

# CHAPITRE 3 : FRACTIONS RATIONNELLES

## 1) Généralités :

On considère un corps  $K$   
( penser  $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ , ou  $\mathbb{C}$  )

a) Def : Une fonction rationnelle sur  $K$  est un quotient de deux polynômes  
c'est donc une expression formelle.

$$\frac{P}{Q} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P \in K[X] \\ Q \in K[X] \setminus \{0\} \end{cases}$$

L'ensemble des fractions rationnelles est noté  $K(x)$

Exemples :  $\frac{3x^4 - 5x + 1}{x^3 - 1} \in \mathbb{Q}(x)$

$$\cdot \frac{3; x+1}{x^2 - 1} \in \mathbb{P}(x)$$

b) Def : Soient  $\frac{P}{Q}, \frac{R}{S} \in K(x)$

Dire que  $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$  signifie que  $PS = QR$

Ex :  $\frac{3i}{x+i} = \frac{3i(x-i)}{x^2+1} \quad 3i(x-i)$

$$\begin{aligned} \text{car } 3i(x^2+1) &= (x+i) \overbrace{(3ix+3)}^{3i(x-i)} \\ &= 3i(x+i)(x-i) \\ &= 3i(x^2+1) \end{aligned}$$

c) On définit

$$\cdot \frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + QR}{QS}$$

$$\cdot \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS}$$

$$\cdot \left( \frac{P}{Q} \right)' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

Ex: mq ces formules ne dépendent pas des représentants choisis, c'est que si  $\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}$ , alors  $\frac{PS + QR}{QS} = \frac{P_1 S + Q_1 R}{Q_1 S}$

etc

d) Soit  $P \in K[X]$ , on peut toujours écrire  $P = \frac{P}{1}$ , ce qui permet de considérer que  $P \in K(X)$

On peut donc écrire  $K[X] \subset K(X)$

(Rq)  $K(X)$  est le  $\ll$ corps des fractions $\gg$  de  $K[X]$  tout comme  $\mathbb{Q}$  est le  $\ll$ corps des fractions $\gg$  de  $\mathbb{Z}$

e) Soit  $F \in K(X)$ . Si  $F = \frac{P}{Q}$ , on dit que  $\frac{P}{Q}$  est un représentant de  $F$

## ② Représentant irréductible

Prop: Soit  $F \in K(x) \setminus \{0\}$ . Parmi tous les représentants de  $F$ , il y a,  $\frac{P_1}{Q_1}$  pour lesquels  $\deg Q_1$  est minimal.

Dans ce cas,  $P_1$  et  $Q_1$  sont premiers entre eux et tout autre représentant de  $F$  est de la forme  $\frac{AP_1}{AQ_1}$ , avec  $A \in K[x] \setminus \{0\}$ .

Un représentant  $\frac{P_1}{Q_1}$  est dit irréductible, il y en a un seul pour lequel

$Q_1$  est unitaire

↓  
coeff dominant = 1

$$\text{Ex: } \frac{x+1}{x^2+2x+1} = \frac{x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1}$$

↓  
repr irréductible

$\frac{x-1}{x^2+1}$  est irréductible car  $x-1$  et  $x^2+1$  sont premiers entre eux

Rq pour  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , dire que  $\frac{P}{Q}$  est irréductible revient à dire que  $P$  et  $Q$  n'ont pas de racine commune dans  $\mathbb{C}$ .

## Preuve de la prop:

a) Soit  $\frac{P}{Q}$  un représentant de  $F$

Soit  $D = \text{pgcd}(P, Q)$   
 il existe  $P_1, Q_1 \in K[X]$   
 premiers entre eux tq

$$\begin{cases} P = DP_1 \\ Q = DQ_1 \end{cases}$$

Alors  $\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}$

et  $\deg Q = \deg D + \deg Q_1$   
 donc  $\deg Q_1 \leq \deg Q$

b) Soit  $\frac{P_2}{Q_2}$  un autre représentant de  $F$

On a  $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$  donc  $P_1 Q_2 = P_2 Q_1 \quad \#$

Donc  $P_1 | P_2 Q_1$

Or  $P_1$  est premier avec  $Q_1$ , donc le  
 lemme de Gauss,  $P_1 | P_2$   
 $\exists A \in K[X] / P_2 = AP_1$

On ré-injecte dans  $\# : P_1 Q_2 = AP_1 Q_1 \Rightarrow P_1 \neq 0$   
 donc  $Q_2 = A Q_1 \quad \square$  car  $F \neq 0$

Reste à montrer que  $\deg Q_1$  est minimal  
 Effectivement,  $\deg Q_2 = \deg A + \deg Q_1 \geq \deg Q_1 \quad \square$

### ③ Pôles

a) Les zéros d'une fonction rationnelle sont les racines du numérateur d'un représentant irréductible

• Les pôles sont les racines du dénominateur d'un repr. irréductible

La multiplicité d'un pôle est la multiplicité en tant que racine du dénom.

Ex : Sur  $K = \mathbb{R}$ ,  $\frac{x-1}{x^2+1}$  n'a pas de pôle

sur  $K = \mathbb{C}$ ,  $\frac{x-1}{x^2+1}$  a deux pôles  $i$  et  $-i$ ,

chacun de multiplicité 1

$$\frac{x-1}{x^2+1} = \frac{x-1}{(x-i)^1(x+i)^1}$$

Le seul pôle de  $\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}$  est 2 car le

repr irrédu est  $\frac{1}{x-2}$

$\frac{1}{(x-2)^3(x+4)^5}$  a deux pôles : 2, de mult 3  
-4, de mult 5

b) Soit  $F \in K(X) \setminus \{0\}$  et  $\mathcal{P}_F$  l'ensemble de ses pôles. On peut alors définir une fonction

$$K \setminus \mathcal{P}_F \rightarrow K$$

$$x \mapsto \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

où  $\frac{P_1}{Q_1}$  est un repn irrédu de  $F$

Ex: à la fraction  $\frac{x^2+5}{x-3} \in \mathbb{R}(X)$ ,

on associe la fct  $\mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2+5}{x-3}$$

(4) Degré:

① Prop-de  $f$ : soit  $F \in K(X) \setminus \{0\}$

Quel que soit le repn  $\frac{P}{Q}$  de  $F$ ,  
le nombre  $\deg P - \deg Q$  est le même  
on l'appelle degré de  $F$

Preuve: Soient  $P, Q, R, S$  tq

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{R}{S} : \text{montrons}$$

$$\deg P - \deg Q = \deg R - \deg S.$$

En effet,  $PS = QR$  donc  $\deg P + \deg S = \deg Q + \deg R$   
 $\deg P - \deg Q = \deg R - \deg S.$

D

$$\text{Ex: } F(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$$

$$\deg F = 2 - 3 = -1$$

Compatible avec l'écriture  $F = \frac{(x+1)(x^2 - 1)}{(x+1)(x^3 + 1)}$

$$\rightsquigarrow \deg F = 3 - 4 \\ = -1 \quad \checkmark$$

b)

$$\begin{aligned} \deg(F+G) &\leq \max(\deg F, \deg G) \\ \deg(FG) &= \deg F + \deg G \end{aligned}$$

Démo: exercice pour la 1<sup>ère</sup> formule

Posons  $F = \frac{P}{Q}$  et  $G = \frac{R}{S}$

$$\text{Alors } FG = \frac{PR}{QS}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \deg FG &= \deg(PR) - \deg(QS) \\ &= \deg P + \deg R - (\deg Q + \deg S) \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\deg P - \deg Q}_{\deg F} + \underbrace{\deg R - \deg S}_{\deg G}$$



③ Rq: si  $P \in K[X]$ , son degré en tant que polynôme coïncide avec son degré en tant que fraction.

$$P = \frac{P}{1} \text{ donc } \deg P = \deg P - \underbrace{\deg(1)}_{=0}$$

### 3. PARTIE ENTIERE

Théorème: Toute fraction  $F \in K(X)$  s'écrit de manière unique

$$F = E + G \text{ avec } \begin{cases} E \in K[X] \\ G \in K(X) \text{ de degré < 0} \end{cases}$$

Plus précisément, si  $F = \frac{P}{Q}$ , alors  $E$  est le quotient dans la div euclidienne de  $P$  par  $Q$ .  
L'on s'appelle la partie entière de  $F$ .

Demo  Exigible

Existence: Soit  $P = QE + R$  la div euclidienne de  $P$  par  $Q$ :  $\begin{cases} E, R \in K[X] \\ \deg R < \deg Q \end{cases}$

alors  $\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$   
de degré =  $\deg R - \deg Q < 0$  d'après

Donc  $G = \frac{R}{Q}$  convient

$$\bullet \text{ Unicité: } \exists g, E + f = E_1 + g_1$$

avec  $\begin{cases} E, E_1 \in k[X] \\ g, g_1 \in k(X) \text{ de deg} < 0 \end{cases}$

$$\text{On a } E - E_1 = g_1 - g$$

$$\deg(g - g_1) \leq \max(\deg g, \deg g_1) \\ < 0$$

Donc  $E - E_1$  est un polynôme de deg < 0

C'est forcément le polynôme nul:

$$E - E_1 = 0$$

$$E = E_1$$

d'où  $G = g_1$  par \*

Rq: si  $F = 0$ , on pose  $\deg F = -\infty$

$$\text{Ex: } F = \frac{x^2 + 3x + 4}{x+1}$$

Trouvez  $E$  et  $G$  comme dans le Thm.

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x + 4 \\ x^2 + x \\ \hline 2x + 4 \\ 2x + 2 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$x^2 + 3x + 4 = (x+1)(x+2) + 2$$

$$\text{Donc } \frac{x^2 + 3x + 4}{x+1} = \underbrace{x+2}_{E} + \underbrace{\frac{2}{x+1}}_{G}$$

Rq: Si  $\deg F < 0$

$$F = 0 + G$$

$\uparrow \quad \downarrow$   
 $G, \deg < 0$

Pour une frac de degré < 0 la partie entière est toujours nulle.

## 4) PARTIE RELATIVE À UN PÔLE

1) Théorème: Soit  $F \in K(x) \setminus \{0\}$

avec un pôle ack de multiplicité  $m \in \mathbb{N}$

Alors il existe un unique n-uplet

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in K^m$  et il existe

$G \in K(x)$  n'ayant pas  $a$  comme pôle,

$$\text{tq } F = \frac{\lambda_m}{(x-a)^m} + \frac{\lambda_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{\lambda_1}{x-a} + G$$

De plus, si  $F = \frac{P}{Q}$  avec  $Q = (x-a)^m Q_1$ ,  
et  $Q_1(a) \neq 0$  alors  $\lambda_m = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$

Preuve

• Unicité:

$$\text{sq } \frac{\lambda_m}{(x-a)^m} + \dots + \frac{\lambda_1}{x-a} + f(x) = \frac{\lambda'_m}{(x-a)^m} + \dots + \frac{\lambda'_1}{x-a} + \tilde{G}(x)$$

On multiplie par  $(x-a)^m$ :

$$*\lambda_m + \lambda_{m-1} (x-a) + \dots + \lambda_1 (x-a)^{m-1} + G(x)(x-a)^m$$

$$= \lambda'_m + \lambda'_{m-1} (x-a) + \dots + \lambda'_1 (x-a)^{m-1} + \tilde{G}(x)(x-a)^m$$

On évalue en  $x=a$ :  $\lambda_m = \lambda'_m$

On peut donc simplifier pour  $\lambda_m$  dans  $*$ , et

Donc on peut ensuite simplifier pour  $x=a$ :

$$\lambda_{m-1} + \dots = \lambda'_{m-1} + \dots$$

On réévalue alors en  $x=a$ , ce qui donne

$$\lambda_{m-1} = \lambda'_{m-1}, \text{ etc.}$$

④  $F \in K(x) \setminus \{0\}$  avec un pôle à de multiplicité  $m \in \mathbb{N}$

$$\exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in K, \exists G \in K(x)$$

Sans pôle en a tq

$$F = \frac{\lambda_m}{(x-a)^m} + \frac{\lambda_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{\lambda_1}{(x-a)} + G(x)$$

$$\text{Et si } F = \frac{P(x)}{(x-a)^n Q_n(x)}$$

avec  $Q(a) \neq 0$  alors

$$\lambda_m = \frac{P(a)}{Q_n(a)}$$

unicité ✓

Existence : par récurrence forte

sur  $m$

- $m=0$  : On convient de dire que  $a$  est multiplié 0 pour  $F$  si  $F$  n'a pas  $a$  comme pôle

Dans ce cas, on peut prendre  $G=F$ , et si il n'y a pas de  $\lambda$  à considérer

- Soit  $m \geq 1$  et supposons vraie pour tout rang  $k < m$

Soit  $F$  comme dans l'énoncé

On va chercher  $\lambda_m \in K$  tel que

$$F - \frac{\lambda_m}{(x-a)^m}$$

aif un pôle de multiplicité  $\leq m$

$$\text{On } F - \frac{x_m}{(x-a)^m} = \frac{P}{(x-a)^m Q_1} - \frac{x_m}{(x-a)^m}$$

$$= \frac{P - x_m Q_1}{(x-a)^m Q_1}$$

Pour que cette fraction ait  $a$  comme pôle avec multiplicité  $\lambda_m$ , on veut qu'il y ait une simplification par  $x-a$

Autrement dit, on veut que

$P - x_m Q_1$  soit divisible par  $x-a$

Autrement dit, on veut que  $a$  soit

racine de  $P - x_m Q_1$ , c'est à dire

$$P(a) - x_m Q_1(a) = 0$$

Il suffit donc de poser  $x_m = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$

c'est possible car  $Q_1(a) \neq 0$  par

hyp.

$\theta_n$  peut donc appliquer l'HR si

$$F - \frac{\lambda_m}{(X-a)^m} = \frac{\lambda_{m-1}}{(X-a)^{m-1}} + \dots + \frac{\lambda_1}{X-a} + G(X)$$

□

Exple:  $F(X) = \frac{X-1}{X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 3X + 1}$

$$= \frac{X-1}{(X^2+1)(X+1)^3}$$

Sur  $\mathbb{R}$ ,  $F$  n'a qu'un pôle: -1

qui est de multiplicité 3

D'après théorème:  $\exists G$  n'ayant pas

$\boxed{-1}$  comme pôle,  $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\text{tqj } F(X) = \frac{\lambda_3}{(X+1)^3} + \frac{\lambda_2}{(X+1)^2} + \frac{\lambda_1}{X+1} + G(X)$$

D'après le thm,  $\lambda_3 = \frac{-1-1}{(-1)^2+1} \quad \left\{ \begin{array}{l} P(a) \\ Q_1(a) \end{array} \right.$

② Cas d'un pôle simple (càd de multiplicité 1)

$$\textcircled{a} \quad F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(x-a) Q_1}, \quad \text{avec } Q_1(a) \neq 0$$

Le thm dit que  $\exists G \in K(x)$  sans pôle sur  $a$ ,

$$\exists \lambda \in K \quad \text{tq} \quad F = \frac{\lambda}{x-a} + G; \quad \text{et que}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{P(a)}{Q_1(a)}}$$

$$\begin{aligned} \text{Ex: } F &= \frac{x-2}{x^5-1} \\ &= \frac{x-2}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Rappel: } a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}) \end{array} \right\}$$

$$\text{et } \lambda = \frac{1-2}{1^4+1+1} = -\frac{1}{3}$$

$\lambda$  est obtenu en oubliant  $x-1$  dans  $F$

et en évaluant ce qui reste en  $x=1$ )

## b) Autre expression de $\lambda$

Comme  $Q(x) = (x-a)Q_1(x)$

$$\text{on a } Q'(x) = Q_1(x) + (x-a)Q_1'(x)$$

$$\text{donc } Q'(a) = Q_1(a) + 0$$

$$\text{donc } \boxed{x = \frac{P(a)}{Q'(a)}}$$

Ex:  $F = \frac{x-2}{x^3-1}$

Ici  $Q(x) = x^3 - 1$

$$Q'(x) = 3x^2$$

$$\text{donc } \lambda = \frac{1-2}{3x(1)^2} = -\frac{1}{3}$$

# ⑤ DECOMP EN ELEMENTS SIMPLES : cas d'un dénominateur scindé

1) En appliquant le thm 3 puis plusieurs fois le thm 4, on obtient:

Thm: Soit  $F = \frac{P}{Q} \in K(x) \setminus \{0\}$  sous

forme irréductible

$$\text{avec } Q(x) = (x - a_1)^{m_1} (x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_n)^{m_n}$$

Alors  $F$  s'écrit de manière unique

sous la forme

$$F(x) = E(x) + \frac{x_{1,m_1}}{(x - a_1)^{m_1}} + \frac{\lambda_{1,m_1-1}}{(x - a_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{\lambda_{1,1}}{x - a_1}$$

$$\begin{aligned} & m_1 \text{ termes} \quad \rightarrow + \frac{\lambda_{2,m_2}}{(x - a_2)^{m_2}} + \frac{\lambda_{2,m_2-1}}{(x - a_2)^{m_2-1}} + \dots + \frac{\lambda_{2,1}}{x - a_2} \\ & m_2 \text{ termes} \quad \rightarrow + \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$+ \frac{x_{n,m_n}}{(x - a_n)^{m_n}} + \frac{\lambda_{n,m_n-1}}{(x - a_n)^{m_n-1}} + \dots + \frac{\lambda_{n,1}}{x - a_n}$$

$$= E(X) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_{i,j}}{(x-a_i)^j}$$

$E \in k[x]$  la partie entière et les  $\lambda_{i,j} \in k$

Rq: Si  $K \in F$ , on sait que tout polynômes non constant  $\mathbb{Q}$  est scindé.

② Exemple:  $F = \frac{x^2 + 3x - 1}{(x+1)^3(x-1)(x-2)}$

$\exists E \in \mathbb{R}[x]$ ,  $\exists a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F &\stackrel{\textcircled{*}}{=} E(x) + \frac{a}{(x+1)^3} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+1} \\ &\quad + \frac{d}{x-1} + \frac{e}{x-2} \end{aligned}$$

•  $\deg F = 2 - 5 = -3 < 0$ , donc  $E = 0$

• Pour calculer  $d$ , on multiplie  $\textcircled{*}$

par  $x-1$  puis on évalue en  $x=1$

$$\frac{x^2 + 3x - 1}{(x+1)^3(x-2)} = (x-1) \left[ E(x) + \frac{a}{(x+1)^3} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{e}{x-2} \right] + d$$

D'où  $\frac{1^2 + 3 - 1}{(1+1)^3(1-2)} = 0 + d$

Donc  $d = -\frac{3}{8}$

- Pour  $e_1$ , on multiplie (\*) par  $x-2$  puis on l'évalue en 2

$$e = \frac{2^2 + 3x2 - 1}{(2+1)^3(2-1)}$$

$$e = \frac{1}{3}$$

- Pour  $a_1$ , on multiplie (\*) par  $(x+1)^3$  et on évalue en -1

$$a_1 = \frac{(-1)^2 + 3(-1) - 1}{(-1+1)(-1-2)}$$

$$a_1 = \frac{-1}{2}$$

- Pour  $b$  et  $c$ , on se débrouille

On veut chercher  $\lim_{x \rightarrow \infty} (zcF(x))$

$$zcF(x) = \frac{zc(x^2 + 3xc - 1)}{(x+1)^3(x-1)(x-2)}$$

$$\sim \frac{-x/2}{(x+1)^3} + \underbrace{\frac{6xc}{(x+1)^2}}_{\sim \frac{-x/2 - 1}{x^3} \rightarrow 0} + \underbrace{\frac{c/x}{x-1}}_{\sim c} + \underbrace{\frac{\frac{-3}{8}x}{x-1}}_{\sim \frac{3}{8}} + \underbrace{\frac{\frac{1}{3}xc}{x-2}}_{\sim \frac{1}{3}}$$

$$\sim \frac{1}{x^2} \rightarrow 0$$

Donc  $0 = c - \frac{3}{8} \in \frac{1}{3}$   
d'où  $c = \frac{1}{24}$

\* Pour  $f$  on peut évaluer  $\textcircled{*}$  en un  $X$   
quelconque (sauf un pôle)

Par exemple  $X=0$  donne  $\frac{-1}{1 \times (-1) \times (-2)} = \frac{-1}{2} + b + \frac{1}{2^4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{6}$

d'où 
$$b = -\frac{1}{4}$$

### CCL la DES de $f$

$$\text{est } F(X) = \frac{-1/2}{(X+1)^3} + \frac{-1/4}{(X+1)^2} + \frac{1/24}{X+1} \\ + \frac{-3/8}{X-1} + \frac{1/3}{X-2}$$

① Exple:

$$F = \frac{x^4}{x^2+1} = \frac{x^4}{(x-i)(x+i)}$$

$\exists E \in \mathbb{R}[X]$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$  t.q.

$$F = E + \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i}$$

$$\begin{array}{c|cc} x^4 & x^2+1 \\ \hline x^4+x^2 & x^2-1 \\ -x^2 & \\ \hline -x^2-1 & \\ \hline 1 & \end{array} \quad x^4 = (x^2-1)(x^2+1) + 1$$

$$x^4 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 1$$

$$\frac{x^4}{x^2 + 1} = \underbrace{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}_{E(x)} + \frac{1}{x^2 + 1}$$

Pour  $a$ , on multiplie \* par  $x^{-i}$

puis on évalue en i

$$\frac{i^4}{i+i} = a = \frac{1}{2i}$$

De même, on obtient  $b = -\frac{1}{2i}$

④ Exemple: Soit  $n \geq 1$  et

$$F(x) = \frac{1}{x^n - 1} ; P(x) = 1$$

$$Q(x) = x^n - 1$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} (x - \omega_k)$$

$$\text{avec } \omega_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}}$$

Comme  $\deg F < 0$ , donc la partie entière dans le DES est nulle :  $\exists \lambda_0, \dots, \lambda_{m-1} \in \mathbb{C}$

$$F = \frac{1}{x^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{x - \omega_k}$$

On utilise la formule avec la dérivée du dénom

$$x_k = \frac{P(\omega_k)}{Q'(\omega_k)}$$

(ok car tous le  $\omega_k$  sont des pôles simples)

$$\text{or } P(\omega_k) = 1$$

$$Q'(X) = n X^{n-1}$$

$$\text{donc } x_k = \frac{1}{n \omega_k^{n-1}}$$

Car  $\omega_k^n = 1$

$$= \frac{\omega_k}{n}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k / n}{X - \omega_k}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k}$$

Rq: avec l'autre formule on avait trouvé

$$x_k = \frac{1}{(\omega_0 - \omega_k)(\omega_{k-1} - \omega_k)(\omega_{k+1} - \omega_k) \dots (\omega_{n-1} - \omega_k)}$$

④ Exemple : soit  $n \geq 1$  et

$$F(x) = \frac{1}{x^n - 1} ; \quad P(x) = 1$$

$$Q(x) = x^n - 1$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} (x - \omega_k)$$

avec  $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$

## ⑥ DES SUR $\mathbb{R}$

Théorème : Soit  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(x) \setminus \{0\}$

sous forme irréductible

On sait que  $Q$  peut s'écrire

$$Q(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_m)^{m_m} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\eta_1} \cdots (x^2 + p_\ell x + q_\ell)^{\eta_\ell}$$

avec le  $a_i, p_i, q_i \in \mathbb{R}$

et les  $m_i, \eta_i \in \mathbb{N}^*$

et chaque  $x^2 + p_i x + q_i$  irréductible sur  $\mathbb{R}$   
(càd avec  $\Delta < 0$ )

Alors  $F$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$F = E + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \frac{x_{ij}}{(x - a_i)^j} + \sum_{i=1}^\ell \sum_{j=1}^{\eta_i} \frac{p_{ij}x + q_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}$$

Avec  $E \in \mathbb{R}[X]$  la partie entière et les  
 $x_{ij}, p_{ij}, v_{ij} \in \mathbb{R}$

$\exists !$  = il existe unique

### ① Exemples

a)  $F = \frac{x^3 + x + 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$

•  $x^2 + x + 1$  est irréductible sur  $\mathbb{R}$

car  $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

•  $\deg F = 3 - (2 + 1) < 0$  donc la partie entière est nulle

• Donc  $\exists! (a, b, c, d, e, f, g, h) \in \mathbb{R}^8$

$$F = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{(x^2+x+1)^3} + \frac{ex+f}{(x^2+x+1)^2} + \frac{gx+h}{x^2+x+1}$$

b)  $F = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2(x^2 + 1)}$

•  $\deg F < 0$  donc la partie entière dans la DES est nulle

•  $x^2 + 1$  est irred sur  $\mathbb{R}$  car  $\Delta = -1 < 0$

Donc  $\exists! (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$   $F = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2(x^2 + 1)} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2 + 1}$

• a et b se calculent comme en section 5

\* Pour a, on multiplie  $\oplus$  par  $(x-1)^2$  et on évalue en 1 :

$$\frac{1^2 + 1+1}{x^2+1} \underset{x=1}{=} a \quad \text{càd } a = \frac{3}{2}$$

\* Pour b cherchons  $\lim_{x \rightarrow c} (x F(x))$

$$x \rightarrow c F(x) = \frac{x(x^2+x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$\frac{a \rightarrow c}{(x-1)^2} + \frac{b \rightarrow c}{x-1} + \frac{c(x \rightarrow c+d)}{x^2+1}$$

Faisons  $x \rightarrow +\infty$

$$0 = 0 + b - c \quad b = -c$$

• Calculons c et d

\* Technique  $n \stackrel{e}{=} 1$

On multiplie  $\oplus$  par  $x^2+1$  :

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} = (x^2+1) \left[ \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} \right] + cx+d$$

puis on évalue en  $X=i$

$$\frac{i^2 + i + 1}{(i-1)^2} = 0 + ci + d$$

$$\text{cad } ci + d = \frac{i}{-1 - 2i + 1} = -\frac{1}{2}$$

Donc en identifiant parties réelles et imaginaire on obtient

$$d = -\frac{1}{2} \text{ et } c=0$$

$$\underline{\text{CCL: }} F = \frac{3/2}{(X-1)^2} + \frac{-1/2}{X^2+1}$$

### \* Technique $\stackrel{?}{=} 2$

$$\text{On écrit } F = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2(x-i)(x+i)} = E + \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{\lambda}{x-i} + \frac{\mu}{x+i}$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  (et a priori,  $a, b \in \mathbb{C}$ )  
mais Thm 4  $\Rightarrow a, b \in \mathbb{R}$

$E, a, b$  se calculent comme avant

Pour calculer  $\lambda$ , on multiplie  $\otimes$  par  $x-i$  et on évalue en  $i$ :

$$\frac{i^2 + i + 1}{(i-1)^2(i+i)} = \lambda \quad \text{d'où } \lambda = \frac{i}{4}$$

Comme  $F \in \mathbb{R}(X)$  on a  $\overline{F(X)} = F(X)$

Donc

$$\begin{aligned} & \overline{E} + \frac{\overline{a}}{(x-1)^2} + \frac{\overline{b}}{x-1} + \frac{\overline{\lambda}}{x+i} + \frac{\overline{\mu}}{x-i} \\ & \quad \cancel{\overline{a}} \quad \cancel{\overline{b}} \quad \cancel{\overline{\lambda}} \quad \cancel{\overline{\mu}} \\ & = E + \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{\lambda}{x-i} + \frac{\mu}{x+i} \end{aligned}$$

égalise 2 à  
2 car unicité  
DES

Pour unicité de la DES, on en déduit que

$$\begin{aligned} \overline{E} &= E \quad (\Rightarrow E \in \mathbb{R}[x]) \\ \begin{cases} \overline{a} = a \\ \overline{b} = b \end{cases} &\Rightarrow a, b \in \mathbb{R} \\ \overline{\lambda} &= \mu \quad \rightarrow \text{d'où } \mu = -\frac{i}{4} \\ (\overline{\mu} &= \lambda) \end{aligned}$$

$$\text{Alors } \frac{x}{x-i} + \frac{\mu}{x+i} = -\frac{i}{4} \left[ \underbrace{\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}}_{x+i-x-i} \right]$$

$$\frac{x^2+1}{x^2+1}$$

$$= \frac{-1}{2} \frac{1}{x^2+1}$$

✓

## ⑦ PÔLE D'ORDRE n ET DL

Dans le cas d'un pôle réel d'ordre  $n$ , on a qqch comme

$$F = \frac{\lambda_m}{(x-a)^n} + \dots + \frac{\lambda_1}{x-a} + G,$$

avec  $G$  sans pôle en  $a$ . On peut obtenir tous les  $\lambda_i$  d'on coup grâce à  $DL_n$

$$\begin{aligned} Ex: \frac{x+1}{(x-1)^3(x^2+x+1)} &= E - \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{dx+e}{x^2+x+1} \\ &= 0 \\ \text{car } \deg F < 0 \end{aligned}$$

On multiplie par  $(x-1)^3$

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + (x-1)^3 \frac{dx+e}{x^2+x+1}$$

Posons  $X = 1+h$ , c'd  $X-1=h$ :

$$\begin{aligned} \frac{1+h+1}{(1+h)^2+(1+h)+1} &= a + bh + ch^2 + h^3 \frac{d(h+1)+e}{(1+h)^2+(1+h)+1} \\ f(h) &= o(h^2) \text{ quand } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\text{car } h \frac{\frac{d(1+h)+e}{(1+h)^2+(1+h)+1}}{h \rightarrow 0} \rightarrow 0$$

Le membre de droite est donc le  $DL_0(0)$   
 du membre de gauche,  
 et on identifie les coeffs :

$$\begin{aligned} \text{Or } f(h) &= \frac{2+e}{3+3h+h^2} \\ &= \frac{1}{3} \left( 2 + h + o(h^2) \right) \times \frac{1}{9+6h+\frac{h^2}{3}+o(h^2)} \\ &= \frac{1}{3} \left( 2 + h + o(h^2) \right) \left( 1 - \left( h + \frac{h^2}{3} \right)^2 + \left( h + \frac{h^2}{3} \right)^2 + o(h^2) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( 2 + h + o(h^2) \right) \left( 1 - h - \frac{h^2}{3} + h^2 + o(h^2) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( 2 + h + o(h^2) \right) \left( 1 - h + \frac{2}{3} h^2 + o(h^2) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( 2 - 2h + \frac{4}{3} h^2 + h - h^2 + o(h^2) \right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{h}{3} + \frac{h^2}{3} + o(h^2) \end{aligned}$$

Par unicité du  $DL$ ,  
 on en déduit

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = -\frac{1}{3}, \quad c = \frac{1}{3}$$