CHAPITRE 4 : LES MATRICES

On considère un corps K.

1) GENERALITÉS

1.1 Définitions :

① Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$
Une matrice est une famille de np éléments de K, indexée par $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Dans la pratique, on écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

n lignes
p colonnes

Ex : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 20 & 23 \end{pmatrix}$

Parfois, on note $A_{i,j}$ le coeff de A situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne.

L'ensembles des matrices de taille $n \times p$ est noté $M_{n,p}(K)$

Quand $p=n$, on parle de matrices carrées et on note simplement $M_n(K)$

2) Si $n=1$, on parle de matrice-ligne

Ex : $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbb{R})$

Si $p=1$, on parle de matrice-colonne

Ex : $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 27 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

3) La matrice nulle est la matrice formée seulement de 0

$$0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(autrement dit, $\forall i,j,\ (0_{n,p})_{i,j} = 0$

4) Si $n=p$, la matrice identité est

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son terme d'indice (i,j)

est $(I_n)_{i,j} = \delta_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\longrightarrow$ « Symbôle de Kronecker »

Autrement dit, $(I_n)_{i,j} = 1$ si $i=j$
c.à.d si on est sur la diagonale
et $(I_n)_{i,j} = 0$ sinon

⑤ Pour les matrices carrées, on dit qu'une matrice diagonale si elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ici, le terme d'indice i,j est

$\begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \lambda_i & \text{si } i=j \end{cases}$; c'est donc $\lambda_i \delta_{i,j}$

vie de pd merci

Une matrice <u>triangulaire supérieure</u> est une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(càd $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$)

(6) Si $A \in M_{n,p}(K)$, sa <u>transposée</u> est la matrice ${}^tA \in M_{p,n}(K)$ dont le terme général est $({}^tA)_{ij} = A_{ji}$

Cela revient à recopier en colonnes les lignes de A.

<u>Ex</u> : Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Dans le cas d'une matrice carrée, cela revient à faire une symétrie par rapport à la diagonale

Si A est carré et que

- ${}^tA = A$, on dit que A est <u>symétrique</u>
- ${}^tA = -A$ on dit que A est <u>antisymétrique</u>

<u>Ex</u> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & 4 \\ -7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est antisym

(si ${}^tA = -A$, alors $\forall i,j$, $a_{ji} = -a_{ij}$
donc en particulier $a_{ii} = -a_{ii}$, càd $a_{ii} = 0$)

① On définit sur $M_{m,p}(K)$ deux lois

a) Une addition : si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$,
alors on pose $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

<u>Ex :</u> $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

On a alors $\forall A \in M_{n,p}(K)$, $A + O_{n,p} = O_{n,p} + A = A$

On dit que $O_{n,p}$ est un élément neutre pour la loi $+$

6) Un produit externe :

Si $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$ et $\lambda \in K$, on pose

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Ex : $-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

On a alors

le 0 de K

le 0 de $M_{n,p}(K)$

$\forall A \in M_{n,p}(K)$, $\quad 0 \cdot A = 0_{n,p}$

$\forall \lambda \in K$, $\quad \lambda \cdot 0_{n,p} = 0_{n,p}$

On note aussi $-A = -1 \cdot A$

Ex : $-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

On note alors $A - B$ pour $A + (-B)$

Cela revient à soustraire coeff par coeff

ⓒ Muni de $+$ et de $\cdot$, $M_{n,p}(K)$ est un Espace Vectoriel sur K ; essentiellement, cela signifie qu'on peut faire des combinaisons linéaires d'éléments de $M_{n,p}(K)$:
$\lambda A + \mu B$

$$\begin{cases} (i) & \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A \\ (ii) & \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \\ (iii) & (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A \\ (iv) & 1 \cdot A = A \end{cases}$$

ⓓ ⚠ On ne peut pas additionner de matrices de tailles différentes

② On appelle <u>matrice de la base canonique</u> toute matrice de type

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a des zéros partout sauf en position (i,j) où il y a un 1.

Le terme de position (k,l) est donné par

$$(E_{i,j})_{k,l} = \delta_{ik}\,\delta_{jl}$$

En effet :

En effet : $\delta_{ik}\delta_{jl} = \begin{cases} 0 \text{ si } \delta_{ik} = 0 \text{ ou } \delta_{jl} = 0 \\ 1 \text{ si } \delta_{ik} = 1 \text{ et } \delta_{jl} = 1 \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \text{ ou } j \neq l \\ 1 \text{ si } i = k \text{ et } j = l \end{cases}$

Prop : Toute Matrice de $M_{n,p}(K)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire dans $E_{i,j}$

Preuve Dans le cas $n = p = 2$

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(K)$

$$A = a_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + a_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}} + a_{21} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}} + a_{22} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}}$$

Plus généralement,

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}}$$

③ a) **Prop :** la transposition est une application linéaire, càd

$$\forall \lambda \in K,\ \forall A, B \in M_{n,p}(K),\ {}^t(\lambda A + B) = \lambda\, {}^tA + {}^tB$$

comb linéaire

Autrement dit, la transposée d'une CL est la CL des transposées

Preuve ✱ Exigible

On doit montrer une égalité entre matrices : cela revient à montrer que chacun des coeffs en position (i,j) sont égaux entre eux, càd que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ \left({}^t(\lambda A + B)\right)_{i,j} = (\lambda\, {}^tA + {}^tB)_{i,j}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\left({}^t(\lambda A + B)\right)_{i,j} &= (\lambda A + B)_{j,i} && \text{$({}^tC)_{i,j} = C_{j,i}$ par def de la transposée} \\
&= \lambda A_{j,i} + B_{j,i} && \text{Par def de } \lambda A + B \\
&= \lambda ({}^tA)_{i,j} + ({}^tB)_{i,j} && \text{Par def de } {}^tA \text{ et } {}^tB \\
&= (\lambda\, {}^tA + {}^tB)_{i,j} && \text{par def de + et .}
\end{aligned}$$

□

Remarque :
- Avec $B = 0_{(n,p)}$, cela donne
  $\forall \lambda \in K, \forall A \in M_{n,p}(K),\ {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$
- Soient $\lambda, \mu \in K$; $A, B \in M_{n,p}(K)$
  $${}^t(\lambda A + \underbrace{(\mu B)}_{B'}) = \lambda\, {}^tA + \underbrace{{}^t(\mu B)}_{\mu\, {}^tB})$$
  grâce à la prop ${}^t(\lambda A + B') = \lambda\, {}^tA + {}^tB'$
  grâce à
  $$= \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB$$

b) La transposition est involutive,
càd $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ ${}^t({}^tA) = A$

Preuve : * Exigible (Faites qu'elle tombe par pitié)

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ {}^t({}^tA)_{ij} = ({}^tA)_{ji} = A_{ij}$$

Par def de la transposée

$\square$

2. MULTIPLICATION DE MATRICES

2.1 Définitions

(1) Soient $L = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_p)$

et $C = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ avec le $\underbrace{\hat{m}}$ nbre de composants

On note $L \cdot C = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_p y_p$

$$= \sum_{k=1}^{p} x_k y_k$$

C'est le « Produit scalaire » de L par C

(2) (a) Soient $A \in M_{n,p}(K)$ et $B \in M_{p,q}(K)$

⚠ Le nbre de colonnes de A est égal au nbe de lignes de B

On ne définit le produit AB que dans ce cas là

⚠

(b) Soient $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A : $L_1 = (a_{11}\ a_{12} \dots a_{1p})$

$C_1, \dots, C_q$ les colonnes de B $C_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix}$

La matrice $C = AB$ est définie comme la matrice de $M_{m,q}(K)$

tq $\forall i,j$, $C_{ij} = L_i \cdot C_j$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

(3) Exemples

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- $\underset{33}{B}\ \underset{23}{A}$ $\quad \underbrace{33 \quad 23}_{\neq}$ Donc le produit n'est pas défini

- $\underset{23}{A}\ \underset{33}{B}$ $\quad \underbrace{23\ 33}_{=}$ Donc le produit existe et est de taille 2×3

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

L_1C_1

$$= \begin{pmatrix} 2\times(-1) + 4\times 1 + (-1)\times 2 & 2\times 0 + 4\times 1 + (-1)\times(-1) & 2\times 1 + 4\times 1 + (-1)\times(-1) \\ -1\times(-1) + 0\times 1 + 2\times 2 & (-1)\times 0 + 0\times 1 + 2\times(-1) & (-1)\times 1 + 0\times 1 + 2\times(-1) \end{pmatrix}$$

L_2C_1

$$= \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

$2\,\underbrace{4\;4}\,2$ ✓

$BA = \begin{pmatrix} 7 & -9 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 7 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

③ Prop : Si A, B inversibles,

a) A^{-1} aussi et $(A^{-1})^{-1} = A$

b) AB ______ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c) A^m ______ $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$

$= A^{-m}$

Preuve : * Exigible

a) Comme A est inversible, on sait que
$AA^{-1} = A^{-1}.A = I_n$

On peut donc écrire

$A^{-1}.B = BA^{-1} = I_n$

avec $B = A$

Cela montre que A^{-1} est inversible,
et que $(A^{-1})^{-1} = A$

b) Posons $C = B^{-1}A^{-1}$

Alors $(AB).C = A\underbrace{BB^{-1}}_{I_n}A^{-1} = AA^{-1} = I_n$

Et $C.(AB) = B^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_{I_n}B = B^{-1}B = I_n$

Cela montre que AB est inversible et que $(AB)^{-1} = C = B^{-1}A^{-1}$

c) Par récurrence sur n :

- $n=0$: $A^0 = I_n$ est bien inversible, d'inverse $I_n^{-1} = I_n = (I_n^{-1})^0$

* $P(m-1) \Rightarrow P(m)$

Soit $m \geq 1$. Mq

On a $A^m = A^{m-1} \cdot A$

Par HR, A^{m-1} est inversible, d'inverse $(A^{-1})^{m-1}$; par hypothèse, A est inversible

donc par (b), $A^{m-1} \cdot A$ est inversible, d'inverse $A^{-1} \cdot (A^{-1})^{m-1}$
$= (A^{-1})^m$

$\square$

Rq : Autre preuve pour (c)

$$A^m \times (A^{-1})^m = A \times A \times \dots \times A \times \underbrace{A \times A^{-1}}_{= I_n} \times A^{-1} \times A^{-1}$$

$= I_n$

etc...

Autre pt de vue :

Comme A et A^{-1} commutent.
On peut écrire

$$A^m \times (A^{-1})^m = (A \times A^{-1})^m$$
$$= I_n^m$$
$$= I_n$$

Rq : Si A est inversible et B est non inversible, alors AB est non inversible.
(car si AB était inversible, alors $A^{-1} \times AB = B$ le serait aussi

④ Prop : si A est inversible, alors ${}^tA$ aussi et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

En effet : ${}^tA \times {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1} \times A)$ (car ${}^t(BC) = {}^tC\,{}^tB$)

$= {}^tI_n$

$= I_n$

De même, ${}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA = {}^t(A \times A^{-1})$

$= {}^tI_n$

$= I_n$

Cela montre que ${}^tA$ est inversible et que $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

□

⑤ Prop : Soit A est inversible.

- Si $AB = AC$, alors $B = C$

- En particulier, si $AB = O_n$, alors $B = O$

Preuve : Si $A = AC$, alors $A^{-1} . AB = A^{-1} AC$

$$I_n B = I_n C$$
$$B = C$$

$\square$

⑥ Si A possède une colonne (ou une ligne) de 0, alors elle n'est pas inversible.

Preuve : supposons par exemple que la première colonne soit nulle

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $E_{11} = 0$

car $AE_{11} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{2n} & \cdots & a_{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$

Comme $E_{11} \neq 0$ et $AE_{11} = 0$,

A ne peut pas être inversible d'après ⑤ $\square$

3. MATRICES ÉCHELONNÉES, ALGO DE GAUSS

3.1 : Opérations élémentaires

① **Déf :** Les trois opérations élémentaires sur les lignes qu'on peut effectuer sur une matrice $A \in M_{n,p}(K)$ sont :

ⓐ Remplacer une ligne par un multiple non-nul d'elle même

$$L_i \longleftarrow \lambda L_i \quad (\lambda \in K^*)$$

ⓑ Échanger deux lignes

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

ⓒ Ajouter à une ligne un multiple d'une autre

$$L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j \quad (\lambda \in K)$$

Exple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow L_3 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 5/3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xleftarrow[L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

② Prop : L'opération ⓐ revient à multiplier à gauche A

par $D_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

$(\lambda \neq 0)$ en position (i,i)

• ——— (b) ———

par $S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & & \vdots & 1 \ddots 1 & \vdots & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

colone j

• ——— (c) ———

par $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & \lambda & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

colonne i

colome j

Preuve : par calcul.

Exple : $n = p = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\lambda c & b+\lambda d \\ c & d \end{pmatrix}$$

Rq : Appliquer l'opération (c) plusieurs fois de suite revient à ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres.

Ex :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1 + 2L_3 + 3L_4]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 15 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

revient à faire

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

puis $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$

puis $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_4$

③ Ces opérations peuvent aussi se faire sur les colonnes.

Elles reviennent à faire des multiplications à droite

par $D_i(\lambda)$, S_{ij} et ${}^tT_{ij}(\lambda)$

Ex : L'opération

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 + C_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Revient à faire $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_{23}(1) = {}^t(T_{32}(1))}$

Les matrices des opérations élémentaires sont inversibles avec

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) ; \quad S_{ij}^{-1} = S_{ij}$$

$$T_{ij}^{-1}(\lambda) = T_{ij}(-\lambda)$$

<u>Preuve</u> : par exple,

$$D_i(\lambda) D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1/\lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda \times \frac{1}{\lambda} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= I_n$$

3) a) Deux matrices A, B sont dites « équivalents en lignes » si on peut passer de l'une à l'autre par des opérations élémentaires sur les lignes, càd s'il existe des matrices élémentaires $M_1 \dots M_k$ telles que $B = M_1 \dots M_k A$

càd de type D_i, S_{ij}, T_{ij}.

Idem pour « équivalents en colonnes » : $B = A M_1 \dots M_k$

(b) Comme les M_i sont inversibles, $M_1 \dots M_k$ est inversible, et donc

A est inversible $\Leftrightarrow B$ est inversible

Conséquence : Si une des colonnes (ou lignes) est CL des autres, alors A n'est pas inversible

En effet, si p ex $C_1 = 2C_2 + 3C_4 + 0 \times C_3$ alors l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - (2C_2 + 3C_4)$

transforme A en une matrice dont la première colonne est nulle : elle est donc non inversible.

3.2 Algorithme de Gauss

(1) (a) Une matrice $A \in M_{n,p}(K)$ est échelonnée en lignes si :

- $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $L_i = 0 \Rightarrow \forall j > i, L_j = 0$
- $\forall i \in [\![1,n]\!]$, si a_{ij} est le premier coeff $\neq 0$ de L_i en partant de la gauche, alors tous les coeffs situés en dessous de a_{ij} sont nuls.
  Ce coeff a_{ij} est le pivot de L_i

Exples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ est échelonnée en lignes

Pivot de L_1

Pivot de L_2

Pivot de L_3

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ aussi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ non

(b) Si une matrice échelonnée a tous ses pivots égaux à 1 et tous les coeffs au dessus et en dessous égaux à 0, alors on dit qu'elle est <u>échelonnée réduite</u>

Exples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ est échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$ aussi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ aussi

c) Tout cela se transpose au cas des colonnes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$ est échelonnée en colonnes

Pivot de C_1 : tous les coeffs à sa droite sont nuls

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ est échelonnée réduite en colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ aussi

② a) Théorème : Toute matrice est équivalente en lignes à une matrice échelonnée (réduite) en lignes

« Démo » (algo de Gauss) soit $A \in M_{n,p}(K)$

- On regarde la première colonne de A : si elle est nulle, il n'y a rien à faire.
  Sinon, on considère un coeff $\neq 0$ et on l'utilise pour les calculs :

  * On le met le plus haut que l'on peut par échange de lignes.

  * On l'utilise pour détruire les coeffs en dessous et au dessus

  * On le ramène à 1

- On passe à la colonne suivante et on recommence

Rq : 1- Les étapes orange sont utiles surtout pour obtenir une matrice échelonnée réduite

2. Parfois, on adapte un peu dans les cas concrets

3. Il y a unicité de la forme échelonnée réduite (admis).

b) <u>Exple :</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ \boxed{3} & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrows L_2} \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$ échelonné

$L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_3]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xleftarrow{L_1 \leftarrow 1/3 L_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

échelonnée réduite

③ La même methode s'applique pour les colonnes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2 \leftarrow \frac{1}{3} C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + C_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow -\frac{1}{2} C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 4C_3}]{C_1 \leftarrow C_1 - C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ÉCHELONNÉE RÉDUITE !

3.3 Calcul de l'inverse d'une matrice

① **Prop :** Soit $A \in M_n(K)$
Alors A est inversible ssi elle est equivalente (en lignes ou en colonnes) à I_n

Preuve : Soit A inversible. On considère sa forme échelonnée réduite en lignes
C'est une matrice A' equivalente en ligne à A

A' est
- ech réduite
- carrée
- inversible (car A est inversible

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

Il ne peut y avoir de colonnes nulles dans A' (sinon elle serait non inversible)

donc $\underline{A' = I_n}$.

- Reciproquement, si A est equivalente en lignes à I_n, il existe des matrices élementaires $M_1', \dots, M_k$

tq $\underbrace{M_1 \dots M_k}_{= M,\ \text{matrice inversible}} A = I_n$

On a alors

$A = M^{-1} \times I_n$ elle est inversible, d'inverse $A^{-1} = M = M \times I_n$
$= M_1 \dots M_k I_n$

(2) Comme les M_i correspondent aux opérations élementaires faite sur A jusqu'à obtenir I, le fait que $A^{-1} = M_1 \dots M_k I_n$ montre qu'on obtient concrètement A^{-1} en faisant les mêmes opérations élementaires sur I

Ex : inversibilité et inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_3]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Cela montre que A est inversible

et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Rq</u> : On vérifie que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ex : inversibilité et inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} ?$$

③ Si, au cours de l'algo, on tombe sur une matrice avec une ligne ou une colonne de 0, alors elle est non inversible. Mais si on tombe sur une forme échelonnée avec tous les pivots $\neq 0$, alors elles est inversible ♡

④ On peut travailler avec les lignes et les colonnes, mais on ne mélange pas les deux.

⑤ Une matrice triangulaire est inversible ssi tous ses coeffs diag sont $\neq 0$; et l'inverse est triang sup, avec coeffs diag égaux aux inverses des coeffs diag de départ

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ est inversible}$$

ssi $\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n \neq 0$, auquel cas

T^{-1} est de la forme $$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & & * \\ & 1/\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$$

Si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors D est inversible

ssi $\forall i, \lambda_i \neq 0$, auquel cas

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$$

4 MATRICES ET SYSTÈMES LINÉAIRES

4.1 Exemple de système linéaire

1) On considère le système

$$(S) \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2x - y + 3z + t = 0 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

C'est un système linéaire homogène car toutes les équations sont de la forme
$ax + by + cz + dt = 0$

(pas de x^2 ou $\sqrt{y}$, ou $\exp(z)$, etc) linéaire $\longrightarrow$ forme des membres de gauche

homogène $\longrightarrow$ le membre de droite est 0

Ce système s'écrit aussi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

, càd $AX = 0_{3,1}$,

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

Soit $\mathcal{S} = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2x - y + 3z + t = 0 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \right\}$

et $\ker A = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\hookrightarrow$ le « noyau » de A

On a donc $\mathcal{S} = \ker A$

② Pour « bien » résoudre un système linéaire, on fait des opérations élémentaires sur les équations.

<u>Ex</u> : (S) $\iff$
$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ y + z - t = 0 & E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1 \\ -y + 2z - 2t = 0 & E_3 \leftarrow E_3 - E_1 \end{cases}$$

Le nouveau système s'écrit $A'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

avec $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

A' est la matrice obtenue par

$$A \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}]{} A'$$

Donc faire des opérations élémentaires sur les éqs de (S) revient à faire les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de A.

Chaque matrice obtenue ainsi à partir de a correspond à un système équivalent à (S)

③ En particulier, si on échelonne-réduit en lignes A, cela va donner un système équivalent très simple.

Ici on trouve

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $(S) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \quad = 0 \\ y \quad = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

On a moins d'eqs que d'inconnues

On va exprimer certaines de ces dernières en fonction des autres

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = 0 \quad (= 0 \times t) \\ z = t \end{cases}$$

On a résolu (S) !

écriture implicite de $\mathcal{Y}$

$$\mathcal{Y} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x-y+z+t=0 \\ 2x-y+3z+t=0 \\ x-2y+3z-t=0 \end{cases}\right\} = \{(-2t,0,t,t) \mid t\in\mathbb{R}\}$$

$$= \left\{(x,y,z,t \;\middle|\; \begin{cases} x=-2t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}\right\}$$

écriture explicite (des éléments) de $\mathcal{Y}$

on sait maintenant que

$(-2,0,1,1)$ ($t=1$) est solution, ou $(4,0,-2,2)$ ($t=2$) ou $(-2\pi,0,\pi,\pi)$, etc ($t=3$)

Rq : On définit $+$ et $\cdot$ sur les éléments de $\mathbb{R}^4$

par $(x,y,z,t)+(x',y',z',t')$

$=(x+x', y+y', z+z', t+t')$

et $\lambda(x,y,z,t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$
$(\lambda\in\mathbb{R})$

Alors $\mathcal{Y} = \{t(-2,0,1,1) \mid t\in\mathbb{R}\}$

$\overset{\text{not.}}{=} \text{Vect}\left((-2,0,1,1)\right)$

L'ensemble des CL de $(-2,0,1,1)$

Autrement dit,

$(x,y,z,t) \in \mathcal{S} \iff \exists\, t \in \mathbb{R} \,/\, (x,y,z,t) = t(-2,0,1,1)$

Un tel t est alors unique :

si $t(-2,0,1,1) = t'(-2,0,1,1)$

$(-2t,0,t,t) = (-2t',0,t',t')$

donc $\begin{cases} -2t = -2t' \\ 0 = 0 \\ t = t' \\ t = t' \end{cases}$

donc $\underline{t = t'}$

Bilan : tout élément de $\mathcal{S}$ (ou de $\ker A$) s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de la famille $((-2,0,1,1))$

On dit que $((-2,0,1,1))$ est une base de $\mathcal{S}$ ou de $\ker A$.

① On regarde (S) $\begin{cases} x-y+z+t=2 \\ 2x-y+3z+t=3 \\ x-2y+3z-t=0 \end{cases}$

(S) s'écrit

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = Y$$

Faire des opérations élémentaires sur les éqs de (S) change aussi les membres de droite

On cherche donc à echelonner la « matrice augmentée »

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

On échelonne - réduit

$$\longrightarrow \dots \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

donc $(S) \iff \begin{cases} x + 2t = 3 \\ y = 0 \\ z - t = -1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -2t+3 \\ y = 0 \\ z = t-1 \end{cases}$

c à d $\mathcal{Y} = \{(-2t+3, 0, t-1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(-2t, 0, t, t) + (3, 0, -1, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{t(-2, 0, 1, 1) + (3, 0, -1, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Solution de l'éq triangulaire

Solution part de (S)

② Cela illustre le principe de superposition

Les solutions du système complet sont la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène

Autrement dit, soit X_0 une solution de (S) $AX_0 = Y$

Alors X vérifie $AX = Y$ ssi $\begin{cases} AX = Y \\ AX_0 = Y \end{cases}$

ssi $\begin{cases} AX - AX_0 = 0 \\ AX_0 = Y \end{cases}$

ssi $\begin{cases} A(X - X_0) = 0 \\ AX_0 = Y \end{cases}$

ssi $\begin{cases} X - X_0 \text{ est solution du sys homogène} \\ AX_0 = Y \end{cases}$

ssi $\begin{cases} X = X_0 + \text{solution du sys homogène} \\ AX_0 = Y \end{cases}$

4.3 Autre exemple de système homogène

$$(S)\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + 3z + t = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

La matrice associée

ssi $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On échelonne-réduit

On trouve

$$A \to \dots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $(S) \iff \begin{cases} x + 2z + 2t = 0 \\ y + z + t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x = -2z - 2t \\ y = -z - t \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x = -2z - 2t \\ y = -z - t \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ (-2z - 2t, -z - t, z, t) \;\middle|\; z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ z(-2,-1,1,0) + t(-2,-1,0,1) \;\middle|\; z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\big((-2,-1,1,0), (-2,-1,0,1) \big)$$

Autrement dit,

$(x,y,z,t) \in \mathcal{S} \iff \exists\, z,t \in \mathbb{R}\, /$

$$(x,y,z,t) = z(-2,-1,1,0) + t(-2,-1,0,1)$$

On peut vérifier que z et t sont uniques

donc on dit que

$\big((-2,-1,1,0),\ (-2,-1,0,1)\big)$ est une base de $\ker A$.

<u>Remarque :</u> en suivant cette technique, on trouve toujours une base de $\ker A = \mathcal{S}$

4.4 Exemples avec une matrice carrée

① Soit $(S) : \begin{cases} x + y + 7z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ -x - 3y - 9z = 0 \end{cases}$

càd $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, càd $AX = 0$

On échelonne A : $A \longrightarrow \dots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5$

Donc $(S) \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

donc $\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}$

Cohérent avec le fait A est inversible, donc que $AX = 0 \iff X = 0$

Rq : exple 4.3 $\mathcal{S} = \text{Vect}\left((-2,-1,1,0),\ (-2,-1,0,1)\right)$ dimension 1

4.1 $\mathcal{S} = \text{Vect}\left((-2,0,1,1)\right)$ dimension 2

4.4 $\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}$ dimension 0

② Soit $(S) : \begin{cases} x + y + 7z = -1 \\ 2x - y + 5z = -1 \\ -x - 3y - 9z = -5 \end{cases}$

càd $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, càd $AX = Y$

On échelonne la matrice augmentée

$$\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{matrix}\right) \longrightarrow \dots \longrightarrow \left(I_3 \,\middle|\, \begin{matrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{matrix}\right)$$

Donc $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{cases}$

donc $\mathcal{S} = \{(6, 4, -1)\}$

Cohérent avec le fait A est inversible, donc que $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$

4.5 Systèmes carrés et inversibilité

Théorème : Soit $A \in M_n(K)$

$\hookrightarrow$ Propositions suivantes sont équivalentes

① A est inversible

② L'équation $AX = 0_{n,1}$, d'inconnue $X \in M_{n,1}(K)$ admet $0_{n,1}$ comme unique solution

③ L'équation $AX = Y$, d'inconnue $X \in M_{n,1}(K)$ admet une unique solution (donnée par $X = A^{-1}Y$)

Preuve : ① $\Rightarrow$ ③ : Si A est inversible on a bien $AX = Y \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}Y$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}Y$

③ $\Rightarrow$ ② : Avec $Y = 0_{n,1}$, ③ dit bien que $AX = 0$ a pour solution $X = A^{-1} \times 0 = 0$

② $\Rightarrow$ ① : Soit A' la matrice échelonnée-réduite en lignes équivalente à A.

Comme la seule solution de $AX=0$ est $X=0$, le système $AX=0$ est equivalent à

$$\begin{cases} x_1 & = 0 \\ \quad x_2 & = 0 \\ \qquad \ddots & \\ \qquad\quad x_n & = 0 \end{cases}$$

or ce système correspond à A' : c'est que $A' = I_n$

Donc A est inversible.

$\square$

Remarque : Cela signifie que si on a inversé un système, on a inversé la matrice

Ex : $(S) \begin{cases} x + y = a \\ 2x - y = b \end{cases}$

$Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$AX = Y$

$(S) \underset{E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = a \\ -3y = -2a + b \end{cases}$

$\underset{E_2 \leftarrow \frac{1}{3}E_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = a \\ y = \frac{2}{3}a - \frac{b}{3} \end{cases}$

$\underset{E_1 \leftarrow E_1 - E_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b \\ y = \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b \end{cases}$

$X = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

Exercice : Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$$

A est inversible ssi $ad - bc \neq 0$

Auquel cas $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

4.6 Conditions de compatibilité image.

① Soit

$$(S) \begin{cases} x + 4y + 3z = a \\ x + 3y + 2z = b \\ \quad\;\; y + z = c \end{cases}$$

avec $a, b, c \in K$ des paramètres

Échelonnons :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & a \\ 1 & 3 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & a \\ 0 & -1 & -1 & -a+b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & a \\ 0 & -1 & -1 & -a+b \\ 0 & 0 & 0 & -a+b+c \end{array}\right)$$

Ainsi,

$$(S) \Leftrightarrow (S') \begin{cases} x + 4y + 3z = a & (1) \\ \quad -y - z = -a + b & (2) \\ \quad\;\; 0 = -a + b + c & (3) \end{cases}$$

Donc : Si (S) est vrai (càd s'il existe au moins une solution à (S)), alors (S') est vrai, et en particulier (3) est vraie, càd $-a+b+c=0$

- Réciproquement, supposons que $-a+b+c=0$
  Alors (3) devient
  $0=0$, et donc

$$(S) \iff \begin{cases} x+4y+3z=a \\ \quad\; -y+3z=a+b \end{cases}$$

Ce système a plus d'inconnues que d'éqs, donc il admet des solutions.

CCL : (S) admet des solutions ssi $-a+b+c=0$

② Def : Si $A \in M_n(K)$
son image est l'ensemble

$$\operatorname{Im} A = \{AX \mid X \in M_{n,1}(K)\} \subset M_{n,1}(K)$$

Avec l'exemple précédent $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4y+3z \\ x+3y+2z \\ y+z \end{pmatrix}$$

, donc $\mathrm{Im}\, A = \left\{ \begin{pmatrix} x+4y+3z \\ x+3y+2z \\ y+z \end{pmatrix} \middle| \, x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$

$$\mathrm{Im}\, A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4y \\ 3y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

C'est l'ensemble de toutes les CL des colonnes de A

- $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$

$$= \{ xC_1, yC_2, zC_3 \mid x,y,z \in \mathbb{R} \}$$

- Par exple on peut voir que $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$ est inchangé si on remplace un des C_i par une CL des autres.

Ex : $\mathrm{Vect}(C_1 + 2C_2 + C_3, \; C_2, C_3)$

$$= \{ x(C_1 + 2C_2 + C_3) + yC_2 + zC_3 \mid x,y,z \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ x'C_1 + y'C_2 + z'C_3 \mid x',y',z' \in \mathbb{R} \}$$

$= \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$

Donc, si échelonne A <u>en colonnes</u>, le vect reste tjrs inchangé

Ici, $A \longrightarrow \dots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Ces colonnes sont échelonnées : elles forment une « base » de $\mathrm{Im}\, A$.

Écriture implicite de $\mathrm{Im}\, A$

$$\mathrm{Im}\, A = \left\{ \begin{pmatrix} x + 4y + 3z \\ x + 3y + 2z \\ y + z \end{pmatrix} \middle| \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Alors $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\, A \iff \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4y + 3z \\ x + 3y + 2z \\ y + z \end{pmatrix}$

$\iff \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{cases} x + 4y + 3z = a \\ x + 3y + 2z = b \\ y + z = c \end{cases} \quad (S_{a,b,c})$

$\Leftarrow$ $(S_{a,b,c})$ admet (au moins)

cf supra une solution

$\Leftarrow$ $-a+b+c=0$

donc $\operatorname{Im} A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, -a+b+c=0 \right\}$

Cette écriture implicite est pratique pour tester l'appartenance à $\operatorname{Im} A$ de colonnes données.

Exple : Est-ce que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \notin \operatorname{Im} A$