A

找到度数最小的节点，显然这个点和与这个点无边相连的点会在同一个集合中，所以不妨直接缩成一个点。

那么剩下的点只有与这个点相连的最多 $\sqrt{2m}$ 个点和缩完的一个点了，那么直接暴力把这些点直接连边方式的补图建出来然后直接跑 bfs 或者 dfs 即可。

我似乎看到有人写补图 bfs 被卡常了，只能说要注意常数因子带来的影响罢。

B

对于知识面足够宽的选手，这是一道签到题。定义 $I(x)=1$，注意到 $d=I*I, I*\mu=\epsilon, f*\epsilon=f$，狄利克雷卷积具有交换律。所以后面那个式子等价于 μ。μ 显然是一个积性函数，那么线性筛出其 $1\cdots 10^7$ 项的值。然后 $\lfloor\frac{M}{i}\rfloor$ 的值只有 $O(\sqrt{M})$ 种，而且取每种值的 i 均是一个区间。那么整除分块即可。复杂度 $O(T\sqrt{M}+M)$。

在 $N=M$ 时，$\sum_{i=1}^{M}\lfloor\frac{M}{i}\rfloor\mu(i)=\sum_{i,j,i\times j\le M}\mu(i)=\sum_{T=1}^{M}\sum_{i|T}\mu(i)=[M\ge 1]$

对于不了解这部分知识点的选手，同样能拿到大量分数，一个对这类型题目的考试策略是先打表找规律。写一个暴力计算出后面那个式子的值，然后发现值只能为 $1,0,-1$，联想到 μ 函数也是如此，再比对一下发现真的一样。然后你至少过了前 50 分。虽然 10^7 可能没什么想法，但你觉得 $N=M$ 一定有特殊之处，然后你再打了个表，发现答案全是 1。

C

考虑如下算法，初始每个连通块大小为一，每次找一个连通块，考虑这个连通块与连通块外的点之间边的最小权值，这条边一定在最小生成树中，不断重复该算法即可。容易想到使用启发式合并进行优化每次找最小的连通块合并，具体来讲，维护所有序列元素构成的 trie 树，每次选择最小的联通块集合，将该集合中的点从 trie 树中删去，然后枚举集合中的点，在 trie 树中删去与之相连的点，查询最大值，再把这些点加上。容易证明，复杂度 $O(n\log n\log a)$，可以通过。

D

令 $dp_{i,j}$ 代表当前在点 i，已经有 j 的收益，此时最优决策下能够获得大于等于 C 收益的概率。那么转移为 $dp_{i,j}=\sum_{k=0}^{n_i-1}p_{i,k}*max_{T\in son[i]}dp[T][j+k]$。直接写有 50 分。注意到第二维 max 的枚举可以到一个点的时候先将 max 求出来，而 $j+k\ge C$ 的时候一定为 1，那么是一个前缀和。经过这些常数优化，你可以拿到 60/70 分。

假设当前在点 i，令 $mx[k]=max_{T\in son[i]}dp[T][k]$。那么转移很像一个卷积。如果我们把 p 翻转一下，那这个式子就真的变成卷积了。对于卷积，我们常用的处理手段是 FFT。如果你写了 FFT，那你将有 80/90 分。最后一个点的常数略大过不去，注意到 FFT 经典优化是三次变两次，即如果你想卷积 A 和 B，$Fp=A+Bi, Fq=A-Bi$。我们只要算出来 $DFT(Fp)$和$DFT(Fq)$ 就能算出 $DFT(A)$和$DFT(B)$。注意到$DFT(Fp)_{mx-k}$和$DFT(Fq)_k$ 为共轭的两复数。

令 w 为单位根。conj(x) 代表 x 的共轭复数。X_j 为 w^{jk} 在复平面所对应的角度。

$$
\begin{aligned}
& Fq(w^k) = \\
& \sum_{j=0}^{mx-1}(A_j - B_j i) * w^{jk} \\
& = \sum_{j=0}^{mx-1}(A_j - B_j i) * (\cos X_j + i \sin X_j) \\
& = \sum_{j=0}^{mx-1}(A_j \cos X_j + B_j \sin X_j) + (A_j \sin X_j - B_j \cos X_j) i \\
& = \sum_{j=0}^{mx-1} conj((A_j \cos X_j + B_j \sin X_j) - (A_j \sin X_j - B_j \cos X_j) i) \\
& = \sum_{j=0}^{mx-1} conj((A_j \cos(-X_j) - B_j \sin(-X_j)) + (A_j \sin(-X_j) + B_j \cos(-X_j)) i) \\
& = \sum_{j=0}^{mx-1} conj((A_j + B_j i) * (\cos(-X_j) + \sin(-X_j) i)) \\
& = conj(Fp(w^{mx-k}))
\end{aligned}
$$

所以求出来一个就知道另外一个。我们就将三次卷积优化为了两次。正常实现就能通过。

如果有想要更深入研究快速傅里叶变换的同学，可以去找2016国家集训队论文集中毛啸的再探快速傅里叶变换。

祝同学们 Noip2021 RP++，考得好成绩。