CHAPITRE 3 : FRACTIONS RATIONNELLES

1) Generalités :

On considère un corps K
(penser $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$)

1) Def : Une fonction rationnelle sur K est un quotient de deux polynômes
C'est donc une expression formelle.

$$\frac{P}{Q} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P \in K[X] \\ Q \in K[X] \setminus \{0\} \end{cases}$$

L'ensemble des fractions rationnelles est noté $K(X)$

Exemples :
$$\frac{3X^4 - 5X + 1}{X^3 - 1} \in \mathbb{Q}(X)$$

$$\frac{3iX + 1}{X^2 - i} \in \mathbb{C}(X)$$

b) Def : Soient $\frac{P}{Q}, \frac{R}{S} \in K(X)$

Dire que $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$ signifie que $PS = QR$

Ex : $\frac{3i}{X+i} = \frac{3iX + 3}{X^2+1}$

car $3i(X^2+1) = (X+i)\underbrace{(3iX+3)}_{3i(X-i)}$
$= 3i(X+i)(X-i)$
$= 3i(X^2+1)$

ⓒ On définit

- $\dfrac{P}{Q} + \dfrac{R}{S} = \dfrac{PS + QR}{QS}$
- $\dfrac{P}{Q} \times \dfrac{R}{S} = \dfrac{PR}{QS}$
- $\left(\dfrac{P}{Q}\right)' = \dfrac{P'Q - PQ'}{Q^2}$

Ex : mq ces formules ne dépendent pas des représentants choisis, cad que si $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{P_1}{Q_1}$, alors $\dfrac{PS+QR}{QS} = \dfrac{P_1S + Q_1R}{Q_1S}$

etc

ⓓ Soit $P \in K[X]$, on peut toujours écrire $P = \dfrac{P}{1}$, ce qui permet de considérer que $P \in K(X)$

On peut donc écrire $K[X] \subset K(X)$

(Rq $K(X)$ est le « corps des fractions » de $K[X]$ tout comme $\mathbb{Q}$ est le « corps des fractions » de $\mathbb{Z}$)

e) Soit $F \in K(X)$. Si $F = \dfrac{P}{Q}$, on dit que $\dfrac{P}{Q}$ est un <u>représentant</u> de F

② Représentant irréductible

<u>Prop</u>: Soit $F \in K(X) \setminus \{0\}$ Parmi tous les représentants de F, il y a, $\frac{P_1}{Q_1}$ pour lesquels $\deg Q_1$ est minimal
Dans ce cas, P_1 et Q_1 sont premiers entre eux et tout autre représentant de F est de la forme $\frac{AP_1}{AQ_1}$, avec $A \in K[X] \setminus \{0\}$

Un représentant $\frac{P_1}{Q_1}$ est dit irréductibles, il y en a un seul pour lequel
<u>Q_1 est unitaire</u>
↓
coeff dominant $= 1$

<u>Exples</u>: $\frac{X+1}{X^2+2X+1} = \frac{X+1}{(X+1)^2} = \frac{1}{X+1}$
↓
repr irréductible

$\frac{X-1}{X^2+1}$ est irréductible car $X-1$ et X^2+1 sont premiers entre eux

<u>Rq</u> pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dire que $\frac{P}{Q}$ est irréductible revient à dire que P et Q n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$

Preuve de la prop :

a) Soit $\frac{P}{Q}$ un représentant de F

Soit $D = \text{pgcd}(P, Q)$
il existe $P_1, Q_1 \in K[X]$
premiers entre eux tq

$$\begin{cases} P = DP_1 \\ Q = DQ_1 \end{cases}$$

Alors $\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}$

et $\deg Q = \deg D + \deg Q_1$
donc $\deg Q_1 \leq \deg Q$

b) Soit $\frac{P_2}{Q_2}$ un autre représentant de F

On a $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$ donc $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$ $(*)$

Donc $P_1 \mid P_2 Q_1$

Or P_1 est premier avec Q_1, donc le
lemme de Gauss, $P_1 \mid P_2$
$\exists A \in K[X] \,/\, P_2 = AP_1$

On ré-injecte dans $(*)$: $P_1 Q_2 = AP_1 Q_1$ $\quad P_1 \neq 0$ car $F \neq 0$
donc $Q_2 = AQ_1$

Reste à mq $\deg Q_1$ est minimal
Effectivement, $\deg Q_2 = \deg A + \deg Q_1 \geqslant \deg Q_1$ $\square$

③ Pôles

a) Les zéros d'une fonction rationnelle sont les racines du numérateur d'un représentant irréductible

- Les pôles sont les racines du dénominateur d'un repr. irréductible

La multiplicité d'un pôle est la multiplicité en tant que racine du denom

Ex : Sur $K=\mathbb{R}$, $\frac{X-1}{X^2+1}$ n'a pas de pôle

sur $K=\mathbb{C}$, $\frac{X-1}{X^2+1}$ a deux pôles i et $-i$, chacun de multiplicité 1

$$\frac{X-1}{X^2+1}=\frac{X-1}{(X-i)^1(X+i)^1}$$

Le seul pôle de $\frac{X-1}{(X-1)(X-2)}$ est 2 car le repr irred est $\frac{1}{X-2}$

$\frac{1}{(X-2)^3(X+4)^5}$ a deux pôles : 2, de mult 3
-4 —— 5

b) Soit $F \in K(X) \setminus \{0\}$ et $\mathcal{P}_F$ l'ensemble de ses pôles. On peut alors définir une fonction

$$K \setminus \mathcal{P}_F \to K$$
$$x \longmapsto \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

où $\frac{P_1}{Q_1}$ est un repr irred de F

Ex : à la fraction $\frac{X^2+5}{X-3} \in \mathbb{R}(X)$,

on associe la fct $\mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{x^2+5}{x-3}$$

4) Degré :

ⓐ <u>Prop - def</u> : soit $F \in K(X) \setminus \{0\}$

Quel que soit le repr $\frac{P}{Q}$ de F, le nombre $\deg P - \deg Q$ est le même on l'appelle <u>degré</u> de F

Preuve : soient P, Q, R, S tq

$F = \frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$: montrons que $\deg P - \deg Q = \deg R - \deg S$.

En effet, $PS = QR$ donc $\deg P + \deg S = \deg Q + \deg R$
$\deg P - \deg Q = \deg R - \deg S$. □

Ex : $F(X) = \frac{X^2-1}{X^3+1}$

$\deg F = 2-3 = -1$

Compatible avec l'écriture $F = \frac{(X+1)(X^2-1)}{(X+1)(X^3+1)}$

$\rightsquigarrow \deg F = 3-4$
$= -1$ ✓

b) $\boxed{\begin{array}{l} \deg(F+G) \leq \max(\deg F, \deg G) \\ \deg(FG) = \deg F + \deg G \end{array}}$

Démo : exercice pour la 1ère formule

Posons $F = \frac{P}{Q}$ et $G = \frac{R}{S}$

Alors $FG = \frac{PR}{QS}$

donc $\deg FG = \deg(PR) - \deg(QS)$
$= \deg P + \deg R - (\deg Q + \deg S)$

$= \underbrace{\deg P - \deg Q}_{\deg F} + \underbrace{\deg R - \deg S}_{\deg G}$ □

c) Rq : si $P \in K[X]$, son degré en tant que polynôme coïncide avec son degré en tant que fraction.

$$P = \frac{P}{1} \text{ donc } \deg P = \deg P - \underbrace{\deg(1)}_{=0}$$

3. PARTIE ENTIÈRE

Théorème : Toute fraction $F \in K(X)$ s'écrit de manière unique

$$F = E + G \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E \in K[X] \\ G \in K(X) \text{ de degré } < 0 \end{cases}$$

Plus précisément, si $F = \frac{P}{Q}$, alors E est le quotient dans la div euclidienne de P par Q. E s'appelle la partie entière de F

Demo (*) Exigible

Existence : soit $P = QE + R$ la div euclidienne de P par Q : $\begin{cases} E, R \in K[X] \\ \deg R < \deg Q \end{cases}$

alors $\underbrace{\frac{P}{Q}}_{F} = E + \underbrace{\frac{R}{Q}}_{\text{de degré } = \deg R - \deg Q < 0 \text{ d'après}}$

Donc $G = \frac{R}{Q}$ convient

• <u>Unicité :</u> S_{0} $E+G \overset{*}{=} E_1+G_1$

avec $\begin{cases} E, E_1 \in K[X] \\ G, G_1 \in K(X) \text{ de deg } <0 \end{cases}$

On a $E-E_1 = G_1 - G$

$\deg(G-G_1) \leq \max(\deg G, \deg G_1)$
<0

Donc $E-E_1$ est un polynôme de deg <0
C'est forcément le polynôme nul :
$E-E_1=0$
$E=E_1$
d'où $G=G_1$ par $*$ □

<u>Rq :</u> si $F=0$, on pose $\deg F=-\infty$

<u>Ex :</u> $F=\dfrac{X^2+3X+4}{X+1}$

Trouvez E et G comme dans le thm.

$$\begin{array}{r|l} X^2+3X+4 & X+1 \\ \cline{2-2} X^2+X & X+2 \\ \cline{1-1} 2X+4 & \\ 2X+2 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

$X^2+3X+4=(X+1)(X+2)+2$

donc $\dfrac{X^2+3X+4}{X+1} = \underbrace{X+2}_{E} + \underbrace{\dfrac{2}{X+1}}_{G}$

Rq : Si $\deg F < 0$

$$F = 0 + F$$

0 : E ; F : G, de deg < 0

Pour une frac de degré < 0 la partie entière est toujours nulle.

4) PARTIE RELATIVE À UN PÔLE

1) Théorème : Soit $F \in K(X) \setminus \{0\}$ avec un pôle $a \in K$ de multiplicité $m \in \mathbb{N}$

Alors il exist un unique n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in K^m$ et il existe $G \in K(X)$ n'ayant pas a comme pôle, tq $F = \frac{\lambda_m}{(X-a)^m} + \frac{\lambda_{m-1}}{(X-a)^{m-1}} + \dots + \frac{\lambda_1}{X-a} + G$

De plus, si $F = \frac{P}{Q}$ avec $Q = (X-a)^m Q_1$ et $Q_1(a) \neq 0$ alors $\lambda_m = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$

Preuve

- Unicité :

sq $\frac{\lambda_m}{(X-a)^m} + \dots + \frac{\lambda_1}{X-a} + G(x) = \frac{\lambda'_m}{(X-a)^m} + \dots + \frac{\lambda'_1}{X-a} + \tilde{G}(X)$

On multiplie par $(X-a)^m$:

$$* \lambda_m + \lambda_{m-1}(X-a) + \dots + \lambda_1 (X-a)^{m-1} + G(X)(X-a)^m$$

$$= \lambda'_m + \lambda'_{m-1}(X-a) + \dots + \lambda'_1 (X-a)^{m-1} + \tilde{G}(X)(X-a)^m$$

On évalue en $X=a$: $\boxed{\lambda_m = \lambda_m'}$

On peut donc simplifier par λ_m dans $*$, et donc on peut ensuite simplifier par $X-a$:

$$\lambda_{m-1} + \dots = \lambda'_{m-1} + \dots$$

On réevalue alors en $X=a$, ce qui donne $\lambda_{m-1} = \lambda'_{m-1}$, etc.

① $F \in K(X) \setminus \{0\}$ avec un pôle a de multiplicité $m \in \mathbb{N}$

$\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in K$, $\exists G \in K(X)$ sans pôle en a tq

$$F = \frac{\lambda_m}{(X-a)^m} + \frac{\lambda_{m-1}}{(X-a)^{m-1}} + \dots + \frac{\lambda_1}{(X-a)} + G(X)$$

Et si $F = \dfrac{P(X)}{(X-a)^n Q_n(X)}$

Avec $Q(a) \neq 0$ alors

$$\lambda_m = \frac{P(a)}{Q_n(a)}$$ Unicité ✓

Existence : par récurrence forte sur m

- $m=0$: On convient de dire que a est multiplicité 0 pour F si F n'a pas a comme pôle. Dans ce cas, on peut prendre $G=F$, et il n'y a pas de λ à considérer

- Soit $m \geq 1$ et supposons la propriété vraie pour tout rang $k < m$

Soit F comme dans l'énoncé

On va chercher $\lambda_m \in K$ tel que $F - \dfrac{\lambda_m}{(X-a)^m}$ ait un pôle de multiplicité $< m$

Or $F - \dfrac{\lambda_m}{(X-a)^m} = \dfrac{P}{(X-a)^m Q_1} - \dfrac{\lambda_m}{(X-a)^m}$

$$= \frac{P - \lambda_m Q_1}{(X-a)^m Q_1}$$

Pour que cette fraction ait a comme pôle avec multiplicité $< m$, on veut qu'il y ait une simplification par $X-a$

Autrement dit, on veut que $P - \lambda_m Q_1$ soit divisible par $X-a$

Autrement dit, on veut que a soit racine de $P - \lambda_m Q_1$, càd

$P(a) - \lambda_m Q(a) = 0$

Il suffit donc de poser $\lambda_m = \dfrac{P(a)}{Q_1(a)}$

c'est possible car $Q_1(a) \neq 0$ par hyp.

On peut donc appliquer l'HR à

$$F - \frac{\lambda_m}{(X-a)^m} = \frac{\lambda_{m-1}}{(X-a)^{m-1}} + \dots + \frac{\lambda_1}{X-a} + G(X)$$

$\square$

Exple : $F(X) = \dfrac{X-1}{X^5+3X^4+4X^3+4X^2+3X+1}$

$$= \frac{X-1}{(X^2+1)(X+1)^3}$$

Sur $\mathbb{R}$, F n'a qu'un pôle : -1

qui est de multiplicité 3

D'après théorème : $\exists G$ n'ayant pas

$\underset{a}{-1}$ comme pôle, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

tq $F(X) = \dfrac{\lambda_3}{(X+1)^3} + \dfrac{\lambda_2}{(X+1)^2} + \dfrac{\lambda_1}{X+1} + G(X)$

D'après le thm, $\lambda_3 = \dfrac{-1-1}{(-1)^2+1}$ $\begin{matrix} \} P(a) \\ \} Q_1(a) \end{matrix}$

② Cas d'un pôle simple (c.à.d de multiplicité 1)

ⓐ $F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X-a)Q_1}$, avec $Q_1(a) \neq 0$

Le thm dit que $\exists G \in K(X)$ sans pôle sur a, $\exists \lambda \in K$ tq $F = \frac{\lambda}{X-a} + G$; et que

$$\boxed{\lambda = \frac{P(a)}{Q_1(a)}}$$

Ex : $F = \frac{X-2}{X^5-1}$

$= \frac{X-2}{(X-1)(X^2+X+1)}$

$= \frac{\lambda}{X-1} + G$

et $\lambda = \frac{1-2}{1^2+1+1} = -\frac{1}{3}$

Rappel : $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$

λ est obten «en oubliant $X-1$ dans F et en évaluant ce qui reste en $X=1$»

b) Autre expression de λ

Comme $Q(X) = (X-a)Q_1(X)$

On a $Q'(X) = Q_1(X) + (X-a)\,Q_1'(X)$

donc $Q'(a) = Q_1(a) + 0$

donc $\boxed{\lambda = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}}$

Ex : $F = \dfrac{x-2}{X^3-1}$

Ici $Q(X) = X^3 - 1$

$Q'(X) = 3X^2$

donc $\lambda = \dfrac{1-2}{3\times(1)^2} = -\dfrac{1}{3}$

5 DECOMP EN ELEMENTS SIMPLES : cas d'un denominateur scindé

1) En appliquant le thm 3 puis plusieurs fois le thm 4, on obtient :

<u>Thm :</u> Soit $F = \frac{P}{Q} \in K(X) \setminus \{0\}$ sous forme irréductible

avec $Q(X) = (X-a_1)^{m_1}(X-a_2)^{m_2}\dots(X-a_n)^{m_n}$

Alors F s'écrit de manière unique sous la forme

$$F(X) = E(X) + \underbrace{\frac{\lambda_{1,m_1}}{(X-a_1)^{m_1}} + \frac{\lambda_{1,m_1-1}}{(X-a_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{\lambda_{1,1}}{X-a_1}}_{m_1 \text{ termes}}$$

$$+ \underbrace{\frac{\lambda_{2,m_2}}{(X-a_2)^{m_2}} + \frac{\lambda_{2,m_2-1}}{(X-a_2)^{m_2-1}} + \dots + \frac{\lambda_{2,1}}{X-a_2}}_{m_2 \text{ termes}}$$

$$+ \dots$$

$$+ \underbrace{\frac{\lambda_{n,m_n}}{(X-a_n)^{m_n}} + \frac{\lambda_{n,m_n-1}}{(X-a_n)^{m_n-1}} + \dots + \frac{\lambda_{n,1}}{X-a_n}}_{m_n \text{ termes}}$$

$$= E(X) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_{i,j}}{(X-a_i)^j}$$

$E \in K[X]$ la partie entière et les $\lambda_{i,j} \in K$

Rq : Si $K \in \mathbb{C}$, on sait que tout polynômes non constant Q est scindé.

② Exemple : $F = \dfrac{X^2+3X-1}{(X+1)^3(X-1)(X-2)}$

$\exists\, E \in \mathbb{R}[X]$, $\exists\, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

tq $F \overset{*}{=} E(X) + \dfrac{a}{(X+1)^3} + \dfrac{b}{(X+1)^2} + \dfrac{c}{X+1}$

$$+ \frac{d}{X-1} + \frac{e}{X-2}$$

- $\deg F = 2-5 = -3 < 0$, donc $E = 0$
- Pour calculer d, on multiplie $*$

par $X-1$ puis on évalue en $X=1$

$$\frac{X^2+3X-1}{(X+1)^3(X-2)} = (X-1)\left[E(X) + \frac{a}{(X+1)^3} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{e}{X-2}\right] + d$$

d'où $\dfrac{1^2+3-1}{(1+1)^3(1-2)} = 0 + d$

donc $\boxed{d = -\dfrac{3}{8}}$

• Pour e, On multiplie (*) par $X-2$ puis on l'évalue en 2

$$e = \frac{2^2+3\times 2-1}{(2+1)^3(2-1)}$$

$$\boxed{e = \frac{1}{3}}$$

• Pour a, on multiplie (*) par $(x+1)^3$ et On évalue en -1

$$a = \frac{(-1)^2+3(-1)-1}{(-1-1)(-1-2)}$$

$$a = \frac{-1}{2}$$

• Pour b et c, On se débrouille

* On peut chercher $\lim_{x\to\infty}(xF(x))$

$$xF(x) = \underbrace{\frac{x(x^2+3x-1)}{(x+1)^3(x-1)(x-2)}}_{\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{x\times x^2}{x^3\times x\times x}=\frac{1}{x^2}\to 0} = \underbrace{\frac{-x/2}{(x+1)^3}}_{\sim\frac{-x/2}{x^3}=\frac{-1}{2x^2}} + \underbrace{\frac{bx}{(x+1)^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{cx}{x+1}}_{\to c} + \underbrace{\frac{\frac{-3}{8}x}{x-1}}_{\to\frac{-3}{8}} + \underbrace{\frac{\frac{1}{3}x}{x-2}}_{\to\frac{1}{3}}$$

donc $0 = c - \frac{3}{8} + \frac{1}{3}$

d'où $c = \frac{1}{24}$

* Pour b on peut évaluer (*) en un X quelconque (sauf un pôle)

Par exple $X=0$ donne $\frac{-1}{1\times(-1)\times(-2)} = \frac{-1}{2} + b + \frac{1}{24} + \frac{3}{8} - \frac{1}{6}$

d'où $\boxed{b = -\frac{1}{4}}$

CCL la DES de F

est $F(X) = \frac{-1/2}{(X+1)^3} + \frac{-1/4}{(X+1)^2} + \frac{1/24}{X+1} + \frac{-3/8}{X-1} + \frac{1/3}{X-2}$

(4) Exple :

$F = \frac{X^4}{X^2+1} = \frac{X^4}{(X-i)(X+i)}$

$\exists\, E \in \mathbb{R}[X]$, $a, b \in \mathbb{C}$ tq

$F \underset{*}{=} E + \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i}$

$$\begin{array}{l|l} X^4 & X^2+1 \\ \cline{2-2} X^4+X^2 & X^2-1 \\ \cline{1-1} -X^2 & \\ -X^2-1 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

$X^4 = (X^2-1)(X^2+1) + 1$

$$X^4 = (X^2-1)(X^2+1)+1$$

$$\frac{X^4}{X^2+1} = \underbrace{X^2-1}_{E(X)} + \frac{1}{X^2+1}$$

Pour a, on multiplie $*$ par $X-i$

puis on évalue en i

$$\frac{i^4}{i+i} = a = \frac{1}{2i}$$

De même, on obtient $b = \frac{-1}{2i}$

4 <u>Exemple:</u> soit $n \geq 1$ et

$$F(X) = \frac{1}{X^n-1} \quad ; \quad P(X) = 1$$

$$Q(X) = X^n - 1$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$$

avec $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

Comme $\deg F < 0$, donc la partie entière dans le DES est nulle : $\exists \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C} /$

$$F = \frac{1}{X^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega_k}$$

On utilise la formule avec la dérivée du denom

$$\lambda_k = \frac{P(\omega_k)}{Q'(\omega_k)}$$

(ok car tous le ω_k sont des pôles simples)

or $P(\omega_k) = 1$

$Q'(X) = n X^{n-1}$

donc $\lambda_k = \dfrac{1}{n \omega_k^{n-1}}$ car $\omega_k^n = 1$

$= \dfrac{\omega_k}{n}$

Donc $$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k / n}{X - \omega_k}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k}$$

Rq : avec l'autre formule on avait trouvé

$$\lambda_k = \frac{1}{(\omega_0 - \omega_k)(\omega_{k-1} - \omega_k)(\omega_{k+1} - \omega_k) \dots (\omega_{n-1} - \omega_k)}$$

④ Exemple : soit $n \geq 1$ et

$$F(x) = \frac{1}{X^n - 1} \quad ; \quad P(X) = 1$$

$$Q(X) = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$$

avec $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$

⑥ DES sur $\mathbb{R}$

Theorème : Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X) \setminus \{0\}$

sous forme irréductible

On sait que Q peut s'écrire

$$Q(X) = (X-a_1)^{m_1} \dots (X-a_m)^{m_n} (X^2 + p_1 X + q_1)^{r_1} \dots (X^2 + p_\ell X + q_\ell)^{r_\ell}$$

avec le $a_i, p_i, q_i \in \mathbb{R}$

et les $m_i, r_i \in \mathbb{N}^*$

et chaque $X^2 + p_i X + q_i$ irréductible sur $\mathbb{R}$

(c.à.d avec $\Delta < 0$)

Alors F s'écrit de manière unique sous la forme

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\lambda_{ij}}{(X-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\mu_{ij} X + \nu_{ij}}{(X^2 + p_i X + q_i)^j}$$

Avec $E \in \mathbb{R}[X]$ la partie entière et les
$\lambda_{ij}, \mu_{ij}, \nu_{ij} \in \mathbb{R}$

$\exists!$ = il existe unique

② Exemples

a) $F = \dfrac{X^3+X+2}{(X-1)(X^2+X+1)}$

- X^2+X+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$
  car $\Delta = 1-4 = -3 < 0$

- $\deg F = 3-(2+6) < 0$ donc la partie entière est nulle

- Donc $\exists!(a,b,c,d,e,f,g,h) \in \mathbb{R}^8$

tq $F = \dfrac{a}{(X-1)^2} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{cX+d}{(X^2+X+1)^3} + \dfrac{eX+f}{(X^2+X+1)^2} + \dfrac{gX+h}{X^2+X+1}$

ⓑ $F = \dfrac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X^2+1)}$

- $\deg F < 0$ donc la partie entière dans la DES est nulle

- X^2+1 est irred sur $\mathbb{R}$ car $\Delta = -1 < 0$

Donc $\exists!(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ $F = \dfrac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X^2+1)} = \dfrac{a}{(X-1)^2} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{cX+d}{X^2+1}$ ⊛

• a et b se calculent comme en section 5

* Pour a, on multiplie (*) par $(X-1)^2$ et on évalue en 1 :

$$\frac{1^2+1+1}{1^2+1} = a \quad \text{càd} \quad a = \frac{3}{2}$$

* Pour b cherchons $\lim (xF(x))$

$$xF(x) = \frac{x(x^2+x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$\parallel$$

$$\frac{ax}{(x-1)^2} + \frac{bx}{x-1} + \frac{x(cx+d)}{x^2+1}$$

Faisons $x \longrightarrow +\infty$

$$0 = 0 + b + c \qquad b = -c$$

• **Calculons c et d**

*** Technique n° 1**

On multiplie (*) par X^2+1 :

$$\frac{X^2+X+1}{(X-1)^2} = (X^2+1)\left[\frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1}\right] + cX + d$$

puis on évalue en $X = i$

$$\frac{i^2+i+1}{(i-1)^2} = 0 + ci + d$$

càd $ci + d = \dfrac{i}{-1-2i+1} = -\dfrac{1}{2}$

Donc en identifiant parties réelles et imaginaire on obtient

$$d = \frac{-1}{2} \quad \text{et} \quad c = 0$$

CCL : $F = \dfrac{3/2}{(X-1)^2} + \dfrac{-1/2}{X^2+1}$

* Technique n° 2

On écrit $F = \dfrac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X-i)(X+i)} = E + \dfrac{a}{(X-1)^2} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{\lambda}{X-i} + \dfrac{\mu}{X+i}$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (et a priori $a, b \in \mathbb{C}$ mais thm 4 $\Rightarrow$ $a, b \in \mathbb{R}$)

E, a, b se calculent comme avant

Pour calculer λ, on multiplie ⊛ par $X - i$ et on évalue en i :

$$\frac{i^2+i+1}{(i-1)^2(i+i)} = \lambda \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{i}{4}$$

Comme $F \in \mathbb{R}(X)$ on a $\overline{F(X)} = F(X)$

donc

$$\overline{E} + \frac{\overline{a}}{(X-1)^2} + \frac{\overline{b}}{X-1} + \frac{\overline{\lambda}}{X+i} + \frac{\overline{\mu}}{X-i}$$

$$= E + \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{\lambda}{X-i} + \frac{\mu}{X+i}$$

égaux 2 à 2 car unicité DES

Par unicité de la DES, on en déduit que

$\overline{E} = E \quad (\Rightarrow E \in \mathbb{R}[X])$

$\left.\begin{array}{l}\overline{a} = a \\ \overline{b} = b\end{array}\right\} \Rightarrow a, b \in \mathbb{R}$

$\overline{\lambda} = \mu \longrightarrow$ d'où $\mu = -\frac{i}{4}$

$(\overline{\mu} = \lambda)$

Alors $\frac{\lambda}{X-i} + \frac{\mu}{X+i} = \frac{i}{4} \underbrace{\left[\frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i}\right]}_{\frac{\cancel{X}+i-\cancel{X}+i}{X^2+1}}$

$$= \frac{-1}{2} \frac{1}{X^2+1}$$

✓

7 PÔLE D'ORDRE n et DL

Dans le cas d'un pôle réel d'ordre n, on a qqch comme

$$F = \frac{\lambda_n}{(x-a)^n} + \dots + \frac{\lambda_1}{x-a} + G,$$

avec G sans pôle en a. On peut obtenir tous les λ_i d'un coup grâce à DL_n

Ex : $$\frac{x+1}{(x-1)^3(x^2+x+1)} = \underbrace{E}_{\substack{=0 \\ \text{car } \deg F < 0}} + \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{dx+e}{x^2+x+1}$$

On multiplie par $(x-1)^3$

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + (x-1)^3 \frac{dx+e}{x^2+x+1}$$

Posons $x = 1+h$, càd $x-1 = h$:

$$\underbrace{\frac{1+h+1}{(1+h)^2+(1+h)+1}}_{f(h)} = a + bh + ch^2 + \underbrace{h^3 \frac{d(h+1)+e}{(1+h)^2+(1+h)+1}}_{= o(h^2) \text{ quand } h \to 0}$$

car $h \dfrac{d(1+h)+e}{(1+h)^2+(1+h)+1} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Le membre de droite est donc le $DL_e(0)$ du membre de gauche, et on identifie les coeffs :

Or $f(h) = \dfrac{2+h}{3+3h+h^2}$

$$= \frac{1}{3}\left(2+h+o(h^2)\right) \times \frac{1}{1+h+\frac{h^2}{3}+o(h^2)}$$

$$= \frac{1}{3}\left(2+h+o(h^2)\right)\left(1-\left(h+\frac{h^2}{3}\right)+\left(h+\frac{h^2}{3}\right)^2+o(h^2)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(2+h+o(h^2)\right)\left(1-h-\frac{h^2}{3}+h^2+o(h^2)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(2+h+o(h^2)\right)\left(1-h+\frac{2}{3}h^2+o(h^2)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(2-2h+\frac{4}{3}h^2+h-h^2+o(h^2)\right)$$

$$= \frac{2}{3}-\frac{h}{3}+\frac{h^2}{9}+o(h^2)$$

Par unicité du DL, on en déduit

$a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{9}$