ в области G. Она может двигаться между точками $(a, ..., x_m)^T$ и $(b, ..., x_m)^T$, обозначим их $a(x_2, ..., x_m)$ и $b(x_2, ..., x_m)$.



$$f(x) = f(x) - f(a(x_2, ..., x_m))) = \int_a^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, ..., x_m)dt.$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leqslant \int_{(a,...x_m)^T}^{(x_1,...,x_m)^T} |\frac{\partial f}{\partial x_1}(t, ..., x_m)|dt \leqslant \int_a^b |\frac{\partial f}{\partial x_1}(t, ..., x_m)|dt \leqslant$$

$$\overset{\text{Неравенство Коши-Буняковского}}{\leqslant} \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b |\frac{\partial f}{\partial x_1}|^2 dt}$$

При этом

$$|\frac{\partial f}{\partial x_1}|^2 \leqslant |\nabla f|^2, (b-a) \leqslant |I_1|$$

Тогда

$$|f(x)|^2 \leqslant |I_1| \int_a^b |\nabla f(t, x_2, ..., x_m)|^2 dt$$

Интегрируя по области

$$\int_G |f(x)|^2 dx \leqslant |I_1| \int_G dx \int_a^b |\nabla f(t, x_2, ..., x_m)|^2 dt \leqslant |I_1| \int_{I_1} dx_1 \int_{G_0} dx_2 ... dx_m \int_a^b |\nabla f|^2 dt \leqslant |I_1|^2 \int_G |\nabla f|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant (diam(G))^2 \int_G |\nabla f|^2 dx$$

Задача Дирихле в шаре $B \subset \mathbb{R}^3$ для замыкания оператора Лапласа $\Delta : C^2(\overline{B}) \to \mathbb{L}_2(B)$, существование и единственность ее решения. Конст разбирает данную задачу в 9 лекции 2 семестра. Примерный тайминг: 51:30 - 01:18:00

$$\begin{cases} \overline{\Delta} u = 0, u \in D(\overline{\Delta}) \\ u|_{\partial K_R} = v \in L_2(\partial B_R) \Leftrightarrow ||u(r, ...) - v(...)||_{L_2(\partial K_R)} \to 0 (r \to R - 0) \end{cases}$$

Докажем, что решение существует:
Ищем функцию:

$$\begin{cases} u(N) \in C^2(\overline{B_R}) \\ u(N) \overset{L_{2(B_R)}}{\to} u \\ \Delta u(N) = 0 \text{ в } \overline{B_R} \\ u(N)|_{\partial B_R} = f(N) \in C^\infty(S) \text{ по построению сферических функций (они такие ;))} \end{cases}$$

$$f(N) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} f_{n,m} Y_{n,m} \overset{L_{2(S)}, N \to \infty}{\to} f$$

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}_0, m \in \overline{-n, n}} f_{n,m} Y_{n,m} \text{ в } L_{2(S)}$$

Раз у нас имеется базис из сферические функции, то

$$u(N) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} u_{n,m}(r) Y_{n,m}, u_{n,m}(r) \in C^2[0; R] \Rightarrow u(N) \in C^2(\overline{B_R}),$$

используем только те сферические функции, что есть в разложении граничных условий

$$\Delta u(N)_{0<r<R} = (u''_{n,m} + \frac{2}{r} u'_{n,m} - \frac{n(n+1)}{r^2} u_{n,m}) Y_{n,m} = 0 \Rightarrow r^2 u''_{n,m} + 2r u'_{n,m} - n(n+1) u_{n,m} = 0, 0 < r < R$$

Решения: $r^\mu, \mu(\mu - 1) + 2\mu - n(n+1) = 0, \mu = n, \mu = -n - 1 -$ не подхдить из соображения гладкости

$$u_{n,m}(r) = a_{n,m} r^n \in C^2[0, R]$$
$$u_{n,m}(R) = f_{n,m} = a_{n,m} R^n$$
$$u_{n,m}(r) = f_{n,m} (\frac{r}{R})^n, \forall n \in \overline{0, n}, \forall m \in \overline{-n.n}$$

Проверим принадлежит ли это решение L_2, для этого рассмотрим:

$$u = \sum_{n \in \mathbb{N}_0, m \in \overline{-n, n}} f_{n,m} (\frac{r}{R})^n Y_{n,m} \overset{?}{\in} L_2(B_R) \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}_0, m \in \overline{-n, n}} ||f_{n,m} (\frac{r}{R})^n||_{L_{2, r^2[0,R]}} ||Y_{n,m}||_{L_{2(S)}} < +\infty$$

$$||f_{n,m} (\frac{r}{R})^n||_{L_{2, r^2[0,R]}} \leqslant |f_{n,m}|^2 \int_0^R dr r^2 (\frac{r}{R})^n \leqslant \frac{R^3}{3}$$

$$||u||^2_{L_{2(B_R)}} \leqslant \frac{R^3}{3} \sum_{n\in\mathbb{N}_0, m\in\overline{-n,n}} |f_{n,m}|^2 ||Y_{n,m}||_{L_{2(S)}} = \frac{R^3}{3}||f||_{L_{2(S)}} < +\infty$$

Проверим теперь сходимость, для этого докажем фундаментальность:

$$||u(N)-u(N+M)||^2_{L_{2(B_R)}} = \sum_{n=N+1}^{N+M}\sum_{m=-n}^{n} ||u_{n,m}(r)||_{L_{2,r^2[0,R]}} ||Y_{n,m}||_{L_{2(S)}} \leqslant \frac{R^3}{3} \sum_{n\in\overline{N+1,N+M}, m\in\overline{-n,n}} |f_{n,m}|^2 ||Y_{n,m}||_{L_{2(S)}} \leqslant \varepsilon,$$

$$\forall N \geqslant N(\varepsilon), \forall M \in \mathbb{N}_0$$

Последня оценка сделана, т.к. под знаком суммы находятся члены сходящегося ряда, значит по критерию Коши сходимости числового ряда оценка справедлива.
Отсда получаем, что

$$u(N) \subset L_2(B_R) - \text{ фундаментальная последовательность} \Rightarrow \text{ она сходится в } L_2(B_R) \text{ в силу полноты } L_2(B_R).$$

Из этого вытекает:

$$u \in D(\overline{\Delta}) \text{ и } \overline{\Delta}u = 0$$

Теперь проверим выполнение граничных условий, должно выполняться:

$$||u(r,...) - f(...)||^2_{L_{2(S)}, 0<r<R} \overset{r\to R-0}{\to} 0$$

$$||u(r,...) - f(...)||^2_{L_{2(S)}, 0<r<R} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0, m\in\overline{-n,n}} |f_{n,m}|^2 (1-(\frac{r}{R})^n)^2 ||Y_{n,m}||_{L_{2(S)}} \leqslant |||f_{n,m}||||Y_{n,m}||^2 < +\infty$$

Последняя оценка сделана, так как $|f_{n,m}|^2||Y_{n,m}||_{L_{2(S)}}$ - член сходящегося ряда.
Далее делаем следующие оценки:

$$(1-(\frac{r}{R})^n)^2 \leqslant 1, (1-(\frac{r}{R})^n)^2 \overset{r\to R-0}{\to} 0$$

Отсюда следует, что ряд сходится равномерно по $r \in (0, R) \Rightarrow$, следовательно, разность стремится к нулю, так как сходится равномерно по r. Существование доказано и решение построенно.
Теорема единственности Пусть теперь имеем:

$$\begin{cases} \tilde{u}(N) \in C^2(\overline{B_R}) \\ \tilde{u}(N) \overset{L_{2(B_R)}}{\to} \tilde{u} \\ \Delta\tilde{u}(N) \overset{L_{2(B_R)}}{\to} 0 \\ \tilde{u}(N)|_{\partial B_R} = f(N) \end{cases}$$

Рассмотрим функцию:

$$\begin{cases} w(N) = u(N) - \tilde{u}(N) \in C^2(\overline{B_R}) \\ \Delta w(N) \to 0 \\ w(N) \overset{L_{2(B_R)}}{\to} u - \tilde{u} \\ w(N)|_{\partial B_R} = 0 \end{cases}$$

Применим неравенство Фридрихса для $w(N) \in C^2(\overline{B_R})$, $w(N)|_{\partial B_R}= 0$, B_R - выпуклая ограниченная область в $\mathbb{R}^3$.

Дальше следите за руками:

$$\int |w(N)|^2 \leqslant (2R)^2 \int_{B_R} |\nabla w(N)|^2$$

$$\int_{B_R} \Delta w(N)\overline{w(N)} = \int_{\partial B_R} \frac{\partial w(N)}{\partial n}\overline{w(N)} - \int_{B_R} |\nabla w(N)|^2$$

$$\Delta w(N) \overset{L_{2(B_R)}}{\to} 0$$

$$\overline{w(N)} \overset{L_{2(B_R)}}{\to} \overline{u - \widetilde{u}}$$

$$\int_{\partial B_R} \frac{\partial w(N)}{\partial n}\overline{w(N)} = 0, \text{ т.к. на границе } \overline{w(N)} = 0$$

$$\int_{B_R} \Delta w(N)\overline{w(N)} = -\int_{B_R} |\nabla w(N)|^2 \to 0$$

Тогда имеем по неравенству Коши-Буняковсково:

$$|\int_{B_R} \Delta w(N)\overline{w(N)}| \leqslant ||\Delta w(N)||_{L_{2(B_R)}} ||w(N)||_{L_{2(B_R)}} \to$$

$$/||\Delta w(N)||_{L_{2(B_R)}} \to 0,$$

$$||w(N)||_{L_{2(B_R)}} \to ||u - \widetilde{u}|| < +\infty/$$

$$\to 0$$

Получаем, что $\int_{B_R} |\nabla w(N)|^2 \to 0$. Тогда неравенства Фридрихса из $\int |w(N)|^2 \leqslant (2R)^2 \int_{B_R} |\nabla w(N)|^2$ следует, что $w(N) = \widetilde{w}(N)$. Единственность доказана.
Спасибо всем, кто дочитал и осознал. Удачи при подготовке и на экзамене. Да прибудет с нами сила.

19. Самосопряжённый линейный оператор в гильбертовом пространстве, его плотная определённость, замкнутость и симметричность. Пример несамосопряженногозамкнутого плотно определенного симметричного оператора. Вещественность спектра самосопряженного оператора.

Сопряженный оператор

Определение. $A : \mathrm{D}(A) \to \mathcal{H}$ - линейный, тогда A - самосопряженный(эрмитов) если $GrA = GrA^*$, то есть $\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}(A^*)$ и $A^*g = Ag \forall g \in \mathrm{D}(a) = \mathrm{d}(A^*)$.

Определение. $A : \mathrm{D}(A) \to \mathcal{H}$ замкнут, если его график замкнут.

Лемма. Если A -самосопряженный оператор (ССО) то GrA замкнут.

Доказательство. Очевидно из определения. (см. билет про симметричный опертатор, в нем доказано что график сопряженного оператора заммкнут, а значит замкнут и график A из определения самосопряженного оператора) □

Определение. A - симметричный оператор, если $A : \mathrm{D}(A) \to \mathcal{H}$ $(Af, g) = (f, Ag)$ $\forall f, g \in \mathrm{D}(A)$

Определение. Оператор A - плотно определенный,если $\overline{\mathrm{D}(A)} = \mathcal{H}$

Лемма. Если A -самосопряженный тогда $\overline{\mathrm{D}(A)} = \mathcal{H}$

Доказательство. Идея: $L \subset \mathcal{H}$ - подпространство. Если $\overline{L} = \mathcal{H}$, то $(\overline{L})^{\perp} = \{0\} = (L)^{\perp}$ (Равенство $(\overline{L})^{\perp} = (L)^(\perp)$ из теоремы Фредгольма) Теперь берем $p \in (\mathrm{D}(A))^{\perp} \Leftrightarrow \forall h \in \overline{\mathrm{D}(A)} \Rightarrow (h, p) = 0$ Возьмем $\forall \in \mathrm{D}(A) = \mathrm{D}(A^*)$ рассмотрим $Af = A^*f \in \mathrm{D}(A)$. Тогда $h = Af$ $(Af, p) = 0 \to p \in \mathrm{D}(A^*) = \mathrm{D}(A)$ тк A - ССОб то есть $p \in \mathrm{D}(A) \bigcap (\mathrm{D}(A))^{\perp} = \{0\} \to p = 0 \to (\mathrm{D}(A))^{\perp} = \{0\}$ □

Таким образом мы показали плотную определенность, замкнутость и симметричность самосопряженного оператора.

Определение. Если $A : D(A) \to \mathcal{H}$, $T : D(T) \to \mathcal{H}$ и $\overline{GrA} = GrT$, то $\mathrm{T} = \overline{A}$

Лемма. Есди A и A^* плотно определены в H то $\overline{A} = A^{**}$

Доказательство. Знаем, что есть плотно определен то $GrA^{**} = (VGrA^*)^{\perp}, GrA^* = (VGrA)^{\perp}$, подставляя одно в другое полуаем:$GrA^{**} = (V(VGrA)^{\perp}))^{\perp} = (-I(GrA)^{\perp})^{\perp} = ((GrA)^{\perp})^{\perp} = \overline{GrA}$

□

Лемма. Если A плотно определен и существоет $\overline{A}$ тогда A^* плотно определен и $\overline{A} = A^{**}$

Доказательство. Хотим увидеть что $\overline{D(A^*)} = \mathcal{H}$.

$\forall h \in (D(A^*))^{\perp} \Rightarrow \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \in (GrA^*)^{\perp}$

$(GrA^*)^{\perp} = (VGrA)^{\perp\perp} = \overline{VGrA} = V\overline{GrA} = VGr\overline{A}$

То есть $\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \in Gr\overline{A}$ Значит $h = A0 = 0$, следовательно $\overline{D(A^*)} = \mathcal{H} = 0$ □

Последние 2 леммы формируют критерий замыкаемости, из билета 15
Для того тчобы рассмотреть пример определим критерий самосопряженности замыкания A, этот критерий используется в примере, его доказательство состявляет билет 20

Критерий самосопряженности $\overline{A}$

A -симметричный и плотоно определенный в H тогда $\overline{A}$ - ССО $\Leftrightarrow \overline{A} = A^*$

Пример!

Рассмотрим симметричный плотно определенный оператор, замыкание которого не ССО.
$A = i\frac{d}{dx}$, $D(A) \to L_2[0,1]$, $D(A) = \{p \in C^1[0,1] : p(0) = p(1) = 0\}$
Область определения всюду плотна! $\forall g \in L_2[0,1], \forall \varepsilon \exists h \in C[0,1] : ||g-h|| \leqslant \varepsilon$. По теореме Вейерштрасса $\exists$ многочлен P : $||h = P|| = max\{|P-h|\} \leqslant \varepsilon$ Значит $||h-P|| = \sqrt{\int |h-P|^2} \leqslant \varepsilon$ Многочлены, с $P(0) = P(1) = 0$ полны в L_2 т к отличаются на меру 0
Симметричность: Очевидно по частям, область определения $D(A^*) \supset C^1[0,1]$ (без граничных условий в отличие от области определения A).
Что такое $\overline{A}$?

$$f \in D(\overline{A}) \Leftrightarrow \exists f_n \in D(A) : \begin{cases} f_n \to f \\ Af_n \to h = \overline{A}f \end{cases} \qquad \begin{cases} f_n(x) = \int_0^x f_n'(t)dt \\ f_n(1) = \int_0^1 f_n'(t)dt = 0 \end{cases}$$

$|f_n(x) - f_m(x)| = |\int_0^x f_n' - \int_0^x f_m'| \leqslant \int_0^x |f_n' - f_m'| \leqslant$(из Коши Буняковскоро)$\sqrt{\int_0^x |f_n' - f_m'|^2} = ||f_n' - f_m'|| = ||Af_n - Af_m|| \to 0$ следовательно f_n равномерно, $f_n \rightrightarrows f$ причем f(0)= f(1) = 0 так как $f_n(0) = f_n(1) = 0$, $f(x) = -i\int_0^x h(t)dt$, $f_n(1) = -i\int_0^1 hdt = 0 = f(1)$.
То есть $D(\overline{A}) = \{f \in C[0,1] : f(0 = f(1) = 0, \exists \psi \in L_2[0,1] : f(x) = \int_0^x \psi(t)dt\}$ Следовательно $C_1[0,1] \nsubseteq D(\overline{A})$, то есть существует подпространство, поторое содержится в $D(A^*)$ но не содержится в $D(\overline{A})$ значит $\overline{A}$ не ССО

Вещественность спектра

(Источник: Константинов, функциональный анализ)
Вспомогательное утверждение

Утверждение 3.5.4. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Линейный оператор $A\colon X \to Y$ является непрерывно обратимым тогда и только тогда, когда он является ограниченным снизу.*

Доказательство. Пусть линейный оператор A является непрерывно обратимым, т. е. существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A, X)$. Следовательно, для любого вектора $x \in X$ получаем

$$\|x\|_X = \left\|A^{-1}(A(x))\right\|_X \leq \left\|A^{-1}\right\| \, \|A(x)\|_Y,$$

т. е. число $L = \frac{1}{\|A^{-1}\|} > 0$ является искомым для ограниченности снизу оператора A.

Пусть линейный оператор A является ограниченным снизу, т. е. существует число $L > 0$, такое, что для любого вектора $x \in X$ выполнено неравенство $\|A(x)\|_Y \geq L\|x\|_X$. Если вектор $x \in \operatorname{Ker} A$, то получаем $A(x) = 0$ и $0 = \|A(x)\|_Y \geq L\|x\|_X$. Следовательно, $x = 0$, т. е. справедливо равенство $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Тогда в силу утверждения 3.5.2 линейный обратный оператор $A^{-1}\colon \operatorname{Im} A \to X$ существует. При этом в силу ограниченности снизу оператора A для любого вектора $y \in \operatorname{Im} A$ получаем

$$\left\|A^{-1}(y)\right\|_X \leq \frac{\left\|A\left(A^{-1}(y)\right)\right\|_Y}{L} = \frac{\|y\|_Y}{L}.$$

Последнее неравенство означает, что $\left\|A^{-1}\right\| \leq \frac{1}{L}$, т. е. справедливо включение $A^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A, X)$, что и требовалось.

Утверждение 5.9.3. *Для любого числа $\lambda \in \mathbb{C}$ с нетривиальной мнимой частью $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ справедливы включение $\lambda \in \rho(A)$ и оценка для нормы резольвенты $\|R_A(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda = \mu + i\nu$, где $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, причём $\nu \neq 0$. Тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ получаем

$$\|A_\lambda(x)\|^2 = (A_\mu(x) - i\nu x, A_\mu(x) - i\nu x) = \\ = \|A_\mu(x)\|^2 - i\nu(x, A_\mu(x)) + i\nu(A_\mu(x), x) + \nu^2\|x\|^2.$$

Так как $\mu \in \mathbb{R}$, то имеем равенство $(A_\mu)^* = A_\mu$. Поэтому $(x, A_\mu(x)) = = (A_\mu(x), x)$. Следовательно, получаем

$$\|A_\lambda(x)\|^2 = \|A_\mu(x)\|^2 + \nu^2\|x\|^2 \geq \nu^2\|x\|^2.$$

Таким образом, для любого $x \in \mathcal{H}$ справедливо неравенство

$$\|A_\lambda(x)\| \geq |\nu|\,\|x\|,$$

т. е. оператор A_λ ограничен снизу на $\mathcal{H}$. Тогда в силу утверждения 3.5.4 получаем, что оператор A_λ непрерывно обратим, т. е. существует обратный оператор $(A_\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A_\lambda, \mathcal{H})$. При этом в силу утвержения 3.5.5 образ оператора A_λ является замкнутым. Но

387

тогда в силу $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$ и утверждения 5.9.2 получаем равенство $\operatorname{Im} A_\lambda = \mathcal{H}$. Поэтому $(A_\lambda)^{-1} = R_A(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, т. е. справедливо включение $\lambda \in \rho(A)$. При этом для любого $x \in \mathcal{H}$ имеем

$$\|R_A(\lambda)x\| \leq \frac{\|A_\lambda R_A(\lambda)(x)\|}{|\nu|} = \frac{\|x\|}{|\nu|},$$

т. е. справедливо неравенство $\|R_A(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\nu|}$, что и требовалось.

Следствие 5.9.1. *Спектр самосопряжённого оператора вещественен, т. е. справедливо включение $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Непосредственно следует из определения спектра $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ и утверждения 5.9.3.

Еще одно полезное утверждение

Далее в этом параграфе рассматриваем самосопряжённый оператор A.

Утверждение 5.9.1. *Справедливы следующие свойства:*
1) $(A(x), x) \in \mathbb{R}$ *для любого* $x \in \mathcal{H}$;
2) *точечный спектр оператора* A *вещественен, т. е.* $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$;
3) *для любых двух различных собственных чисел оператора* A *любые соответствующие им собственные векторы ортогональны;*
4) $\|A^n\| = \|A\|^n$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$, $r(A) = \|A\|$.

Доказательство. Свойство 1 следует из равенств

$$(A(x), x) = (x, A(x)) = \overline{(A(x), x)},$$

т. е. мнимая часть $\mathrm{Im}(A(x), x) = 0$. Рассмотрим произвольное собственное число $\lambda \in \sigma_p(A)$ оператора A. Пусть $x \in \mathrm{Ker}\, A_\lambda$ — собственный вектор A, соответствующий λ. Тогда получаем равенства $(A(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda\|x\|^2$. Следовательно, в силу свойства 1 получаем $\lambda = \frac{(A(x),x)}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$, т. е. свойство 2 доказано. Рассмотрим теперь два различных собственных числа $\lambda_1 \neq \lambda_2$ оператора A. Пусть $x_1 \in \mathrm{Ker}\, A_{\lambda_1}$ и $x_2 \in \mathrm{Ker}\, A_{\lambda_2}$ — соответствующие им собственные векторы. Тогда получаем

$$\lambda_1(x_1, x_2) = (A(x_1), x_2) = (x_1, A(x_2)) = \lambda_2(x_1, x_2).$$

Следовательно, $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0$. Так как $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, то получаем $(x_1, x_2) = 0$, т. е. свойство 3 доказано. Далее, по определению операторной нормы очевидно неравенство $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Предположим, рассуждая по индукции, что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и для всех $k \in \overline{1,m}$ справедливо равенство $\|A^k\| = \|A\|^k$ (для $m = 1$ это верно). Тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ вида $\|x\| = 1$ получаем

$$\|A^m(x)\|^2 = \Big(A^m(x), A^m(x)\Big) = \Big(A^{m+1}(x), A^{m-1}(x)\Big) \leq$$
$$\leq \|A^{m+1}(x)\|\,\|A^{m-1}(x)\| \leq \|A^{m+1}\|\,\|A^{m-1}\| = \|A^{m+1}\|\,\|A\|^{m-1}.$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\|A\|^{2m} = \|A^m\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|A^m(x)\|^2 \leq \|A^{m+1}\|\,\|A\|^{m-1}.$$

Отсюда получаем $\|A\|^{m+1} \leq \|A^{m+1}\|$, т. е. справедливо равенство $\|A\|^{m+1} = \|A^{m+1}\|$, что и требовалось. Наконец, спектральный радиус $r(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \|A\|$, т. е. свойство 4 доказано.

20. Спектральное разложение и самосопряженность замыкания симметричного линейного оператора, обладающего ортогональным базисом в гильбертовом пространстве из своих собственных функций. Функция от замыкания такого оператора.

Спектральное разложение и самосопряженность Из методички Константинова Страница примерно 63, там же можно посмотреть примеры.
Первая теорема:

Утверждение 57. *Пусть $A\colon D(A) \to \mathcal{H}$ симметричный оператор. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, целиком состоящий из собственных векторов оператора A, то есть*

$$e_n \in D(A) \quad \text{и} \quad Ae_n = \lambda_n e_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда справедливо вложение

$$D(A) \subset \left\{ x \in \mathcal{H} \;:\; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left|(x, e_n)\right|^2 < +\infty \right\},$$

и равенство

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n \qquad \forall\, x \in D(A).$$

Определив для любого $n \in \mathbb{N}$ ортопроектор P_n на линейную оболочку вектора e_n

$$P_n x = (x, e_n) e_n \qquad \forall\, x \in \mathcal{H},$$

имеем равенство

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x \qquad \forall\, x \in D(A),$$

которое называется спектральным разложением оператора A.

Доказательство. Для любого вектора $x \in D(A)$ рассмотрим разложение в ряд Фурье по ортонормированному базису $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ вектора $Ax \in \mathcal{H}$:

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} (Ax, e_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x, Ae_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x, \lambda_n e_n) e_n = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x.$$

При этом, в силу равенства Парсеваля, выполнено

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|(Ax, e_n)\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left|(x, e_n)\right|^2 < +\infty,$$

что и требовалось. ∎

Вторая и основная теорема:

Утверждение 58. *Пусть $A\colon D(A) \to \mathcal{H}$ симметричный оператор. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, целиком состоящий из собственных векторов оператора A, то есть*

$$e_n \in D(A) \quad \text{и} \quad Ae_n = \lambda_n e_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда оператор A является самосопряжённым в существенном, и справедливы равенства:

$$D\left(\overline{A}\right) = D\left(A^*\right) = \left\{ x \in \mathcal{H} \;:\; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left|(x, e_n)\right|^2 < +\infty \right\},$$

$$\overline{A}x = A^*x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x \qquad \forall\, x \in D\left(\overline{A}\right) = D\left(A^*\right),$$

где P_n ортопроектор на линейную оболочку вектора e_n:

$$P_n x = (x, e_n) e_n \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}.$$

Доказательство. Обозначим

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathcal{H} \;:\; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left|(x, e_n)\right|^2 < +\infty \right\}.$$

Зафиксируем произвольный вектор $x \in D(A^*)$. Тогда существует число $C_x > 0$, такое, что

$$\left|(Az, x)\right| \le C_x \|z\| \qquad \forall\, z \in D(A).$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим вектор

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, e_k) e_k \in D(A).$$

Тогда получаем, что

$$(Az_n, x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 (x, e_k) e_k, x \right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 (x, e_k)(e_k, x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \left|(x, e_k)\right|^2.$$

Следовательно,

$$\left|(Az_n, x)\right| = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \left|(x, e_k)\right|^2 \le C_x \|z_n\| = C_x \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \left|(x, e_k)\right|^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \left|(x, e_k)\right|^2} \le C_x \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Переходя в левой части этого неравенства к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left|(x, e_k)\right|^2} \le C_x \quad \Rightarrow \quad x \in \mathcal{D}.$$

Таким образом, доказано вложение

$$D(A^*) \subset \mathcal{D}.$$

Теперь зафиксируем произвольный вектор $x \in \mathcal{D}$ и рассмотрим число

$$C_x = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left|(x, e_n)\right|^2}.$$

Тогда, для любого вектора $z \in D(A)$, в силу утверждения 57, получаем

$$\left|(Az, x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (z, e_n)(e_n, x)\right| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left|(e_n, x)\right|^2} \underbrace{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left|(z, e_n)\right|^2}}_{=\|z\|} = C_x \|z\|.$$

Следовательно, $x \in D(A^*)$, то есть $\mathcal{D} \subset D(A^*)$, и для любого $z \in D(A)$ выполнено

$$(Az, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (z, e_n)(e_n, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(z, \lambda_n (x, e_n) e_n\right) =$$

$$= \left(z, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n\right) = (z, A^* x).$$

Это означает, что

$$A^* x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x \qquad \forall x \in \mathcal{D} = D(A^*).$$

Покажем равенство $\overline{A} = A^*$, которое, в силу утверждения 50, и завершит доказательство. Для любого вектора $x \in D(A^*) = \mathcal{D}$ рассмотрим последовательность

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k \in D(A), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Так как вектор x_n является n ой суммой Фурье вектора x по ортонормированному базису $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, то выполнено

$$x_n \to x \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Далее,

$$Ax_n = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x, e_k)e_k \to \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(x, e_k)e_k = A^*x.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Gr} A \ni \begin{pmatrix} x_n \\ Ax_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ A^*x \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ A^*x \end{pmatrix} \in \overline{\operatorname{Gr} A} = \operatorname{Gr} \overline{A},$$

то есть $x \in D\left(\overline{A}\right)$ и $\overline{A}x = A^*x$.

Обратно, рассмотрим произвольный вектор $x \in D\left(\overline{A}\right)$. Тогда существует последовательность $z_n \in D(A)$, такая, что

$$\begin{pmatrix} z_n \\ Az_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ \overline{A}x \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, для любого $k \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$ имеем:

$$(z_n, e_k) \to (x, e_k) \quad \text{и} \quad \left(\overline{A}x, e_k\right) \leftarrow (Az_n, e_k) = (z_n, Ae_k) = \lambda_k(z_n, e_k) \to \lambda_k(x, e_k).$$

Таким образом,

$$\left(\overline{A}x, e_k\right) = \lambda_k(x, e_k) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left|(x, e_k)\right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(\overline{A}x, e_k\right)\right|^2 = \left\|\overline{A}x\right\|^2 < +\infty, \quad \Rightarrow \quad x \in \mathcal{D} = D(A^*).$$

Следовательно, доказано вложение

$$D\left(\overline{A}\right) \subset D(A^*),$$

и выполнено равенство

$$\overline{A}x = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\overline{A}x, e_k\right)e_k = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(x, e_k)e_k = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k P_k x = A^*x,$$

что и требовалось.

Функция от замыкания Из лекций Константинова весны 2019 $A : D(A) \to H$ - симметричный оператор, обладающий ортогональным базисом из собственных функций $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$
e_n - ортогональный базис в H и $Ae_n = \lambda_n e_n, \forall n \lambda_n \in \mathbb{R}$. Определим $\bar{A}$.

$$\bar{A} : D(\bar{A}) \to H$$

$$D(\bar{A}) = \{f \in H : \sum_{1}^{\infty}\lambda_n^2|f_n|^2||e_n||^2 < +\infty\}$$

$$\bar{A}f = \sum_{1}^{\infty}\lambda_n f_n e_n = \sum_{1}^{\infty}\lambda_n P_n f \;\forall f \in D(\bar{A})$$

$\bar{A}$ - самосопряженный.
Для такого оператора определим функцию от оператора.
$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ - любая функция. Тогда $\Phi(\overline{A}) : D(\Phi(\bar{A})) \to H$ определяется так:

$$D(\Phi(\bar{A})) = \{f \in H : \sum_1^\infty |\Phi(\lambda_n)|^2 |f_n|^2 ||e_n||^2 < +\infty\}$$

И

$$\Phi(\bar{A})f = \sum_1^\infty \Phi(\lambda_n) f_n e_n \ \forall f \in D(\Phi(\bar{A}))$$

Этот ряд сходится в H на $D(\Phi(\bar{A}))$ и только на нем по теореме Рисса-Фишера.
Получается, что $\Phi(\lambda_n)$ будут собственными числами оператора $\Phi(\bar{A})$. То есть

$$\Phi(\bar{A}) = \sum_1^\infty \Phi(\lambda_n) P_n : D(\Phi(\bar{A})) \to H$$

Так определили функцию от замыкания замыкания симметричного линейного оператора, обладающего ортогональным базисом в гильбертовом пространстве из своих собственных функций.

Пример: $\Phi(t) = \exp(it), t \in \mathbb{R}$. Действует он так:

$$\Phi(\overline{A}) = \exp(i\overline{A}) : D\left(e^{i\overline{A}}\right) \to H$$

А понятнее:

$$e^{i\bar{A}} f = \sum_1^\infty e^{i\lambda_n} f_n e_n, \ f \in D(e^{i\bar{A}})$$

Или

$$e^{i\overline{A}} = \sum_1^\infty e^{i\lambda_n} P_n$$

Важно заметить, что это не разложение в ряд Тейлора по степеням аргумента, так как степени оператора требуют дополнительного рассмотрения сходимости, области определения и прочих сложных моментов.
Покажем, что такое область определения этого оператора:

$$D(e^{i\bar{A}}) = \{f \in H : \sum_1^\infty |e^{i\lambda_n}|^2 |f_n|^2 ||e_n||^2 < +\infty\}$$

Так как модуль экспоненты единица, имеем

$$\sum_1^\infty |f_n|^2 ||e_n||^2 = ||f|| < +\infty$$

Что выполняется $\forall f \in H$, то есть

$$D(e^{i\bar{A}}) = H$$

Повторяя вышеуказанные выкладки, получаем, что $e^{i\bar{A}}$ сохраняет норму:

$$||e^{i\bar{A}} f|| = ||f|| \ \forall f \in H$$

Из этого следует, что оператор также сохраняет скалярное произведение:

$$(e^{i\bar{A}} f, e^{i\bar{A}} g) = \sum_1^\infty e^{i\lambda_n} f e^{-i\lambda_n} \bar{g} ||e_n||^2 = (f, g)$$

То есть оператор унитарен. Отсюда, сопряженным оператором будет $(e^{i\bar{A}})^* = e^{-i\bar{A}} = (e^{i\bar{A}})^{-1} : H \to H$.

21. Начально-краевая задача для однородного уравнения Шрёдингера с самосопряжённым линейным оператором в гильбертовом пространстве. Метод Фурье решения этой задачи и критерий её разрешимости. Оператор эволюции.

Общий вид постановки начально-краевой задачи:

Пусть $P(z)$ - полином степени N (с комплексными коэффициентами), $u(t) \in \mathcal{H}$, A - симметричный оператор над $\mathcal{H}$, а $\bar{A}$ - его замыкание.

$$\text{Начально краевая задача: } \overset{def}{=} \begin{cases} P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = \bar{A}u(t), \quad t > 0, \quad u(t) \in D(\bar{A}) \\ u(+0) = v_0(t) \in \mathcal{H} \\ u'(+0) = v_1(t) \in \mathcal{H} \\ \ldots \\ u^{(N-1)}(+0) = v_{N-1} \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{33}$$

Примечание: задача в том смысле «краевая», что область определения оператора содержит краевые условия, а функции рассматриваются из $D(\bar{A})$; начальные условия здесь - все остальные уравнения системы.
Важно: производная и предел понимаются в смысле нормы гильбертова пространства:
Говорят, что $\exists u'(t) \in \mathcal{H}, t > 0$: Если существует предел:

$$\exists \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\|u(t+\Delta t) - u(t)\|}{\Delta t} \overset{def}{=} u'(t), \quad t > 0 \tag{34}$$

В силу этого определения получаются важные свойства производной и её коэффициентов Фурье. Выберем ортогональный базис собственных векторов ССО $\bar{A}$ в $\mathcal{H}$ и разложим $u(t)$ по нему:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n u_n(t)$$

Пусть теперь $\exists u'(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e_n u_n'(t)$. Тогда по определению коэффициентов Фурье и производной получим:

$$(u_n(t))' = \frac{u_n(t+\Delta t) - u_n(t)}{\Delta t} = \frac{(\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}, e_n)}{(e_n, e_n)} \to \frac{(u', e_n)}{(e_n, e_n)} = u_n'(t), \quad t \to 0$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью скалярного произведения по каждому из сомножителей. Т.е. производная коэфициента Фурье - коэфициент производной. Производные высших порядков определяются аналогично.

Замечание: из существования производной следует, что компоненты вектора производной равны продифференцированным компонентам вектора, обратное неверно, и в задачах нужно доказывать, что «кандидат» на решение действительно удовлетворяет определению (34)

Методом Фурье называется разложение вектора $u(t)$ на копоненты по базису собственных векторов оператора $\bar{A}$, благодаря этому задача сводится к задаче Коши.
Теперь покажем это. Пусть $u(t) \in D(\bar{A}) \overset{\text{Равенство}}{\Leftrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^2 |u_n|^2 \|e_n\|^2 < \infty$ решение поставленной задачи. Тогда, т.к. все производные у $u(t)$ имеются, то нетрудно увидеть (в силу вышеуказанного свойства производной), что:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = \sum_{n}^{\infty} P\left(\frac{d}{dt}\right)u_n(t)e_n$$

В то же время воспользуемся тем, что мы разложили векторы по собственным векторам симетричного самосопряженного оператора $\bar{A}$

$$\bar{A}u(t) = \sum_{n}^{\infty} \lambda_n u_n e_n$$

Приравнивания оба выражения в силу уравнения (33):

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u_n(t) = \lambda_n u_n e_n, \quad t > 0$$

Т.е. мы получили задачу Коши из теории обыкновенных диф. уравнений. Покажем, что остальные уравнения системы (33) являются начальными условиями для этого счетного набора задач Коши:

$$u^{(k)}(+0) = v_k \overset{def:}{\Leftrightarrow} \lim_{t\to+0}\|u^{(k)}(t) - v_k\| \to 0$$

Выражение выше можно ослабить, но получить более удобный результат:

$$\|u^{(k)}(t) - v_k\| > |u_n^{(k)}(t) - (v_k)_n|\|e_n\| > 0$$

По теореме о двух милиционерах получаем,

$$u_n^{(k)}(0) = (v_k)_n$$

Замечание: после решения всех задач Коши, необходимо проверить выполнение всех предположений, которые были сделаны для поиска решения: $u(t) \in D(\bar{A})$, $\forall k \in \{1, ..N\} \hookrightarrow \exists u^{(k)}(t)$. Если эти условия выполнены, получим единственность решения, согласно единственности и существованию решения задачи Коши.

Уравнение Шредингера

$$\begin{cases} i\frac{d}{dt}u(t) = \bar{A}u(t), t > 0 \\ u(+0) = v_0 \end{cases}$$

Воспользуемся методом Фурье и доказанными ранее свойствами:

$$\begin{cases} i(u_n(t))' = \lambda_n u_n, t > 0 \\ u(+0) = v_0 \end{cases} \quad \to u_n(t) = e^{-i\lambda_n t}(v_0)_n \overset{def}{=} (e^{-it\bar{A}}v_0)_n$$

$$D(e^{-it\bar{A}}) = \mathcal{H}, \quad \|u(t)\| = \|e^{-it\bar{A}}v_0\| = \|v_0\|$$

Этот оператор называется **оператором эволюции**. Последнее равенство очевидно из равенства . Это в свою очередь обозначает, что

$$u(t) \in D(\bar{A}) \Leftrightarrow v_0 \in D(\bar{A}) \overset{def}{\Leftrightarrow} \sum_n^{\infty} |(v_0)_n|^2 |\lambda_n|^2 \|e_n\|^2 < +\infty$$

Это **Критерий разрешимости уравнения Шредингера**. Не для каждой начально-краевой он такой. Например, может быть критерий вида

$$\sum_n^{\infty} |(v_0)_n|^2 |\lambda_n| \|e_n\|^2 < +\infty$$

Замечание: примеры решения других начально-краевых задач есть по ссылке: тык1, тык2

22. Собственные числа и собственные функции оператора Лапласа в круговом секторе при однородном граничном условии. Функции Бесселя. Свойство ортогональности и свойства нулей функций Бесселя.

Короче, это первые три пункта методички Конста по Бесселям. Но, с другой стороны, это 12 страниц.
Проще почитать/распечатать тут
Следующий 23 билет, кстати, - это вторая половина методички.

23. Ортогональный базис в пространстве $\mathbb{L}_2(G)$ из собственных функций оператора Лапласа в круговом секторе $G \in \mathbb{R}^2$ при однородном граничном условии.

Подготовка к билету (для медленных и непонятливых): 318 - 332 страницы учебника Владимирова, сам билет: Методичка Конста про Бесселя с 4 пункта. Основная формула:

$$\{J_{\pi n/\alpha}(\mu_s(\pi n/\alpha)r/R) \sin \varphi \pi n/\alpha : s, n \in \mathbb{N}\}$$

- ортогональный базис, собственных функций оператора Лапласа в пространстве $L_2(G_R) = \mathbb{L}_{2,r}[0, R] \otimes \mathbb{L}_2[0, \alpha]$, где μ_s - s-тый ноль функции Бесселя, а J_s - сама функция Бесселя.

24. Компактные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Теорема Гильберта-Шмидта. Резольвента компактного самосопряженного оператора.

Определение 1. Открытым шаром с центром в точке x_0 в линейном нормированном пространстве X называется множество $O_R(x_0) = \{x \in X : ||x - x_0|| < R\}$. Замкнутым шаром $(B_R(x_0))$, соответственно, когда выполняется нестрогое неравенство.
Определение 2. Множество S в линейном нормированном пространстве X называется ограниченным, если $\exists C > 0 : \forall x \in S \hookrightarrow ||x|| \leqslant C$. Иными словами, множество лежит в некотором замкнутом шаре радиуса C.
Определение 3. Множество S в линейном нормированном пространстве X называется вполне ограниченным, если $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \{x_i\}_{i=1}^{N(\varepsilon)} \subset S : S \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i)$. Конечный набор x_i для каждого ε называют конечной эпсилон-сетью
Определение 4. Пусть X, Y - банаховы пространства (то есть полные линейные нормированные пространства). Линейный оператор $A : X \to Y$ называется компактным, если для любого ограниченного множества $S \subset X$ его образ $A(S)$ является вполне ограниченным в Y.

Если вы не успеваете заботать, смотрите сразу после примера.

Рассмотрим несколько утверждений про компактные операторы. Пространство линейных непрерывных операторов из X в Y будем обозначать $\mathcal{L}(X, Y)$, а из X в X - $\mathcal{L}(X)$. Так как сумма вполне ограниченных множеств и умножение вполне ограниченного множества на скаляр тоже являются вполне ограниченными, то конечная линейная комбинация компактных операторов также является компактным оператором. Таким образом, множество компактных операторов из X в Y образуют подпространство, которое обозначим $\mathcal{K}(X, Y)$, из X в X, соответственно, $\mathcal{K}(X)$.
Утверждение 1. Если линейный непрерывный оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ имеет конечномерный образ, то он компактный.
Доказательство: По определению ограниченного оператора, образ любого ограниченного множества S является ограниченным. Кроме того, $A(S) \subset ImA$, где ImA - конечномерное подпространство по условию. В конечномерном случае ограниченность совпадает со вполне ограниченностью, а, значит, $A(S)$ - вполне ограниченное множество, то есть A - компактный. ■

Утверждение 2. Пусть последовательность операторов $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}(X, Y)$ является сходящейся к оператору A по операторной норме, т. е. $||A - A_m|| \to 0$. Тогда A является компактным оператором, т. е. $A \in \mathcal{K}(X, Y)$. Иными словами, подпространство компактных операторов замкнуто.
Доказательство: По определению сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) : \forall m \geqslant N \hookrightarrow ||A_m - A|| < \varepsilon$$

Так как мы работаем в линейном нормированном пространстве, то достаточно рассмотреть единичный шар. Тогда для любого $x \in B_1(0)$ получаем: $||A_m(x) - A(x)|| \leqslant ||A_m - A|| < \varepsilon$. Зафиксируем произвольное $m \geqslant N$. Оператор A_m компактный, а значит $A_m(B_1(0))$ вполне ограничено, следовательно, существует конечный набор $x_1, ..., x_M$, такой что $\{A_m(x_i)\}_{i=1}^{M}$ является конечной эпсилон-сетью множества $A_m(B_1(0))$, т. е.

$$\forall x \in B_1(0) \exists k \in \overline{1, M} : ||A_m(x) - A_m(x_k)|| < \varepsilon$$

Из этого получаем следующие неравенства:

$$||A(x) - A(x_k)|| \leqslant ||A(x) - A_m(x)|| + ||A_m(x) - A_m(x_k)|| + ||A_m(x_k) - A(x_k)|| \leqslant 3\varepsilon$$

Таким образом, мы показали что существует конечная 3-эпсилон сеть для образа оператора A.■

Пример компактного оператора. Компактность интегрального оператора. Пусть функция $K : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ такая, что $K \in \mathbb{L}_2 ([0, 1] \times [0, 1])$. Тогда интегральный оператор $A : \mathbb{L}_2[0, 1] \to \mathbb{L}_2[0, 1]$ вида

$$(Ax)(t) = \int_0^1 K(t, \tau) x(\tau) d\tau$$

является компактным. Сначала покажем его ограниченность, воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского:

$$||Ax||_2 = \sqrt{\int_0^1 dt \left| \int_0^1 K(t, \tau) x(\tau) d\tau \right|^2} \leqslant \sqrt{\int_0^1 dt \left(\int_0^1 |K(t, \tau)|^2 d\tau \right) \left(\int_0^1 |x(\tau)|^2 d\tau \right)} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 dt d\tau |K(t,\tau)|^2} \sqrt{\int_0^1 d\tau |x(\tau)|^2} = ||K||_2 ||x||_2$$

Таким образом, получаем ограниченность оператора: $||A|| \leqslant ||K||_2 < +\infty$.
Теперь покажем вполне ограниченность. Счетная система

$$S = \{f_n(t) = sin(\pi n t)\}_{n=1}^{\infty}$$

образует ортогональный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2[0,1]$. Тогда счетная система $E = \{f_n(t) f_m(\tau)\}_{n,m=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис в $\mathbb{L}_2[0,1] \times [0,1]$. Занумеруем элементы E с помощью одного индекса:

$$E = \{g_k(t,\tau) = f_{n_k}(t) f_{m_k}(\tau)\}_{k=1}^{\infty}$$

Для любого N рассмотрим N-ю сумму Фурье функции K в $\mathbb{L}_2[0,1] \times [0,1]$:

$$S_N(t,\tau) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(K, g_k)}{(g_k, g_k)} g_k(t,\tau)$$

Справедливо соотношение $||S_N - K|| \to 0$ при $N \to \infty$. Определим линейный оператор $A_N : \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1]$:

$$(A_N x)(t) = \int_0^1 S_N(t,\tau) x(\tau) d\tau$$

Так как выполняется неравенство $||A_N|| \leqslant ||S_N|| < \infty$, то все такие операторы непрерывны. Для любой функции $x \in \mathbb{L}_2[0,1]$ выполняется $A_N x \in Lin\{f_{n_1}, ..., f_{n_N}\}$, значит $ImA_N \subset Lin\{f_{n_1}, ..., f_{n_N}\}$, т. е. образ лежит в конечномерном подпростанстве и является конечномерным. По утверждению 1 получаем, что каждый оператор A_N является компактным. Наконец:

$$\left((A_N - A)(x)\right)(t) = \int_0^1 \left(S_N(t,\tau) - K(t,\tau)\right) x(\tau) d\tau$$

Значит: $||A_N - A|| \leqslant ||S_N - K|| \to 0$. Таким образом, получаем последовательность компактных операторов, сходящихся к A по операторной норме, а, значит, по утверждению 2 о замкнутости подпространства компактных операторов A - компактный.

Введем понятие спектра линейного оператора. Рассмотрим банахово пространство X и линейный оператор $A \in \mathcal{L}(X)$. (Вообще говоря, понятие спектра вводится для элемента банаховой алгебры. В силу банаховости X, пространство $\mathcal{L}(x)$ является банаховой алгеброй). Тождественный оператор обозначим I, и для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ определим $A_\lambda = A - \lambda I$.

Определение 5. Оператор A будем называть <u>непрерывно обратимым</u>, если существует $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ (то есть существует обратный и обратный является непрерывным).

Определение 6. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется <u>регулярным</u> для оператора A, если оператор A_λ непрерывно обратим.

Определение 7. Совокупность всех регулярных значений называется <u>резольвентным множеством</u> и обозначается $\rho(A)$.

Определение 8. Оператор $R_A(\lambda) = (A_\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ называется <u>резольвентой</u> оператора A.

Определение 9. <u>Спектром</u> оператора A называется множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$. (то есть такие λ, для которых не существует обратного A_λ)

Оказывается, что спектр это не только собственные значения оператора. Чтобы понять каким бывает спектр, воспользуемся теоремой из функционального анализа.

Вспомогательная теорема. (Банаха, об обратном операторе). Пусть X, Y - банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Обратный непрерывный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ существует тогда и только тогда, когда $KerA = \{0\}$ и $ImA = Y$.

По этой теореме, включение $\lambda \in \sigma(A)$ возможно в следующих случаях:

Определение 10. Множество $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$ называется <u>точечным спектром</u>, если $KerA_\lambda \neq \{0\}$. В таком случае λ называется <u>собственным числом</u> оператора A, а любой нетривиальный вектор из $KerA_\lambda$ - <u>собственным вектором</u> оператора A.

Определение 11. Множество $\sigma_c(A) \subset \sigma(A)$ называется <u>непрерывным спектром</u>, если $KerA_\lambda = \{0\}$, $ImA_\lambda \neq X$ и $[ImA_\lambda] = X$

Определение 12. Множество $\sigma_r(A) \subset \sigma(A)$ называется остаточным спектром, если $KerA_\lambda = \{0\}$ и $[ImA_\lambda] \neq X$
Это все возможные варианты нарушения условия теоремы Банаха об обратном операторе, а значит:

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения из функционального анализа:
Вспомогательное утверждение 1. Для $A \in \mathcal{K}(X)$ и для любого $\lambda \neq 0$ имеет место равенство: $dimKerA_\lambda = dimKerA^*_\lambda$.
Вспомогательное утверждение 2. Для $A \in \mathcal{K}(X)$ и для любого $\lambda \neq 0$ образ A_λ замкнут, то есть $ImA_\lambda = [ImA_\lambda]$, а $KerA_\lambda$ конечномерно.
Вспомогательное утверждение 3. Для $A \in \mathcal{K}(X)$ и для любого $\delta > 0$ множество $\Lambda_\delta = \{\lambda \in \sigma_p(A) : |\lambda| > \delta\}$ конечно (может быть, пусто).
Вспомогательное утверждение 4. (следствие предыдущего) Для $A \in \mathcal{K}(X)$ точечный спектр $\sigma_p(A)$ является не более, чем счетным множеством.
Теорема. (Спектр компактного оператора). Пусть $A \in \mathcal{K}(X)$. Тогда $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p\backslash\{0\}$. Кроме того, спектр A не более, чем счетен и не имеет предельных точек, кроме, может быть, точки 0.
Доказательство: Пусть $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$. Предположим, что $\lambda \notin \sigma_p(A)$, тогда $KerA_\lambda = \{0\}$.
Применяя вспомогательное утверждение 1 в нашей теореме, получаем: $dimKerA^*_\lambda = 0 \Rightarrow KerA^*_\lambda = \{0\}$. По теореме Фредгольма, имеем: $^\perp(KerA^*_\lambda) = [ImA_\lambda] \Leftrightarrow {}^\perp(\{0\}) = X = [ImA_\lambda]$
По вспомогательному утверждению 2, $ImA_\lambda = X$, а, значит, выполняются условия теоремы Банаха об обратном операторе и $\lambda \in \rho(A)$. Получили противоречие с тем, что $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$, а значит доказано равенство $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p\backslash\{0\}$. По вспомогательному утверждению 4, получаем не более чем счетную мощность спектра. По вспомогательному утверждению 3, получаем, что любое ненулевое собственное значение оператора A является изолированной точкой, а, значит, предельной точкой может быть только 0. ■

Гильбертово пространство является полным по определению. Рассмотрим компактные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Известно, что весь спектр самосопряженного оператора лежит на вещественной оси ($\sigma(A) \subset \mathbb{R}$). Для компактного самосопряженного оператора спектр состоит только из собственных значений λ_n и, может быть, нуля, значит, $\forall \lambda \neq 0,\ \lambda \neq \lambda_n\ \exists\ R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.
Теорема. (Гильберта-Шмидта). Пусть A - нетривиальный компактный самосопряженный оператор. Тогда в замкнутом подпространстве $(KerA)^\perp$ существует не более чем счетная ортогональная полная система E из собственных векторов оператора A. (Полнота системы означает $[LinE] = (KerA)^\perp$).
Доказательство: Так как оператор A нетривиален, то $||A|| > 0$. По общему свойству спектрального радиуса элемента банаховой алгебры $r(A) = sup|\lambda|$: $\lambda \in \sigma(A) = \lim_{n\to\infty} = \sqrt[n]{||A^n||}$. По свойству самосопряженного оператора (последнее утверждение 19 билета на фотографии, свойство 4) $||A^n|| = ||A||^n$, получаем: $r(A) = ||A|| > 0$. Тогда существует ненулевое $\lambda \in \sigma(A)$, которое по теореме о спектре компактного оператора является собственным числом. По вспомогательному утверждению 2, для ненулевого λ ядро $KerA_\lambda$ конечномерно, т. е. $N_\lambda = dimKerA_\lambda \in \mathbb{N}$. В конечномерном подпространстве всегда можно выделить ортогональный базис $\{x_m\}_{m=1}^{N_\lambda}$, эти вектора будут собственными векторами A, соответствующими собственному значению λ, по определению 10 собственного вектора. Таким образом, получаем множество:

$$E = \left\{x_m(\lambda) : m \in \overline{1, N_\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}\right\}$$

Вектора, соответствующие различным λ ортогональны по свойству 3 последнего утверждения 19 билета (впрочем, ортогональность векторов, соответствующих различным собственным числам самосопряженного оператора, показать несложно). Вектора с одинаковым λ ортогональны по построению. Получаем систему попарно ортогональных собственных векторов оператора A.
В общем случае, опять же, в силу ортогональности собственных векторов, выполняется вложение $E \subset (KerA)^\perp \Rightarrow LinE \subset (KerA)^\perp$. Определим $L = [LinE]$. В силу замкнутости $(KerA)^\perp$, получаем $L \subset (KerA)^\perp$. Для доказательства теоремы осталось показать равенство $L = (KerA)^\perp$. Определим множество:

$$M = \left\{x \in (KerA)^\perp : (x, y) = 0\ \forall\ y \in L\right\}$$

По теореме Рисса об ортогональном дополнении, для гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и его замкнутого подпространства L справедливо равенство $\mathcal{H} = L \oplus L^\perp$. В применении к нашей теореме, так как $(KerA)^\perp$ - замкнутое пространство некоторого гильбертова пространства, то оно само является гильбертовым пространством, L - его замкнутое подпространство, откуда получаем: $(KerA)^\perp = L \oplus M$.

$LinE$ состоит из собственных векторов A, откуда $A(LinE) \subset LinE$. В силу непрерывности оператора A: $A(L) \subset L$. Тогда $\forall x \in M, \ \forall y \in L \hookrightarrow (A(x), y) = (x, A(y)) = 0$, значит $A(x) \in M \Rightarrow A(M) \subset M$. M как замкнутое подпространство гильбертова пространства само является гильбертовым пространством, а значит оператор $A : M \to M$ является компактным самосопряженным на M. В силу теоремы о спектре компактного оператора, если A нетривиален на M, то по теореме о спектре компактного оператора существует собственный вектор $z \in M$, соответствующий некоторому собственному числу $\mu \neq 0$, т. е. $z \in KerA_\mu \subset LinE \subset L \Rightarrow (z, z) = 0 \Rightarrow z = 0$ - противоречие с определением собственного вектора. Значит, $A(M) = \{0\}$. Но тогда $M \subset KerA$, но мы определяли $M \subset (KerA)^\perp$. Значит, $M = \{0\}$, откуда получаем утверждение теоремы $L = [LinE] = (KerA)^\perp$. ■

Осталось получить явный вид резольвенты.

Очевидное следствие теоремы Гильберта-Шмидта. Пусть A - нетривиальный компактный самосопряженный оператор, тогда в $(KerA)^\perp$ существует не более чем счетный ортогональный базис $E = \{e_n\}_{n=1}^N$, где $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Иными словами:

$$\mathcal{H} = KerA \oplus \left(\oplus_{n=1}^N Lin\ e_n\right)$$

Рассмотрим операторы ортогональной проекции $P_0 : \mathcal{H} \to KerA$ и $P_n : \mathcal{H} \to Lin\{e_n\}$:

$$P_n(x) = \frac{x, e_n}{e_n, e_n} e_n$$

В силу следствия, получаем $\forall x \in \mathcal{H}$:

$$x = P_0(x) + \sum_{n=1}^N P_n(x)$$

Так как $A(P_0(x)) = 0$, то для любого конечного N по линейности получаем:

$$A(x) = \sum_{n=1}^N \lambda_n P_n(x) \Leftrightarrow A = \sum_{n=1}^N \lambda_n P_n$$

Для бесконечного N и самосопряженного A:

$$||A(x) - \sum_{m=1}^n \lambda_m P_m(x)|| = ||\sum_{m=n+1}^\infty \lambda_m \frac{x, e_m}{e_m, e_m} e_m|| = \sqrt{\sum_{m=n+1}^\infty |\lambda_m|^2 \frac{|(x, e_m)|^2}{||e_m||^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sup_{m>n} |\lambda_m|\right) \sqrt{\sum_{m=n+1}^\infty \frac{|(x, e_m)|^2}{||e_m||^2}} \leqslant \left(\sup_{m>n} |\lambda_m|\right) ||x||$$

$$||A(x) - \sum_{m=1}^n \lambda_m P_m(x)|| \leqslant \sup_{m>n} |\lambda_m|$$

По теореме о спектре компактного оператора, предельной точкой λ_m может быть только 0, значит $|\lambda_m| \to 0$, откуда получаем равенство по операторной норме:

$$A = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n P_n$$

Для любого $\lambda \neq 0, \lambda \neq \lambda_n$Рассмотрим уравнение $A_\lambda(x) = y$. В силу вышеизложенного:

$$A_\lambda(x) = (A - \lambda I)(x) = \sum_{n=1}^N (\lambda_n - \lambda) P_n(x) - \lambda P_0(x) = P_0(y) + \sum_{n=1}^N P_n(y)$$

Откуда получаем: $-\lambda P_0(x) = P_0(y)$, $(\lambda_n - \lambda) P_n(x) = P_n(y)$, тогда:

$$x = (A_\lambda)^{-1}(y) = -\frac{P_0(y)}{\lambda} + \sum_{n=1}^N \frac{P_n(y)}{\lambda_n - \lambda}$$

Для конечного N:

$$R_A(\lambda) = -\frac{P_0}{\lambda} + \sum_{n=1}^N \frac{P_n}{\lambda_n - \lambda}$$

Для бесконечного N, последовательность

$$S_n = -\frac{P_0}{\lambda} + \sum_{m=1}^{n} \frac{P_n}{\lambda_n - \lambda}$$

является поточечено сходящейся к резольвенте (то есть достигается равенство на каждом элементе $x \in \mathcal{H}$), но не является фундаментальной в простанстве $\mathcal{L}(\mathcal{H})$:

$$||S_{n+1} - S_n|| = \frac{||P_{n+1}||}{|\lambda_{n+1} - \lambda|} \geqslant \frac{1}{|\lambda_{n+1}| + |\lambda|} \geqslant \frac{1}{||A|| + \lambda}$$

Следовательно, последовательность не является сходящейся, а, значит, нет равенства по операторной норме.

25. Симметричный оператор Штурма–Лиувилля и критерий его обратимости. Замыкание оператора, обратного к оператору Штурма–Лиувилля, как самосопряженный компактный оператор. Теорема Стеклова.

Определение 1. Оператор Штурма-Лиувилля $A : D(A) \to \mathbb{L}_2[\alpha, \beta]$

$$D(A) = \left\{h \in C^2[\alpha, \beta] : \mu_1 h(\alpha) + \nu_1 h'(\alpha) = 0, \mu_2 h(\beta) + \nu_2 h'(\beta) = 0, |\mu_1|+|\nu_1|> 0, |\mu_2|+|\nu_2|> 0\right\}$$

$$(Ah)(x) = a(x)h''(x) + b(x)h'(x) + c(x)$$

$$a, b, c \in C[\alpha, \beta];\ a(x) \neq 0,\ x \in [\alpha, \beta]$$

При этом очевидно вложение $ImA \subset C[\alpha, \beta]$. Занумеруем условия:

$$\mu_1 h(\alpha) + \nu_1 h'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (1)$$

$$\mu_2 h(\beta) + \nu_2 h'(\beta) = 0 \Leftrightarrow (2)$$

Как известно, критерий существования обратного оператора $A^{-1} : ImA \to D(A)$ это тривиальность ядра $KerA = \{0\}$. (Отличие от теоремы Банаха об обратном операторе, сформулированной в прошлом билете в том, что в теореме Банаха обратный оператор должен быть еще и ограниченным. Условие же тривиальности ядра говорит о существовании обратного, который может быть неограниченным).
Теорема. (Критерий обратимости оператора Штурма-Лиувилля) Оператор Штурма-Лиувилля обратим тогда и только тогда, когда существует специальная фундаментальная система решений (ФСР) $\{u_1, u_2\}$ уравнения:

$$Au = 0,\ u \in C^2[\alpha, \beta]$$

для которой выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} Au_{1,2} = 0 \\ u_1 - \text{удовл. (1), не удовл. (2)} \\ u_2 - \text{удовл. (2), не удовл. (1)} \end{cases}$$

Доказательство: Пусть A - обратим, то есть $KerA = \{0\}$. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} Au_1(x) = 0,\ u_1 \in C^2[\alpha, \beta] \\ u_1(\alpha) = \nu_1, \\ u_1'(\alpha) = -\mu_1; \end{cases}$$

Так как начальные условия нетривиальные, то существует единственное ненулевое решение задачи Коши, при этом мы выбрали начальные условия таким образом, чтобы удовлетворять (1). Если $u_1(x)$ удовлетворяет (2), то мы получим нетривиальный вектор из $KerA$ - противоречие. Таким образом, $u_1(x)$ удовлетворяет (1) и не удовлетворяет (2). Аналогично проделываем для u_2, заменяя все индексы 1 на 2. Мы получили линейно независимые функции в $C^2[\alpha, \beta]$, а, значит, они образуют ФСР уравнения $Au = 0$.
Обратно. Пусть существует ФСР u_1, u_2 уравнения $Au = 0$. Тогда $\forall u \in D(A)\ \exists!\, C_1, C_2 \in \mathbb{C}$:

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2$$

Покажем, что тогда $u \equiv 0$. Так как u удовлетворяет (1), получаем:

$$\mu_1 u(\alpha) + \nu_1 u'(\alpha) = 0$$

$$\mu_1(C_1 u_1(\alpha) + C_2 u_2(\alpha)) + \nu_1(C_1 u_1'(\alpha) + C_2 u_2'(\alpha)) = 0$$

$$C_1(\mu_1 u_1(\alpha) + \nu_1 u_1'(\alpha)) + C_2(\mu_1 u_2(\alpha) + \nu_1 u_2'(\alpha)) = 0$$

Из условия того, что u_1 удовлетворяет (1):

$$C_1(\mu_1 \nu_1 - \nu_1 \mu_1) + C_2(\mu_1 u_2(\alpha) + \nu_1 u_2'(\alpha)) = 0$$

Откуда получаем $C_2 = 0$, так как u_2 не удовлетворяет (1). Аналогично, из того что u удовлетворяет (2), получаем $C_1 = 0$. Тогда $u \equiv 0 \Rightarrow KerA = \{0\}$. ■

Пусть теперь выполняется критерий обратимости оператора Штурма-Лиувилля. Покажем, что $\forall g \in C[\alpha,\beta]\ \exists!\, h \in D(A) : Ah = g$. Другими словами, покажем, что $ImA = C[\alpha,\beta]$ и найдем обратный. Воспользуемся знаниями из курса дифференциальных уравнений, и используем метод вариации постоянных. Ищем решение уравнения $Ah = g$ в виде:

$$h(x) = C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x)$$

Тогда коэффициенты C_1, C_2 находятся из ситемы уравнений:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{a} \end{pmatrix}$$

Вронскиан по теореме Лиувилля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = Cexp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\right)$$

По формуле обращения матрицы, находим C_1', C_2':

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x)} \begin{pmatrix} u_2' & -u_2 \\ -u_1' & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{a} \end{pmatrix} = \frac{g(x)}{a(x)W(x)} \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Откуда интегрированием находим C_1, C_2 в удобном виде:

$$C_1(x) = \int_x^\beta \frac{u_2(t)g(t)}{a(t)W(t)}dt + D_1$$

$$C_2(x) = \int_\alpha^x \frac{u_1(t)g(t)}{a(t)W(t)}dt + D_2$$

Таким образом, $h(x)$ имеет вид:

$$h(x) = D_1u_1(x) + D_2u_2(x) + \int_\alpha^x \frac{u_1(t)u_2(x)}{a(t)W(t)}g(t)dt + \int_x^\beta \frac{u_1(x)u_2(t)}{a(t)W(t)}g(t)dt$$

Так как h выражается через интеграл от непрерывных функций, то $h \in C^1[\alpha\beta]$.

$$h'(x) = D_1u_1'(x) + D_2u_2'(x) + \int_\alpha^x \frac{u_1(t)u_2'(x)}{a(t)W(t)}g(t)dt + \int_x^\beta \frac{u_1'(x)u_2(t)}{a(t)W(t)}g(t)dt$$

$h'(x)$ снова выражется через интегралы от непрерывных функций, значит $h \in C^2[\alpha,\beta]$. Из условий (1) и (2), находим $D_1 = D_2 = 0$. Итого:

$$h(x) = \int_\alpha^x \frac{u_1(t)u_2(x)}{a(t)W(t)}g(t)dt + \int_x^\beta \frac{u_1(x)u_2(t)}{a(t)W(t)}g(t)dt$$

Можно записать интеграл через функцию $K(x,t) \in \mathbb{L}_2([\alpha,\beta]^2)$:

$$K(x,t) = \frac{1}{a(t)W(t)} \begin{cases} u_1(t)u_2(x), \ t \leqslant x \\ u_1(x)u_2(t), \ x \leqslant t \end{cases}$$

$$h(x) = (A^{-1}g)(x) = \int_\alpha^\beta K(x,t)g(t)dt$$

$A^{-1} : C[\alpha,\beta] \to D(A)$. Замыкание обратного оператора $T = \overline{A^{-1}} : \mathbb{L}_2[\alpha,\beta] \to \mathbb{L}_2[\alpha,\beta]$:

$$(Tf)(x) = \int_\alpha^\beta K(x,t)g(t)dt$$

Как было показано в примере предыдущего билета, оператор является компактным. Известно, что такой оператор будет самосопряженным, если $K(x,t) = \overline{K(t,x)}$ (общее свойство интгральных операторов, показывается непосредственно приравнивая $T = T^*$). Это достигается при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} 1) a(x), b(x), c(x) \in \mathbb{R}; \\ 2) a(x) \in C^1[\alpha,\beta], \ b(x) = a'(x) \end{cases}$$

Первое условие необходимо, чтобы удовлетворить условию сопряжения фукнции K. Второе удовлетворяет условию симметричности функции K(перестановке аргументов). Дейсвительно, посчитаем вронскиан:

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = Cexp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\right) = Cexp(-ln|a(x)|) = \frac{C}{|a(x)|}$$

Так как функция $a(x)$ не пересекает ноль на $[\alpha, \beta]$, то она не меняет знак на отрезке. Тогда:

$$W(x) = \frac{\widetilde{C}}{a} \Rightarrow W(x)a(x) = const \in \mathbb{R}$$

Мы получили компактный самосопряженный оператор, как замыкание оператора, обратного к оператору Штурма-Лиувилля. На пространстве $C[\alpha, \beta]$ он совпадает с A^{-1}. Легко проверить, что при таких условиях A является симметричным.

Теорема. (Стеклова). Пусть оператор Штурма-Лиувилля является симметричным с нулевым ядром. Тогда в $\mathbb{L}_2[\alpha, \beta]$ существует ортогональный базис $\{e_n\}$ из собственных векторов A.
Доказательство: По теореме Гильберта-Шмидта, оператор T обладает базисом из собственных функций в $(KerA)^{\perp}$.

$$KerT = KerT^* = (ImT)^{\perp}$$

$$D(A) \subset ImT$$

Так как $D(A)$ всюду плотно в $\mathbb{L}_2[\alpha, \beta]$, то

$$KerT = KerT^* = (ImT)^{\perp} \subset (D(A))^{\perp} = ([D(A)])^{\perp} = (\mathbb{L}_2[\alpha, \beta])^{\perp} = \{0\}$$

Получили базис из собственных функций оператора T в $\mathbb{L}_2[\alpha, \beta]$. Осталось показать, что собственные функции T совпадают с собственными функциями A. $\forall \lambda \neq 0$ - собственного значения T:

$$f = \frac{1}{\lambda}Tf$$

Так как T интегральный оператор, то справедливо вложение $ImT \subset C[\alpha, \beta] = ImA$. Тогда $f \in ImA \Rightarrow Tf = A^{-1}f \Rightarrow f \in D(A)$. Получили, что любая собственная функция оператора T лежит в области значения A, значит:

$$Af = \frac{1}{\lambda}f$$

и f является собственной функцией оператора A. ■