

Esercitazione 1

Olivieri Daniele

Valutare lo scambio di lavoro meccanico e di energia termica delle seguenti trasformazioni:

- Compressione adiabatica isoentropica di 1 kg di aria da 1 bar e 288.15 K a 2.5 bar.
- Compressione adiabatica reale di 1 kg di aria da 1 bar e 288.15 K a 2.5 bar con η_{pc} pari a 0.755
- Compressione politropica di 1 kg di aria da 1 bar e 288.15 K a 2.5 bar con la condizione termodinamica finale coincidente con quella dell'adiabatica reale
- Compressione isoterma di 1 kg di aria da 1 bar e 288.15 K a 2.5 bar
- Compressione di 1 kg di acqua da 1 bar e 288.15 K a 2.5 bar

1 Trasformazione isoentropica

Analizziamo la prima trasformazione utilizzando le relazioni per le trasformazioni reversibili, per prima cosa si determina lo stato del gas prima e dopo l'espansione mediante l'equazione di stato dei gas

$$pv = RT \quad (1)$$

Lo stato iniziale è interamente determinato dato che conosciamo sia la temperatura che la pressione mentre per il secondo dobbiamo utilizzare la politropica per trasformazioni reversibili, in questo caso x è proprio uguale a k , la costante del gas pari a Cp/Cv

$$p \cdot v^x = \text{cost} \quad (2)$$

Possiamo quindi ricavare v_2 tramite

$$v_2 = v_1/(\beta^{1/k})$$

Determinato v_2 utilizzando ancora la (1) calcoliamo il valore della temperatura T_2 in uscita dal compressore.

Il lavoro necessario alla compressione sarà interamente speso per l'aumento di entalpia del gas e potrà quindi essere calcolato con

$$L_{is} = m \cdot \Delta h = m \cdot C_p(T_2 - T_1) \quad (3)$$

esso sarà pari a 86.65 kJ

Considerando la trasformazione adiabatca, il calore scambiato sarà nullo.

Tabella degli stati

stato	$p \text{ (bar)}$	$v \text{ (m}^3/\text{kg)}$	$T \text{ (}^\circ\text{C)}$
1	1	0.827	15
2	2.5	0.429	101.2

2 Trasformazione adiabatca reale

Anche in questo caso la trasformazione è adiabatca ma viene fornito un valore del rendimento politropico di compressione $\eta_{pc} = 0.755$, definito come

$$\eta_{pc} \stackrel{def}{=} \frac{\frac{n}{n-1} R T_1 \left(1 - \beta^{\frac{n-1}{n}} \right)}{C_p (T_1 - T_2)} = \frac{L_{pc}}{L_r} \quad (4)$$

o equivalentemente

$$\eta_{pc} = \frac{n}{n-1} \frac{k-1}{k} \quad (5)$$

si può quindi ricavare il valore dell'esponente n della politropica oppure sostituire direttamente il rendimento politropico nella definizione del rendimento adiabatco e quindi calcolarne il valore.

$$\eta_{ad-c} \stackrel{def}{=} \frac{L_{is}}{L_r} = \frac{C_p T_1 \left(1 - \beta^{\frac{k-1}{k}} \right)}{C_p T_1 \left(1 - \beta^{\frac{n-1}{n}} \right)} = \frac{1 - \beta^{\frac{k-1}{k}}}{1 - \beta^{\frac{k-1}{k} \eta_{pc}}} \quad (6)$$

svolgendo i calcoli si trova quindi un valore del rendimento adiabatco pari a $\eta_{ad-c} = 0.722$. Il lavoro necessario alla trasformazione adiabatca reale

sarà quindi il rapporto tra il lavoro necessario alla precedente trasformazione isoentropica e il rendimento adiabatico

$$L_r = \frac{L_{is}}{\eta_{ad-c}}$$

e sarà pari a 120 kJ . Anche in questo caso il calore scambiato è considerato nullo.

3 Trasformazione politropica

La terza trasformazione richiede il calcolo delle condizioni termodinamiche dello stato finale della compressione adiabatica reale, possiamo calcolare la politropica passante per gli stessi punti dato che ci viene fornito il rendimento. Riferendoci quindi alla (2) dobbiamo calcolare il valore dell'esponente incognito ricavabile dalla (5) che sarà uguale a

$$n = \frac{\eta_{pc}}{\frac{k-1}{k}} \quad (7)$$

in questo caso pari a 1.609, maggiore del valore $k = 1.4$ per l'aria, com'era da aspettarsi. Rieseguendo i calcoli svolti nella sezione 1 possiamo creare la nuova tabella degli stati termodinamici:

stato	$p \text{ (bar)}$	$v \text{ (m}^3/\text{kg)}$	$T \text{ (}^\circ\text{C)}$
1	1	0.827	15
2	2.5	0.468	134.4

temperatura e volume specifico sono maggiori rispetto alle condizioni successive alla trasformazione isoentropica. Il lavoro necessario per la trasformazione politropica è ricavabile dalla definizione del rendimento politropico (4) ed è pari a 90.6 kJ , per raggiungere lo stato termodinamico 2. La differenza tra il lavoro reale e quello politropico è pari a 29.4 kJ di energia che viene fornita al fluido sotto forma di calore causato dagli attriti interni della macchina. Questa quantità è definita lavoro di contro-recupero.

4 Trasformazione isoterma

La compressione isoterma implica una sottrazione di calore continua al fine di mantenere la temperatura costante durante la compressione, tecnicamente irrealizzabile a causa della geometria dei compressori fortemente adiabatici, si

può ottenere invece una interrefrigerazione dividendo la compressione in più stadi. Utilizzando ancora la (2) e ponendo l'esponente pari ad 1 si ottiene l'equazione dell'isoterma

$$p \cdot v = \text{cost} \quad (8)$$

Ricaviamo quindi gli stati termodinamici come fatto in precedenza

stato	p (bar)	v (m^3/kg)	T ($^{\circ}C$)
1	1	0.827	15
2	2.5	0.331	15

Il lavoro necessario alla compressione è pari al calore scambiato dal sistema dato che l'energia interna U di un gas perfetto è funzione della sola temperatura, resta quindi anch'essa costante, ciò implica che $Q = L$. Il lavoro è facilmente calcolabile come

$$L = \int_{p_1}^{p_2} v \cdot dpD \quad (9)$$

utilizzando la (1) e sostituendo p si ricava:

$$L = mRT \cdot \ln \beta \quad (10)$$

Il lavoro di compressione isoterma è quindi pari a 75.8 kJ così come anche il calore uscente necessario a mantenere la temperatura costante.

5 Compressione di un liquido

Valutare lo scambio di lavoro meccanico ed energia termica necessari alla compressione di 1 kg di acqua da 1 bar e $288.15K$ a 2.5 bar. Nell'ipotesi di processo adiabatico reversibile, il lavoro necessario sarà pari all'integrale

$$L = \int_{p_1}^{p_2} v \cdot dp \quad (11)$$

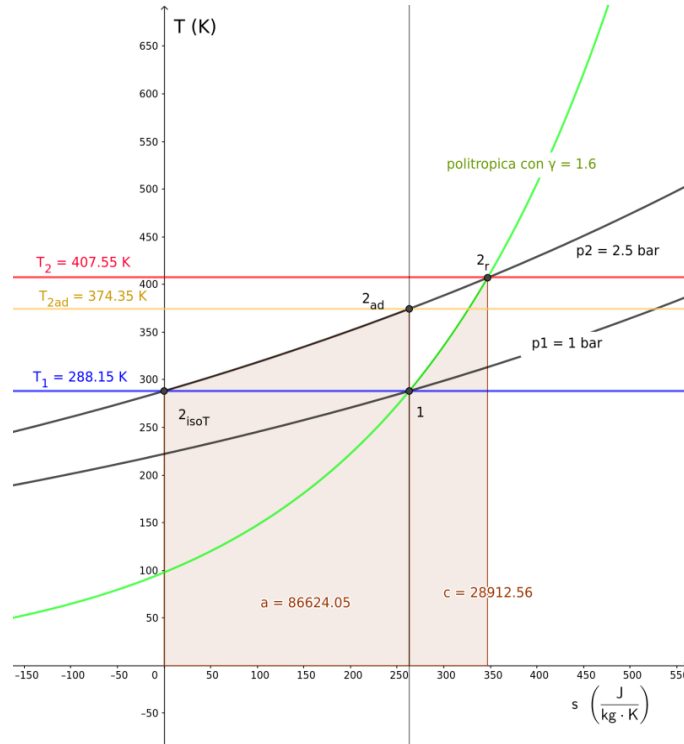
considerato inoltre il modello di liquido ideale, il volume specifico si può assumere costante, rendendo banale il calcolo dell'integrale, tenendo in considerazione il fatto che la pressione va espressa in Pascal per una corretta analisi dimensionale.

$$L = mv(p_2 - p_1) \quad (12)$$

Sarà pari a 150 J .

6 Valutazioni compressive

Mediante l'ausilio del software GeoGebra sono state rappresentate le trasformazioni compiute dall'aria negli esempi precedenti nel piano T-s.



Per prima cosa sono stati impostati i valori di temperatura iniziale e finale dalle tabelle, tracciando le isoterme T_1 , T_2 e T_{2ad} e fissata arbitrariamente (per semplicità di calcolo) entropia nulla allo stato 2_{isoT} . Utilizzando la relazione dell'entropia in forma integrale per trasformazioni isoterme

$$\Delta s = R \ln \beta$$

sono state misurate la variazioni di entropia specifica per la trasformazione isoterma e quindi la coordinata x dello stato iniziale 1 pari a $263 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

6.1 Rappresentazione delle isobare

Per rappresentare le isobare nel piano T-s è stato sufficiente sfruttare l'equazione dell'entropia per gas perfetti, semplificando il termine contenente il rapporto tra le pressioni. Gli stati termodinamici presi in considerazione per imporre il passaggio delle curve sono quello iniziale (1) e quello successivo

alla trasformazione isoterma (2_{isoT}) in questo modo il valore iniziale T_0 è lo stesso per entrambe le isobare. Svolgendo i passaggi:

$$\begin{aligned}\Delta s &= C_p \ln \frac{T}{T_0} \\ \frac{s - s_0}{C_p} &= \ln \frac{T}{T_0} \\ T &= T_0 \exp \frac{s - s_0}{C_p}\end{aligned}$$

con T_0 pari a 288.15 ed s_0 pari a 0 per la isobara a pressione maggiore e 263 per quella passante per il punto iniziale. Intersecando l'isobara maggiore con la isoterma T_2 è stato possibile individuare il punto 2_r successivo alla compressione reale e valutarne l'entropia.

6.2 Rappresentazione della politropica

Facendo riferimento alla (2) ed avendo calcolato l'esponente tramite la (7) utilizzando il rendimento fornito dall'esercizio, è stato possibile scrivere rappresentare la trasformazione sul piano T-s imponendo il passaggio per i punti 1 e 2_r

$$\begin{aligned}pv^k &= \text{cost} \\ kpv^{k-1}dv + v^k dp &= 0\end{aligned}$$

raccogliendo e semplificando per v^{k-1} si ottiene

$$kpdv + vdp = 0 \quad (13)$$

differenziando invece la (1) e sostituendo il termine vdp nella (13) si ottiene:

$$\begin{aligned}(k-1)pdv + RdT &= 0 \\ pdv &= -\frac{RdT}{k-1}\end{aligned}$$

sostituendo anche in questo caso nell'equazione dell'entropia (questa volta in forma differenziale) si ottiene:

$$\begin{aligned}Tds &= C_v dT - \frac{R}{k-1} dT \\ \frac{dT}{T} &= \frac{k-1}{C_v(k-1) - R} ds\end{aligned}$$

integrando

$$\ln \frac{T}{T_0} = \frac{k-1}{C_v(k-1) - R} \cdot (s - s_0)$$

l'equazione della politropica sarà dunque

$$T = T_0 \exp \left(\frac{k-1}{C_v(k-1) - R} \cdot (s - s_0) \right) \quad (14)$$

con k pari a 1.6, il termine $(s - s_0)$ va diviso per 1000 dato che la scala dell' entropia è espressa in J e non in kJ. Si può vedere che la curva della politropica ottenuta interseca la isoterma superiore e l'isobara nello stesso punto.

6.3 Valutazione dei lavori

Per sistemi aperti adiabatici il lavoro è pari alla variazione di entalpia del fluido, nel caso di gas perfetti è pari a $C_p(\Delta T)$ ed è definito C_p la quantità di calore da fornire per innalzare di 1 grado la temperatura di una massa unitaria di gas in una trasformazione isobara.

Per il secondo principio

$$Tds = dq + dl \quad (15)$$

il lavoro necessario alla trasformazioni adiabatica isoentropica sarà per questo motivo l'area sottesa alla isobara isobara p_2 dal punto 2_{isoT} ad entropia nulla al punto 2_{ad} mentre quello necessario alla trasformazione adiabatica reale si otterrà eseguendo lo stesso integrale tra i punti 2_{isoT} e 2_r . La differenza tra questi due valori è pari al lavoro valutabile mediante l'integrale della politropica tra i punti 1 e 2_r sommato al lavoro di contro-recupero.

Mediante la funzione "Integrale" definita in GeoGebra è possibile valutare facilmente l'area sottesa alle funzioni appena rappresentate.

7 Confronto livelli di energia

Confrontare i livelli di energia meccanica scambiata nelle precedenti trasformazioni con quella potenziale posseduta da un uomo di peso medio (80 kg) che si trovi ad una quota di 150 m. La variazione di energia potenziale gravitazionale è facilmente ricavabile tramite la relazione

$$\Delta U = mg\Delta h \quad (16)$$

dove

m è la massa del corpo (kg)

g è l'accelerazione gravitazionale terrestre pari a $9.81 \text{ (m/s}^2\text{)}$

h è l'altezza in metri

Fissato il valore dell'energia nullo al livello del mare, una massa di 80 kg a 150 m avrà un'energia potenziale gravitazionale di 117.72 kJ.

Confrontiamo ora in una tabella i valori di queste energie scambiate

Trasformazione	Energia scambiata (kJ)
Compressione reale	120
Compressione politropica	90.6
Compressione isoentropica	86.5
Compressione isoterma	75.8
Compressione liquido	$150 \cdot 10^{-3}$
Uomo che scala 150 m	117.2