

Содержание

19	1
18	2
25	3
45	4

19

Доказать, что семейство лучей $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$ образует базу некоторой топологии на \mathbb{R} . Как будет выглядеть замыкание произвольного множества S ?

Докажем, что это база топологии. Нужно проверить свойства:

1.

$$\forall x \in X \exists V \in \beta : x \in V$$

2.

$$\forall V_1, V_2 \in \beta \forall x \in V_1 \cap V_2 \exists W \in \beta : x \in W \subset V_1 \cap V_2$$

Проверим:

1. Введем обозначение:

$$V_a = (-\infty, a] \\ \forall x \in \mathbb{R} V = V_x$$

2.

$$V_a \cap V_b = V_c, c = \min(a, b) \\ \forall x \in V_a \cap V_b \rightarrow x \leq a, x \leq b \rightarrow V_x \in V_a \cap V_b \\ W = V_x, x \in W$$

Замыкание множества:

$$[S] = \{x \in X \mid U(x) \cap S \neq \emptyset\} \\ U(x) \in \{V_y \mid y \geq x\}$$

Пусть $S \neq \emptyset$, тогда $\exists x_0 \in S$ а для нее верно: $\forall y \geq x_0 U(y) \cap S \neq \emptyset$ Легко видеть, что замыканием множества будет

$$[S] = S \cup (\inf(S), +\infty)$$

18

Доказать, что семейство лучей $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$ образует базу некоторой топологии на \mathbb{R} . Опишите все замкнутые и открытые множества в этой топологии

См. решение задачи 19 (выше). Т.к.

$$[S] = S \cup (\inf(S), +\infty)$$

замкнутыми будут множества вида:

$$[Z] = Z = [a, +\infty), \quad a \in \mathbb{R}$$

Открытыми будут множества, представимые некоторым объединением элементов базы.

$$Y = (-\infty, a), \quad a \in \mathbb{R}$$

фигурная скобка обозначает либо $]$, либо $)$

26

В $C[0, 1]$ рассматривается семейство множеств:

$$\beta = \{V_\varepsilon(f) = \{g(x) \in C[0, 1] : \left| \int_0^1 f(x) - g(x) dx \right| < \varepsilon\}\}$$

Докажите, что это база некоторой топологии.

Проверим критерий базы:

1.

$$\forall x \in X \exists V \in \beta : x \in V$$

2.

$$\forall V_1, V_2 \in \beta \forall x \in V_1 \cap V_2 \exists W \in \beta : x \in W \subset V_1 \cap V_2$$

1.

$$\forall f \in C[0, 1] V = V_\varepsilon(f)$$

2. Пусть $a \in C[0, 1]$, $b \in C[0, 1]$ и некоторое пересечение $V_\varepsilon(a) \cap V_{\varepsilon'}(b) \neq \emptyset$ Тогда

$$\exists h \in C[0, 1] : \left| \int_0^1 dx(h - a) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_0^1 dx(h - b) \right| < \varepsilon'$$

$$\left| \int_0^1 dx\left(h - \frac{a+b}{2}\right) \right| < \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}$$

Т.е. получили:

$$W = V_{(\varepsilon+\varepsilon')/2}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

45

Рассматривается пространство многочленов \mathcal{F} с метрикой $\rho(a, b) = \sum_i |c_i|$, где $a - b = \sum_i c_i x_i$. Докажите, что оно неполно.

Рассмотрим последовательность многочленов:

$$f_n = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$$

Эта последовательность, очевидно, фундаментальна (всюду сходящийся ряд Тейлора). Докажем, что она не сходится к многочлену.

Если бы последовательность имела предел в \mathcal{F} то в \mathcal{F} нашелся бы многочлен бесконечной степени. Противоречие.

Неверное рассуждение: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \exp(x)$, $\exp(x) \notin \mathcal{F}$