Logique & Analyse **189–192** (2005), 33–41

UNE ÉLIMINATION DES COUPURES NE TOLÉRANT PAS L'EXTENSIONNALITÉ

MARCEL CRABBÉ

Résumé
Nous donnons un exemple de calcul des séquents pour un système de théorie des ensembles qui admet l'élimination des coupures sans règle d'extensionnalité mais ne l'admet plus avec elle.

Abstract
We give an example of a sequent calculus for a set-theoretic system admitting cut elimination without a rule for extensionality, but not when such a rule is present.

Introduction

Parmi les diverses tentatives de contourner le paradoxe de Russell, la théorie positive des ensembles développe l'idée que la négation ou la formation du complément est une des causes majeures du paradoxe, puisque l'ensemble des ensembles qui s'appartiennent n'est pas à lui seul source de contradiction.

Alors que la plupart des théories de ce type, qui ont été étudiées, sont formulées sans termes ensemblistes à l'aide d'axiomes, nous considérons ici le système qui se prête le plus naturellement à une formulation dans le calcul des séquents.

Les symboles du *langage* sont les variables, les connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$, le symbole binaire $\in$ et le formateur de termes $\{\ \mid\ \ \}$. Une *formule positive* est une formule construite avec les connecteurs « positifs » $\wedge$, $\vee$, $\forall$ et $\exists$, à partir de formules de base de la forme $P \in Q$, où P et Q sont des termes. Un *terme* est une variable ou une expression $\{\, x \mid A \,\}$, où A est une formule positive.

Un *séquent* $\Gamma \Vdash \Delta$ est un couple de multi-ensembles finis de formules. Un *séquent initial* est un séquent de la forme $P \in Q \Vdash P \in Q$. Aux règles usuelles du calcul des séquents de Gentzen, comme celles exposées dans [2], on ajoute les règles traduisant le schéma de compréhension :

$$\frac{\Gamma, A[x := P] \Vdash \Delta}{\Gamma, P \in \{\, x \mid A \,\} \Vdash \Delta} \in_G \qquad\qquad \frac{\Gamma \Vdash A[x := P], \Delta}{\Gamma \Vdash P \in \{\, x \mid A \,\}, \Delta} \in_D$$

Élimination des coupures sans extensionnalité

Le théorème d'élimination des coupures sera prouvé en montrant qu'on peut éliminer les coupures de formules positives. Cela suffira puisqu'en appliquant les méthodes standard d'élimination des coupures, on peut ramener toute dérivation à une dérivation dont les coupures sont des formules de base, donc positives.

La démonstration est une adaptation de la preuve du théorème 3.B.3. de [2]. Elle consiste à remplacer les traditionnelles inductions sur la longueur de la formule coupée et la longueur des dérivations, par une double induction sur des longueurs de dérivations. Cette méthode est applicable ici pour deux raisons, la première étant qu'une formule positive le reste si on y remplace une variable libre par un terme et qu'ainsi tout ancêtre d'une formule positive est encore positive, la seconde étant que les ancêtres d'une formule positive demeurent tous du même côté dans leurs séquents.

Proposition: *Soient* $A_1, \ldots, A_n$ *des formules positives,* σ *une dérivation sans coupures de*

$$\Gamma_0 \Vdash A_1, \ldots, A_n, \Delta_0$$

et, pour chaque $1 \leq i \leq n$*, une dérivation sans coupures* π_i *de*

$$\Gamma_i, A_i, \ldots, A_i \Vdash \Delta_i,$$

alors il existe une dérivation sans coupures d'un séquent $\Gamma \Vdash \Delta$*, d'où on peut déduire le séquent*

$$\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n \Vdash \Delta_0, \ldots, \Delta_n,$$

par règles structurales (contractions et atténuations) uniquement.

On démontre cela par induction principale sur la longueur (le nombre de séquents) de σ et secondaire sur la somme des longueurs des π_i.

1. Si σ est le séquent initial $A_1 \Vdash A_1$, alors $\Gamma \Vdash \Delta$ est $\Gamma_1, A_1, \ldots, A_1 \Vdash \Delta_1$.

2. σ se termine par une règle R n'introduisant pas un des A_i. Dans le cas le plus « difficile », celui d'une règle à deux prémisses :

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma_0^* \Vdash A_1, \ldots, A_k, \Delta_0^*\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \Gamma_0^{**} \Vdash A_{k+1}, \ldots, A_n, \Delta_0^{**}\end{matrix}}{\Gamma_0 \Vdash A_1, \ldots, A_n, \Delta_0}\ R$$

les dérivations sans coupures de

$$\Gamma_0^*, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k \Vdash \Delta_0^*, \Delta_1, \ldots, \Delta_k$$

et de

$$\Gamma_0^{**}, \Gamma_{k+1}, \ldots, \Gamma_n \Vdash \Delta_0^{**}, \Delta_{k+1}, \ldots, \Delta_n,$$

fournies par l'hypothèse d'induction principale, se prolongent par R en une dérivation sans coupures de

$$\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \Vdash \Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n.$$

3. σ se termine par une règle introduisant un des A_i, qu'on supposera être A_1.

3.1. Si σ se termine par une atténuation ou une contraction :

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma_0 \Vdash A_2, \ldots, A_n, \Delta_0\end{matrix}}{\Gamma_0 \Vdash A_1, \ldots, A_n, \Delta_0} \qquad \text{ou} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma_0 \Vdash A_1, A_1, \ldots, A_n, \Delta_0\end{matrix}}{\Gamma_0 \Vdash A_1, \ldots, A_n, \Delta_0}\ ,$$

l'hypothèse d'induction principale donne une dérivation sans coupures de

$$\Gamma \Vdash \Delta \equiv \Gamma_0, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n \Vdash \Delta_0, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$$

ou de

$$\Gamma \Vdash \Delta \equiv \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \Vdash \Delta_0, \Delta_1, \Delta_1, \ldots, \Delta_n.$$

C'est pour ce point-ci que n doit pouvoir être strictement supérieur à 1.

3.2. Si σ se termine par une règle non structurale introduisant la formule positive A_1, on passe à l'induction secondaire en examinant la dérivation π_1 de $\Gamma_1, A_1, \ldots, A_1 \Vdash \Delta_1$.

– Si celle-ci est réduite au séquent initial $A_1 \Vdash A_1$ et si $n = 1$, c'est immédiat. Sinon l'hypothèse d'induction secondaire donne une dérivation sans coupures de

$$\Gamma \Vdash \Delta \equiv \Gamma_0, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n \Vdash \Delta_0, A_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n.$$

– Si π_1 se termine par une règle R — qu'on supposera encore être à deux prémisses — n'introduisant aucun des A_1 :

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma_1', A_1, \ldots, A_1 \Vdash \Delta_1'\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \Gamma_1'', A_1, \ldots, A_1 \Vdash \Delta_1''\end{matrix}}{\Gamma_1, A_1, \ldots, A_1 \Vdash \Delta_1}\, R$$

alors, par l'hypothèse d'induction secondaire, on dispose de dérivations sans coupures de

$$\Gamma_0, \Gamma_1', \Gamma_2, \ldots \Gamma_n \Vdash \Delta_0, \Delta_1', \Delta_2, \ldots \Delta_n$$

et de

$$\Gamma_0, \Gamma_1'', \Gamma_2, \ldots \Gamma_n \Vdash \Delta_0, \Delta_1'', \Delta_2, \ldots \Delta_n,$$

d'où on tire une dérivation sans coupures de

$$\begin{aligned}\Gamma \Vdash \Delta \equiv \Gamma_0, \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n \Vdash&\\ \Delta_0, \Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Delta_2, \ldots, \Delta_n,&\end{aligned}$$

par la règle R.

– Si π_1 se termine par une atténuation ou une contraction introduisant un A_1 :

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma_1, A_1, \ldots, A_1 \Vdash \Delta_1\end{matrix}}{\Gamma_1, A_1, A_1, \ldots, A_1 \Vdash \Delta_1} \quad \text{ou} \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma_1, A_1, A_1, A_1, \ldots, A_1 \Vdash \Delta_1\end{matrix}}{\Gamma_1, A_1, A_1, \ldots, A_1 \Vdash \Delta_1}$$

le résultat découle directement de l'hypothèse d'induction secondaire. C'est pour ce dernier cas que $A_1, \dots, A_1$ ne peut être supposé réduit à une seule formule.

3.3. Il reste à examiner les cas cruciaux où A_1 est introduit par une règle positive droite dans σ et par une règle positive gauche dans π_1.

– A_1 est $B \wedge C$ et σ est

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \sigma_1^*\\ \Gamma_0^* \Vdash B, A_2, \dots, A_k, \Delta_0^*\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \sigma_2^*\\ \Gamma_0^{**} \Vdash C, A_{k+1}, \dots, A_n, \Delta_0^{**}\end{array}}{\Gamma_0 \Vdash B \wedge C, A_2, \dots, A_n, \Delta_0}\wedge_D$$

et π_1 est

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1, B, B \wedge C, \dots, B \wedge C \Vdash \Delta_1\end{array}}{\Gamma_1, B \wedge C, B \wedge C, \dots, B \wedge C \Vdash \Delta_1}\wedge_G$$

Par l'hypothèse d'induction secondaire, on a d'abord une dérivation sans coupures π_1' du séquent

$$\Gamma_0, \Gamma_1, B, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k \Vdash \Delta_0, \dots, \Delta_k.$$

En utilisant ensuite l'hypothèse d'induction principale avec les dérivations σ_1^*, π_1', $\pi_2, \dots, \pi_n$, on a une dérivation sans coupures de

$$\begin{aligned}&\Gamma \Vdash \Delta \equiv\\ &\quad \Gamma_0^*, \Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n \Vdash \Delta_0^*, \Delta_0, \dots, \Delta_k, \Delta_2, \dots, \Delta_n.\end{aligned}$$

– A_1 est $\exists x\, B$ et σ est

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \sigma^*\\ \Gamma_0 \Vdash B[x := P], A_2, \dots, A_n, \Delta_0\end{array}}{\Gamma_0 \Vdash \exists x\, B, A_2, \dots, A_n, \Delta_0}\exists_D$$

et π_1 est

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_1'}{\Gamma_1, B[x := a], \exists x\, B, \ldots, \exists x\, B \Vdash \Delta_1}}{\Gamma_1, \exists x\, B, \exists x\, B, \ldots, \exists x\, B \Vdash \Delta_1}\ \exists_G$$

On construit d'abord, par substitution de P à la variable propre a, une dérivation sans coupures $\pi_1'[a := P]$ du séquent

$$\Gamma_1, B[x := P], \exists x\, B, \ldots, \exists x\, B \Vdash \Delta_1,$$

de même longueur que π_1'. En appliquant l'hypothèse d'induction secondaire aux dérivations σ, $\pi_1'[a := P]$, $\pi_2, \ldots, \pi_n$, on a une dérivation sans coupures π_1'' du séquent

$$\Gamma_0, \Gamma_1, B[x := P], \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n \Vdash \Delta_0, \ldots, \Delta_n.$$

En utilisant ensuite l'hypothèse principale avec les dérivations σ^*, π_1'', π_2, ... , π_n, on a finalement une dérivation sans coupures de

$$\begin{aligned}&\Gamma \Vdash \Delta \equiv \\ &\qquad \Gamma_0, \Gamma_0, \ldots, \Gamma_n, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n \Vdash \Delta_0, \Delta_0, \ldots, \Delta_n, \Delta_2, \ldots, \Delta_n.\end{aligned}$$

Les autres cas peuvent tous être prouvés de façon semblable. □

L'extensionnalité

Cela n'aurait pas beaucoup de sens ici de représenter l'extensionnalité par un axiome comme

$$\forall x \forall y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow \forall z\, (x \in z \rightarrow y \in z)),$$

car celui-ci absorbe les coupures au sens de [1]. L'extensionnalité, écrite sans symbole d'égalité, sera donc formalisée par la règle

$$\frac{\Gamma_1, a \in P \Vdash a \in Q, \Delta_1 \quad \Gamma_2, a \in Q \Vdash a \in P, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A[c := P] \Vdash A[c := Q], \Delta_1, \Delta_2}$$

où la variable *propre* a n'est pas libre dans la conclusion.

Th. Libert (dans [5]) a démontré dans la théorie positive avec extensionnalité[1] que

$$\forall z \forall x \forall y\,(x \in z \to x \cup y \in z),$$

où $a \cup b$ est le terme $\{\, x \mid x \in a \vee x \in b \,\}$.

Sa preuve consiste à remarquer que si $a \in c$ et $a \cup b \notin c$, alors R :

$$\{\, x \mid \{\, y \mid y \in a \vee (y \in b \wedge x \in x) \,\} \in c \,\}$$

se comporte comme un ersatz de l'ensemble de Russell. En effet, si T est le terme $\{\, y \mid y \in a \vee (y \in b \wedge R \in R) \,\}$, alors $R \in R$ ssi $T \in c$. De sorte que, d'une part, si $R \in R$, alors T a les mêmes éléments que $a \cup b$ et, par extensionnalité, $a \cup b \in c$. Et, d'autre part, si $R \notin R$, alors T a les mêmes éléments que a et, à nouveau par extensionnalité, $a \notin c$ — contredisant cette fois encore l'hypothèse de départ.

Cette démonstration se traduit en calcul des séquents en opérant une coupure sur des dérivations sans coupures, mais avec la règle d'extensionnalité, des séquents $a \in c \Vdash R \in R$ et $R \in R \Vdash a \cup b \in c$. Plus explicitement, on obtient d'abord une dérivation sans coupures de

$$R \in R, T \in c \Vdash a \cup b \in c$$

en combinant, par extensionnalité, des dérivations évidentes de

$$v \in T \Vdash v \in a \cup b \quad \text{et de} \quad R \in R, v \in a \cup b \Vdash v \in T$$

Et on a ensuite pareillement une dérivation sans coupures de

$$a \in c \Vdash T \in c, R \in R$$

à partir de dérivations de

$$v \in a \Vdash v \in T \quad \text{et de} \quad v \in T \Vdash v \in a, R \in R$$

$a \in c \Vdash a \cup b \in c$ peut maintenant être dérivé avec une coupure :

[1] Des modèles non triviaux de cette théorie sont décrits dans [4] et [5].

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{a \in c \Vdash T \in c, R \in R}}{a \in c \Vdash R \in R, R \in R}\in_D}{a \in c \Vdash R \in R} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{R \in R, T \in c \Vdash a \cup b \in c}}{R \in R, R \in R \Vdash a \cup b \in c}\in_G}{R \in R \Vdash a \cup b \in c}$$
$$\overline{\qquad a \in c \Vdash a \cup b \in c \qquad}$$

Le séquent ainsi obtenu, $a \in c \Vdash a \cup b \in c$, n'est toutefois pas dérivable sans coupures, même avec la règle d'extensionnalité. On peut le voir à partir du fait suivant. Si un séquent sans quantificateurs et ne comportant pas d'autres terme ensembliste que $a \cup b$ est dérivable sans coupures, éventuellement avec la règle d'extensionnalité, alors il est valide dans la structure à deux éléments, formée de l'ensemble vide et de son singleton, avec la relation d'appartenance.

En résumé, nous avons établi le :

Théorème: *Tout séquent dérivable sans la règle d'extensionnalité est dérivable sans la règle de coupure (ni la règle d'extensionnalité).*
Il existe un séquent dérivable avec la règle d'extensionnalité mais non dérivable sans la règle de coupure.

Ce théorème reste valable avec la logique intuitionniste. Dans la preuve de l'élimination des coupures, on peut supposer $n = 1$ et sauter le cas de la contraction dans 3.1. En ce qui concerne l'addition de la règle d'extensionnalité, on constate que, même si le séquent $a \in c \Vdash a \cup b \in c$ ne semble pas intuitionnistement dérivable, $\neg a \cup b \in c \Vdash \neg a \in c$ en revanche l'est.

Pour terminer, il convient de rappeler que Grishin a démontré en 1974 l'élimination des coupures pour un système « prélinéaire » sans contractions et avec la compréhension illimitée. Il a ensuite montré, dans [3], que l'axiome d'extensionnalité entraîne la contraction. Dans la mesure où la règle d'extensionnalité permet de démontrer l'axiome de même nom, on peut donc en dériver les paradoxes. On obtient ainsi également un exemple d'un système ensembliste — mais avec une logique non classique — qui admet l'élimination des coupures sans règle d'extensionnalité, mais plus avec elle.

Université catholique de Louvain
Département de Philosophie
Place Mercier, 14
B–1348 Louvain-la-Neuve
E-mail: `crabbe@risp.ucl.ac.be`

RÉFÉRENCES

[1] CRABBÉ M., 'Cuts and Gluts', *Journal of Applied Non-Classical Logics* 15, à paraître, 2005.

[2] GIRARD J.-Y., *Proof theory and logical complexity I*, Studies in Proof Theory, Bibliopolis, Napoli, 1987.

[3] GRISHIN V.N., *Predicate and set-theoretic calculi based on the logic without contractions*, Mathematics in the USSR, Izvestija 18, pp. 41–59, 1981.

[4] HINNION R. et LIBERT TH., 'Positive abstraction and extensionality', *The Journal of Symbolic Logic* 68, pp. 828–836, 2003.

[5] LIBERT TH., *More studies on the axiom of comprehension*, Thèse de doctorat en mathématiques, Université libre de Bruxelles, 2004. À paraître comme volume 15 des *Cahiers du centre de logique*, 2005.