Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчёт по лабораторной работе №2 по курсу

«Математическая статистика»

Тема Интервальные оценки.

Студент Варин Д.В.

Номер варианта 3

Группа ИУ7-66Б

Преподаватель Андреева Т.В.

Оценка ______________

Москва — 2022 г.

Лабораторная работа №2

1. Цель работы

Построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

2. Содержание работы

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ:
   - Вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x_n})$ и $S^2(\vec{x_n})$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   - Вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x_n})$, $\overline{\mu}(\vec{x_n})$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   - Вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x_n})$, $\overline{\sigma}^2(\vec{x_n})$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX.
2. Вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. Для заданного пользователем уровня доверия γ и N - объема выборки из индивидуального варианта:
   - На координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема выборки, где n изменяется от 1 до N.
   - На другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема выборки, где n изменяется от 1 до N.

3. Теоретические сведения

Формулы для вычисления некоторых требуемых величин:

- Выборочное среднее: $\hat{\mu}(\vec{x}) = \overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$;
- Выборочная дисперсия: $S^2(\vec{x}) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$.

Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть дана случайная величина X, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой параметра θ уровня γ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$, таких, что $P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}); \overline{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma$.

$\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X}))\}$ называют верхней и нижней границами интервальной оценки соответственно.

γ-доверительным интервалом для параметра θ называют реализацию (выборочное значение) интервальной оценки уровня γ для этого параметра, т.е. интервал вида $(\underline{\theta}(\vec{X}); \overline{\theta}(\vec{X}))$ с детерминированными границами.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{x_n}) = \overline{x} - \frac{S(\vec{x}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{\mu}(\vec{x_n}) = \overline{x} + \frac{S(\vec{x}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{x_n}) = \frac{(n-1) \cdot S^2(\vec{x})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{x_n}) = \frac{(n-1) \cdot S^2(\vec{x})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$$

Обозначения:

- $\overline{x}$ - точечная оценка математического ожидания;
- $S^2(\vec{x})$ - исправленная точечная оценка дисперсии;
- n - объем выборки;
- γ - уровень доверия;
- t_α - квантиль уровня α распределения Стьюдента с n - 1 степенями свободы (St(n-1));
- h_α - квантиль уровня α распределения Хи-квадрат с n - 1 степенями свободы ($\chi^2(n-1)$).

4. Текст программы

```
function main()
    pkg load statistics

    X = [-0.45,-0.33,2.92,-1.25,-1.20,0.05,-0.53,...
          -0.19,1.49,0.67,0.22,1.23,0.50,-0.92,...
          0.90,-1.52,-0.15,-1.24,-0.47,-0.45,0.18,...
          -0.05,1.58,1.74,2.37,-0.24,-1.34,1.05,...
          1.28,1.37,1.18,0.22,0.11,0.28,-0.64,-0.39,...
          -1.77,-1.61,0.47,0.77,-0.27,-1.19,-0.25,...
          1.04,-0.16,0.42,0.29,0.10,1.04,0.43,-0.67,...
          0.41,-0.62,-1.49,1.46,-2.77,2.09,0.88,...
          -0.36,-0.71,-0.62,1.34,-0.78,-0.15,2.69,0.92,...
          1.68,-0.12,0.34,0.74,1.72,1.24,0.23,...
          0.76,0.87,-1.52,0.63,-0.56,0.83,0.31,-0.18,...
          0.99,-1.01,0.58,1.21,-1.51,0.65,0.35,...
          -0.37,-0.50,-0.73,0.63,0.33,1.56,-0.98,0.85,...
          0.56,-1.07,1.47,1.44,1.91,0.24,1.34,...
          0.99,1.27,0.11,0.22,-0.25,0.35,-0.03,-0.56,...
          -0.79,2.41,-0.45,-0.44,0.07,0.64,0.69,...
          0.10,-0.28];

    % Уровень доверия
    gamma = 0.9;
    %gamma = input('Введите уровень доверия: ')
    % Объем выборки
    N = length(X);
    % Точечная оценка мат. ожидания
    M = mean(X);
    % Точечная оценка дисперсии
    S2 = var(X);
    % Нижняя граница доверительного интервала для мат. ожидания
    M_low = find_m_low(N, M, S2, gamma);
    % Верхняя граница доверительного интервала для мат. ожидания
    M_high = find_m_high(N, M, S2, gamma);
    % Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии
    S2_low = find_S2_low(N, S2, gamma);
    % Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии
    S2_high = find_S2_high(N, S2, gamma);

    % Вывод полученных ранее значений
     fprintf('Точечная оценка математического ожидания = %.3f\n', M);
     fprintf('Точечная оценка дисперсии = %.3f\n', S2);
     fprintf('Нижняя граница доверительного интервала для математического ожи
        дания = %.3f\n', M_low);
     fprintf('Верхняя граница доверительного интервала для математического ож
        идания = %.3f\n', M_high);
```

```
    fprintf('Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии = %.3f\n', S2_low);
    fprintf('Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии = %.3f\n', S2_high);

    % Массив точечных оценок для математического ожидания
    M_array = zeros(1, N)
    % Массив точечных оценок для дисперсии
    S2_array = zeros(1, N)
    % Массивы для нижних и верхних границ для математического ожидания
    M_low_array = zeros(1, N)
    M_high_array = zeros(1, N)
    % Массивы для нижних и верхних границ для дисперсии
    S2_low_array = zeros(1, N)
    S2_high_array = zeros(1, N)

    for i = 1 : N
        temp_m = mean(X(1:i));
        temp_s2 = var(X(1:i));
        M_array(i) = temp_m;
        S2_array(i) = temp_s2;
        M_low_array(i) = find_m_low(i, temp_m, temp_s2, gamma);
        M_high_array(i) = find_m_high(i, temp_m, temp_s2, gamma);
        S2_low_array(i) = find_S2_low(i, temp_s2, gamma);
        S2_high_array(i) = find_S2_high(i, temp_s2, gamma);
    end

    % Построение графиков
    plot(1 : N, [(zeros(1, N) + M)', M_array', M_low_array', M_high_array']);
    xlabel('n');
    ylabel('y');
    legend('f1', 'f2', 'f3', 'f4');
    print -djpg p1.jpg
    figure;

    plot(1 : N, [(zeros(1, N) + S2)', S2_array', S2_low_array', S2_high_array']);
    xlabel('n');
    ylabel('z');
    ylim([0, 10]);
    legend('g1', 'g2', 'g3', 'g4');
    print -djpg p2.jpg
end

% Функция поиска нижней границы доверительного интервала для математического ожидания
function M_low = find_m_low(N, M, S2, gamma)
    M_low = M - sqrt(S2) * tinv((1 + gamma) / 2, N - 1) / sqrt(N);
end
```

```
% Функция поиска верхней границы доверительного интервала для математическог
    о ожидания
function M_high = find_m_high(N, M, S2, gamma)
    M_high = M + sqrt(S2) * tinv((1 + gamma) / 2, N - 1) / sqrt(N);
end
% Функция поиска нижней границы доверительного интервала для дисперсии
function S2_low = find_S2_low(N, S2, gamma)
    S2_low = ((N - 1) * S2) / chi2inv((1 + gamma) / 2, N - 1);
end
% Функция поиска верхней границы доверительного интервала для дисперсии
function S2_high = find_S2_high(N, S2, gamma)
    S2_high = ((N - 1) * S2) / chi2inv((1 - gamma) / 2, N - 1);
end
```

5. Результат расчетов и графики для выборки из индивидуального варианта (при построении графиков принять $\gamma = 0.9$)

- $\hat{\mu}(\vec{x}_N) = 0.232$;
- $S^2(\vec{x}) = 1.041$;
- $\underline{\mu}(\vec{x}_n) = 0.078$;
- $\overline{\mu}(\vec{x}_n) = 0.387$;
- $\underline{\sigma}(\vec{x}_n) = 0.851$;
- $\overline{\sigma}(\vec{x}_n) = 1.306$

Обозначения на графиках:

- f1: $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$;
- f2: $y(n) = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$;
- f3: $y(n) = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$;
- f4: $y(n) = \mu(\vec{x}_n)$;

- g1: $z(n) = S^2(\vec{x}_N)$;
- g2: $z(n) = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$;
- g3: $z(n) = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$;
- g4: $z(n) = \sigma^2(\vec{x}_n)$.

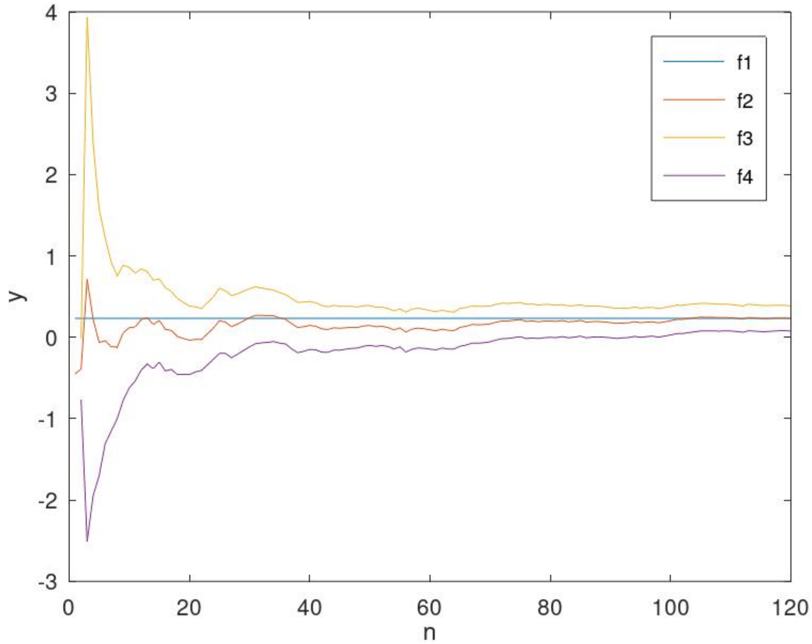

Рис. 1: Прямая $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, а также графики функций $y(n) = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \mu(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

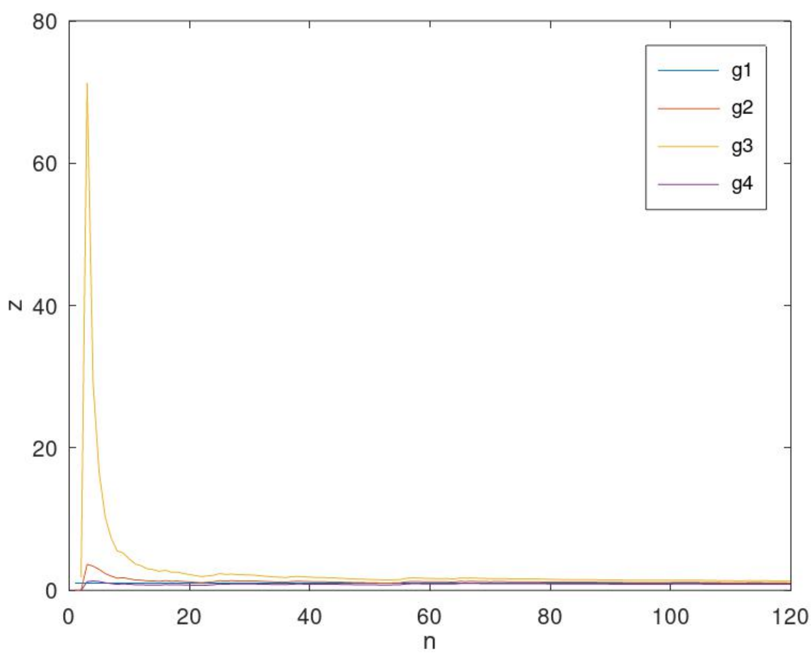

Рис. 2: Прямая $z(n) = S^2(\vec{x}_N)$, а также графики функций $z(n) = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \sigma^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

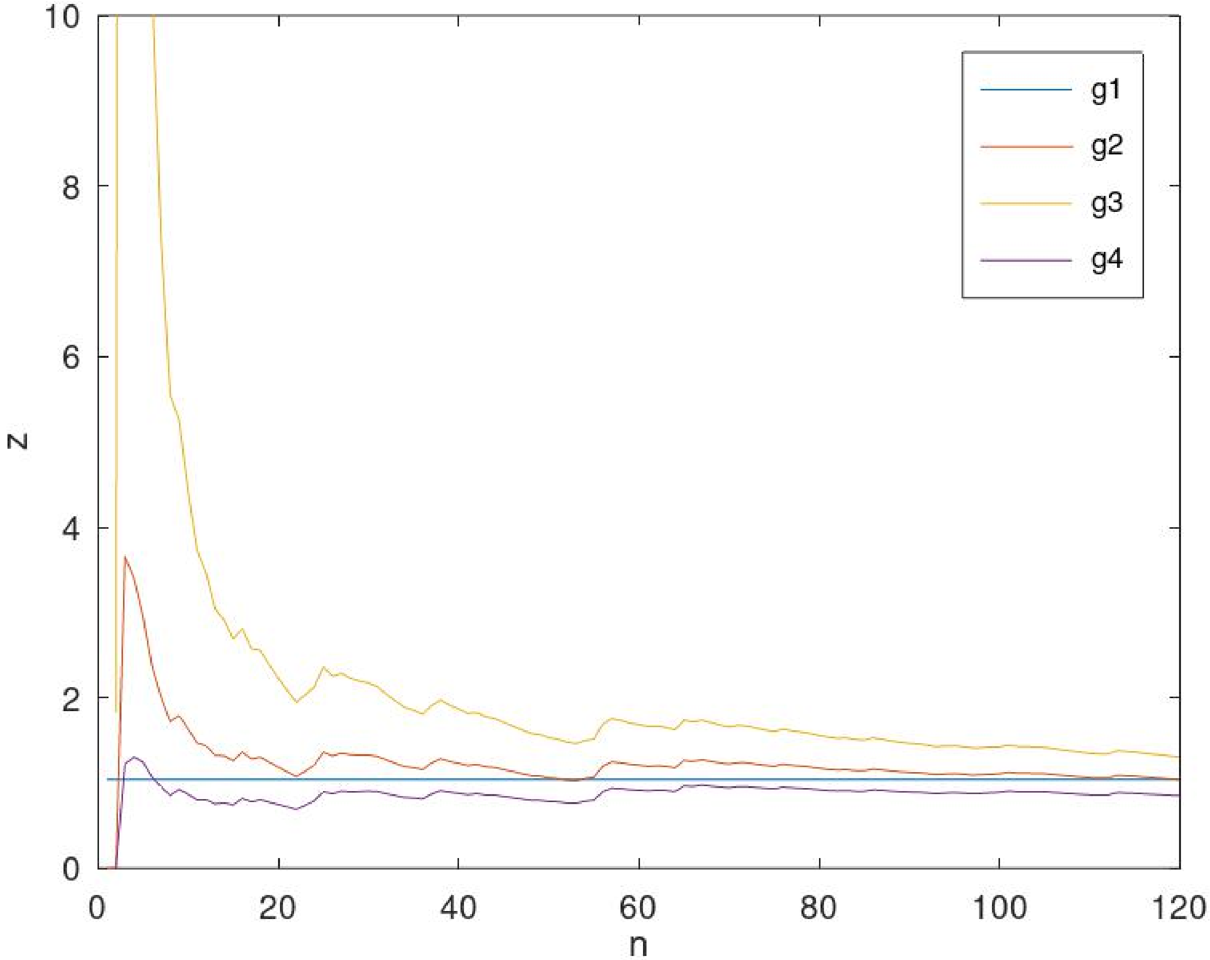

Рис. 3: Прямая $z(n) = S^2(\vec{x}_N)$, а также графики функций $z(n) = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \sigma^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N (приближенный к началу координат график)