CHAPITRE 4 : LES MATRICES

On considère un corps K.

1) GENERALITÉS

1.1 Définitions :

① Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$

Une matrice est une famille de np éléments de K, indexée par $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Dans la pratique, on écrit

$$\begin{array}{c} \\ \text{n lignes} \\ \text{p colonnes} \end{array} \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Ex : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 20 & 23 \end{pmatrix}$

Parfois, on note $A_{i,j}$ le coeff de A situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne.

L'ensembles des matrices de taille $n \times p$ est noté $M_{n,p}(K)$

Quand $p = n$, on parle de matrices carrées et on note simplement $M_{n}(K)$

2) Si $n = 1$, on parle de matrice-ligne

Ex : $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbb{R})$

Si $p = 1$, on parle de matrice-colonne

Ex : $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 27 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

3) La matrice nulle est la matrice formée seulement de 0

$$0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(autrement dit, $\forall i, j,\ (0_{n,p})_{i,j} = 0$

4) Si $n = p$, la matrice identité est

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son terme d'indice (i,j)

est $(I_n)_{i,j} = \delta_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$\longrightarrow$ « Symbôle de Kronecker »

Autrement dit, $(I_n)_{i,j} = 1$ si $i=j$
càd si on est sur la diagonale
et $(I_n)_{i,j} = 0$ sinon

5) Pour les matrices carrées, on dit qu'une matrice diagonale si elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ici, le terme d'indice i,j est $\begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ \lambda_i \text{ si } i=j \end{cases}$; c'est donc $\lambda_i \delta_{i,j}$

merci [illegible] vie

Une matrice <u>triangulaire supérieure</u> est une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(càd $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$)

⑥ Si $A \in M_{n,p}(K)$, sa <u>transposée</u> est la matrice ${}^tA \in M_{p,n}(K)$ dont le terme général est $({}^tA)_{ij} = A_{ji}$

Cela revient à recopier en colonnes les lignes de A.

<u>Ex</u> : Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Dans le cas d'une matrice carrée, cela revient à faire une symétrie par rapport à la diagonale

Si A est carré et que

- ${}^tA = A$, on dit que A est symétrique
- ${}^tA = -A$ on dit que A est antisymétrique

Ex $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & 4 \\ -7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est antisym

(si ${}^tA = -A$, alors $\forall i,j$, $a_{ji} = -a_{ij}$
donc en particulier $a_{ii} = -a_{ii}$, càd $a_{ii} = 0$)

① On définit sur $M_{m,p}(K)$ deux lois

a) Une addition : si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$,
alors on pose $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Ex : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

On a alors $\forall A \in M_{n,p}(K)$, $A + O_{n,p} = O_{n,p} + A = A$

On dit que $O_{n,p}$ est un élément neutre pour la loi +

6) Un produit externe :

Si $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$ et $\lambda \in K$, on pose

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Ex : $-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

On a alors

le 0 de K

le 0 de $M_{n,p}(K)$

$\forall A \in M_{n,p}(K)$, $\quad 0 \cdot A = 0_{n,p}$

$\forall \lambda \in K$, $\quad \lambda \cdot 0_{n,p} = 0_{n,p}$

On note aussi $-A = -1 \cdot A$

Ex : $-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

On note alors $A - B$ pour $A + (-B)$
Cela revient à soustraire coeff par coeff

(c) Muni de + et de $\cdot$, $M_{n,p}(K)$ est un Espace Vectoriel sur K ; essentiellement, cela signifie qu'on peut faire des combinaisons linéaires d'éléments de $M_{n,p}(K)$:
$\lambda A + \mu B$

$$\begin{cases} (i) & \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A \\ (ii) & \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \\ (iii) & (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A \\ (iv) & 1 \cdot A = A \end{cases}$$

(d) ⚠ On ne peut pas additionner de matrices de tailles différentes

(2) On appelle <u>matrice de la base canonique</u> toute matrice de type

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a des zéros partout sauf en position (i,j) où il y a un 1.

Le terme de position (k,l) est donné par

$$(E_{i,j})_{k,l} = \delta_{ik}\,\delta_{jl}$$

En effet :

En effet : $\delta_{ik}\delta_{jl} = \begin{cases} 0 \text{ si } \delta_{ik} = 0 \text{ ou } \delta_{jl} = 0 \\ 1 \text{ si } \delta_{ik} = 1 \text{ et } \delta_{jl} = 1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \text{ ou } j \neq l \\ 1 \text{ si } i = k \text{ et } j = l \end{cases}$$

Prop : Toute Matrice de $M_{n,p}(K)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire dans $E_{i,j}$

Preuve Dans le cas $n = p = 2$

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(K)$

$$A = a_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + a_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}} + a_{21} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}} + a_{22} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}}$$

Plus généralement,

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}}$$

③ a) **Prop :** la transposition est une application linéaire, càd

$\forall \lambda \in K, \forall A, B \in M_{n,p}(K), \ {}^t(\lambda A + B) = \lambda\, {}^tA + {}^tB$ comb linéaire

Autrement dit, la transposée d'une CL est la CL des transposées

Preuve ⊛ Exigible

On doit montrer une égalité entre matrices : cela revient à montrer que chacun des coeffs en position (i,j) sont égaux entre eux, càd que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \ \left({}^t(\lambda A + B)\right)_{i,j} = (\lambda\, {}^tA + {}^tB)_{i,j}$$

En effet, $\left({}^t(\lambda A + B)\right)_{i,j} = (\lambda A + B)_{j,i}$ $({}^tC)_{i,j} = C_{j,i}$ par def de la transposée

$= \lambda A_{j,i} + B_{j,i}$ Par def de $\lambda A + B$

$= \lambda ({}^tA)_{i,j} + ({}^tB)_{i,j}$ Par def de ${}^tA$ et ${}^tB$

$= (\lambda\, {}^tA + {}^tB)_{i,j}$ par def de + et .

□

Remarque : • Avec $B = 0_{(n,p)}$, cela donne

$\forall \lambda \in K, \forall A \in M_{n,p}(K), \ {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$

• Soient $\lambda, \mu \in K$; $A, B \in M_{n,p}(K)$

${}^t(\lambda A + \underbrace{(\mu B)}_{B'}) = \lambda\, {}^tA + \underbrace{{}^t(\mu B)}_{\mu\, {}^tB}$

grâce à la prop ${}^t(\lambda A + B') = \lambda\, {}^tA + {}^tB'$

grâce à

$= \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB$

b) La transposition est involutive, càd $\forall A \in M_{n,p}(K)$ ${}^t({}^tA) = A$

Preuve : * Exigible (Faites qu'elle tombe par pitié)

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad {}^t({}^tA)_{ij} = ({}^tA)_{ji} = A_{ij}$$

Par def de la transposée

$\square$

2. MULTIPLICATION DE MATRICES

2.1 Définitions

(1) Soient $L = (x_1 \; x_2 \; \dots \; x_p)$

et $C = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ avec le $\underbrace{\hat{m}}$ nbre de composants

On note $L \cdot C = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_p y_p$

$$= \sum_{k=1}^{p} x_k y_k$$

C'est le « Produit scalaire » de L par C

(2) (a) Soient $A \in M_{n,p}(K)$ et $B \in M_{p,q}(K)$

⚠ Le nbre de colonnes de A est égal au nbe de lignes de B

On ne définit le produit AB que dans ce cas là

⚠

(b) Soient $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A : $L_1 = (a_{11}\ a_{12} \dots a_{1p})$

$C_1, \dots, C_q$ les colonnes de B $C_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix}$

La matrice $C = AB$ est définie comme la matrice de $M_{m,q}(K)$

tq $\forall i,j$, $c_{ij} = L_i \cdot C_j$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

(3) Exemples

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- $\underbrace{B\,A}_{\substack{33\ \ 23 \\ \neq}}$ Donc le produit n'est pas défini

- $\underbrace{A\,B}_{\substack{23\ 33 \\ =}}$ Donc le produit existe et est de taille 2×3

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

L_1C_1

$= \begin{pmatrix} 2\times(-1) + 4\times 1 + (-1)\times 2 & 2\times 0 + 4\times 1 + (-1)\times(-1) & 2\times 1 + 4\times 1 + (-1)\times(-1) \\ -1\times(-1) + 0\times 1 + 2\times 2 & (-1)\times 0 + 0\times 1 + 2\times(-1) & (-1)\times 1 + 0\times 1 + 2\times(-1) \end{pmatrix}$

L_2C_1

$= \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\underset{24\ 42\ \checkmark}{AB} = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & -9 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 7 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$