12

Замечание 5.4.4. Пусть пространство X конечномерно, а его размерность $\dim X = n$. Тогда слабая топология в X совпадает с его сильной нормированной топологией. Достаточно доказать, что существует слабая окрестность нуля U_0, которая содержится в $O_1^X(0)$. Предположим, что существование окрестности U_0 установлено. Для любого сильно открытого множества $G \subset X$ и любого вектора $x \in G$ существует число $r(x) > 0$, такое, что $O_{r(x)}^X(x) \subset G$. Тогда множество $V(x) = x + r(x)U_0$ является слабой окрестностью точки x, причём $V(x) \subset x + r(x)O_1^X(0) = O_{r(x)}^X(x) \subset G$. Следовательно, справедливы включения

$$G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subset \bigcup_{x \in G} V(x) \subset G.$$

Таким образом, выполнено равенство $G = \bigcup\limits_{x \in G} V(x)$, т. е. множество G является слабо открытым как объединение слабо открытых множеств. Так как в силу замечания 5.4.3 любое слабо открытое в X множество является сильно открытым, то получаем равенство сильной нормированной и слабой топологий в конечномерном пространстве X.

Осталось доказать существование слабой окрестности нуля $U_0 \subset \subset O_1^X(0)$. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ — некоторый базис в пространстве X. Тогда для любого вектора $x \in X$ существуют единственные скаляры $\alpha_k(x)$, такие, что $x = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k(x) e_k$. Ясно, что отображение $\alpha_k \colon X \to \mathbb{C}$ является линейным, а функция $\|x\|_e = \sum\limits_{k=1}^n |\alpha_k(x)|$ есть норма в X. По теореме 3.1.1 нормы $\|\cdot\|_e$ и $\|\cdot\|_X$ эквивалентны. Следовательно, существуют числа $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, такие, что для всех $x \in X$ справедливы неравенства

$$C_1\|x\|_X \le \|x\|_e \le C_2\|x\|_X.$$

Тогда для любого номера $k \in \overline{1,n}$ и вектора $x \in X$ имеем неравенство $|\alpha_k(x)| \le \|x\|_e \le C_2\|x\|_X$. Следовательно, $\|\alpha_k\| \le C_2$, т. е. справедливо включение $\alpha_k \in X^*$. Рассмотрим слабую окрестность нуля вида

$$U_0 = \bigcap_{k=1}^n V\left(0, \alpha_k, \frac{C_1}{n}\right).$$

Тогда включение $x \in U_0$ равносильно выполнению неравенств

$$|\alpha_k(x)| < \frac{C_1}{n} \quad \text{для всех} \quad k \in \overline{1,n}.$$

Следовательно, если $x \in U_0$, то $\|x\|_e < C_1$ и выполнено неравенство $\|x\|_X \le \frac{\|x\|_e}{C_1} < 1$, т. е. $x \in O_1^X(0)$. Таким образом, справедливо включение $U_0 \subset O_1^X(0)$, что и требовалось.

13. Молитесь, чтобы вам не попалось это говно.

Пусть линейное пространство X бесконечномерно. Тогда слабая топология τ_w в X строго слабее нормированной топологии τ_n, т. е. $\tau_w \subsetneq \tau_n$. Увидим, что τ_n-открытый шар $O_1^X(0) \notin \tau_w$. Для этого докажем, что любая слабая окрестность нуля U_0 не содержится в шаре $O_1^X(0)$. Действительно, как показано в замечании 5.4.2, для любой слабой окрестности нуля U_0 существуют номер N, функционалы $\{f_k\}_{k=1}^N \subset X^*$ и число $\delta > 0$, такие, что $\bigcap\limits_{k=1}^{N} V(0, f_k, \delta) \subset U_0$. Так как $\bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k \subset \bigcap\limits_{k=1}^{N} V(0, f_k, \delta)$, то получаем включение $\bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k \subset U_0$. Покажем, что подпространство $\bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k$ нетривиально. Для доказательства этого факта увидим, что существуют векторы $\{z_k\}_{k=1}^N \subset X$, такие, что справедливо равенство

$$\bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k \oplus \operatorname{Lin}\{z_1, \ldots, z_N\} = X.$$

Покажем это равенство индукцией по N. Действительно, существует вектор $z_1 \in X$, такой, что $\operatorname{Ker} f_1 \oplus \operatorname{Lin}\{z_1\} = X$. Если $f_1 = 0$, то подойдёт $z_1 = 0$. Если же $f_1 \neq 0$, то существует $z_1 \in X$, такой, что $f(z_1) \neq 0$. Тогда для любого $x \in X$ получаем $x = y + \frac{f_1(x)}{f_1(z_1)} z_1$, где вектор $y = x - \frac{f_1(x)}{f_1(z_1)} z_1 \in \operatorname{Ker} f_1$. Следовательно, справедливо равенство $X = \operatorname{Ker} f_1 + \operatorname{Lin}\{z_1\}$. Если же вектор $x \in \operatorname{Ker} f_1 \cap \cap \operatorname{Lin}\{z_1\}$, то $x = tz_1$ и $0 = f(x) = tf(z_1)$, т. е. $t = 0$ и $x = 0$. Поэтому $\operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Lin}\{z_1\} = \{0\}$, т. е. сумма подпространств $\operatorname{Ker} f_1$ и $\operatorname{Lin}\{z_1\}$ прямая. Теперь, рассуждая по индукции, предположим, что $\bigcap\limits_{k=1}^{N-1} \operatorname{Ker} f_k \oplus \operatorname{Lin}\{z_1, \ldots, z_{N-1}\} = X$. Рассмотрим сужение функционала f_N на подпространство $L_N = \bigcap\limits_{k=1}^{N-1} \operatorname{Ker} f_k$. Как показано выше в первом шаге индукции, существует вектор $z_N \in L_N$, такой, что справедливо равенство

$$\Big(L_N \cap \operatorname{Ker} f_N\Big) \oplus \operatorname{Lin}\{z_N\} = L_N.$$

Тогда получаем

$$X = L_N \oplus \operatorname{Lin}\{z_1, \ldots, z_{N-1}\} =$$

$$= \Big(L_N \cap \operatorname{Ker} f_N\Big) \oplus \operatorname{Lin}\{z_N\} \oplus \operatorname{Lin}\{z_1, \ldots, z_{N-1}\} =$$

$$= \bigcap_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k \oplus \operatorname{Lin}\{z_1, \dots, z_N\},$$

что и требовалось. Так как по условию $\dim X = +\infty$, а

$$\dim \operatorname{Lin}\{z_1, \dots, z_N\} \le N,$$

то получаем, что $\dim \bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k = +\infty$. Следовательно, бесконечномерное подпространство $\bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k$ заведомо является нетривиальным. Но тогда для любого нетривиального вектора $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k \subset$ $\subset U_0$ получаем, что вектор $z = \frac{2x}{\|x\|} \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} \operatorname{Ker} f_k$ удовлетворяет соотношениям: $\|z\| = 2 > 1$, т. е. $z \notin O_1^X(0)$, но $z \in U_0$. Таким образом, мы доказали, что $U_0 \not\subset O_1^X(0)$, т. е. $O_1^X(0) \notin \tau_w$.

Вставка из замечания 5.4.2. Я не особо уверен в этом говне. Земля вам пухом.

$x \in U_0$ выполнено неравенство $|f(x)| < \varepsilon$. По определению слабой топологии существуют номер N, векторы $\{x_k\}_{k=1}^{N} \subset X$, функционалы $\{f_k\}_{k=1}^{N} \subset X^*$ и положительные числа $\{\delta_k\}_{k=1}^{N}$, такие, что выполнены включения

$$0 \in \bigcap_{k=1}^{N} V(x_k, f_k, \delta_k) \subset U_0.$$

Тогда $|f_k(x_k)| < \delta_k$ для любого $k \in \overline{1, N}$. Рассмотрим число

$$\delta = \min_{k \in \overline{1,N}} \Big(\delta_k - |f_k(x_k)|\Big) > 0.$$

Тогда для любого вектора $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} V(0, f_k, \delta)$ получаем неравенства

$$|f_k(x) - f_k(x_k)| \le |f_k(x)| + |f_k(x_k)| < \delta + |f_k(x_k)| \le \delta_k \quad \forall\, k \in \overline{1, N}.$$

Следовательно, $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} V(x_k, f_k, \delta_k)$, т. е. справедливо включение

$$\bigcap_{k=1}^{N} V(0, f_k, \delta) \subset \bigcap_{k=1}^{N} V(x_k, f_k, \delta_k) \subset U_0.$$

29

$\boxed{\S 10.4}$ Пусть $M \subset \mathbb{L}_2[-\pi;\pi]$ состоит из функций вида $f_{m,n}(x) = \sin mx + m \sin nx$ $(-\pi \le x \le \pi)$. Доказать, что $[M]^{\text{секв}}_{\tau_w} \neq \left[[M]^{\text{секв}}_{\tau_w}\right]^{\text{секв}}_{\tau_w}$.

Решение: • Вычислим явно первое секвенциальное замыкание. Заметим, что функции вида $\sin mx$ лежат в нём (достаточно перейти к слабому пределу при $n \to \infty$). Покажем, что $[M]^{\text{секв}}_{\tau_w} = M \cup \{\sin mx \mid m \in \mathbb{N}\}$.

• Слабо сходящаяся последовательность ограничена $\Rightarrow$ в силу $\int_{-\pi}^{\pi} f^2_{m,n}(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1-\cos 2mx}{2} + m^2 \cdot \frac{1-\cos 2nx}{2} + 2m \sin mx \sin nx\right]dx = \frac{1}{2}(1+m^2)$ слабо сходящейся последовательность $\{f_{m_k,n_k}\}$ может быть лишь при ограниченной последовательности $\{m_k\}$. Тогда в последовательности встречается лишь $l < \infty$ разных значений m_k. Рассматриваем l различных подпоследовательностей с постоянным значением m_k.

• Тогда в каждой из таких подпоследовательностей элементы $\{\sin mx + m \sin n_k x\}$. Возможные (слабые) пределы подпоследовательностей — либо элементы M, либо $\sin mx$.

• Итак, $[M]^{\text{секв}}_{\tau_w} = M \cup \{\sin mx \mid m \in \mathbb{N}\} \not\ni \{0\}$. Но $\{0\} \in \left[[M]^{\text{секв}}_{\tau_w}\right]^{\text{секв}}_{\tau_w}$.

39

Проведем оценку, в первой формуле пользуемся правилом Эйнштейна:

$$\|A_i^j x^i\| = \|y^j\|_\infty = \sup_j \sup_{\|x\|_\infty=1} |A_i^j x^i|$$

$$\forall j, i: \ |x^i| \leq 1, \ y^j = \sum_i A_i^j x^i \leq \sum_i |A_i^j x^i| \leq \sum |A_i^j|$$

Т.е.

$$\|Ax\| \leq \sup_j \sum_i |A_i^j|$$

И из построения очевидно, как достать необходимый вектор:

$$x^i = \begin{cases} +1, & A_i^k \geq 0 \\ -1, & A_i^k < 0 \end{cases}$$

Где k-номер строки, в которой наибольшая сумма модулей элементов. Что и является искомой нормой.

62

$$A : l_1 \to \mathbb{L}_2, \to A^\dagger : \mathbb{L}_2 \to l_\infty$$

$$\forall x \in l_1, g \in \mathbb{L}_2 \hookrightarrow \langle g, Ax \rangle = \langle A^\dagger g, x \rangle$$

$$\langle g, Ax \rangle = \int\limits_0^\infty g(t) \sum_{k=1}^\infty \frac{x(k)}{k+t} = \text{Th. Лебега об ограниченной сходимости} = \sum_{k=1}^\infty x(k) \int\limits_0^\infty \frac{g(t)}{t+k} = \sum_{k=1}^\infty x(k) y(k)$$

$$x(k) \in l_1, \ y(k) \in l_\infty$$

$$A^\dagger g(t) = \left(\int\limits_0^\infty \frac{g(t)}{k+t} \right) (k)$$

Обоснуем использование Теоремы Лебега:

$$|f_n| = |\sum_{k=1}^n x(k) \frac{g(t)}{k+t}| \leq |g(t)| \sum_{k=1}^n \frac{|x(k)|}{k+t} \leq |g(t)| \sum_{k=1}^\infty \frac{|x(k)|}{k} = |g(t)| C$$

68.

Пусть над полем $\mathbb{C}$.

Тогда по теореме Рисса-Фреше любой функционал это скалярное произведение с некоторым вектором из $\mathcal{H}$.

$$(Ax, y) = (x, A^\dagger y) = (x, z) = (z, x)^* = (A^\dagger y, x)^* = ((A^\dagger)^\dagger x, y)^{**} = ((A^\dagger)^\dagger x, y), \ \forall x, y \in \mathcal{H}$$

Т.к. это верно для всех векторов из $\mathcal{H}$, то $(A^\dagger)^\dagger = A$.

74

Найдем $\|A\|$: $\|Ax\| = \|x\| \to \|A\| = 1$ Значит, по утверждению 5.7.1, любое число $\forall\lambda : |\lambda| > \|A\|, \lambda \in \rho(A)$. Т.е. спектр A точно лежит в единичном круге. Найдем точечный спектр:

$$\sigma_p : (A - \lambda I)x = 0$$

Раскроем, перенесем вправо. Сравним векторы покомпонентно:

$$x(0) = 0 \to \lambda x(1) = x(0) = 0 ... \; x(i) = 0 \; \forall i$$

$$x = 0$$

Т.е. точечный спектр пуст

Рассмотрим $A^\dagger$:

$$(Ax, y) = (x, A^\dagger y) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^* y_{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{k-1}^* y_k$$

$$A^\dagger(x_0, x_1 ...) = (x_1, x_2 ...)$$

Найдем спектр $A^\dagger$:

$$\forall\lambda : \; 0 < |\lambda| < 1 \hookrightarrow \; x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, ...) \in l_2$$

$$A^\dagger x_\lambda = \lambda x_\lambda$$

Т.е. у $A^\dagger$ спектр - вся внутренность круга единичного радиуса, кроме, может быть, нуля.
Т.к. Спектр компакт, а ноль в нашем случае - точка прикосновения, как и любая точка $|\lambda| = 1$, то спектр это $\lambda \in \mathbb{C} : \; |\lambda| \le 1$. Т.к.

$$\sigma(A^\dagger) = \sigma^*(A) \to \sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \; |\lambda| \le 1\}$$