Solutions problèmes Mécanique Quantique
Tome I

Hugo Laviec

Table des matières

1 Intro aux idées fondamentales de la MQ **5**

1.1 Exercice I 5

2 Outils mathématiques de la mécanique quantique **7**

2.1 Exercice I 7

2.2 Exercice II 8

2.3 Exercice III 9

2.4 Exercice IV 9

2.5 Exercice V 10

2.6 Exercice VI 10

2.7 Exercice VII 11

2.8 Exercices X et XI 11

3 Postulats de la MQ **13**

3.1 Exercice I 13

Chapitre 1

Intro aux idées fondamentales de la MQ

1.1 Exercice I

Chapitre 2

Outils mathématiques de la mécanique quantique

2.1 Exercice I

$|\varphi_n\rangle$ base orthonormée, $U(m,n) = |\varphi_m\rangle \langle\varphi_n|$

a) $U^\dagger(m,n) = (|\varphi_m\rangle \langle\varphi_n|)* = |\varphi_n\rangle \langle\varphi_m|$

b) $[H,U] = HU - UH = H|\varphi_m\rangle \langle\varphi_n| - |\varphi_m\rangle \langle\varphi_n| H = E_m \langle\varphi_n| - E_n |\varphi_m\rangle$

c) $U(m,n)U^\dagger(p,q) = |\varphi_m\rangle \langle\varphi_n|\varphi_q\rangle \langle\varphi_p| = \delta_{nq}U(m,p)$

d) $Tr\{U(m,n)\} = \sum_n U(n,n) = \sum_n |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n| = 1$ relation de fermeture.

e) $A_{mn} = \langle\varphi_m| A |\varphi_n\rangle$, éléments de matrice de l'opérateur A.
$|\varphi_m\rangle A_{mn} \langle\varphi_n| = A_{mn} |\varphi_m\rangle \langle\varphi_n|$ car A_{mn} est un scalaire.
$A_{mn} |\varphi_m\rangle \langle\varphi_n| = |\varphi_m\rangle \langle\varphi_m| A |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n|$ par définition de A_{mn}.

En appliquant une somme sur n et sur m des deux côtés :

$$\sum_{n,m} A_{mn}U(m,n) = \sum_{n,m} |\varphi_m\rangle \langle\varphi_m| A |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n| \tag{2.1}$$

On sépare les sommes :

$$\sum_{n,m} A_{mn}U(m,n) = \sum_{m} |\varphi_m\rangle \langle\varphi_m| A \sum_{n} |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n| \tag{2.2}$$

On reconnait les relations de fermeture, on peut écrire $A = \sum_{n,m} A_{mn} U(m,n)$.

f) $AU^\dagger(p,q) = \sum_{n,m} A_{mn} U(m,n) U^\dagger(p,q) = \sum_{n,m} A_{mn} U(m,n) \delta_{nq} U(m,p)$
Cette somme se simplifie avec le δ_{nq}.

$AU^\dagger(p,q) = \sum_{m,q} A_{mq} |\varphi_m\rangle \langle\varphi_p| = \langle\varphi_p| \sum_{m,q} A_{mq} |\varphi_m\rangle = \langle\varphi_p| \sum_{m,q} \langle\varphi_m| A |\varphi_q\rangle |\varphi_m\rangle$

$AU^\dagger(p,q) = \langle\varphi_p| \sum_{m,q} |\varphi_m\rangle \langle\varphi_m| A |\varphi_q\rangle = \langle\varphi_p| \sum_q A |\varphi_q\rangle$

$Tr\{AU^\dagger\} = \langle\varphi_p| A |\varphi_q\rangle = A_{pq}$

2.2 Exercice II

Base $\{|1\rangle,|2\rangle\}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ matrice de Pauli.

On rappelle que l'opérateur adjoint représenté par une matrice est simplement la transposée complexe de cette matrice.
$\sigma_y^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y$ la matrice est donc hermitienne. On sait d'ores et déjà que les valeurs propres doivent être réelles et les vecteurs propres orthogonaux. On le vérifiera par la suite.

On trouve pour valeurs propres $\lambda = \pm 1 \in \mathbb{R}$. Les vecteurs propres normalisés associés sont :

$$|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, |v_{-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

On calcule le produit scalaire $\langle v_1|v_{-1}\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = 0$.

On calcule ensuite la matrice M formée par les projecteurs sur ces vecteurs propres :

$$M = \sum_i |v_i\rangle \langle v_i| = |v_1\rangle \langle v_1| + |v_{-1}\rangle \langle v_{-1}| \tag{2.4}$$

Le calcul matriciel donne $M = I_2$ où I_2 est la matrice identité de rang 2.

On procède de la même manière pour les deux autres matrices.

Résultats : $M = M^\dagger$, $L \neq L^\dagger$.
Valeurs propres de M : $\lambda = \{1, 4\}$

Vecteurs propres de M : $|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $|v_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Valeurs propres de L_y : $\lambda = \{0, -2i, 2i\}$

Vecteurs propres de L_y : $|v_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|v_{2i}\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $|v_{-2i}\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

2.3 Exercice III

Base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, dans cette base les états $|\psi_0\rangle$ et $|\psi_1\rangle$ s'écrivent :

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{i}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$
$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|u_3\rangle$$

a) On calcule $\langle\psi_i|\psi_i\rangle$ et on obtient que $|\psi_0\rangle$ est normalisé mais pas $|\psi_1\rangle$.

b)

$$|\psi_0\rangle\langle\psi_0| = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/(2\sqrt{2}) & 1/(2\sqrt{2}) \\ -i/(2\sqrt{2}) & 1/4 & i/4 \\ 1/(2\sqrt{2}) & -i/4 & 1/4 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Cette matrice est hermitienne.

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_1| = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -i/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ i/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Cette matrice est hermitienne.

2.4 Exercice IV

Opérateur $K = |\varphi\rangle\langle\psi|$

a) $K^\dagger = (|\varphi\rangle \langle\psi|)^* = |\psi\rangle \langle\varphi|$, $K = K^\dagger$ si $|\psi\rangle = |\varphi\rangle$

b) $K^2 = KK = |\varphi\rangle \langle\psi|\varphi\rangle \langle\psi|$, si $K = K^\dagger$, $K^2 = KK^\dagger = |\varphi\rangle \langle\psi|\psi\rangle \langle\varphi|$.
On peut faire la même chose avec $K^2 = K^\dagger K$.
K^2 est un projecteur si K est hermitien et $|\psi\rangle$ normalisé (?).

c)

2.5 Exercice V

2.6 Exercice VI

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e^x \approx 1 + x + x^2/2! + ... = \sum_k \frac{x^k}{k!}$

$\sigma_x^2 = I_2$ et $\sigma_x^3 = \sigma_x$, on en déduit que $\sigma^{2n} = I_2$ et $\sigma^{2n+1} = \sigma_x$.

$$e^{i\alpha\sigma_x} = \sum_k \frac{(i\alpha\sigma_x)^k}{k!} = 1 + i\alpha\sigma_x - \frac{(\alpha\sigma_x)^2}{2!} - i\frac{(\alpha\sigma_x)^3}{3!} + ... \tag{2.7}$$

On isole les termes de puissance paire et ceux de puissance impaire et on les identifie aux séries cosinus et sinus.

$$\cos x = \sum_k \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - x^2/2! + ...$$
$$\sin x = \sum_k \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - x^3/3! + ...$$

On utilise la relation entre σ_x et ses puissances pour obtenir :

$$e^{i\alpha\sigma_x} = I_2\left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + ...\right) + i\sigma_x\left(x - \frac{\alpha^3}{3!} + ...\right) \tag{2.8}$$

Ce qui se met sous la forme attendue

$$e^{i\alpha\sigma_x} = I_2 \cos\alpha + i\sigma_x \sin\alpha \tag{2.9}$$

2.7 Exercice VII

$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, on obtient de la même manière que dans l'exo VI : $\sigma_y^{2n} = I_2$ et $\sigma_y^{2n+1} = \sigma_y$.
Ce qui permet de conclure que :

$$e^{i\alpha\sigma_y} = I_2 \cos\alpha + i\sigma_y \sin\alpha \tag{2.10}$$

Soit une matrice $\sigma_u = \lambda\sigma_x + \mu\sigma_y$ quelconque avec la condition $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. $\sigma_u^2 = I_2$ d'où $e^{i\sigma_u} = I_2 \cos 1 + i\sigma_u \sin 1$.

$$\begin{aligned} e^{2i\sigma_x} &= \cos 2 + i\sigma_x \sin 2 \\ (e^{i\sigma_x})^2 &= (\cos 1 + i\sigma_x \sin 1)^2 = \cos^2 1 - \sigma_x^2 \sin^2 1 + 2i\sigma_x \cos 1 \sin 1 \end{aligned}$$

Or $\sigma_x^2 = I_2$ donc $(e^{i\sigma_x})^2 = \cos^2 1 - \sin^2 1 + 2i\sigma_x \cos 1 \sin 1$. Les règles de trigo permettent de simplifier cette expression en :

$$(e^{i\sigma_x})^2 = \cos 2 + i\sigma_x \sin 2 = e^{2i\sigma_x} \tag{2.11}$$

$\sigma_x + \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$, $(\sigma_x + \sigma_y)^{2n} = 2^n I_2$ et $(\sigma_x + \sigma_y)^{2n} = 2^n(\sigma_x + \sigma_y)$.

$$\begin{aligned} e^{i\sigma_x} e^{i\sigma_y} &= (\cos 1 + i\sigma_x \sin 1) + (\cos 1 + i\sigma_y \sin 1) \\ &= \cos^2 1 + i \cos 1 \sin 1(\sigma_x + \sigma_y) - \sigma_x\sigma_y \sin^2 1 \end{aligned}$$

2.8 Exercices X et XI

(Ces exercices sont corrigés dans le livre, mais ils valent le coup d'être cherchés)

Chapitre 3

Postulats de la MQ

3.1 Exercice I

$\psi(x) = N\frac{e^{ip_0x}}{\sqrt{x^2+a^2}}$, on utilise la condition de normalisation $\int_{\mathcal{D}} dx|\psi(x)|^2 = 1$ qui signifie que la particule est présente sur le domaine unidimensionnel $\mathcal{D}$.

$\int_{\mathcal{D}} dx|\psi(x)|^2 = \int_{\mathcal{D}} dx\frac{N^2}{x^2+a^2} = N^2\left[\frac{\arctan(x/a)}{a}\right]_{-\infty}^{\infty} = 1$

$N^2 = \frac{a}{\pi}$, on a utilisé le fait que $\lim_{x\to\pm\infty} \arctan(x) = \pm\pi/2$

La probabilité de trouver la particule entre $\frac{a}{\sqrt{3}}$ et $\frac{-a}{\sqrt{3}}$ s'écrit :

$$\mathcal{P} = \int_{\frac{-a}{\sqrt{3}}}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} dx|\psi(x)|^2 = \int_{\frac{-a}{\sqrt{3}}}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} dx\frac{a}{\pi(x^2+a^2)} = 1/3 \tag{3.1}$$

Rq : l'intégrale $\int dx\frac{1}{x^2+a^2}$ se calcule par changement de variable $u = x/a$. On arrive alors à $\frac{1}{a}\int du\frac{1}{1+u^2}$ qui est connue pour être $\frac{1}{a}\arctan(u)$.

Pour trouver la valeur moyenne de l'impulsion de la particule, il faut calculer l'intégrale suivante :

$$\langle\psi|\, p\,|\psi\rangle = \int_{\mathcal{D}} dx\psi^*(x)p\psi(x) = -i\hbar\int_{\mathcal{D}} dx\psi^*(x)\frac{d\psi(x)}{dx} \tag{3.2}$$