

CHAPITRE 4: LES MATRICES

On considère un corps K .

1) GÉNÉRALITÉS

1.1 Définitions:

① Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$

Une matrice est une famille de np éléments de K , indexée par $[1, n] \times [1, p]$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Dans la pratique, on écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

n lignes
 p colonnes

Ex: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 20 & 23 \end{pmatrix}$

Parfois, on note A_{ij} le coeff de A situé à la i -ième ligne et à la j -ième colonne.

L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ est noté $M_{n,p}(K)$

Quand $p = n$, on parle de matrices carées et on note simplement $M_n(K)$

② Si $n = 1$, on parle de matrice - ligne

Ex : $(1 \ 4 \ 9) \in M_{1,3}(\mathbb{R})$

Si $p = 1$, on parle de matrice - colonne

Ex : $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 27 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

③ La matrice nulle est la matrice formée seulement de 0

$$O_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $\forall i, j, (O_{n,p})_{i,j} = 0$

④ Si $n = p$, la matrice identité est

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son terme d'indice (i, j)

est $(I_n)_{i,j} = \delta_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

↳ $\langle\langle$ Symbole de Kronecker $\rangle\rangle$

Autrement dit, $(I_n)_{i,j} = 1$ si $i=j$

c'est à dire si on est sur la diagonale

et $(I_n)_{i,j} = 0$ sinon

⑤ Pour les matrices carrées, on dit qu'une matrice diagonale Si elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}$$



Ici, le terme d'indice i,j

est $\begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j ; \text{ c'est donc } \lambda_i \delta_{ij} \\ \lambda_i & \text{si } i=j \end{cases}$

Diagonal matrix

Une matrice triangulaire supérieure

est une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{c'est } a_{ij} = 0 \text{ des que } i > j)$$

⑥ Si $A \in M_{n,p}(K)$, sa transposée ${}^t A \in M_{p,n}(K)$ dont le terme général est $({}^t A)_{ij} = A_{ji}$

Cela revient à recopier en colonnes les lignes de A .

Ex : Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ alors ${}^t A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, alors ${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Dans le cas d'une matrice carrée, cela revient à faire une symétrie par rapport à la diagonale

Si A est carré et que

• ${}^t A = A$, on dit que A est symétrique

• ${}^t A = -A$ on dit que A est antisymétrique

Ex $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & 4 \\ -7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est antisym

(si ${}^t A = -A$, alors $\forall i, j, a_{ji} = -a_{ij}$

donc en particulier $a_{ii} = -a_{ii}$, c'est $a_{ii} = 0$)

① O_n définit sur $M_{n,p}(K)$ deux lois

a) Une addition : si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$,

alors on pose $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$ $\forall i \leq n$ $\forall j \leq p$

Ex : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

On a alors $\forall A \in M_{n,p}(K), A + O_{n,p} = O_{n,p} + A = A$

On dit que $O_{n,p}$ est un élément neutre pour la loi +

⑥ Un produit externe :

Si $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$ et $\lambda \in K$, on pose

$$\lambda A = \left(\lambda a_{ij} \right) \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p \end{matrix}$$

Ex : $-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

On a alors

le O de K

le O de $M_{n,p}(K)$

$$\forall A \in M_{n,p}(K), \quad O \cdot A = O_{n,p}$$

$$\forall \lambda \in K, \quad \lambda \cdot O_{n,p} = O_{n,p}$$

On note aussi $-A = -1 \cdot A$

Ex : $- \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

On note alors $A - \beta$ pour $A + (-\beta)$
 cela revient à soustraire coeff par coeff

④ Muni de + et de ·, $M_{n,p}(K)$ est un Espace Vectoriel sur K ; essentiellement, cela signifie qu'on peut faire des combinaisons linéaires d'éléments de $M_{n,p}(K)$:

$$\lambda A + \mu B$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A \\ \text{(ii)} \quad \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \\ \text{(iii)} \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A \\ \text{(iv)} \quad 1 \cdot A = A \end{array} \right.$$

⑤ On ne peut pas additionner de matrices de tailles différentes

⑥ On appelle matrice de la base canonique toute matrice de type

$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ Il y a des zéros partout sauf en position (i, j) où il y a un 1.

Le terme de position (k, l) est donné par

$$(E_{ij})_{k,l} = \delta_{ik} \delta_{jl}$$

En effet :

$$\text{En effet : } \delta_{ik} \delta_{jl} = \begin{cases} 0 \text{ si } \delta_{ik} = 0 \text{ ou } \delta_{jl} = 0 \\ 1 \text{ si } \delta_{ik} = 1 \text{ et } \delta_{jl} = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \text{ ou } j \neq l \\ 1 \text{ si } i = k \text{ et } j = l \end{cases}$$

Prop: Toute Matrice de $M_{n,p}(K)$

s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire dans E_{ij}

Preuve Dans le cas $n = p = 2$

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(K)$

$$A = a_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + a_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}} + a_{21} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}} + a_{22} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}}$$

Plus généralement,

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} E_{ij}$$

③ a) Prop: la transposition est une application linéaire, c'est à dire

$$\forall \lambda \in K, \forall A, B \in M_{n,p}(K), {}^t(\lambda A + B) = \lambda {}^t A + {}^t B \text{ comb linéaire}$$

Autrement dit, la transposée d'une CL est la CL des transposées

Preuve (*) Exigible

On doit montrer une égalité entre matricos : cela revient à montrer que chacun des coeffs en position (i, j) sont égaux entre eux, c'est à dire

que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \left({}^t(\lambda A + B) \right)_{i,j} = (\lambda {}^t A + {}^t B)_{i,j}$$

$$\begin{aligned} \text{En effet, } \left({}^t(\lambda A + B) \right)_{i,j} &= (\lambda A + B)_{j,i} && \text{par déf de } {}^t \\ &= \lambda A_{ji} + B_{ji} && \text{par déf de } \lambda A + B \\ &= \lambda ({}^t A)_{ij} + ({}^t B)_{ij} && \text{par déf de } {}^t A \text{ et } {}^t B \\ &= (\lambda {}^t A + {}^t B)_{ij} && \text{par déf de } {}^t \text{ et } . \end{aligned}$$

Remarque : • Avec $B = O_{n,p}$, cela donne

$$\forall \lambda \in K, \forall A \in M_{n,p}(K), {}^t(\lambda A) = \lambda {}^t A$$

□

• Soient $\lambda, \mu \in K ; A, B \in M_{n,p}(K)$

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda A + \mu B) &= \lambda {}^t A + \underbrace{{}^t(\mu B)}_{\mu {}^t B} && \text{grâce à la prop} \\ &= \lambda {}^t A + \mu {}^t B && \text{grâce à } {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^t A + \mu {}^t B \end{aligned}$$

b) La transposition est involutive,
càd $\forall A \in M_{n,p}(k) \quad {}^t({}^t A) = A$

Premre : * Exigible (Faites qu'elle tombe par récurrence)

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad {}^t({}^t A)_{ij} = \left({}^t A \right)_{ji} = A_{ij}$$

/ /

Par def de la transposée

□

2. MULTIPLICATION DE MATRICES

2.1 Définitions

① Soient $L = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p)$

et $C = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ avec le m nbre de composants

$$\begin{aligned} \text{On note } L \cdot C &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_p y_p \\ &= \sum_{k=1}^p x_k y_k \end{aligned}$$

C'est le «Produit scalaire» de L par C

② a) Soient $A \in M_{n,p}(K)$ et $\theta \in M_{p,q}(K)$

Δ le nbre de colonnes de A est égal au nbre de lignes de θ

On ne définit le produit $A\theta$ que dans ce cas là

Δ

⑥ Soient L_1, \dots, L_n les lignes de A : $L_1 = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$

C_1, \dots, C_q les colonnes de B $C_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix}$

La matrice $C = AP$ est définie comme la matrice de $M_{m,q}(K)$

$$\text{tq } \forall i, j, C_{ij} = L_i \cdot C_j \\ = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

③ Exemples

ⓐ $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

• $P A$

\neq

Donc le produit n'est pas défini

• AP

\neq

Donc le produit existe et est de taille 2×3

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_1 C_1 &= \begin{pmatrix} 2 \times (-1) + 4 \times 1 + (-1) \times 2 & 2 \times 0 + 4 \times 1 + (-1) \times 1 & 2 \times 1 + 4 \times 1 + (-1) \times (-1) \\ -1 \times (-1) + 0 \times 1 + 2 \times 2 & (-1) \times 0 + 0 \times 1 + 2 \times (-1) & (-1) \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times (-1) \end{pmatrix} \\ L_2 C_1 &= \end{aligned}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 7 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

③ Prop : Si A, B inversibles,

a) A^{-1} aussi et $(A^{-1})^{-1} = A$

b) AB $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c) A^m $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$
 $= A^{-mn}$

Premre : * Exigible

a) Comme A est inversible, on sait que
 $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

On peut donc écrire

$$A^{-1}B = BA^{-1} = I_n$$

avec $B = A$

Cela montre que A^{-1} est inversible,
et que $(A^{-1})^{-1} = A$

b) Posons $C = B^{-1}A^{-1}$

Alors $(AB)C = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I_n$

Et $C(AB) = B^{-1}A^{-1}A B = B^{-1}B = I_n$

Cela montre que AB est inversible et que $(AB)^{-1} = C = B^{-1}A^{-1}$

c) Par récurrence sur n :

• $n=0$: $A^0 = I_n$ est bien inversible,
d'inverse $I_n^{-1} = I_n = (I_n^{-1})^0$

$$\rightarrow * P(m-1) \Rightarrow P(m)$$

Soit $m \geq 1$. Mg

$$\text{O}_n \text{ a } A^m = A^{m-1} \cdot A$$

Par HR, A^{m-1} est inversible, d'inverse $(A^{-1})^{m-1}$; par hypothèse, A est inversible

donc par ⑥, $A^{m-1} \cdot A$ est inversible,
d'inverse $A^{-1} (A^{-1})^{m-1}$
 $= (A^{-1})^m$ □

Rg: Autre preuve pour ⑥

$$A^m \times (A^{-1})^m = A \times A \times \dots \times A \times A \times \underbrace{A^{-1} \times A^{-1} \times A^{-1}}_{= I_n} \times \dots$$

Autre pf de vve:

Comme A et A^{-1} commutent.

On peut écrire

$$\begin{aligned} A^m \times (A^{-1})^m &= (A \times A^{-1})^m \\ &= I_n^m \\ &= I_n \end{aligned}$$

Rq: Si A est inversible et B est non inversible, alors AB est non inversible, (car si AB était inversible, alors $A^{-1} \times AB = B$ le serait aussi)

(4) Prop: Si A est inversible, alors ${}^t A$ aussi, et $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

$$\begin{aligned} \text{En effet: } {}^t A \times {}^t(A^{-1}) &= {}^t(A^{-1} \times A) \quad (\text{car } {}^t(BC) \\ &= {}^t C {}^t B) \\ &= {}^t I_n \\ &\simeq I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même, } {}^t(A^{-1}) \cdot {}^t A &= {}^t(A \times A^{-1}) \\ &= {}^t I_n \\ &\simeq I_n \end{aligned}$$

Cela montre que ${}^t A$ est inversible et que $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

D

(5) Prop: Soit A est inversible.

- Si $AB = AC$, alors $B = C$

- En particulier, si $AB = O_n$, alors $B = O$

Preuve: Si $A = AC$, alors $A^{-1} \cdot A \bar{B} = A^{-1} AC$

$$\begin{matrix} \bar{I}_n \bar{B} = \bar{I}_n C \\ \bar{B} = C \end{matrix}$$

□

⑥ Si A possède une colonne (ou une ligne) de 0, alors elle n'est pas inversible.

Preuve: Supposons par exemple que la première colonne soit nulle

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right) \quad | \quad = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & - & - & - & 0 \end{array} \right)$$

Alors $\bar{E}_{11} = 0$

car $A\bar{E}_{11} =$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & - & - & - & 0 \end{array} \right)$$

Comme $\bar{E}_{11} \neq 0$ et $A\bar{E}_{11} = 0$,

A ne peut pas être inversible d'après ⑤ □

3. MATRICES ÉCHELONNÉES, ALGO DE GAUSS

3. 1: Opérations élémentaires

Def: Les trois opérations élémentaires sur les lignes qu'on peut effectuer sur une matrice $A \in M_{n,p}(K)$ sont:

(a) Remplacer une ligne par un multiple non-nul d'elle-même

$$L_i \xrightarrow{\lambda} \lambda L_i \quad (\lambda \in K^*)$$

(b) Échanger deux lignes

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

(c) Ajouter à une ligne un multiple d'une autre

$$L_i \xrightarrow{\lambda} L_i + \lambda L_j \quad (\lambda \in K)$$

Expo

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -3 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 5/3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xleftarrow[L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2]{} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \downarrow L_3 \leftarrow L_2$$

② Prop: L'opération (a) revient à multiplier
à gauche A

par $D_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

($\lambda \neq 0$)

\uparrow en position (i,i)

⑥

$$\text{par } S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

↑
colonne j

⑦

$$\text{par } T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \lambda & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{colonne } i$$

↑
colonne j

Preuve: par calcul.

Exemple: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ac & bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \lambda c & b + \lambda d \\ c & d \end{pmatrix}$$

Rq: Appliquer l'opération C plusieurs fois de suite revient à ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres.

Ex:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 + 2L_3 + 3L_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 15 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

revient à faire

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\text{puis } L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$$

$$\text{puis } L_2 \leftarrow L_2 + 3L_4$$

③ Ces opérations peuvent aussi se faire sur les colonnes.

Elles reviennent à faire des multiplications à droite

par $D_i(\lambda)$, S_{ij} et ${}^T T_{ij}(\lambda)$

Ex: L'opération

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + C_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Revient à faire

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\quad}_{T_{23}(\lambda)} \right)$$

$$T_{23}(\lambda) = {}^T (T_{32}(\lambda))$$

Les matrices des opérations élémentaires sont inversibles avec

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right); S_{ij}^{-1} = S_{ij}$$

$$T_{ij}^{-1}(\lambda) = T_{ij}(-\lambda)$$

Preuve: par expo/é,

$$D_1(\lambda) D_1\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \lambda & 1 & & \\ & & & 1 & \ddots & & \\ & & & & \ddots & 1 & \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \frac{1}{\lambda} & 1 & & \\ & & & 1 & \ddots & & \\ & & & & \ddots & 1 & \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1_{k \times k} & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} & 1 & & & \\ & & & 1 & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & 1_{k \times k} & & \\ 0 & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & \ddots & & \\ & & & & \ddots & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_k$$

③ ④ Deux matrices A, B sont dites

(\Leftarrow équivalents en lignes \Rightarrow)

Si on peut passer de l'une à l'autre pour des opérations élémentaires sur les lignes, c'est à dire s'il existe des matrices élémentaires M_1, \dots, M_R

telles que $B = M_1 \dots M_R A$

c'est de type
 D_i, S_{ij}, T_{ij} .

Idem pour (\Leftarrow équivalents en colonnes \Rightarrow):

$B = A M_1 \dots M_R$

⑥ Comme les M_i sont inversibles, $M_1 \dots M_k$ est inversible, et donc A est inversible $\Leftrightarrow B$ est inversible

Consequence : Si une des colonnes (ou lignes) est CL des autres, alors A n'est pas inversible

En effet, si par ex $C_1 = 2C_2 + 3C_4 + 0 \times C_3$
alors l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - (2C_2 + 3C_4)$

Transforme A en une matrice dont la première colonne est nulle : elle est donc non inversible.

3.2 Algorithme de Gauss

① a) La matrice $A \in M_{n,p}(k)$ est échelonnée en lignes si :

$$\bullet \forall i \in [1, n], c_i = 0 \Rightarrow \forall j > i, L_j = 0$$

$\bullet \forall i \in [1, n]$, si a_{ij} est le premier coeff $\neq 0$ de L_i en partant de la gauche, alors tous les coeffs situés en dessous de a_{ij} sont nuls.
Ce coeff a_{ij} est le pivot de L_i .

Expos:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Pivot de L_1 Pivot de L_2 Pivot de L_3

est échelonnée en lignes

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

aussi

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{array} \right)$$

non

⑥ Si une matrice échelonnée a tous ses pivots égaux à 1 et tous les coeffs au dessus et en dessous égaux à 0, alors on dit qu'elle est échelonnée réduite

Expos:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

est échelonnée réduite

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

c) Tout cela se transpose au cas des colonnes.

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

aussi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

est échelonnée en colonnes

Pivot de C_1 : tous les coeffs à sa droite sont nuls

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

est échelonnée réduite en colonnes

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

aussi

② a) Théorème: Toute matrice est équivalente en lignes à une matrice échelonnée (réduite) en lignes

((Démonstration)) (algo de Gauss) soit $A \in M_{n,p}(K)$

• On regarde la première colonne de A:
si elle est nulle il n'y a rien à faire.

Sinon, on considère un coeff $\neq 0$ et on l'utilise pour les calculs:

* On le met le plus haut que l'on peut par échange de lignes.

* On l'utilise pour étrangler les coeffs en dessous et au dessus

* On le ramène à 1

• On passe à la colonne suivante et on recommence

Rq: 1- Les étapes orange sont utiles surtout pour obtenir une matrice échelonnée réduite

2. Parfois, on adopte un peu dans les cas concrets

3. Il y a unicité de la forme échelonnée réduite (admis).

b) Exemple:

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$\downarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

$$\downarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

échelonnée

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

échelonnée
réduite

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xleftarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xleftarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

③ La même méthode s'applique pour les colonnes :

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) \xleftarrow{\begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + C_2 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \xleftarrow{C_2 \leftarrow \frac{1}{3}C_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xleftarrow{C_3 \leftarrow -\frac{1}{2}C_3} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 4C_3 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{ÉCHELONNÉE REDUITE!}$$



3.3 Calcul de l'inverse d'une matrice

① Prop : Soit $A \in M_n(K)$

Alors A est inversible si elle est équivalente (en lignes ou en colonnes) à I_n

Preuve : Soit A inversible. On considère sa forme échelonnée réduite en lignes. C'est une matrice A' équivalente en ligne à A .

A' est ech réduite

- carrée

- inversible (car A est inversible)

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \square \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} \text{J' ne peut y avoir} \\ \text{de colonnes nulles} \\ \text{dans } A' (\text{sinon elle} \\ \text{serait non inversible}) \end{array} \right.$$

Donc $A' = I_n$.

- Réiproquement, si A est équivalente en lignes à I_n , il existe des matrices élémentaires M_1, \dots, M_k

$$M_1 M_2 \dots M_k A = I_n$$

$\Rightarrow M$, matrice inversible

On a alors

$$A = M^{-1} \times I_n \quad \text{elle est inversible,}$$

d'inverse $A^{-1} = M = M_1 M_2 \dots M_k I_n$

□

② Comme les M_i correspondent aussi aux opérations élémentaires faites sur A jusqu'à obtenir I , le fait que $A^{-1} = M_1 \dots M_k I_n$ montre qu'on obtient concrètement A^{-1} en faisant les mêmes opérations élémentaires sur I

Ex : inversibilité et inverse
de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 A \quad I_3
 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xleftarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_3]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xleftarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xleftarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xleftarrow[L_2 \leftarrow -L_2]{}$$

Cela montre que A est inversible

et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Rq: On vérifie que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ex : inversibilité et inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} ?$$

③ Si, au cours de l'algo, on tombe sur une matrice avec une ligne ou une colonne de 0, alors elle est non inversible.
Mais si on tombe sur une forme échelonnée avec tous les pivots $\neq 0$, alors elle est inversible □

④ On peut travailler avec les lignes et les colonnes, mais on ne mélange pas les deux.

⑤ Une matrice triangulaire est inversible
ssi tous ses coeffs diag sont $\neq 0$;
et l'inverse est triang sup, avec coeffs diag égaux aux inverses des coeffs diag de départ

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ est inversible}$$

ssi $\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n \neq 0$, auquel cas

T^{-1} est de la forme

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & * & & \\ & 1/\lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1/\lambda_n \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors D est inversible

ssi $\forall i, \lambda_i \neq 0$, ou autre cas

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$$

4 MATRICES ET SYSTÈMES LINÉAIRES

4.1 Exemple de système linéaire

① On considère le système

$$(S) \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2x - y + 3z + t = 0 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

C'est un système linéaire homogène car toutes les équations sont de la forme $ax + by + cz + dt = 0$

(pas de x^2 ou \sqrt{y} , ou $\exp(z)$, etc)

linéaire \rightarrow forme des membres de gauche

homogène \rightarrow le membre de droite est 0

Ce système s'écrit aussi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

/ c'ad $AX=0_{3,1}$ /

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(R)$$

Soit $\mathcal{Y} = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y + 2t = 0 \\ 2x - y + 3z + t = 0 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \right\}$

et $\ker A = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

\hookrightarrow le « noyau » de A

On a donc $\mathcal{Y} = \ker A$

① Pour « bien » résoudre un système linéaire, on fait des opérations élémentaires sur les équations.

Ex: (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ y + z - t = 0 \\ -y + 2z - 2t = 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} E_2 \leftarrow E_2 - E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 - E_1 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x - y + z + t = 0 \\ y + z - t = 0 \\ -y + 2z - 2t = 0 \end{array} \right.$$

Le nouveau système s'écrit $A' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

A' est la matrice obtenue par

$$\begin{array}{l} A \longrightarrow A' \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

Donc faire des opérations élémentaires sur les éqs de (S) revient à faire les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de A .

Chaque matrice obtenue ainsi à partir de A correspond à un système équivalent à (S)

③ En particulier, si on échelonne - réduit en lignes A, cela va donner un système équivalent très simple.

Ici on trouve

$$A \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Donc $(S) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

On a moins d'eqs que d'inconnues

On va exprimer certaines de ces dernières en fonction des autres

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = 0 (= 0 \times t) \\ z = t \end{cases}$$

On a résolu (S) !

écriture implicite de \mathcal{S}

$$\mathcal{Y} = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2x - y + 3z + t = 0 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \right\} = \{(-2t, 0, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \left\{ (x, y, z, t) \mid \begin{cases} x = -2t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \right\}$$

écriture

explicite (des éléments) de \mathcal{Y}
on sait maintenant que

$(-2, 0, 1, 1)$ $\xrightarrow{t=1}$ est
solution, ou $(4, 0, -2, 2)$ $\xrightarrow{t=2}$
ou $(-2\pi, 0, \pi, \pi)$, etc
 $\xrightarrow{t=3}$

Réf: On définit $+$ et \cdot sur les éléments de \mathbb{R}^4

$$\text{par } (x, y, z, t) + (x', y', z', t') =$$

$$= (x+x', y+y', z+z', t+t')$$

$$\text{et } \lambda (x, y, z, t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\text{Alors } \mathcal{Y} = \{ t(-2, 0, 1, 1) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

not.
 $= \text{Vect}((-2, 0, 1, 1))$

L'ensemble des CL de $(-2, 0, 1, 1)$

Autrement dit,

$$(x_0, y_0, z_0, t) \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / (x_0, y_0, z_0, t) = f(-2, 0, 1, 1)$$

Un tel t est alors unique :

$$\text{si } f(-2, 0, 1, 1) = f'(-2, 0, 1, 1)$$

$$(-2t, 0, t, 1) = (-2t', 0, t', 1')$$

$$\text{donc} \begin{cases} -2t = -2t' \\ 0 = 0 \\ t = t' \\ 1 = 1' \end{cases}$$

$$\text{donc } t = t'$$

Bilan : tout élément de \mathcal{Y} (ou de $\ker A$) s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de la famille $((-2, 0, 1, 1))$

On dit que $((-2, 0, 1, 1))$ est une base de \mathcal{Y} ou de $\ker A$.

① On regarde (S) $\begin{cases} x-y+z+t=2 \\ 2x-y+3z+t=3 \\ x-2y+3z-t=0 \end{cases}$

(S) s'écrit

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = Y$$

Faire des opérations élémentaires sur les éqs de (S)
change aussi les membres de droite

On cherche donc à échelonner la « matrice augmentée »

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 6 \end{array} \right)$$

On échelonne - réduit

$$\rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

donc (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2t=3 \\ y=0 \\ z-t=-1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2t+3 \\ y=0 \\ z=t-1 \end{cases}$$

$$\text{càd } \mathcal{Y} = \left\{ (-2t+3, 0, t-1) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ (-2t, 0, t, t) + (3, 0, -1, 0) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ t(-2, 0, 1, 1) + (3, 0, -1, 0) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

\nearrow
Solution de l'éq
triangulaire

\uparrow
Solution part de (S)

② Cela illustre le principe de superposition

les solutions du système complet sont la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène

Autrement dit, soit x_0 une solution de (S) $AX_0 = Y$

Alors X vérifie $AX = Y$ ssi $\begin{cases} AX = Y \\ AX_0 = Y \end{cases}$

$$\text{ssi } \begin{cases} AX - AX_0 = 0 \\ AX_0 = Y \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} A(X - X_0) = 0 \\ AX_0 = Y \end{cases}$$

ssi $\begin{cases} X - X_0 \text{ est solution du sys homogène} \\ AX_0 = Y \end{cases}$

$$\text{ssi } \begin{cases} X = X_0 + \text{solution du sys homogène} \\ AX_0 = Y \end{cases}$$

4.3 Autre exemple de système homogène

$$(S) \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + 3z + t = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

La matrice associée

ssi $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Θ_1 échelonne-réduit

Θ_1 trouve

$$A \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $(S)_C = \begin{cases} x + 2z + 2t = 0 \\ y + z + t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2z - 2t \\ y = -z - t \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x = -2z - 2t \\ y = -z - t \end{cases}\}$$

$$= \{(-2z - 2t, -z - t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{z(-2, -1, 1, 0) + t(-2, -1, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$$

$$= \text{Vect}((-2, -1, 1, 0), (-2, -1, 0, 1))$$

Autrement dit,
 $(x, y, z, t) \in S \Leftrightarrow \exists z, t \in \mathbb{R} /$

$$(x, y, z, t) = z(-2, -1, 1, 0) + t(-2, -1, 0, 1)$$

On peut vérifier que z et t sont uniques

donc on définit que

$\{(-2, -1, 1, 0), (-2, -1, 0, 1)\}$ est une base
de $\ker A$.

Remarque: en suivant cette technique,
on trouve toujours une base
de $\ker A = S$

4.4 Exemples avec une matrice carrée

⑦ Soit (S) : $\begin{cases} x+y+7z=0 \\ 2x-y+5z=0 \\ -2x-3y-9z=0 \end{cases}$

càd $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, càd $AX=0$

On échelonne A : $A \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5$

$$\text{Donc } (S) \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \mathcal{Y} = \{(0,0,0)\}$$

Cohérent avec le fait A est inversible, donc que
 $AX=0 \Leftrightarrow X=0$

Rq: exemple 4.3 $\mathcal{Y} = \text{Vect} \left((-2, -1, 1, 0), (-2, -1, 0, 1) \right)$ dimension 4

4.1 $\mathcal{Y} = \text{Vect} \left((-2, 0, 1, 1) \right)$ dimension 2

4.4 $\mathcal{Y} = \{(0,0,0)\}$ dimension 0

② Soit (S) : $\begin{cases} x+y+7z=-1 \\ 2x-y+5z=-1 \\ -x-3y-9z=-5 \end{cases}$

ca'd $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, ca'd $AX=Y$

A

On échelonne la matrice augmentée

$$\left(A \mid \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{matrix} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(I_3 \mid \begin{matrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{matrix} \right)$$

$$\text{Donc } (S)_{c=s} \left\{ \begin{array}{l} x = 6 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

$$\text{Donc } S = \{(6, 4, -1)\}$$

Cohérent avec le fait A est inversible, donc que
 $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$

4.5 Systèmes carrés et inversibilité

Théorème : Soit $A \in M_n(K)$

↳ Propriétés suivantes sont équivalentes

(1) A est inversible

(2) L'équation $AX = O_{n,n}$, d'inconnue $X \in M_{n,n}(K)$
 admet $O_{n,n}$ comme unique solution

(3) L'équation $AX = Y$, d'inconnue $X \in M_{n,n}(K)$
 admet une unique solution (donnée par
 $X = A^{-1}Y$)

Preuve : (1) \Rightarrow (3) : Si A est inversible

$$\text{on a bien } AX = Y \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}Y \\ \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$$

(3) \Rightarrow (2) : Avec $Y = O_{n,n}$, (3) dit bien que
 $AX = O$ a pour solution $X = A^{-1} \times O = O$

② \Rightarrow ① : Soit A' la matrice échelonnée réduite en lignes équivalente à A .
 comme la seule solution de $Ax=0$ est $x=0$, le système $Ax=0$ est équivalent

$$A' \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{array} \right.$$

or ce système correspond à A' : c'est que $A' = I_n$.
 Donc A est inversible.

□

Remarque: Cela signifie que si on a inversé un système, on a inversé la matrice

Ex: (S) $\left\{ \begin{array}{l} x+y=a \\ 2x-y=b \end{array} \right.$

$$Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AX = Y$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=a \\ E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x+y=a \\ -3y=-2a+b \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{l} x+y=a \\ E_2 \leftarrow \frac{1}{3}E_2 \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} x+y=a \\ y=\frac{2}{3}a-\frac{b}{3} \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{l} x+y=a \\ E_1 \leftarrow E_1 - E_2 \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b \\ y=\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}b \end{array} \right.$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

Exercice : Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$$

A est inversible ssi $ad - bc \neq 0$

$$\text{Auquel cas } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4.6 Conditions de compatibilité image.

① Soit (S) $\begin{cases} 2x + 4y + 3z = a \\ 2x + 8y + 2z = b \\ y + z = c \end{cases}$

M avec $a, b, c \in K$ des paramètres

Echelonnons :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & a \\ 1 & 3 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & a \\ 0 & -1 & -1 & -a+b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array} \right)$$

$$\downarrow L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & a \\ 0 & -1 & -1 & -a+b \\ 0 & 0 & 0 & -a+b+c \end{array} \right)$$

Ainsi,

$$(S) \Rightarrow (S') \left\{ \begin{array}{ll} 2x + 4y + 3z = a & (1) \\ -y - z = -a+b & (2) \\ 0 = -a+b+c & (3) \end{array} \right.$$

Donc: Si (S) est vrai (càd s'il existe au moins une solution à (S)), alors (S') est vrai, et en particulier (3) est vraie, càd $-a+b+c=0$

- Réciprocement, supposons que $-a+b+c=0$. Alors (3) devient $0=0$, et donc

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=a \\ -y+3z=a+b \end{cases}$$

Ce système a plus d'inconnues que d'éqs, donc il admet des solutions.

CCL: (S) admet des solutions

$$\text{ssi } -a+b+c=0$$

② Def: Si $A \in M_n(K)$
son image est l'ensemble

$$Im A = \{AX \mid X \in M_{n,1}(K)\} \subset M_{n,1}(K)$$

Avec l'exemple précédent $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4y+3z \\ -x+3y+2z \\ y+z \end{pmatrix}$$

$$\text{, donc } \mathbb{L}_m A = \left\{ \begin{pmatrix} 2x+4y+3z \\ x+3y+8z \\ y+z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{L}_m A = \left\{ \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4y \\ 3y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

C'est l'ensemble de toutes les CL des colonnes de A

$$\cdot \text{Vect}(C_1, C_2, C_3)$$

$$= \left\{ x C_1, y C_2, z C_3 \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

• Par exemple on peut voir que $\text{Vect}(C_1, C_2, C_3)$ est inchangé si on remplace un des C_i par une CL des autres.

$$\text{Ex: } \text{Vect}(C_1 + 2C_2 + C_3, C_2, C_3)$$

$$= \left\{ x(C_1 + 2C_2 + C_3) + y C_2 + z C_3 \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

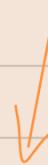
$$= \left\{ x' C_1 + y' C_2 + z' C_3 \mid x', y', z' \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect}(C_1, C_2, C_3)$$

Donc, si échelonne A en colonnes, le vect reste
tjrs inchangé

$$J_{ci}, A \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } J_m A &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &\approx \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$



Ces colonnes sont échelonées:
elles forment une base de $\text{Im } A$.

Écriture implicite de $\text{Im } A$

$$\text{Im } A = \left\{ \begin{pmatrix} x+4y+3z \\ x+3y+2z \\ y+z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$$

$$\text{Alors } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im } A \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4y+3z \\ x+3y+2z \\ y+z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x+4y+3z = a \\ x+3y+2z = b \\ y+z = c \end{cases} \quad (S_{a,b,c})$$

$C = S \begin{pmatrix} S_{a,b,c} \end{pmatrix}$ admet (au moins)

cf supra une solution

$$C = S - a + b + c = G$$

$$\text{J'anc } \operatorname{Im} A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \mid -a + b + c = 0 \right\}$$

Cette écriture implicite est pratique pour tester l'appartenance à $\operatorname{Im} A$ de colonnes données.

Exple: Est-ce que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} A$