Содержание

19

Доказать, что семейство лучей $(-\infty, a],\ a \in \mathbb{R}$ образует базу некоторой топологии на $\mathbb{R}$. Как будет выглядеть замыкание произвольного множества S?

Докажем, что это база топологии. Нужно проверить свойства:

1. $$\forall x \in X\ \exists V \in \beta : x \in V$$

2. $$\forall V_1, V_2 \in \beta\ \ \forall x \in V_1 \cap V_2\ \exists W \in \beta : x \in W \subset V_1 \cap V_2$$

Проверим:

1. Введем обозначение:
$$V_a = (-\infty, a]$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ V = V_x$$

2. $$V_a \cap V_b = V_c,\ c = \min(a, b)$$
$$\forall x \in V_a \cap V_b \to x \leq a,\ x \leq b \to V_x \in V_a \cap V_b$$
$$W = V_x, x \in W$$

Замыкание множества:
$$[S] = \{x \in X \mid U(x) \cap S \neq \emptyset\}$$
$$U(x) \in \{V_y \mid y \geq x\}$$
Пусть $S \neq \emptyset$, тогда $\exists x_0 \in S$ а для нее верно: $\forall y \geq x_0\ \ U(y) \cap S \neq \emptyset$ Легко видеть, что замыканием множества будет
$$[S] = S \cup (\inf(S), +\infty)$$

18

Доказать, что семейство лучей $(-\infty, a],\ a \in \mathbb{R}$ образует базу некоторой топологии на $\mathbb{R}$.Опишите все замкнутые и открытые множества в этой топологии

См. решение задачи 19 (выше). Т.к. Открытыми будут множества, представимые некоторым объединением элементов базы.

$$Y = (-\infty, a\},\ a \in \mathbb{R}$$

Замкнутыми будут множества, дополнения которых открыты :

$$[Z] = Z = \{a, +\infty),\ a \in \mathbb{R}$$

фигурная скобка обозначает либо], либо)

26

В C[0, 1] рассматривается семейство множеств:

$$\beta = \{V_\varepsilon(f) = \{g(x) \in C[0,1] \ : \mid \int\limits_0^1 f(x) - g(x)dx \mid < \varepsilon\}\}$$

Докажите, что это база некоторой топологии.

Проверим критерий базы:

1. $$\forall x \in X \ \exists V \in \beta : x \in V$$

2. $$\forall V_1, V_2 \in \beta \ \ \forall x \in V_1 \cap V_2 \ \exists W \in \beta : x \in W \subset V_1 \cap V_2$$

1. $$\forall f \in C[0,1] \ V = V_\varepsilon(f)$$

2. Пусть $a \in C[0,1], \ b \in C[0,1]$ и некоторое пересечение $V_\varepsilon(a) \cap V_{\varepsilon'}(b) \neq \emptyset$ Тогда

$$\exists h \in C[0,1] : \mid \int\limits_0^1 dx(h-a) \mid < \varepsilon$$

$$\mid \int\limits_0^1 dx(h-b) \mid < \varepsilon'$$

$$\mid \int\limits_0^1 dx(h - \frac{a+b}{2}) \mid < \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}$$

Т.е. получили:

$$W = V_{(\varepsilon+\varepsilon')/2}(\frac{a+b}{2})$$

45

Рассматривается пространство многочленов $\mathcal{F}$ с метрикой $\rho(a,b) = \sum\limits_i |c_i|$, где $a - b = \sum\limits_i c_i x_i$. Докажите, что оно неполно.

Рассмотрим последовательность многочленов:

$$f_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

Эта последовательность, очевидно, фундаментальна (всюду сходящийся ряд Тейлора). Докажем, что она не сходится к многочлену.
Если бы последовательность имела предел в $\mathcal{F}$ то в $\mathcal{F}$ нашелся бы многочлен бесконечной степени. Противоречие.
Неверное рассуждение: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \exp(x)$, $\exp(x) \notin \mathcal{F}$

75

Доказать, что метрический компакт (X, ρ) имеет конечный диаметр $d = \sup\limits_{x,y \in X} \rho(x, y)$.

Т.к. в метрическом пространстве компакт - ограниченное и замкнутое множество, то $\exists z \in X\ \exists r > 0 : X \subset O_r(z)$, $O_r(x)$ - шар с центром z и радиусом r

$$\forall x, y \in X\ \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \leq 2r \to \sup_{x,y \in X} \rho(x, y) \leq 2r$$

78

Компактен ли единичный шар $X = \{x \mid \rho(x, x_0) \leq 1\}$ в пространстве многочленов степени не выше d с метрикой

$$\rho(\sum_{i=0}^{d} a_i x^i, \sum_{i=0}^{d} b_i x^i) = \sum_{i}^{d} |a_i - b_i|$$

Исследуем на вполне ограниченность и замкнутость:

Ограниченность

Т.к. пространство конечномерное, то из ограниченности следует вполне ограниченность. Единичный шар ограничен $\rightarrow$ вполне ограничен.

Замкнутость

Замкнутое $\Leftrightarrow$ содержит все свои точки прикосновения. Пусть p - точка прикосновения $X \rightarrow$

$$\forall p \ \exists p' \in U_r(p), \ r > 0 : p' \in X$$

$$\rho(p', x_0) \leq 1, \ \rho(p', p) \leq r$$

$$\rho(p, x) \leq 1 + r$$

Устремим $r \rightarrow 0$ т.е. $p \in X$ т.е. шар содержит свои точки прикосновения.

З.Ы. А вообще пространство конечномерное, можно сразу сделать изометрию в $\mathbb{R}^{d+1}$ и сказать, что там шар компактен (но это не точно)