1 Топологические пространства

1. Множество всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций обозначается $C^1[a, b]$. Задайте на этом множестве при помощи предбазы наислабейшую топологию, относительно которой $\forall x \in [a, b]$ отображение $\Phi_x : C^1[a, b] \to \mathbb{R}$, заданное по формуле $\Phi_x(f) = f'(x)$, является (топологически) непрерывным.

2. Множество всех бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций обозначается $C^\infty[a, b]$. Задайте на этом множестве при помощи предбазы наислабейшую топологию, относительно которой $\forall x \in [a, b]$ отображение $\Phi_x : C^\infty[a, b] \to \mathbb{R}$, заданное по формуле $\Phi_x(f) = f'''(x)$, является (топологически) непрерывным.

3. Задайте при помощи базы слабейшую топологию в $\mathbb{R}^2$, относительно которой отображения проекций π_1, π_2 (возвращающие абсциссу и ординату соответственно) являются (топологически) непрерывными.

4. Покажите, что метрическая топология (т. е. топология в метрическом пространстве, базой которой являются шары всевозможных радиусов и с всевозможными центрами) удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа: у любых двух различных точек есть непересекающиеся окрестности.

5. Первая аксиома счётности требует от топологического пространства следующее. У любой точки x можно задать счётную систему $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ окрестностей, удовлетворяющую свойству: для любой окрестности V точки x существует окрестность из семейства $U_i \subseteq V$.

   Покажите, что метрическая топология (т. е. топология в метрическом пространстве, базой которой являются шары всевозможных радиусов и с всевозможными центрами) удовлетворяет первой аксиоме счётности.

6. Первая аксиома счётности требует от топологического пространства следующее. У любой точки x можно задать счётную систему $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ окрестностей, удовлетворяющую свойству: для любой окрестности V точки x существует окрестность из семейства $U_i \subseteq V$.

   Докажите, что в пространстве с первой аксиомой счётности понятия топологической точки прикосновения и секвенциальной точки прикосновения эквивалентны.

7. Докажите, что в метрическом пространстве понятия топологической точки прикосновения и секвенциальной точки прикосновения эквивалентны.

8. Докажите, что в топологическом пространстве $[[M]] = [M]$.

9. Докажите, что в топологическом пространстве $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

10. На натуральных числах рассматривается семейство всех подмножеств вида $\{2n - 1, 2n\}$. Докажите, что оно образует базу некоторой топологии. Приведите пример последовательности, которая имеет не единственный предел по этой топологии.

11. На натуральных числах рассматривается все подмножества $\{2n-1, 2n\}$ и все подмножества вида $\{2n\}$. Докажите, что эти подмножества образует базу некоторой топологии. Приведите пример одноточечного множества, которое не замкнуто в этой топологии.

12. На натуральных числах рассматриваются все двусторонние арифметические прогрессии, т.е. подмножества вида $\{a + dz, z \in \mathbb{Z}\}$ по всем $a, d \in \mathbb{Z}$. Докажите, что эти подмножества образует базу некоторой топологии. Какое замыкание у множества всех простых чисел в этой топологии?

13. Является ли множество $\{f \in C[a, b] : 0 < f(x) < 1 \ \forall x\}$ открытым в $C[a, b]$?

14. Является ли множество $\{x \in \ell_\infty : 0 < x(k) < 1 \ \forall k\}$ открытым в ℓ_∞?

15. Докажите, что композиция $g(f(\cdot))$ (топологически) непрерывных отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ является (топологически) непрерывным отображением из X в Z.

16. Докажите, что в метрическом пространстве функция расстояния до фиксированного непустого множества A 1-липшицева и непрерывна. Подробнее, пусть $f(x) = \rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$. Докажите, что $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \rho(x_1, x_2)$. Выведите из этого непрерывность $f(\cdot)$.

17. Докажите, что пространство основных функций $D(\mathbb{R})$ неметризуемо.

18. Доказать, что семейство лучей $(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}$ образует базу некоторой топологии на $\mathbb{R}$. Опишите все замкнутые и открытые множества в этой топологии.

19. Доказать, что семейство лучей $(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}$ образует базу некоторой топологии на $\mathbb{R}$. Опишите, как устроено замыкание произвольного множества S.

20. Пусть $F = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}\}$. Доказать, что семейство множеств $V(x, a) = \{f \in F : f(x) < a\}$ образует базу некоторой топологии в F. Как устроена сходимость функций в этой топологии?

21. Пусть $F = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}\}$. Доказать, что семейство множеств $V(x, a) = \{f \in F : f(x) > a\}$ образует базу некоторой топологии в F. Как устроена сходимость функций в этой топологии?

22. Пусть $F = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}\}$. Опишите, как задать топологию на F, чтобы соответствующая сходимость была устроена так: $f_n \to f \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) \leqslant f(x) \quad \forall x \in [0, 1]$.

23. Докажите, что сходимость по тихоновской топологии в $[0, 1]^{[0,1]}$ эквивалентна поточечной сходимости функций $f : [0, 1] \to [0, 1]$.

24. Докажите, что сходимость по тихоновской топологии в $\mathbb{R}$ эквивалентна поточечной сходимости функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

25. Найдите все линейные функционалы над $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, непрерывные относительно топологии произведения.

26. В $C[0, 1]$ рассматривается семейство множеств

$$\beta = \left\{ V_\varepsilon(f) = \left\{ g \in C[0, 1] : \left| \int_0^1 (f(x) - g(x))dx \right| < \varepsilon \right\} \middle| f \in C[0, 1], \varepsilon > 0 \right\}.$$

Докажите, что они образуют базу некоторой топологии.

2 Метрические пространства

27. Докажите, что пространство ℓ_2 сепарабельно.

28. Докажите, что пространство ℓ_∞ несепарабельно.

29. Докажите, что пространство $\mathbb{L}_\infty[0, 1]$ несепарабельно.

30. Докажите, что ℓ_1 полно.

31. Докажите, что ℓ_5 полно.

32. Докажите, что ℓ_1 с метрикой, взятой из ℓ_3, неполно.

33. Докажите, что ℓ_2 с метрикой, взятой из ℓ_∞, неполно.

34. Объясните, почему на множестве ℓ_3 функция $\|\cdot\|_2$ не является нормой.

35. Докажите, что пространство $C[a,b]$ сепарабельно.

36. Докажите, что пространство $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ неполно.

37. Множество всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций обозначается $C^1[0,1]$. Докажите, что функция $d(f,g) = |f(0)-g(0)| + \int\limits_0^1 |f'(x)-g'(x)|dx$ является метрикой. Является ли пространство с этой метрикой полным?

38. Множество всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций обозначается $C^1[0,1]$. Докажите, что функция $d(f,g) = |f(0)-g(0)| + \sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)-g'(x)|$ является метрикой. Является ли пространство с этой метрикой полным?

39. Пусть ρ_1, ρ_2 — две метрики на множестве X, порождающие одну и ту же топологию. Верно ли, что (X, ρ_1) полно тогда и только тогда, когда полно (X, ρ_2)?

40. Пусть $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ — две нормы на векторном пространстве X, порождающие одну и ту же топологию. Верно ли, что $(X, \|\cdot\|_1)$ полно тогда и только тогда, когда полно $(X, \|\cdot\|_2)$?

41. Приведите пример системы вложенных шаров в полном метрическом пространстве (с радиусами, не убывающими к нулю), в пересечении которой нет ничего.

42. Приведите пример метрического пространства, в котором может быть такое, что шар большего радиуса вложен в шар меньшего радиуса.

43. Рассматриваются финитные непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (финитность функции есть равенство нулю за пределами какого-то отрезка $[-m, m]$). На них вводится равномерная метрика $\rho(f_1, f_2) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)|$. Докажите неполноту этого метрического пространства и предъявите его пополнение, состоящее из вещественнозначных функций.

44. Предъявите явно достаточное условие на λ, обеспечивающее существование единственного решения в $C[a,b]$ у интегрального уравнения $\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)dy + f(x)$. Уравнение относительно φ, функции f, K заданы и непрерывны.

45. Рассматривается пространство многочленов по метрике $d(p,q) = \sum\limits_i |c_i|$, где $p - q = \sum\limits_i c_i x^i$. Докажите, что оно неполно.

46. Рассматривается пространство всех отрезков $[a,b], a < b$, на вещественной оси $\mathbb{R}$. Вводится следующая функция: $d([a,b],[c,d]) = |a-c| + |b-d|$. Докажите, что эта функция является метрикой. Докажите, что пространство с этой метрикой неполно. Придумайте, как можно конструктивно (не в виде конструкции Хаусдорфа) описать пополнение этого пространства.

47. Докажите, что в пространстве $C(a,b)$ непрерывных функций на интервале функция
$d(f,g) = \sup\limits_{x\in(a,b)} \dfrac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}$ является метрикой.

48. На рациональных числах $\mathbb{Q}$ вводится функция $||r||_p$ (p — простое), которая определяется так: $||r||_p = p^{-k}$, если $r = p^k\frac{m}{n}$, где m и n взаимно просты с p (при этом $||0||_p = 0$ по определению).
Докажите, что функция $d(r_1, r_2) = ||r_1 - r_2||_p$ задаёт метрику на $\mathbb{Q}$.

49. Опишите все множества в метрическом пространстве, которые могут являться множеством нулей некоторой непрерывной функции.

50. Разместите в единичном шаре в ℓ_2 счётное число шаров радиуса $1/10$.

51. Рассматривается пространство $\mathbb{R}$ с метрикой $d(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Докажите неполноту и явно постройте пополнение, не используя конструкцию Хаусдорфа.

52. Рассматривается пространство $\mathbb{R}$ с метрикой $d(x,y) = |e^x - e^y|$. Докажите неполноту и явно постройте пополнение, не используя конструкцию Хаусдорфа.

53. Докажите что подмножество полного метрического пространства само по себе является полным пространством в том и только том случае, когда оно замкнуто.

54. Используя теорему Бэра, покажите, что полное метрическое пространство без изолированных точек обязательно несчётно. (Изолированной называется такая точка, что шар некоторого положительного радиуса с центром в этой точке не содержит ничего кроме центра.)

55. Исследуйте на сепарабельность пространство непрерывных ограниченных функций $BC(\mathbb{R})$ с равномерной метрикой $\rho(f_1, f_2) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)|$.

56. Какой должна быть непрерывная функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, чтобы метрику на $\mathbb{R}$ можно было определить равенством $\rho(x,y) = f(|x-y|)$? Подходит ли функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$?

57. Векторное пространство $L = \ell_1 \times \ell_1$ оснащено нормой $||(x,y)|| = ||x||_2 + ||y||_\infty$.

    Исследовать на сепарабельность, полноту. Если неполно, построить пополнение в виде декартова произведения двух множеств числовых последовательностей, не используя конструкцию Хаусдорфа.

58. Векторное пространство $L = \ell_1 \times \ell_\infty$ оснащено нормой $||(x,y)|| = ||x||_\infty + ||y||_\infty$.

    Исследовать на сепарабельность, полноту. Если неполно, построить пополнение в виде декартова произведения двух множеств числовых последовательностей, не используя конструкцию Хаусдорфа.

59. Пусть F — векторное пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, норма в котором имеет вид $||f|| = \int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{|f(x)|}{1+x^4}\,dx$.

    Исследовать на сепарабельность, полноту. Если неполно, построить пополнение, не используя конструкцию Хаусдорфа.

60. Пусть F — векторное пространство финитных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, норма в котором имеет вид $\|f\| = \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|^2}{1+x^4}\,dx}$.

    Исследовать на сепарабельность, полноту. Если неполно, построить пополнение, не используя конструкцию Хаусдорфа.

61. Пусть F — векторное пространство (классов эквивалентности) интегрируемых и ограниченных на $[0,1]$ функций, норма в котором имеет вид $\|f\| = \sqrt{\int\limits_{[0,1]} \frac{|f(x)|^2}{5+\cos x}\,dx}$.

    Исследовать на сепарабельность, полноту. Если неполно, построить пополнение, не используя конструкцию Хаусдорфа.

62. Докажите, что линейный оператор из линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y непрерывен тогда и только тогда, когда его норма конечна.

63. Докажите, что норма линейного оператора из линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y конечна тогда и только тогда, когда всякое ограниченное множество в X он переводит в ограниченное множество в Y.

64. Докажите, что нормированное пространство полно тогда и только тогда, когда в нём всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

3 Частично упорядоченные множества, базис Гамеля

65. Пусть X — линейное пространство, $L \subset X$ — подпространство. Докажите, что существует подпространство $M \subset X$ такое, что $L + M = X$, $L \cap M = \{0\}$.

66. Множество Γ векторов линейного пространства X называется базисом Гамеля, если любой нетривиальный вектор $x \in X$ единственным образом представляется конечной линейной комбинацией из Γ. Докажите, что в X существует базис Гамеля.

67. Множество Γ векторов линейного пространства X называется базисом Гамеля, если любой нетривиальный вектор $x \in X$ единственным образом представляется конечной линейной комбинацией из Γ. Докажите, что базис Гамеля подпространства $L \subset X$ можно дополнить до базиса Гамеля во всём X.

68. Пусть $(A, \leq)$ — вполне упорядоченное множество (частично упорядоченное множество, всякая непустая часть которого имеет минимальный элемент), а $P(a)$ — некоторое утверждение, формулируемое для всякого $a \in A$. Пусть P верно для первого элемента A, а из справедливости P для всех $b \leq a$ следует справедливость и для a. Докажите, что тогда P верно для всякого $a \in A$.

69. Привести пример бесконечномерного линейного пространства со счетным базисом Гамеля. Будет ли это пространство полным?

70. Доказать, что бесконечномерное банахово пространство не может иметь счетного базиса Гамеля. Для этого показать, что в противном случае оно бы оказалось представимо в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.

71. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|$. Доказать, что существует неограниченный сюръективный и инъективный линейный оператор $A : X \to X$ с неограниченным обратным A^{-1}.

72. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|$. Известно, что существует неограниченный сюръективный и инъективный линейный оператор $A : X \to X$ с неограниченным обратным A^{-1}. Докажите, что функция $\|x\|_A = \|Ax\|$ задаёт норму на X, относительно которой X снова оказывается банаховым.

73. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|$. Известно, что существует неограниченный сюръективный и инъективный линейный оператор $A : X \to X$ с неограниченным обратным A^{-1}, а также что функция $\|x\|_A = \|Ax\|$ задаёт норму на X, относительно которой X снова оказывается банаховым. Можно ли показать, что одна из двух рассматриваемых нормированных топологий в X слабее другой?

74. Пусть X и Y — банаховы, $A : X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Верно ли, что равенство $\|x\|_2 = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$ задаёт в X норму? Будет ли X с этой нормой банаховым?

4 Компактность

75. Доказать, что метрический компакт (X, ρ) имеет конечный диаметр $\operatorname{diam}(X) = \sup\limits_{x,y\in X} \rho(x, y)$.

76. Докажите, что образ (топологически) компактного множества при (топологически) непрерывном отображении является (топологически) компактным.

77. Доказать, что топологическое пространство (X, τ) является компактным если и только если любое его топологически замкнутое собственное подмножество является компактным.

78. Компактен ли единичный шар в пространстве многочленов степени не выше d с метрикой

$$\rho\left(\sum_{i=0}^{d} a_i x^i, \sum_{i=0}^{d} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{d} |a_i - b_i|?$$

79. Доказать, что компактное метрическое пространство сепарабельно.

80. Пусть (X, ρ) — компактное метрическое пространство; отображение $f : X \to X$ таково, что

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y).$$

Докажите, что у такого отображения есть неподвижная точка.

81. Доказать, что компакт нельзя изометрично отобразить на собственное подмножество.

82. Исследовать множество $S = \{f \in C^1[0, 1] : \|f\|_c + \|f'\|_c = 1\}$ на вполне ограниченность и замкнутость в пространстве $(C[0, 1], \|\cdot\|_c)$.

83. Исследовать замыкание множества $S = \{f \in C^1[0, 1] : \|f\|_c + \|f'\|_c = 1\}$ на вполне ограниченность и полноту в пространстве $(C^1[0, 1], \|\cdot\|_c)$.

84. Исследовать множество $S = \{f \in C^1[0,1] : ||f||_c + ||f'||_c = 1\}$ на вполне ограниченность и полноту в пространстве $(C^1[0,1], ||\cdot||_{c^1})$.

85. Исследовать ограниченность, вполне ограниченность и замкнутость множества в $\mathbb{L}_1[0,1]$:

$$S = \left\{f \in \mathbb{L}_1[0,1] : 0 \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ п. в. } x \in (0,1)\right\}.$$

86. Исследовать ограниченность, вполне ограниченность и замкнутость множества в $\mathbb{L}_1[0,1]$:

$$S = \left\{f \in C^1[0,1] : f(0) = 0, |f'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{x}} \forall x \in (0,1)\right\}.$$

87. Исследовать ограниченность, вполне ограниченность и замкнутость множества в c_0:

$$S = \left\{x \in c_0 : \exists f \in \mathbb{L}_1[0,1], ||f||_1 \le 1, \forall k \in \mathbb{N} x(k) = \int_{2^{-k}}^{2^{1-k}} f(t)dt\right\}.$$

88. Исследовать ограниченность, вполне ограниченность и замкнутость множества в c_0:

$$S = \left\{x \in c_0 : \exists f \in \mathbb{L}_2[0,1], ||f||_2 \le 1, \forall k \in \mathbb{N} x(k) = \int_{2^{-k}}^{2^{1-k}} f(t)dt\right\}.$$

89. Исследовать ограниченность, вполне ограниченность и замкнутость множества в $C[0,1]$:

$$S = \left\{f \in C[0,1] : \exists g \in C[0,1], ||g||_1 \le 1, \forall x \in [0,1] f(x) = \int_0^x g(t)dt\right\}.$$

90. Исследовать ограниченность, вполне ограниченность и замкнутость множества в $C[0,1]$:

$$S = \left\{f \in C[0,1] : \exists g \in C[0,1], ||g||_2 \le 1, \forall x \in [0,1] f(x) = \int_0^x g(t)dt\right\}.$$

91. Доказать, что две нормы, определённые на одном векторном пространстве, эквивалентны тогда и только тогда, когда из сходимости последовательности по любой из норм следует её сходимость по другой к тому же пределу.

92. В пространстве $C[a,b]$ рассматривается множество M, состоящее из многочленов $p(x)$ степени $\leqslant 10$, удовлетворяющие условию $\displaystyle\int_a^b |p(x)|dx \leqslant 10$. Компактно ли множество M?

93. Доказать, что в нормированном пространстве шар большего радиуса не может быть вложен в шар меньшего радиуса.

94. Доказать, что норма пространства $C[a,b]$ не порождается никаким скалярным произведением.

95. Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}$ — последовательности в гильбертовом пространстве, причём

$$\begin{cases} ||x_n|| \leqslant 1; \\ ||y_n|| \leqslant 1; \\ \langle x_n, y_n \rangle \to 1. \end{cases}$$

Доказать, что $||x_n - y_n|| \to 0$.

96. Доказать, что замкнутый единичный шар гильбертова пространства строго выпуклый (т. е. что он выпуклый и что внутренние точки любого отрезка с концами в шаре лежат строго внутри шара).

97. Пусть X — векторное пространство. Доказать, что две нормы на нём эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают топологии, порождаемые этими нормами.

98. Докажите, что в бесконечномерном нормированном пространстве единичная сфера не является компактом.

99. Докажите, что в бесконечномерном нормированном пространстве единичный шар не является компактом.

100. Пусть X — метрический компакт. $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — открытое покрытие. Докажите, что тогда $\exists r > 0 : \forall x \in X\ \exists \alpha \in \mathcal{A} : B_r(x) \in U_\alpha$.

5 Задачи повышенной сложности

Решение такой задачи в контрольной не обязательно, но приносит дополнительные баллы.

101. Пусть $X = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ непрерывна}, \int\limits_1^\infty \frac{x}{x^2 + |f(x)|} dx < +\infty \right\}$, $\rho(f, g) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |x| + |f(x) - g(x)|}$.
Исследовать на сепарабельность, полноту. Если неполно, построить пополнение из вещественнозначных функций, не используя конструкцию Хаусдорфа.

102. Пусть $X = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ непрерывна}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{1 + |f(x)|} dx < +\infty \right\}$, $\rho(f, g) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x) - g(x)|}{3^x + |f(x) - g(x)|}$.
Исследовать на сепарабельность, полноту. Если неполно, построить пополнение из вещественнозначных функций, не используя конструкцию Хаусдорфа.

103. Пусть $X = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ непрерывна}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1 + |f(x)|} dx < +\infty \right\}$, $\rho(f, g) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x) - g(x)|}{2^{-|x|} + |f(x) - g(x)|}$.
Исследовать на сепарабельность, полноту. Если неполно, построить пополнение из вещественнозначных функций, не используя конструкцию Хаусдорфа.

104. Пусть $X = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{|x(k)|}{k + |x(k)|} < +\infty \right\}$, $\rho(x, y) = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x(k) - y(k)|}{k + |x(k) - y(k)|}$.
Исследовать на сепарабельность, полноту. Если неполно, построить пополнение из числовых последовательностей, не используя конструкцию Хаусдорфа.

105. Пусть $X = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{k!}{k + |x(k)|} < +\infty \right\}$, $\rho(x, y) = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x(k) - y(k)|}{\operatorname{ch} k + |x(k) - y(k)|}$.
Исследовать на сепарабельность, полноту. Если неполно, построить пополнение из числовых последовательностей, не используя конструкцию Хаусдорфа.

106. Пусть $X = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{|x(k)|}}{1+|x(k)|} < +\infty \right\}$, $\rho(x, y) = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \frac{|x(k) - y(k)|}{k! + |x(k) - y(k)|}$.

Исследовать на сепарабельность, полноту. Если неполно, построить пополнение из числовых последовательностей, не используя конструкцию Хаусдорфа.

107. Пусть множество $E = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid x(n) = O(\ln n) \text{ при } n \to \infty\}$. Метрика на E задана формулой $\rho(x, y) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x(n) - y(n)|}{n}$. Доказать, что (E, ρ) — неполное метрическое пространство, и построить его пополнение.

108. Пусть множество $E = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid x(n) = O(1/n) \text{ при } n \to \infty\}$. Метрика на E задана формулой $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x(n) - y(n))^2}$. Доказать, что (E, ρ) — неполное метрическое пространство, и построить его пополнение.

109. Докажите, что пространство ℓ_2 с метрикой, взятой из ℓ_∞, можно представить в виде счётного объединения нигде не плотных множеств.

110. Исследовать множество $S = \{f \in C^2[0, 1] : \|f\|_c + \|f''\|_c = 1\}$ на вполне ограниченность в пространстве $(C[0, 1], \|\cdot\|_c)$.

111. Исследовать множество $S = \{f \in C^2[0, 1] : \|f\|_c + \|f''\|_c = 1\}$ на вполне ограниченность в пространстве $(C^1[0, 1], \|\cdot\|_c)$.

112. Исследовать множество $S = \{f \in C^2[0, 1] : \|f\|_c + \|f''\|_c = 1\}$ на вполне ограниченность в пространстве $(C^2[0, 1], \|\cdot\|_c)$.

113. Исследовать множество $S = \{f \in C^2[0, 1] : \|f\|_c + \|f''\|_c \leqslant 1\}$ на вполне ограниченность в пространстве $(C^1[0, 1], \|\cdot\|_{c^1})$. По определению считаем $\|f\|_{c^1} = \|f\|_c + \|f'\|_c$.

114. Исследовать множество $S = \{f \in C^2[0, 1] : \|f\|_c + \|f''\|_c \leqslant 1\}$ на вполне ограниченность в пространстве $(C^2[0, 1], \|\cdot\|_{c^1})$. По определению считаем $\|f\|_{c^1} = \|f\|_c + \|f'\|_c$.

115. Исследовать множество $S = \{f \in C^2[0, 1] : \|f\|_c + \|f''\|_c \leqslant 1\}$ на вполне ограниченность в пространстве $(C^2[0, 1], \|\cdot\|_{c^2})$. По определению считаем $\|f\|_{c^2} = \|f\|_c + \|f'\|_c + \|f''\|_c$.

116. Направленным множеством называется такое частично упорядоченное множество $(X, <)$, что $\forall \alpha, \beta \in X \; \exists \gamma \in X$ такое, что $\gamma > \alpha$ и $\gamma > \beta$. Направленностью $\{x_\alpha\}_{\alpha \in X}$ в топологическом пространстве S называется произвольное отображение направленного множества в S. Направленность сходится к точке $x \in S$, если для любой окресности x найдется такой $\beta \in I$, что $\forall \alpha > \beta$ элемент x_α также лежит в этой окрестности.

Докажите, что x — топологическая точка прикосновения подмножества A топологического пространства S тогда и только тогда, когда существует направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in X}$ точек из A, сходящаяся к x.

117. Направленным множеством называется такое частично упорядоченное множество $(X, <)$, что $\forall \alpha, \beta \in X \; \exists \gamma \in X$ такое, что $\gamma > \alpha$ и $\gamma > \beta$. Направленностью $\{x_\alpha\}_{\alpha \in X}$ в топологическом пространстве S называется произвольное отображение направленного множества в S. Направленность сходится к точке $x \in S$, если для любой окресности x найдется такой $\beta \in I$, что $\forall \alpha > \beta$ элемент x_α также лежит в этой окрестности.

Докажите, что функция $f : X \to Y$ из одного топологического пространства в другое непрерывна (топологически) тогда и только тогда, когда для всякой сходящейся направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in X}$ точек в X направленность $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ сходится в Y.

118. Направленным множеством называется такое частично упорядоченное множество $(X,<)$, что $\forall\alpha,\beta \in X\ \exists\gamma \in X$ такое, что $\gamma > \alpha$ и $\gamma > \beta$. Направленностью $\{x_\alpha\}_{\alpha\in X}$ в топологическом пространстве S называется произвольное отображение направленного множества в S. Направленность сходится к точке $x \in S$, если для любой окресности x найдется такой $\beta \in I$, что $\forall\alpha > \beta$ элемент x_α также лежит в этой окрестности.

Докажите, что в топологическом пространстве множество A компактно тогда и только тогда, когда всякое бесконечное подмножество точек из A содержит направленность, сходящуюся к некоторому элементу из A.

119. Доказать, что уравнение $4x(t) - 1 + \int_0^t x^3(s)ds = 0$ имеет единственное решение в классе непрерывных на $[0, 1]$ функций, ограниченных по модулю единицей сверху.

120. Докажите, что в $C[0, 1]$ уравнение $\sin x(t) - \cos t + 2x(t) = 0$ имеет решение, причем единственное. Укажите способ построения последовательности, сходящейся к решению.

121. Доказать, что уравнение $3x(t) - t = \int_0^t \frac{x(s)}{1 + x^2(s)}ds$ имеет единственное решение в классе непрерывных на $[0, 1]$ функций, ограниченных по модулю единицей сверху.

122. Доказать, что в топологическом векторном пространстве, где всякое одноточечное множество замкнуто, для любой окрестности нуля V найдется окрестность нуля W такая, что $W + W \subset V$ (под суммой понимается сумма по Минковскому). Доказать, что такое топологическое векторное пространство всегда Хаусдорфово.

123. Докажите, что подмножество A в топологическом пространстве X является компактным тогда и только тогда, когда всякое центрированное семейство замкнутых множеств в A имеет непустое пересечение. *Замечание.* Непустое семейство замкнутых множеств называется центрированным, если пересечение любого конечного подсемейства непусто.

124. Существует ли в пространстве $\mathbb{L}_2[0, 1]$ компакт, имеющий вторую категорию Бэра?

125. Рассмотрим счетное декартово произведение метрических пространств $\prod_{k=1}^{\infty} X_k$. В нём рассмотрим две топологии: одна — тихоновская топология, порождённая метрическими топологиями в X_k, а вторая — порождённая метрикой $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{\rho_k(x_k, y_k)}{1 + \rho_k(x_k, y_k)}$. Верно ли, что заданная таким образом метрика порождает в точности тихоновскую топологию?