

数学模型习题解答

(第三版)

作者： 姜启源 谢金星 叶俊

目 录

第 1 章习题	1
第 1 章习题参考解答	3
第 2 章习题	6
第 2 章习题参考解答	10
第 3 章习题	16
第 3 章习题参考解答	19
第 4 章习题	24
第 4 章习题参考解答	30
第 5 章习题	44
第 5 章习题参考解答	48
第 6 章习题	57
第 6 章习题参考解答	59
第 7 章习题	65
第 7 章习题参考解答	67
第 8 章习题	70
第 8 章习题参考解答	73
第 9 章习题	79
第 9 章习题参考解答	81
第 10 章习题	85
第 10 章习题参考解答	91
第 11 章习题	94
第 11 章习题参考解答	96
第 12 章习题	100
第 12 章习题参考解答	102
第 13 章习题	106
第 13 章习题参考解答	107
综合题目	112
综合题目参考解答	127



第 1 章 习 题

1. 举出两个实例说明建立数学模型的必要性,包括实际问题的背景,建模目的,需要大体上什么样的模型以及怎样应用这种模型等.

2. 从下面不太明确的叙述中确定要研究的问题,要考虑哪些有重要影响的变量^[20]:

- (1) 一家商场要建一个新的停车场,如何规划照明设施.
- (2) 一农民要在一块土地上作出农作物的种植规划.
- (3) 一制造商要确定某种产品的产量及定价.
- (4) 卫生部门要确定一种新药对某种疾病的疗效.
- (5) 一滑雪场要进行山坡滑道和上山缆车的规划.

3. 怎样解决下面的实际问题,包括需要哪些数据资料,要作些什么观察、试验以及建立什么样的数学模型等^[20,26].

- (1) 估计一个人体内血液的总量.
- (2) 为保险公司制定人寿保险金计划(不同年龄的人应缴纳的金额和公司赔偿的金额).
- (3) 估计一批日光灯管的寿命.
- (4) 确定火箭发射至最高点所需的时间.
- (5) 决定十字路口黄灯亮的时间长度.
- (6) 为汽车租赁公司制订车辆维修、更新和出租计划.
- (7) 一高层办公楼有 4 部电梯,早晨上班时间非常拥挤,试制订合理的运行计划.

4. 在 1.3 节“椅子能在不平的地面上放稳吗”的假设条件中,将四脚的连线呈正方形改为呈长方形,其余不变.试构造模型并求解.

5. 模仿 1.4 节商人过河问题中的状态转移模型,作下面这个众所周知的智力游戏:人带着猫、鸡、米过河,船除需要人划之外,至多能载猫、鸡、米三者之一,而当人不在场时猫要吃鸡、鸡要吃米.试设计一个安全过河方案,并使渡河次数尽量地少.

6. 利用 1.5 节表 1 和表 3 给出的 1790—2000 年的美国实际人口资料建立下列模型:

- (1) 分段的指数增长模型.将时间分为若干段,分别确定增长率 r .

(2) 阻滞增长模型. 换一种方法确定固有增长率 r 和最大容量 x_m .

7. 说明 1.5 节中 Logistic 模型(9)可以表为 $x(t) = \frac{x_m}{1 + e^{-r(t-t_0)}}$, 其中 t_0 是人口增长出现拐点的时刻, 并说明 t_0 与 r, x_m 的关系.

8. 假定人口的增长服从这样的规律: 时刻 t 的人口为 $x(t)$, t 到 $t + \Delta t$ 时间内人口的增量与 $x_m - x(t)$ 成正比(其中 x_m 为最大容量). 试建立模型并求解. 作出解的图形并与指数增长模型、阻滞增长模型的结果进行比较.

9. 为了培养想象力、洞察力和判断力, 考察对象时除了从正面分析外, 还常常需要从侧面或反面思考. 试尽可能迅速地回答下面的问题:

(1) 某甲早 8:00 从山下旅店出发, 沿一条路径上山, 下午 5:00 到达山顶并留宿. 次日早 8:00 沿同一路径下山, 下午 5:00 回到旅店. 某乙说, 甲必在 2 天中的同一时刻经过路径中的同一地点. 为什么.

(2) 37 支球队进行冠军争夺赛, 每轮比赛中出场的每两支球队中的胜者及轮空者进入下一轮, 直至比赛结束. 问共需进行多少场比赛, 共需进行多少轮比赛. 如果是 n 支球队比赛呢.

(3) 甲乙两站之间有电车相通, 每隔 10 分钟甲乙两站相互发一趟车, 但发车时刻不一定相同. 甲乙之间有一中间站丙, 某人每天在随机的时刻到达丙站, 并搭乘最先经过丙站的那趟车, 结果发现 100 天中约有 90 天到达甲站, 约有 10 天到达乙站. 问开往甲乙两站的电车经过丙站的时刻表是如何安排的.

(4) 某人家住 T 市在他乡工作, 每天下班后乘火车于 6:00 抵达 T 市车站, 他的妻子驾车准时到车站接他回家. 一日他提前下班搭早一班火车于 5:30 抵 T 市车站, 随即步行回家, 他的妻子像往常一样驾车前来, 在半路上遇到他, 即接他回家, 此时发现比往常提前了 10 分钟. 问他步行了多长时间.

(5) 一男孩和一女孩分别在离家 2 km 和 1 km 且方向相反的两所学校上学, 每天同时放学后分别以 4 km/h 和 2 km/h 的速度步行回家. 一小狗以 6 km/h 的速度由男孩处奔向女孩, 又从女孩处奔向男孩, 如此往返直至回到家中. 问小狗奔波了多少路程.

如果男孩和女孩上学时小狗也往返奔波在他们之间, 问当他们到达学校时小狗在何处^[32].

第 1 章习题参考解答

3.

(1) 注射一定量的葡萄糖,采集一定容积的血样,测量注射前后葡萄糖含量的变化,即可估计人体的血液总量.注意采集和测量的时间要选择恰当,使血液中的葡萄糖含量充分均匀,又基本上未被人体吸收.

(2) 调查不同年龄的人的死亡率,并估计其在未来一定时期的变化,还应考虑银行存款利率和物价指数,保险金与赔偿金之比大体上应略高于死亡率.

(3) 从一批灯管中取一定容量的样本,测得其平均寿命,可作为该批灯管寿命的估计值.为衡量估计的精度,需要从样本寿命确定该批灯管寿命的概率分布,即可得到估计值的置信区间.还可试验用提高电压的办法加速寿命测试,以缩短测量时间.

(4) 根据牛顿第二定律建立火箭向上发射后的运动方程,初速已知,若不考虑空气阻力,很容易算出到达最高点(即速度为零)时间;若考虑空气阻力,不妨设其与火箭速度(或速度的平方)成正比,并由试验及拟合方法确定阻力系数,再解方程得到结果.

(5) 司机看到黄灯后停车要有一定的刹车距离 S_1 ,设通过十字路口的距离为 S_2 ,汽车行驶速度为 v ,则黄灯的时间长度 t 应使距停车线 S_1 之内的汽车能通过路口,即 $t \approx (S_1 + S_2)/v$. S_1 可由试验得到,或按照牛顿第二定律解运动方程,进一步可考察不同车重、不同路面及司机反应灵敏程度等因素的影响.

(6) 根据资料和经验确定维修费用随着车龄和行驶里程的增加而增加的关系,再考虑维修和更新费用,可以以一年为一个时段,结合租金决定应该维修或更新.

(7) 统计在各层上班的人数,通过数据或计算确定电梯运行时间,以等待的人数与时间乘积为目标,建立优化模型,确定每部电梯运行的楼层(有的从大厅直接运行到高层).

4. 相邻两椅脚与地面距离之和分别定义为 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$,将椅子旋转 180° ,其余作法与 1.3 节相同.

5. 人、猫、鸡、米分别记为 $i = 1, 2, 3, 4$,当 i 在此岸时记 $x_i = 1$,否则记 $x_i = 0$,则此岸的状态可用 $s = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 表示.记 s 的反状态为 $s' = (1 - x_1, 1 - x_2, 1 - x_3, 1 - x_4)$,允许状态集合为 $S = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0),$

1), (1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0) 及它们的 5 个反状态}.

决策为乘船方案, 记作 $d = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, 当 i 在船上时记 $u_i = 1$, 否则记 $u_i = 0$, 允许决策集合为 $D = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0)\}$.

记第 k 次渡河前此岸的状态为 s_k , 第 k 次渡河的决策为 d_k , 则状态转移律为 $s_{k+1} = s_k + (-1)^k d_k$, 设计安全过河方案归结为求决策序列 $d_1, d_2, \dots, d_n \in D$, 使状态 $s_k \in S$ 按状态转移律由初始状态 $s_1 = (1, 1, 1, 1)$ 经 n 步到达 $s_{n+1} = (0, 0, 0, 0)$. 一个可行方案如下:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
s_k	(1, 1, 1, 1)	(0, 1, 0, 1)	(1, 1, 0, 1)	(0, 1, 0, 0)	(1, 1, 1, 0)	(0, 0, 1, 0)	(1, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 0)
d_k	(1, 0, 1, 0)	(1, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 1)	(1, 0, 1, 0)	(1, 1, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)	(1, 0, 1, 0)	

6.

(1) 分段的指数增长模型. 根据 1.5 节表 3 中的增长率将时间分为 3 段: 1790 年至 1880 年平均年增长率为 2.83%; 1890 年至 1960 年平均年增长率为 1.53%; 1970 年至 2000 年平均年增长率为 1.12%. 3 段模型为 (1790 年为 $t = 0$, 1800 年为 $t = 1, \dots$)

$$x_1(t) = 3.9e^{0.283t}, \quad t = 0, 1, \dots, 10$$

$$x_2(t) = x_1(10)e^{0.153(t-10)}, \quad t = 11, \dots, 18$$

$$x_3(t) = x_2(18)e^{0.112(t-18)}, \quad t = 19, \dots, 21$$

(2) 阻滞增长模型. 可以用实际增长率数据中前 5 个的平均值作为固有增长率 r , 取某些专家的估计 400 百万为最大容量 x_m , 以 1790 年的实际人口为 x_0 , 模型为 1.5 节的 (9) 式.

以上两个模型的计算结果见下表.

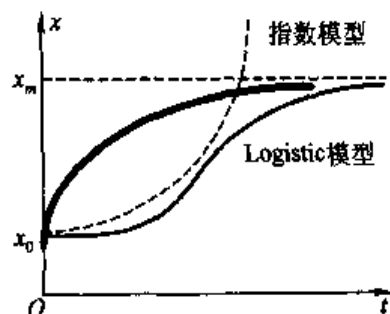
年	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860
实际人口	3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2	31.4
模型(1)	3.9	5.2	6.9	9.1	12.1	16.1	21.3	28.3
模型(2)	3.9	5.2	7.0	9.4	12.6	16.7	22.2	29.3
年	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940
实际人口	38.6	50.2	62.9	76.0	92.0	106.5	123.2	131.7
模型(1)	37.5	49.8	66.1	77.0	89.7	104.6	121.9	142.0
模型(2)	38.4	49.9	64.1	81.2	101.3	124.1	149.0	174.9

续表

年	1950	1960	1970	1980	1990	2000
实际人口	150.7	179.3	204.0	226.5	251.4	281.4
模型(1)	165.5	192.9	224.7	251.4	281.2	314.5
模型(2)	200.9	225.8	248.6	268.7	285.9	300.1

7. 注意到 $t = t_0$ 时 $x = x_m/2$, 立即可得 $x(t) = \frac{x_m}{1 + e^{-r(t-t_0)}}$, 且 $t_0 = \frac{1}{r} \ln \frac{x_m - x_0}{x_0}$.

8. $\frac{dx}{dt} = r(x_m - x)$, r 为比例系数, $x(0) = x_0$, 解为 $x(t) = x_m - (x_m - x_0)e^{-rt}$, 如右图中粗实线所示. 当 t 充分大时, 它与 Logistic 模型相近.



9.

(1) 设想有两个人一人上山, 一人下山, 同一天同时出发, 沿同一路径, 必定相遇.

(2) 36 场比赛, 因为除冠军队外, 每队都负一场; 6 轮比赛, 因为 2 队赛 1 轮, 32 队赛 5 轮. n 队需赛 $n-1$ 场, 若 $2^{k-1} < n \leq 2^k$, 则需赛 k 轮.

(3) 不妨设从甲到乙经过丙站的时刻表是: 8:00, 8:10, 8:20, ..., 那么从乙到甲经过丙站的时刻表应该是: 8:09, 8:19, 8:29,

(4) 步行了 25 分钟. 设想他的妻子驾车遇到他后, 先带他去车站, 再回家, 汽车多行驶了 10 分钟, 于是带他去车站这段路程汽车跑了 5 分钟, 而到车站的时间是 6:00, 所以妻子驾车遇到他的时刻是 5:55.

(5) 放学时小狗跑了 3 km. 孩子上学到达学校时小狗的位置不定, 因为设想放学时小狗从任何位置起跑, 都会与孩子同时到家. 之所以出现位置不定的结果, 是由于上学时小狗初始跑动的方向无法确定.

第2章 习 题

1. 学校共 1 000 名学生, 235 人住在 A 宿舍, 333 人住在 B 宿舍, 432 人住在 C 宿舍. 学生们要组织一个 10 人的委员会, 试用下列办法分配各宿舍的委员数:

(1) 按比例分配取整数的名额后, 剩下的名额按惯例分给小数部分较大者.

(2) 2.1 节中的 Q 值方法.

(3) d'Hondt 方法: 将 A, B, C 各宿舍的人数用正整数 $n = 1, 2, 3, \dots$ 相除, 其商数如下表:

	1	2	3	4	5	...
A	<u>235</u>	<u>117.5</u>	78.3	58.75	...	
B	<u>333</u>	<u>166.5</u>	<u>111</u>	83.25	...	
C	<u>432</u>	<u>216</u>	<u>144</u>	108	<u>86.4</u>	

将所得商数从大到小取前 10 个 (10 为席位), 在数字下标以横线, 表中 A, B, C 行有横线的数分别为 2, 3, 5, 这就是 3 个宿舍分配的席位. 你能解释这种方法的道理吗.

如果委员会从 10 人增至 15 人, 用以上 3 种方法再分配名额. 将 3 种方法两次分配的结果列表比较.

(4) 你能提出其它的方法吗. 用你的方法分配上面的名额.

2. 用微积分的方法导出 2.2 节的公式 (2).

3. 在 2.5 节中考虑 8 人艇分重量级组 (桨手体重不超过 86 kg) 和轻量级组 (桨手体重不超过 73 kg), 建立模型说明重量级组的成绩比轻量级组大约好 5%.

4. 用 2.7 节实物交换模型中介绍的无差别曲线的概念, 讨论以下雇员和雇主之间的协议关系:

(1) 以雇员一天的工作时间 t 和工资 w 分别为横坐标和纵坐标, 画出雇员无差别曲线族的示意图. 解释曲线为什么是你画的那种形状.

(2) 如果雇主付计时工资, 对不同的工资率 (单位时间的工资) 画出计时工资线族. 根据雇员的无差别曲线族和雇主的计时工资线族, 讨论双方将在怎样的一条曲线上达成协议.

(3) 雇员和雇主已经达成了一项协议(工作时间 t_1 和工资 w_1). 如果雇主想使雇员的工作时间增加到 t_2 , 他有两种办法: 一是提高计时工资率, 在协议线的另一点 (t_2, w_2) 达成新的协议; 二是实行超时工资制, 即对工时 t_1 仍付原计时工资, 对工时 $t_2 - t_1$ 付给更高的超时工资. 试用作图方法分析哪种办法对雇主更有利, 指出这个结果的条件^[6].

5. 在 2.8 节核武器竞赛模型中, 证明由 (6) 式表示的乙安全线 $y = f(x)$ 的性质.

6. 在 2.8 节核武器竞赛模型中, 讨论以下因素引起的平衡点的变化^[20]:

- (1) 甲方提高导弹导航系统的性能.
- (2) 甲方增加导弹爆破的威力.
- (3) 甲方发展电子干扰系统.
- (4) 双方建立反导弹系统.

7. 在超市购物时你注意到大包装商品比小包装商品便宜这种现象了吗. 比如洁银牙膏 50 g 装的每支 1.50 元, 120 g 装的每支 3.00 元, 二者单位重量的价格比是 1.2:1. 试用比例方法构造模型解释这个现象.

(1) 分析商品价格 c 与商品重量 w 的关系. 价格由生产成本、包装成本和其它成本等决定, 这些成本中有的与重量 w 成正比, 有的与表面积成正比, 还有与 w 无关的因素.

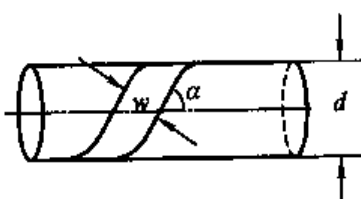
(2) 给出单位重量价格 c 与 w 的关系, 画出它的简图, 说明 w 越大 c 越小, 但是随着 w 的增加 c 减小的程度变小. 解释实际意义是什么.

* 8. 一垂钓俱乐部鼓励垂钓者将钓上的鱼放生, 打算按照放生的鱼的重量给予奖励, 俱乐部只准备了一把软尺用于测量, 请你设计按照测量的长度估计鱼的重量的方法. 假定鱼池中只有一种鲈鱼, 并且得到 8 条鱼的如下数据(胸围指鱼身的最大周长):

身长(cm)	36.8	31.8	43.8	36.8	32.1	45.1	35.9	32.1
重量(g)	765	482	1162	737	482	1389	652	454
胸围(cm)	24.8	21.3	27.9	24.8	21.6	31.8	22.9	21.6

先用机理分析建立模型, 再用数据确定参数^[20].

9. 用宽 w 的布条缠绕直径 d 的圆形管道, 要求布条不重叠, 问布条与管道轴线的夹角 α 应多大(如图). 若知道管道长度, 需用多长布条(可考虑两端的影响). 如果管道是其它形状呢^[17].



* 10. 用已知尺寸的矩形板材加工半径一定的圆

盘,给出几种简便、有效的排列方法,使加工出尽可能多的圆盘^[17]。

11. 雨滴匀速下降,空气阻力与雨滴表面积和速度平方的乘积成正比,试确定雨速与雨滴质量的关系。

* 12. 动物园里的成年热血动物靠饲养的食物维持体温基本不变,在一些合理、简化的假设下建立动物的饲养食物量与动物的某个尺寸之间的关系^[20]。

* 13. 生物学家认为,对于休息状态的热血动物消耗的能量主要用于维持体温,能量与从心脏到全身的血流量成正比,而体温主要通过身体表面散失,建立一个动物体重与心率之间关系的模型,并用下面的数据加以检验^[20]。

动 物	体重(g)	心率(次/分)
田鼠	25	670
家鼠	200	420
兔	2 000	205
小狗	5 000	120
大狗	30 000	85
羊	50 000	70
人	70 000	72
马	450 000	38

* 14. 举重比赛按照运动员的体重分组,你能在一些合理、简化的假设下建立比赛成绩与体重之间的关系吗。下面是一届奥运会的竞赛成绩,可供检验你的模型^[20]。

组 别	最大体重 (kg)	抓举 (kg)	挺举 (kg)	总成绩 (kg)
1	54	132.5	155	287.5
2	59	137.5	170	307.5
3	64	147.5	187.5	335
4	70	162.5	195	357.5
5	76	167.5	200	367.5
6	83	180	212.5	392.5
7	91	187.5	213	402.5
8	99	185	235	420
9	108	195	235	430
10	>108	197.5	260	457.5

15. 速度为 v 的风吹在迎风面积为 s 的风车上,空气密度是 ρ ,用量纲分析

方法确定风车获得的功率 P 与 v, s, ρ 的关系.

16. 雨滴的速度 v 与空气密度 ρ 、粘滞系数 μ 和重力加速度 g 有关, 其中粘滞系数的定义是: 运动物体在流体中受的摩擦力与速度梯度和接触面积的乘积成正比, 比例系数为粘滞系数. 用量纲分析方法给出速度 v 的表达式.

17. 原子弹爆炸时巨大的能量从爆炸点以冲击波形式向四周传播. 据分析在时刻 t 冲击波达到的半径 r 与释放能量 e , 大气密度 ρ , 大气压强 p 有关 (设 $t=0$ 时 $r=0$). 用量纲分析方法证明 $r = \left(\frac{et^2}{\rho}\right)^{1/5} \varphi\left(\frac{p^5 t^6}{e^2 \rho^3}\right)$, φ 是未定函数^[47].

18. 用量纲分析方法研究人体浸在匀速流动的水里时损失的热量. 记水的流速 v , 密度 ρ , 比热 c , 粘性系数 μ , 热传导系数 k , 人体尺寸 d . 证明人体与水的换热系数 h 与上述各物理量的关系可表为 $h = \frac{k}{d} \varphi\left(\frac{v\rho d}{\mu}, \frac{\mu c}{k}\right)$, φ 是未定函数, h 定义为单位时间内人体的单位面积在人体与水的温差为 1°C 时的热量交换^[23].

19. 用量纲分析方法研究两带电平行板间的引力. 板的面积为 s , 间距为 d , 电位差为 v , 板间介质的介电常数为 ϵ , 证明两板之间的引力 $f = \epsilon v^2 \varphi(s/d^2)$. 如果又知道 f 与 s 成正比, 写出 f 的表达式. 这里介电常数 ϵ 的定义是 $f = \frac{q_1 q_2}{\epsilon d^2}$, 其中 q_1, q_2 是两个点电荷的电量, d 是点电荷的距离, f 是点电荷间的引力^[23].

20. 考察阻尼摆的周期, 即在单摆运动中考虑阻力, 并设阻力与摆的速度成正比. 给出周期的表达式, 然后讨论物理模拟的比例模型, 即怎样由模型摆的周期计算原型摆的周期.

21. 考察模拟水下爆炸的比例模型. 爆炸物质量 m , 在距爆炸点距离 r 处设置仪器, 接收到的冲击波压强为 p , 记大气初始压强 p_0 , 水的密度 ρ , 水的体积弹性模量 k , 用量纲分析方法已经得到 $p = p_0 \varphi\left(\frac{p_0}{k}, \frac{\rho r^3}{m}\right)$. 设模拟实验与现场的 p_0, ρ, k 相同, 而爆炸物模型的质量为原型的 $1/1\,000$. 为了使实验中接收到与现场相同的压强 p , 问实验时应如何设置接收冲击波的仪器, 即求实验仪器与爆炸点之间的距离是现场的多少倍^[23].

22. 质量为 m 的小球以速度 v 竖直上抛, 阻力与速度成正比, 比例系数 k . 设初始位置为 $x=0$, x 轴竖直向上, 则运动方程为

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + mg = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = v$$

方程的解可表为 $x = x(t; v, g, m, k)$. 试选择两种特征尺度将问题无量纲化, 并讨论 k 很小时求近似解的可能性^[30].

第2章习题参考解答

1. 按照题目所给方法(1),(2),(3)的席位分配结果如下表:

宿舍	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
A	3	2	2	4	4	3
B	3	3	3	5	5	5
C	4	5	5	6	6	7
总计	10	10	10	15	15	15

方法(3)的道理是:记 p_i 和 n_i 为各宿舍的人数和席位($i=1,2,3$ 代表 A, B, C 宿舍), p_i/n_i 是每席位代表的人数,取 $n_i=1,2,\dots$,从得到的 p_i/n_i 中选较大者,可使对所有的 i , p_i/n_i 尽量接近. 数学模型可记作 $\max(\min_i p_i/n_i)$, 其中 n_i 满足 $\sum_i n_i = n$ (n 为总席位).

2. 考察 t 到 $t + \Delta t$ 时间内录像带缠绕在右轮盘上的长度,可得 $v dt = (r + wkn)2\pi k dn$, 两边积分即为(2)式.

3. 由模型假设 3,划桨功率 p 与体重 w 成正比,而桨手数 $n=8$ 不变,所以 2.5 节(2)式改为 $v \propto (w/s)^{1/3}$. 记重量级组和轻量级组的体重、艇速、比赛成绩和艇的浸没面积分别为 $w_1, w_2, v_1, v_2, t_1, t_2, s_1, s_2$, 则 $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1/3} \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{1/3}$. 估计 s_1/s_2 的大小:重量级组体重大,会使浸没面积增加,但艇身略大,又会使浸没面积减小,因而 s_1/s_2 不会超过 1.05. 代入 $w_1=86, w_2=73$, 可得 $t_1/t_2 \approx 0.96$.

4.

(1) 雇员的无差别曲线族 $f(w, t) = c$ 是下凸的,如图 1, 因为工资低时,他愿以较多的工作时间换取较少的工资;而当工资高时,就要求以较多的工资来增加一点工作时间.

(2) 雇主的计时工资族是 $w = at$, a 是工资率. 这族直线与 $f(w, t) = c$ 的切点 P_1, P_2, P_3, \dots 的连线 PQ 为雇员与雇主的协议线. 通常 PQ 是上升的(至少有一段应该是上升的), 见图 1.

(3) 设双方在 $P_1(t_1, w_1)$ 点达成协议, 当雇主想使雇员的工作时间增至 t_2 时, 用提高计时工资率 a 的办法, 应在协议线 PQ 上找出横坐标为 t_2 的 P_2 点, 工资额为 w_2 , 见图 2. 用超时工资的办法, 应从 P_1 点作某一条无差别曲线的切线(粗虚线), 使切点 P_2' 的横坐标刚好是 t_2 , 若点 P_2' 在 P_2 下方(图 2 表示了这种情况), 则工资额 $w_2' < w_2$, 即第二种办法对雇主有利. 得到这个结果的条件是, 在雇员没有工作时和已经工作了 t_1 时(得到工资 w_1), 其无差别曲线族 $f(w, t) = c$ 没有变化.

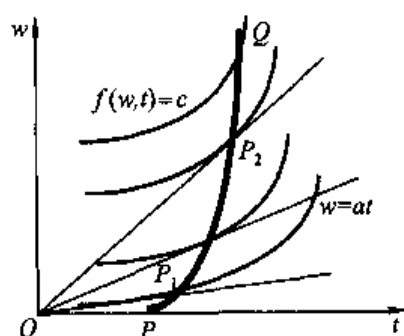


图 1

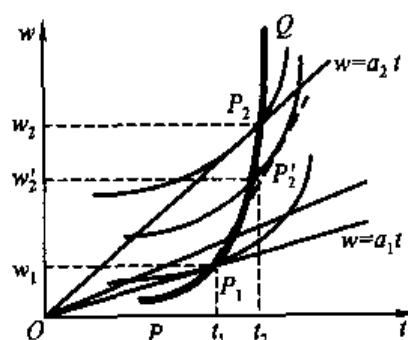


图 2

5. 乙安全线 $y = f(x)$ 表为 $y = \frac{y_0}{s^a} = \frac{y_0}{s^{x/y}}$, $0 < s < 1$, 可计算出 $y' = \frac{-\ln s}{1 + \ln(y/y_0)}$, 而 $y = f(x)$ 的极坐标表达式为 $r = \frac{y_0}{\sin \theta s^{\cot \theta}}$. 由这些结果容易证明 $y = f(x)$ 的性质.

6.

(1) 若甲方提高导弹导航系统的性能, 则乙方的残存率 s 变小, y 增加, 乙安全线上移且变陡, 平衡点向右上方移动.

(2) 若甲方增加导弹爆破的威力, 则甲方的威慑值 x_0 减小, 甲安全线左移且变陡, 平衡点向左下方移动.

(3) 若甲方发展电子干扰系统, 则乙方的威慑值 y_0 和甲方的残存率 s 变大, 乙安全线 $y = f(x)$ 上移且变陡, 甲安全线变陡, 平衡点向左上方移动.

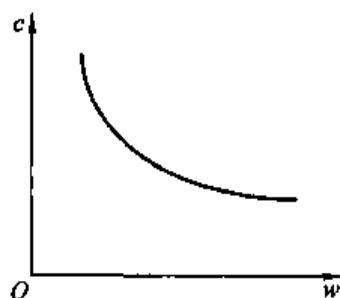
(4) 若双方发展反导弹系统, 则双方的威慑值和残存率均变大, 前者使平衡点向右上方移动, 后者使平衡点向左下方移动, 综合影响无法确定.

7.

(1) 生产成本主要与重量 w 成正比, 包装成本主要与表面积 s 成正比, 其它成本也包含与 w 和 s 成正比的部分, 上述三种成本中都含有与 w, s 均无关

的成分. 又因为形状一定时一般有 $s \propto w^{2/3}$, 故商品的价格可表为 $C = \alpha w + \beta w^{2/3} + \gamma$ (α, β, γ 为大于 0 的常数).

(2) 单位重量价格 $c = \frac{C}{w} = \alpha + \beta w^{-1/3} + \gamma w^{-1}$, 其简图如右, 显然 c 是 w 的减函数, 说明大包装比小包装的商品便宜; 曲线是下凸的, 说明单价的减少值随着包装的变大是逐渐降低的, 不要追求太大包装的商品.



* 8. 对于同一种鱼不妨认为其整体形状是相似的, 密度也大体上相同, 所以重量 w 与身长 l 的立方成正比, 即 $w = k_1 l^3$, k_1 为比例系数.

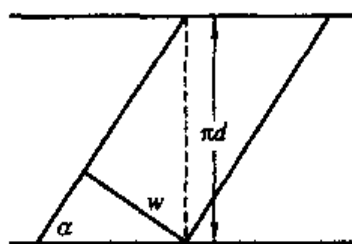
常钓得较肥的鱼的垂钓者不一定认可上述模型, 因为它对肥鱼和瘦鱼同等看待. 如果只假定鱼的横截面是相似的, 则横截面积与鱼身最大周长的平方成正比, 于是 $w = k_2 d^2 l$, k_2 为比例系数.

利用数据估计模型中的系数可得 $k_1 = 0.0146$, $k_2 = 0.0322$, 将实际数据与模型结果比较如下表:

实际重量(g)	765	482	1 162	737	482	1 389	652	454
模型 $w = k_1 l^3$	727	469	1 226	727	483	1 339	675	483
模型 $w = k_2 d^2 l$	730	465	1 100	730	483	1 471	607	483

基本上满意.

9. 将管道展开如图, 可得 $w = \pi d \cos \alpha$, 若 d 一定, $w \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \pi/2$; $w \rightarrow \pi d$, $\alpha \rightarrow 0$. 若管道长度为 l , 不考虑两端的影响时布条长度显然为 $\pi dl/w$, 若考虑两端影响, 则应加上 $\pi d w / \sin \alpha$. 对于其它形状管道, 只需将 πd 改为相应的周长即可.



* 10. 设圆盘半径为单位 1, 矩形板材长 a , 宽 b ;

可以精确加工, 即圆盘之间及圆盘与板材之间均可相切.

方案一: 圆盘中心按正方形排列, 如图 3. 圆盘总数为 $N_1 = [a/2][b/2]$.

方案二: 圆盘中心按六角形排列, 如图 4. 行数 m 满足 $2 + (m-1)\sqrt{3} \leq a$,

于是 $m = \left\lceil \frac{a-2}{\sqrt{3}} \right\rceil + 1$.

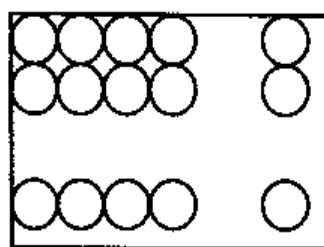


图 3

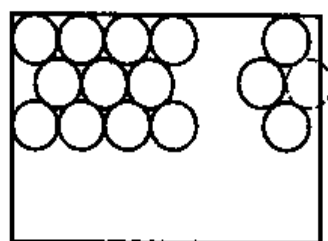


图 4

列数(按图 4 第 1 行计数) n 满足:若 $[b]$ 为奇数,则各行圆盘数相同为 $([b] - 1)/2$;若 $[b]$ 为偶数,则奇数行圆盘数为 $[b]/2$,偶数行圆盘数为 $[b]/2 - 1$.

$$\text{圆盘总数为 } N_2 = \begin{cases} m([b] - 1)/2, & m \text{ 为偶数} \\ m([b] - 1)/2 + 1/2, & m \text{ 为奇数}, [b] \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

两个方案的比较见下表(表中数字为 N_1/N_2).

$a \backslash b$	3	5	8	10	14	20
4	2/2	4/4	8/7	10/9	14/13	20/19
7	3/3	6/6	12/11	15/14	21/20	30/29
10	5/5	10/10	20/18	25/23	35/33	50/48
15	7/8	14/16	28/28	35/36	49/52	70/76
20	10/11	20/22	40/39	50/50	70/72	100/105

当 a, b 较大时方案二优于方案一.

其它方案:方案一、二混合,若 $a = b = 20$, 3 行正方形加 8 行六角形,圆盘总数为 106.

11. 雨滴质量 m , 体积 V , 表面积 S 与某特征尺寸 l 之间的关系为 $m \propto V \propto l^3$, $S \propto l^2$, 可得 $S \propto m^{2/3}$. 雨滴在重力 f_1 和空气阻力 f_2 的作用下以匀速 v 降落, 所以 $f_1 = f_2$, 而 $f_1 \propto m$, $f_2 \propto Sv^2$. 由以上关系得 $v \propto m^{1/6}$.

12. 假设处于静止状态的动物的饲养食物量主要用于维持体温不变, 且动物体内热量主要通过它的表面积散失, 对于一种动物其表面积 S 与某特征尺寸 l 之间的关系是 $S \propto l^2$, 所以饲养食物量 $w \propto l^2$.

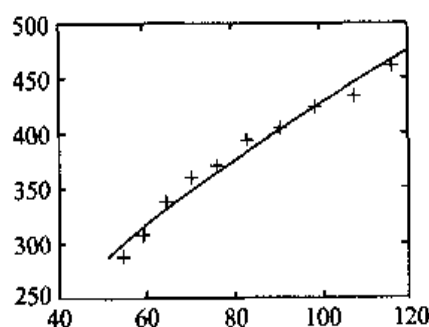
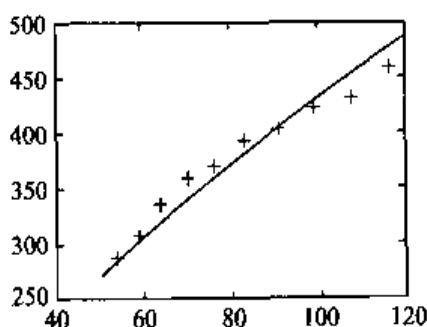
13. 动物消耗的能量 P 主要用于维持体温, 而体内热量通过表面积 S 散失, 记动物体重为 w , 则 $P \propto S \propto w^{2/3}$. 又 P 正比于血流量 Q , 而 $Q = qr$, 其中 q 是动物每次心跳泵出的血流量, r 为心率. 合理地假设 q 与 w 成正比, 于是 $P \propto wr$. 综上可得 $r \propto w^{-1/3}$, 或 $r = kw^{-1/3}$. 由所给数据估计得 $k = 2.0897 \times 10^3$, 将实际数据与模型结果比较如下表:

动 物	实际心率(次/分)	模型结果(次/分)
田鼠	670	715
家鼠	420	357
兔	205	166
小狗	120	122
大狗	85	67
羊	70	57
人	72	51
马	38	27

由于假设的粗糙,结果不够满意.

* 14. 假设举重比赛成绩 y 与运动员肌肉的截面积 s 成正比,而截面积 $s \propto l^2$ (l 是某个特征尺寸),体重 $w \propto l^3$,于是 $y \propto w^{2/3}$.

用举重总成绩检验这个模型,结果如左下图;如果用举重总成绩拟合 $y \propto w^\alpha$,可得 $\alpha = 0.57$,结果如右下图.



15. 设 $f(p, v, s, \rho) = 0$ 量纲表达式: $[p] = ML^2 T^{-3}$, $[v] = LT^{-1}$, $[s] = L^2$, $[\rho] = ML^{-3}$, 解得 $F(\pi) = 0$, $\pi = p^{-1} v^3 s \rho$, 故 $p = \lambda v^3 s \rho$ (λ 是无量纲常数).

16. 设 $f(v, \rho, \mu, g) = 0$, $[\mu] = ML^{-1} T^{-1}$, 解得 $F(\pi_1, \pi_2) = 0$, $\pi_1 = v r^{-1/2} g^{-1/2}$, $\pi_2 = r^{-3/2} \rho^{1/2} \mu^{-1} g^{1/2}$, 于是 $v = \sqrt{rg} \varphi(r^{3/2} \rho g^{1/2} / \mu)$, φ 是未定函数.

17. 设 $f(e, \rho, p, r, t) = 0$, 解得 $F(\pi_1, \pi_2) = 0$, $\pi_1 = e^{-1} \rho r^5 t^{-2}$, $\pi_2 = e^{-2} \rho^{-3} p^5 t^6$, 于是 $r = \left(\frac{et^2}{\rho} \right)^{1/5} \varphi \left(\frac{p^5 t^6}{e^2 \rho^3} \right)$.

18. 设 $f(h, v, \rho, c, \mu, k, d) = 0$, 加入温度量纲 θ , 有 $[h] = MT^{-3} \theta^{-1}$, $[c] = L^{-2} T^{-2} \theta^{-1}$, $[k] = MLT^{-3} \theta^{-1}$, 解得 $F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$, $\pi_1 = h k^{-1} d$, $\pi_2 = v \rho d \mu^{-1}$, $\pi_3 = \mu c k^{-1}$, 于是 $h = \frac{k}{d} \varphi \left(\frac{v \rho d}{\mu}, \frac{\mu c}{k} \right)$.

19. 设 $\Phi(f, s, d, U, \epsilon) = 0$, 可选 Q (电量), L (长度), N (力)为基本量纲, $[f] = N$, $[U] = Q^{-1} L N$, $[\epsilon] = Q^2 L^{-2} N^{-1}$, 解得

$F(\pi_1, \pi_2) = c, \pi_1 = f\varepsilon^{-1}U^{-2}, \pi_2 = sd^{-2}$, 于是 $f = \varepsilon v^2 U(s/d^2)$. 若 $f \propto s$, 则 $f = \frac{\varepsilon s U^2}{d^2}$.

20. 记阻尼摆周期 t , 摆长 l , 摆的质量 m , 重力加速度 g , 阻力系数 k , $[k] = MT^{-1}$. 设 $f(t, l, m, g, k) = 0$, 可得 $t = \sqrt{\frac{r}{g}} \varphi\left(\frac{kl^{1/2}}{mg^{1/2}}\right)$. 作物理模拟的比例模型时, 设 g 和 k 不变, 记模型和原型摆的周期、摆长、质量分别为 t, t', l, l', m, m' , 那么只要 $\sqrt{r'/r} = m'/m$, 就有 $t'/t = \sqrt{r'/r}$.

21. 原型的各物理量与模型相同的仍记为 p, p_0, k, ρ , 与模型不同的记为 r', m' , 于是有 $p = p_0 \varphi\left(\frac{p_0}{k}, \frac{\rho r'^3}{m}\right)$, 可得 $\frac{r'^3}{m} = \frac{r^3}{m}$, 即 $r = \sqrt[3]{\frac{m}{m'}} r' = \sqrt[3]{\frac{1}{1000}} \cdot r' = \frac{1}{10} r'$. 实验仪器与爆炸点的距离应是实际现场的 1/10.

22. 注意到 $[k] = mt^{-1}$, (1) 选取特征尺度 $t_c = mk^{-1}, x_c = v^2 g^{-1}$, 则方程化为

$$\varepsilon^2 \ddot{\bar{x}} + \varepsilon^2 \dot{\bar{x}} + 1 = 0, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \dot{\bar{x}}(0) = \varepsilon^{-1} \quad (1)$$

其中 $\varepsilon = \frac{kv}{mg}$, 解可表示为 $\bar{x} = \bar{x}(\bar{t}; \varepsilon)$. k 很小时 ε 很小, (1) 无解.

(2) 选取 $t_c = vg^{-1}, x_c = v^2 g^{-1}$, 则

$$\ddot{\bar{x}} + \varepsilon \dot{\bar{x}} + 1 = 0, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \dot{\bar{x}}(0) = 1 \quad (2)$$

ε 同上, \bar{x} 表达式同上. 但当 k 很小时 (2) 有解, 它正是原问题忽略阻力时的近似解.

第3章 习 题

1. 在 3.1 节存贮模型的总费用中增加购买货物本身的费用,重新确定最优订货周期和订货批量.证明在不允许缺货模型中结果与原来的一样,而在允许缺货模型中最优订货周期和订货批量都比原来结果减小.

2. 建立不允许缺货的生产销售存贮模型.设生产速率为常数 k ,销售速率为常数 $r, k > r$.在每个生产周期 T 内,开始的一段时间 $(0 < t < T_0)$ 一边生产一边销售,后来的一段时间 $(T_0 < t < T)$ 只销售不生产,画出贮存量 $q(t)$ 的图形.设每次生产准备费为 c_1 ,单位时间每件产品贮存费为 c_2 ,以总费用最小为目标确定最优生产周期.讨论 $k \gg r$ 和 $k \approx r$ 的情况.

3. 在 3.3 节森林救火模型中,如果考虑消防队员的灭火速度 λ 与开始救火时的火势 b 有关,试假设一个合理的函数关系,重新求解模型.

4. 在 3.4 节最优价格模型中,如果考虑到成本 q 随着产量 x 的增加而降低,试做出合理的假设,重新求解模型.

5. 在考虑最优价格问题时设销售期为 T ,由于商品的损耗,成本 q 随时间增长,设 $q = q_0 + \beta t$, β 为增长率.又设单位时间的销售量为 $x = a - bp$ (p 为价格).今将销售期分为 $0 < t < T/2$ 和 $T/2 < t < T$ 两段,每段的价格固定,记作 p_1, p_2 .求 p_1, p_2 的最优值,使销售期内的总利润最大.如果要求销售期 T 内的总售量为 Q_0 ,再求 p_1, p_2 的最优值.

6. 在 3.6 节消费者的选择模型中,

(1) 证明若条件 B 成立,则条件 A 成立.

(2) 验证(3),(5),(7)式给出的效用函数是否满足条件 B 和 A .

(3) 若消费者的效用函数为(7)式,求最优比例 $p_1 q_1 / p_2 q_2$,并分析参数 a, b 的意义.

(4) 若商品甲的价格 p_1 增加,其余条件不变,讨论消费者均衡状态的变化.

(5) 若消费者购买商品的钱 s 增加,其余条件不变,讨论消费者均衡状态的变化.

(6) 推广到消费者购买 $m (> 2)$ 种商品的情况.

* 7. 要在雨中从一处沿直线跑到另一处,若雨速为常数且方向不变.试建立数学模型讨论是否跑得越快,淋雨量越少.

将人体简化成一个长方体,高 $a = 1.5 \text{ m}$ (颈部以下),宽 $b = 0.5 \text{ m}$,厚 $c = 0.2 \text{ m}$. 设跑步距离

$d = 1000 \text{ m}$,跑步最大速度 $v_m = 5 \text{ m/s}$,雨速 $u = 4 \text{ m/s}$,降雨量 $w = 2 \text{ cm/h}$,记跑步速度为 v . 按以下步骤进行讨论^[17]:

(1) 不考虑雨的方向,设降雨淋遍全身,以最大速度跑步,估计跑完全程的总淋雨量.

(2) 雨从迎面吹来,雨线与跑步方向在同一铅直平面内,且与人体的夹角为 θ ,如图 1 建立总淋雨量与速度 v 及参数 a, b, c, d, u, w, θ 之间的关系,问速度 v 多大,总淋雨量最少. 计算 $\theta = 0, \theta = 30^\circ$ 时的总淋雨量.

(3) 雨从背面吹来,雨线方向与跑步方向在同一铅直平面内,且与人体的夹角为 α ,如图 2. 建立总淋雨量与速度 v 及参数 a, b, c, d, u, w, α 之间的关系,问速度 v 多大,总淋雨量最少. 计算 $\alpha = 30^\circ$ 时的总淋雨量.

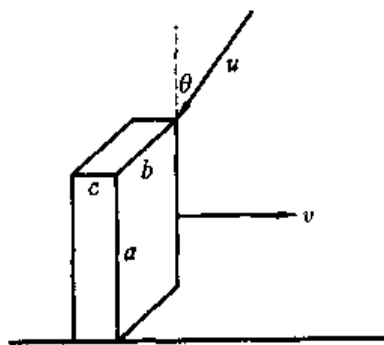


图 1

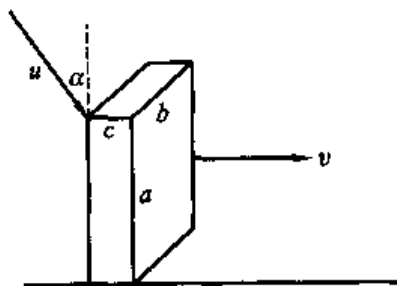


图 2

(4) 以总淋雨量为纵轴,速度 v 为横轴,对(3)作图(考虑 α 的影响),并解释结果的实际意义.

(5) 若雨线方向与跑步方向不在同一平面内,模型会有什么变化.

* 8. 甲乙两公司通过广告来竞争销售商品的数量,广告费分别是 x 和 y . 设甲乙公司商品的售量在两公司总售量中占的份额,是它们的广告费在总广告费中所占份额的函数 $f\left(\frac{x}{x+y}\right)$ 和 $f\left(\frac{y}{x+y}\right)$. 又设公司的收入与售量成正比,从收入中扣除广告费后即为公司利润. 试构造模型的图形,并讨论甲公司怎样确定广告费才能使利润最大.

(1) 令 $t = \frac{x}{x+y}$, 则 $f(t) + f(1-t) = 1$. 画出 $f(t)$ 的示意图.

(2) 写出甲公司利润的表达式 $p(x)$. 对于一定的 y , 使 $p(x)$ 最大的 x 的最优值应满足什么关系. 用图解法确定这个最优值^[6].

* 9. 人行走时作的功是抬高人体重心所需势能与两腿运动所需动能之和. 试建立模型讨论在作功最小的准则下每秒走几步最合适(匀速行走).

(1) 设腿长 l , 步长 s , 证明人体重心在行走时升高 $\delta \approx s^2/8l (s < l)$.

(2) 将腿看作均匀直杆, 行走看作腿绕腰部的转动. 设腿的质量 m , 行走速度 v , 证明单位时间所需动能为 $mv^2/6s$.

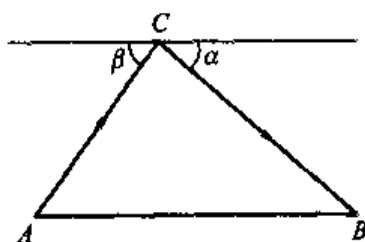
(3) 设人体质量 M , 证明在速度 v 一定时每秒行走 $n = \sqrt{\frac{3Mg}{4ml}}$ 步作功最小. 实际上, $\frac{M}{m} \approx 4, l \approx 1\text{m}$, 分析这个结果合理吗.

(4) 将(2)的假设修改为: 腿的质量集中在脚部, 行走看作脚的直线运动. 证明结果应为 $n = \sqrt{\frac{Mg}{4ml}}$ 步. 分析这个结果是否合理^[44].

* 10. 观察鱼在水中的运动发现, 它不是水平游动, 而是突发性、锯齿状地向上游动和向下滑行. 可以认为这是在长期进化过程中鱼类选择的消耗能量最小的运动方式.

(1) 设鱼总是以常速 v 运动, 鱼在水中净重 w , 向下滑行时的阻力是 w 在运动方向的分力; 向上游动时所需的力是 w 在运动方向分力与游动所受阻力之和, 而游动的阻力是滑行阻力的 k 倍. 水平方向游动时的阻力也是滑行阻力的 k 倍. 写出这些力.

(2) 证明当鱼要从 A 点到达处于同一水平线上的 B 点时(见右图), 沿折线 ACB 运动消耗的能量与沿水平线 AB 运动消耗的能量之比为(向下滑行不消耗能量) $\frac{k \sin \alpha + \sin \beta}{k \sin (\alpha + \beta)}$.



(3) 据实际观察 $\tan \alpha \approx 0.2$, 试对不同的 k 值 (1.5, 2, 3), 根据消耗能量最小的准则估计最佳的 β 值^[6].

第3章习题参考解答

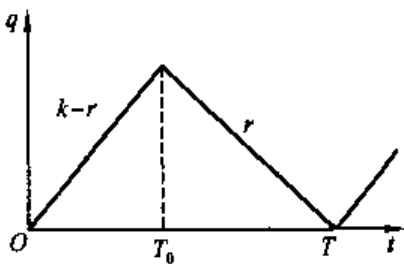
1. 设购买单位重量货物的费用为 k , 对于不允许缺货模型, 每天平均费用为 $c(T) = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 r T}{2} + kr$, T, Q 的最优结果不变. 对于允许缺货模型, 每天平均费用为 $c(T, Q) = \frac{1}{T} \left[c_1 + \frac{c_2 Q^2}{2r} + \frac{c_3}{2r} (rT - Q)^2 + kQ \right]$, 利用 $\frac{\partial c}{\partial T} = 0, \frac{\partial c}{\partial Q} = 0$, 可求出 T, Q 的最优结果为

$$T^* = \sqrt{\frac{2c_1 c_2 + c_3}{rc_2 c_3} - \frac{k^2}{c_2 c_3}}, Q^* = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2 c_2 + c_3} - \frac{c_3 k^2 r^2}{c_2 (c_2 + c_3)^2}} - \frac{kr}{c_2 + c_3}$$

T^*, Q^* 均比不考虑费用 k 时的结果减小.

2. 贮存量 $q(t)$ 的图形如右. 单位时间总费用, $c(T) = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 r (k-r) T}{2K}$, 使 $c(T)$ 达到最小

值的最优周期 $T^* = \sqrt{\frac{2c_1 k}{c_2 r (k-r)}}$.



当 $k \gg r$ 时, $T^* = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}}$, 相当于不考虑生产的情况. 当 $k \approx r$ 时, $T^* \rightarrow \infty$, 因为产量被销量抵消, 无法形成贮存量.

3. 不妨设 $\lambda(b) = \frac{\lambda'}{b+1}$, 表示火势 b 越大, 灭火速度 λ 越小, 分母 $b+1$ 中的 1 是防止 $b \rightarrow 0$ 时 $\lambda \rightarrow \infty$ 而加的. 最优解为

$$x = \sqrt{\frac{[c_1 \lambda' b^2 + 2c_2 b(b+1)\beta](b+1)}{2c_3 \lambda'^2}} + \frac{(b+1)\beta}{\lambda'}.$$

4. 不妨设 $q(x) = q_0 - kx$, k 是产量增加一个单位时成本的降低. 最优价格为 $p^* = \frac{q_0 - ka}{2(1 - kb)} + \frac{a}{2b}$.

5. 总利润为

$$\begin{aligned} U(p_1, p_2) &= \int_0^{T/2} [p_1 - q(t)](a - bp_1)dt + \int_{T/2}^T [p_2 - q(t)](a - bp_2)dt \\ &= \frac{T}{2} \left\{ (a - bp_1) - b \left[p_1 - \left(q_0 + \frac{\beta T}{4} \right) \right] + (a - bp_2) - b \left[p_2 - \left(q_0 + \frac{3\beta T}{4} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

由 $\frac{\partial U}{\partial p_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial p_2} = 0$, 可得最优价格

$$p_1 = \frac{1}{2b} \left[a + b \left(q_0 + \frac{\beta T}{4} \right) \right], p_2 = \frac{1}{2b} \left[a + b \left(q_0 + \frac{3\beta T}{4} \right) \right]$$

设总销量为

$$Q_0, Q_0 = \int_0^{T/2} (a - bp_1) dt + \int_{T/2}^T (a - bp_2) dt = aT - \frac{bT}{2} (p_1 + p_2).$$

在此约束条件下 $U(p_1, p_2)$ 的最大值点为

$$\tilde{p}_1 = \frac{a}{b} - \frac{Q_0}{bT} - \frac{\beta T}{8}, \tilde{p}_2 = \frac{a}{b} - \frac{Q_0}{bT} + \frac{\beta T}{8}.$$

6.

(1) 用隐函数求导规则可以证明当条件 B 成立时, $\frac{dq_2}{dq_1} < 0, \frac{d^2 q_2}{dq_1^2} > 0$, 即条件 A 成立.

(2) 均满足条件 B.

(3) $\frac{p_1 q_1}{p_2 q_2} = \frac{a^2 p_2}{b^2 p_1}$, a, b 分别表示消费者对商品甲、乙的偏爱程度.

(4) p_1 增加时, 消费者均衡状态 Q 点将左移(见书中图 7).

(5) s 增加时, 消费者均衡状态 Q 点将向右上方移动(见书中图 7).

(6) 优化模型为 $\text{Max } U(q_1, \dots, q_m), \sum_{i=1}^m p_i q_i = s$.

7.

(1) 全身面积 $s = 2ab + 2ac + bc = 2.2 \text{ m}^2$, 淋雨时间 $t = d/v_m = 200 \text{ s}$, 降雨量 $w = 2 \text{ cm/h} = 10^{-4}/18 \text{ m/s}$, 所以总淋雨量 $Q = stw \approx 2.44 \text{ 升}$.

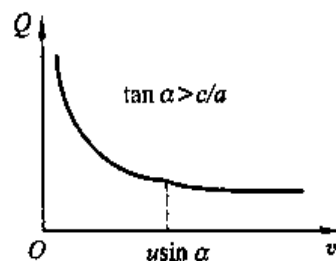
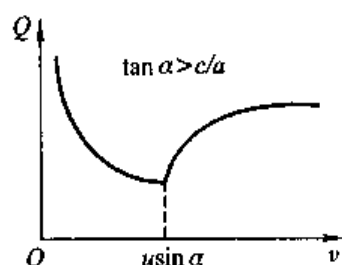
(2) 顶部淋雨量 $Q_1 = bcdw \cos \theta / v$; 雨速水平分量 $u \sin \theta$, 方向与 v 相反, 合速度 $u \sin \theta + v$, 迎面单位时间、单位面积的淋雨量 $w(u \sin \theta + v)/u$, 迎面淋雨量 $Q_2 = abdw(u \sin \theta + v)/uv$, 所以总淋雨量 $Q = Q_1 + Q_2 = \frac{bdwcu \cos \theta + a(u \sin \theta + v)}{v}$. $v = v_m$ 时 Q 最小. $\theta = 0, Q \approx 1.15 \text{ 升}$. $\theta = 30^\circ, Q \approx 1.55 \text{ 升}$.

(3) 与(2)不同的是, 合速度为 $|u \sin \alpha - v|$, 于是总淋雨量

$$Q = \begin{cases} \frac{bdwcu \cos \alpha + a(u \sin \alpha - v)}{v} = \frac{bdw}{u} \frac{u(c \cos \alpha + a \sin \alpha) - av}{v}, & v \leq u \sin \alpha \\ \frac{bdwcu \cos \alpha + a(v - u \sin \alpha)}{v} = \frac{bdwu}{u} \frac{(c \cos \alpha - a \sin \alpha) + av}{v}, & v > u \sin \alpha \end{cases}$$

若 $c \cos \alpha - a \sin \alpha < 0$, 即 $\tan \alpha > c/a$, 则 $v = u \sin \alpha$ 时 Q 最小. 否则, $v =$

v_m 时 Q 最小 (见下图). 当 $\alpha = 30^\circ$, $\tan \alpha > 0.2/1.5$, $v = 2 \text{ m/s}$, $Q \approx 0.24$ 升最小, 可与 $v = v_m$, $Q \approx 0.93$ 升相比.



(4) 雨从背面吹来, 只要 α 不太小, 满足 $\tan \alpha > c/a$ ($a = 1.5 \text{ m}$, $c = 0.2 \text{ m}$ 时, $\alpha > 7.6^\circ$ 即可), $v = u \sin \alpha$, Q 最小, 此时人体背面不淋雨, 只有顶部淋雨.

(5) 再用一个角度表示雨的方向, 应计算侧面的淋雨量, 问题本质上没有变化.

* 8.

(1) $f(t)$ 图形以 $(1/2, 1/2)$ 为中心对称, 由图 1 实线或虚线所示. 以下设 $f(t)$ 为实线形状.

(2) 甲公司利润为 $p(x) = \alpha f\left(\frac{x}{x+y}\right) - x$, α 是常数. 求 $P(x)$ 最大值点 x^* 有多种方法, 例如:

a) 由 $p'(x^*) = 0$ 可得 $f'(x^*) = \frac{y}{\alpha} \left(\frac{1}{1-t^*} \right)^2$, 记 c 是任意常数. 则曲线族 $g(t)$ 中与 $f(t)$ 相切的那一条曲线的切点坐标为 t^* (见图 2), 而 $t^* = \frac{x^*}{x^* + y}$.

b) 由 $f(t) \sim t$ 图形作出图形 (见图 3), 再作直线 $h(x) = \frac{x}{\alpha}$, 在曲线上找一点 M , 其横坐标 $x^* > y$, 使过 M 点的切线平行于 $h(x)$, x^* 即为所求.

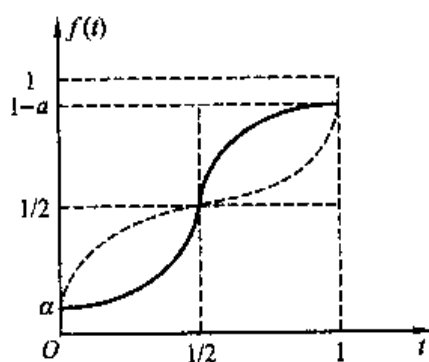


图 1

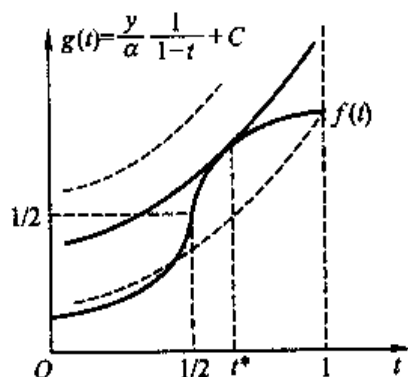


图 2

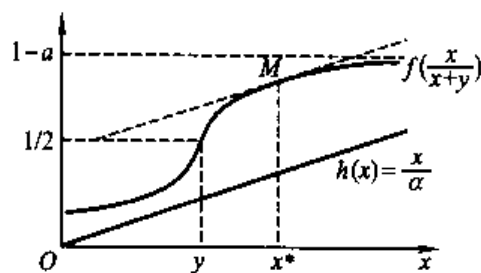
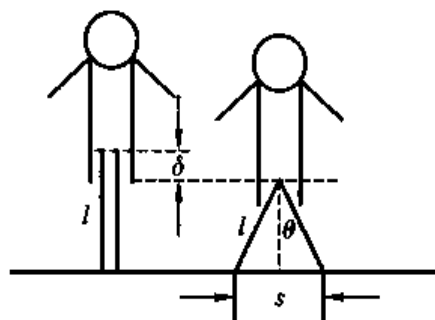


图 3

9.

(1) 如图,重心升高 $\delta = l - l \cos \theta = l - l \left(1 - \frac{s^2}{4l^2}\right)^{1/2} \approx \frac{s^2}{8l}$ (当 s/l 较小时).

(2) 腿的转动惯量 $I = \frac{ml^2}{3}$, 角速度 $\omega = \frac{v}{l}$, 单位时间的步数为 $\frac{v}{s}$, 所以单位时间行走所需的动能为 $W_e = \frac{1}{2} I \omega^2 \frac{v}{s} = \frac{mv^3}{6s}$.



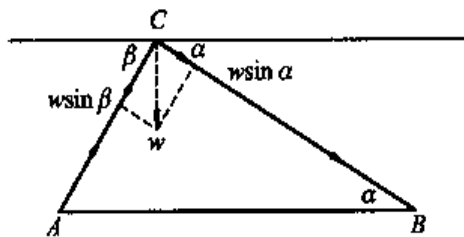
(3) 单位时间内使身体重心升高所作的功为 $W_s = mg\delta \frac{v}{s} = \frac{Mgs v}{8l}$, 所以单位时间行走所

需的总功 $W = W_e + W_s = \frac{mv^3}{6s} + \frac{Mgs v}{8l}$. 代入 $n = \frac{v}{s}$, 得 $W = v^2 \left(\frac{m}{6} n + \frac{Mg}{8l} \frac{1}{n} \right)$, 于是当 v 一定时, $n = \sqrt{\frac{3Mg}{4ml}}$ 可使 W 最小. 设 $\frac{M}{m} = 4$, $l = 1$ m, 可得 $n = 5 \sim 6$, n 显然过大.

(4) 动能将变为 $W'_e = \frac{1}{2} mv^2 \frac{v}{s} = \frac{mv^3}{2s}$. 用前法可得 $n = \sqrt{\frac{Mg}{4ml}} \approx 3$, 这个结果更合理些.

* 10.

(1) 向下滑行的阻力是 $f_1 = w \sin \alpha$, 向上游动的力是 $f_2 = w \sin \beta + k w \sin \alpha$, 水平游动的阻力是 $f_3 = k w \sin \alpha$ (见右图).



(2) 沿 ACB 运动的能量 $E_{ACB} = f_2 \cdot AC$, 沿 AB 运动的能量 $E_{AB} = f_3 \cdot AB$, 而 $\frac{AC}{AB} =$

$\frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$, 所以 E_{ACB} 与 E_{AB} 之比为 $Q = \frac{k \sin \alpha + \sin \beta}{k \sin (\alpha + \beta)}$.

(3) 由 $\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 0$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial \beta} = 0$, 可求得最佳角度 α, β 满足 $\cos (\alpha + \beta) = 1/k (k > 1)$. 由 $\tan \alpha = 0.2$, 得 $\alpha \approx 11.3^\circ$, 对于 $k = 1.5, 2, 3$ 分别求出 $\beta \approx 37^\circ, 49^\circ, 59^\circ$.

第 4 章 习 题

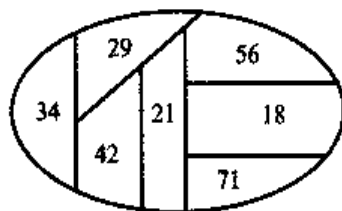
1. 某银行经理计划用一笔资金进行有价证券的投资,可供购进的证券及其信用等级、到期年限、收益如下表所示.按照规定,市政证券的收益可以免税,其他证券的收益需按 50% 的税率纳税.此外还有以下限制:

- 1) 政府及代办机构的证券总共至少要购进 400 万元;
- 2) 所购证券的平均信用等级不超过 1.4 (信用等级数字越小,信用程度越高);
- 3) 所购证券的平均到期年限不超过 5 年.

证券名称	证券种类	信用等级	到期年限	到期税前收益(%)
A	市政	2	9	4.3
B	代办机构	2	15	5.4
C	政府	1	4	5.0
D	政府	1	3	4.4
E	市政	5	2	4.5

- (1) 若该经理有 1 000 万元资金,应如何投资?
- (2) 如果能够以 2.75% 的利率借到不超过 100 万元资金,该经理应如何操作?
- (3) 在 1 000 万元资金情况下,若证券 A 的税前收益增加为 4.5%,投资应否改变? 若证券 C 的税前收益减少为 4.8%,投资应否改变^[10]?

2. 一家出版社准备在某市建立两个销售代理点,向 7 个区的大学生售书,每个区的大学生数量(单位:千人)已经表示在图上.每个销售代理点只能向本区和一个相邻区的大学生售书,这两个销售代理点应该建在何处,才能使所能供应的大学生的数量最大? 建立该问题的整数线性规划模型并求解^[48].



3. 某储蓄所每天的营业时间是上午 9:00 到下午 5:00. 根据经验,每天不同时间段所需要的服务员数量如下:

时间段(时)	9~10	10~11	11~12	12~1	1~2	2~3	3~4	4~5
服务员数量	4	3	4	6	5	6	8	8

储蓄所可以雇佣全时和半时两类服务员.全时服务员每天报酬 100 元,从上午 9:00 到下午 5:00 工作,但中午 12:00 到下午 2:00 之间必须安排 1 小时的午餐时间.储蓄所每天可以雇佣不超过 3 名的半时服务员,每个半时服务员必须连续工作 4 小时,报酬 40 元.问该储蓄所应如何雇佣全时和半时两类服务员?如果不能雇佣半时服务员,每天至少增加多少费用?如果雇佣半时服务员的数量没有限制,每天可以减少多少费用?

4. 一家保姆服务公司专门向顾主提供保姆服务.根据估计,下一年的需求是:春季 6 000 人日,夏季 7 500 人日,秋季 5 500 人日,冬季 9 000 人日.公司新招聘的保姆必须经过 5 天的培训才能上岗,每个保姆每季度工作(新保姆包括培训)65 天.保姆从该公司而不是从顾主那里得到报酬,每人每月工资 800 元.春季开始时公司拥有 120 名保姆,在每个季度结束后,将有 15% 的保姆自动离职.

(1) 如果公司不允许解雇保姆,请你为公司制定下一年的招聘计划.哪些季度需求的增加不影响招聘计划?可以增加多少?

(2) 如果公司在每个季度结束后允许解雇保姆,请为公司制定下一年的招聘计划^[10].

5. 在甲乙双方的一场战争中,一部分甲方部队被乙方部队包围长达 4 个月.由于乙方封锁了所有水陆交通通道,被包围的甲方部队只能依靠空中交通维持供给.运送 4 个月的供给分别需要 2 次,3 次,3 次,4 次飞行,每次飞行编队由 50 架飞机组成(每架飞机需要 3 名飞行员),可以运送 10 万吨物资.每架飞机每个月只能飞行一次,每名飞行员每个月也只能飞行一次.在执行完运输任务后的返回途中有 20% 的飞机会被乙方部队击落,相应的飞行员也因此牺牲或失踪.在第 1 个月开始时,甲方拥有 110 架飞机和 330 名熟练的飞行员.在每个月开始时,甲方可以招聘新飞行员和购买新飞机.新飞机必须经过一个月的检查后才可以投入使用,新飞行员必须在熟练飞行员的指导下经过一个月的训练才能投入飞行.每名熟练飞行员可以作为教练每个月指导 20 名飞行员(包括他自己在内)进行训练.每名飞行员在完成一个月的飞行任务后,必须有一个月的带薪假期,假期结束后才能再投入飞行.已知各项费用(单位略去)如下表所示,请你为甲方安排一个飞行计划.

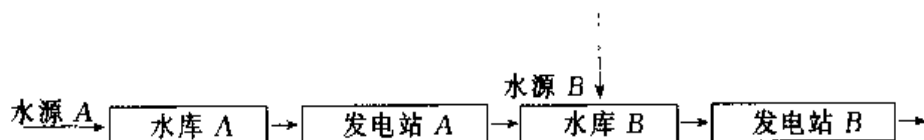
如果每名熟练飞行员可以作为教练每个月指导不超过 20 名飞行员(包括他自己在内)进行训练,模型和结果有哪些改变^[11]?

	第 1 个月	第 2 个月	第 3 个月	第 4 个月
新飞机价格	200.0	195.0	190.0	185.0
闲置的熟练飞行员报酬	7.0	6.9	6.8	6.7
教练和新飞行员报酬(包括培训费用)	10.0	9.9	9.8	9.7
执行飞行任务的熟练飞行员报酬	9.0	8.9	9.8	9.7
休假期间的熟练飞行员报酬	5.0	4.9	4.8	4.7

6. 某公司将 4 种不同含硫量的液体原料(分别记为甲、乙、丙、丁)混合生产两种产品(分别记为 A, B). 按照生产工艺的要求, 原料甲、乙、丁必须首先倒入混合池中混合, 混合后的液体再分别与原料丙混合生产 A, B. 已知原料甲、乙、丙、丁的含硫量分别是 3, 1, 2, 1(%), 进货价格分别为 6, 16, 10, 15(千元/吨); 产品 A, B 的含硫量分别不能超过 2.5, 1.5(%), 售价分别为 9, 15(千元/吨). 根据市场信息, 原料甲、乙、丙的供应没有限制, 原料丁的供应量最多为 50 吨; 产品 A, B 的市场需求量分别为 100, 200 吨. 问应如何安排生产^[18]?

7. 某钢管零售商从钢管厂进货, 将钢管按照顾客的要求切割后售出. 从钢管厂进货时得到的原料钢管长度都是 1 850 mm. 现有一客户需要 15 根 290 mm、28 根 315 mm、21 根 350 mm 和 30 根 455 mm 的钢管. 为了简化生产过程, 规定所使用的切割模式的种类不能超过 4 种, 使用频率最高的一种切割模式按照一根原料钢管价值的 1/10 增加费用, 使用频率次之的切割模式按照一根原料钢管价值的 2/10 增加费用, 依次类推, 且每种切割模式下的切割次数不能太多(一根原料钢管最多生产 5 根产品). 此外, 为了减少余料浪费, 每种切割模式下的余料浪费不能超过 100 mm. 为了使总费用最小, 应如何下料^[18]?

8. 某电力公司经营两座发电站, 发电站分别位于两个水库上, 位置如下图所示.

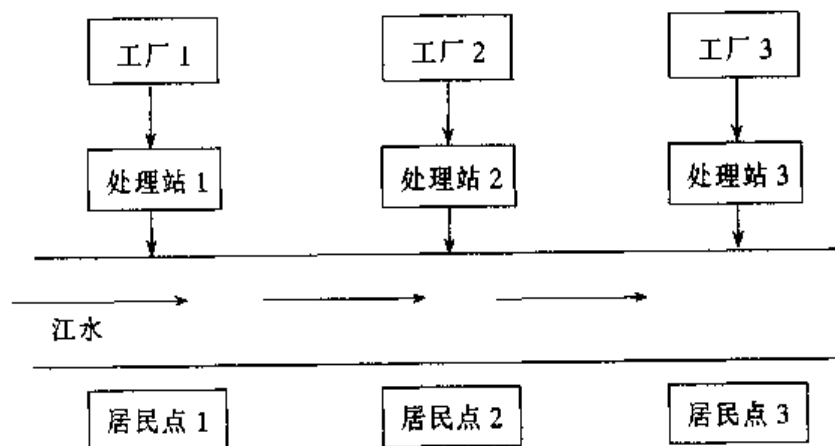


已知发电站 A 可以将水库 A 的 1 万 m^3 的水转换为 400 千度电能, 发电站 B 只能将 1 万 m^3 的水转换为 200 千度电能. 发电站 A, B 每个月的最大发电能力分别是 60 000 千度、35 000 千度. 每个月最多有 50 000 千度电能够以 200 元/千度的价格售出, 多余的电能只能够以 140 元/千度的价格售出. 水库 A, B 的其他有关数据如下(单位: 万立方米):

		水库 A	水库 B
水库最大蓄水量		2 000	1 500
水源流入水量	本月	200	40
	下月	130	15
水库最小蓄水量		1 200	800
水库目前蓄水量		1 900	850

请你为该电力公司制订本月和下月的生产经营计划。(千度是非国际单位制单位,1千度=10³千瓦时)

9. 如下图,有若干工厂的污水经排污口流入某江,各口有污水处理站,处理站对面是居民点.工厂 1 上游江水流量和污水浓度,国家标准规定的水的污染浓度,以及各个工厂的污水流量和污水浓度均已知道.设污水处理费用与污水处理前后的浓度差和污水流量成正比,使每单位流量的污水下降一个浓度单位需要的处理费用(称处理系数)为已知.处理后的污水与江水混合,流到下一个排污口之前,自然状态下的江水也会使污水浓度降低一个比例系数(称自净系数),该系数可以估计.试确定各污水处理站出口的污水浓度,使在符合国家标准规定的条件下总的处理费用最小.



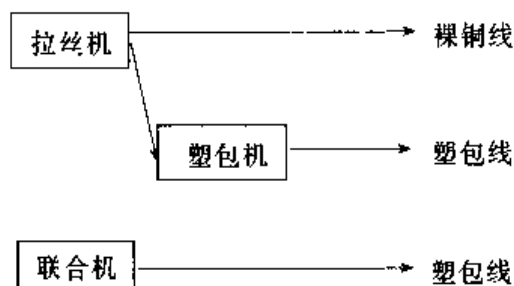
先建立一般情况下的数学模型,再求解以下的具体问题:

设上游江水流量为 $1\,000 \times 10^{12}$ l/min, 污水浓度为 0.8 mg/l, 3 个工厂的污水流量均为 5×10^{12} l/min, 污水浓度(从上游到下游排列)分别为 100, 60, 50 (mg/l), 处理系数均为 1 万元/((10^{12} l/min) × (mg/l)), 3 个工厂之间的两段江面的自净系数(从上游到下游)分别为 0.9 和 0.6. 国家标准规定水的污染浓度不能超过 1 mg/l.

(1) 为了使江面上所有地段的水污染达到国家标准,最少需要花费多少费用?

(2) 如果只要求三个居民点上游的水污染达到国家标准,最少需要花费多少费用^[64]?

10. 生产裸铜线和塑包线的工艺如图所示:



某厂现有 I 型拉丝机和塑包机各一台,生产两种规格的裸铜线和相应达到两种规格的塑包线,没有拉丝塑包联合机(简称联合机).由于市场需求扩大和现有塑包机设备陈旧,计划新增 II 型拉丝机或联合机(由于场地限制,每种设备最多 1 台),或改造塑包机,每种设备选用方案及相关数据如下:

	拉丝机		塑包机		联合机
	原有 I 型	新购 II 型	原有	改造	新购
方案代号	1	2	3	4	5
所需投资(万元)	0	20	0	10	50
运行费用(元/小时)	5	7	8	8	12
固定费用(万元/年)	3	5	8	10	14
规格 1 生产效率(米/小时)	1 000	1 500	1 200	1 600	1 600
规格 2 生产效率(米/小时)	800	1 400	1 000	1 300	1 200
废品率(%)	2	2	3	3	3
每千米废品损失(元)	30	30	50	50	50

已知市场对两种规格裸铜线的需求分别为 3 000 km 和 2 000 km,对两种规格塑包线的需求分别为 10 000 km 和 8 000 km.按照规定,新购及改进设备按每年 5 % 提取折旧费,老设备不提;每台机器每年最多只能工作 8 000 小时.为了满足需求,确定使总费用最小的设备选用方案和生产计划^[65].

11. 有 4 名同学到一家公司参加三个阶段的面试:公司要求每个同学都必须首先找公司秘书初试,然后到部门主管处复试,最后到经理处参加面试,并且不允许插队(即在任何一个阶段 4 名同学的顺序是一样的).由于 4 名同学的专业背景不同,所以每人在三个阶段的面试时间也不同,如下表所示(单位:分钟):

	秘书初试	主管复试	经理面试
同学甲	13	15	20
同学乙	10	20	18
同学丙	20	16	10
同学丁	8	10	15

这 4 名同学约定他们全部面试完以后一起离开公司.假定现在是早晨 8:00,问他们最早何时能离开公司^[65]?

第 4 章习题参考解答

1.

(1) 设投资证券 A, B, C, D, E 的金额分别为 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (百万元), 按照规定、限制和 1 000 万元资金约束, 列出模型

$$\text{Max } 0.043x_1 + 0.027x_2 + 0.025x_3 + 0.022x_4 + 0.045x_5$$

$$\text{s.t. } x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 10$$

$$\frac{2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq 1.4 \quad \text{即 } 6x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 36x_5 \leq 0$$

$$\frac{9x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq 5 \quad \text{即 } 4x_1 + 10x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

用 LINDO 求解并要求灵敏性分析, 得到:

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 0.2983637

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	2.181818	0.000000
X2	0.000000	0.030182
X3	7.363636	0.000000
X4	0.000000	0.000636
X5	0.454545	0.000000

ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES

2)	3.818182	0.000000
3)	0.000000	0.029836
4)	0.000000	0.000618
5)	0.000000	0.002364

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	0.043000	0.003500	0.013000

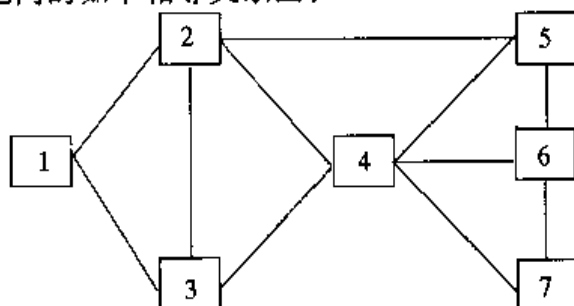
X2	0.027000	0.030182	INFINITY
X3	0.025000	0.017333	0.000560
X4	0.022000	0.000636	INFINITY
X5	0.045000	0.052000	0.014000
RIGHTHAND SIDE RANGES			
ROW	CURRENT	ALLOWABLE	ALLOWABLE
	RHS	INCREASE	DECREASE
2	4.000000	3.818182	INFINITY
3	10.000000	INFINITY	4.883721
4	0.000000	231.428574	20.000000
5	0.000000	10.000000	12.000000

即证券 A, C, E 分别投资 2.182 百万元, 7.364 百万元, 0.454 百万元, 最大税后收益为 0.298 百万元。

(2) 由(1)的结果中影子价格可知, 若资金增加 100 万元, 收益可增加 0.029 8 百万元。大于以 2.75% 的利率借到 100 万元资金的利息, 所以应借贷。投资方案需将上面模型第 2 个约束右端改为 11, 求解得到: 证券 A, C, E 分别投资 2.40 百万元, 8.10 百万元, 0.50 百万元, 最大税后收益为 0.300 7 百万元。

(3) 由(1)的结果中目标函数系数的允许范围(最优解不变)可知, 证券 A 的税前收益可增 0.35%, 故若证券 A 的税前收益增加为 4.5%, 投资不应改变; 证券 C 的税前收益可减 0.112% (注意按 50% 的税率纳税), 故若证券 C 的税前收益减少为 4.8%, 投资应该改变。

2. 将大学生数量为 34, 29, 42, 21, 56, 18, 71 的区分别标号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 区, 划出区与区之间的如下相邻关系图:



记 r_i 为第 i 区的大学生人数, 用 0-1 变量 $x_{ij} = 1$ 表示 (i, j) 区的大学生由一个销售代理点供应图书 ($i < j$ 且 i, j 相邻), 否则 $x_{ij} = 0$. 建立该问题的整数线性规划模型

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \sum_{i,j \text{ 相邻}} (r_i + r_j) x_{ij} \\
 & \text{s. t.} \sum_{i,j} x_{ij} \leq 2
 \end{aligned}$$

$$\sum_j x_{ij} + \sum_j x_{j'} \leq 1 \quad \forall i$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

即

$$\text{Max } 63x_{12} + 76x_{13} + 71x_{23} + 50x_{24} + 85x_{25} + 63x_{34} + 77x_{45} + 39x_{46} + 92x_{47} + 74x_{56} + 89x_{67}$$

$$\text{s. t. } x_{12} + x_{13} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{56} + x_{67} \leq 2$$

$$x_{12} + x_{13} \leq 1$$

$$x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{34} \leq 1$$

$$x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} \leq 1$$

$$x_{25} + x_{45} + x_{56} \leq 1$$

$$x_{46} + x_{56} + x_{67} \leq 1$$

$$x_{47} + x_{67} \leq 1$$

$$x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1$$

用 LINDO 求解得到:最优解为 $x_{25} = x_{47} = 1$ (其他为 0), 最优值为 177 人.

3. 设储蓄所每天雇佣的全时服务员中以 12:00~1:00 为午餐时间的有 x_1 名, 以 1:00~2:00 为午餐时间的有 x_2 名; 半时服务员中从 9:00, 10:00, 11:00, 12:00, 1:00 开始工作的分别为 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 名. 列出模型

$$\text{Min } 100x_1 + 100x_2 + 40y_1 + 40y_2 + 40y_3 + 40y_4 + 40y_5$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + y_1 \geq 4$$

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \geq 3$$

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + y_3 \geq 4$$

$$x_2 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 6$$

$$x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 5$$

$$x_1 + x_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 6$$

$$x_1 + x_2 + y_4 + y_5 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 + y_5 \geq 8$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \leq 3$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \text{ 且为整数}$$

求解得到最优解 $x_1 = 3, x_2 = 4, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 2, y_4 = 0, y_5 = 1$, 最小费用为 820 元.

如果不能雇佣半时服务员, 则最优解为 $x_1 = 5, x_2 = 6, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 =$

$0, y_4 = 0, y_5 = 0$, 最小费用为 1 100 元, 即每天至少增加 $1\,100 - 820 = 280$ 元.

如果雇佣半时服务员的数量没有限制, 则最优解为 $x_1 = 0, x_2 = 0, y_1 = 4, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 2, y_5 = 8$, 最小费用为 560 元, 即每天可以减少 $820 - 560 = 260$ 元.

4.

(1) 设 4 个季度开始时公司新招聘的保姆数量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 人, 4 个季度开始时保姆总数量分别为 S_1, S_2, S_3, S_4 人. 以本年度付出的总报酬最少(即 4 个季度开始时保姆总数量之和最小)为目标, 则模型为

$$\text{Min } S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$\text{s. t. } 65S_1 \geq 6\,000 + 5x_1$$

$$65S_2 \geq 7\,500 + 5x_2$$

$$65S_3 \geq 5\,500 + 5x_3$$

$$65S_4 \geq 9\,000 + 5x_4$$

$$S_1 = 120 + x_1$$

$$S_2 = 0.85S_1 + x_2$$

$$S_3 = 0.85S_2 + x_3$$

$$S_4 = 0.85S_3 + x_4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0$$

用 LINDO 求解得到:

OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1)	478.5107	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
S1	120.000000	0.000000
S2	116.500000	0.000000
S3	99.025002	0.000000
S4	142.985733	0.000000
X1	0.000000	0.873223
X2	14.500000	0.000000
X3	0.000000	0.929167
X4	58.814480	0.000000
ROW SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES	
2)	1 800.000000	0.000000
3)	0.000000	0.029830
4)	936.625000	0.000000
5)	0.000000	-0.016667

6)	0.000000	-0.873223
7)	0.000000	0.149149
8)	0.000000	-0.929167
9)	0.000000	0.083333

对上述结果取整,4个季度开始时公司新招聘的保姆数量分别为0,15,0,59人.

上面的模型中没有要求 $x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, S_2, S_3, S_4$ 为整数,是因为保姆数量较大,可以近似看作实数处理.此外,由于非整数因子0.85的影响,如果要求 $x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, S_2, S_3, S_4$ 为整数,则可能使得新招聘的保姆数量远远超出实际需要的数量,从而难以找到合理的整数解.

由以上结果中约束的松弛(或剩余)的数据知道,春季和秋季需求的增加不影响招聘计划,可以分别增加1800和936人日.

(2) 设4个季度开始时公司新招聘的保姆数量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 人,4个季度结束时解雇的保姆数量分别为 y_1, y_2, y_3, y_4 人,4个季度开始时保姆总数量分别为 S_1, S_2, S_3, S_4 人.以本年度付出的总报酬最少(即4个季度开始时保姆总数量之和最小)为目标,则模型为

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\
 & \text{s. t. } 65S_1 \geq 6000 + 5x_1 \\
 & \quad 65S_2 \geq 7500 + 5x_2 \\
 & \quad 65S_3 \geq 5500 + 5x_3 \\
 & \quad 65S_4 \geq 9000 + 5x_4 \\
 & \quad S_1 = 120 + x_1 \\
 & \quad S_2 = 0.85S_1 + x_2 - y_1 \\
 & \quad S_3 = 0.85S_2 + x_3 - y_2 \\
 & \quad S_4 = 0.85S_3 + x_4 - y_3 \\
 & \quad x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

用LINDO求解并对结果取整得到,第二个季度开始时公司新招聘15人,第二个季度结束时解雇15人;第四个季度开始时新招聘72人.目标函数值为465.1218,比不允许解雇时的数值略有减少.

5. 因为执行飞行任务以及执行飞行任务后休假的熟练飞行员数量是常数,所以这部分费用(报酬)是固定的,在优化目标中可以不考虑.

设4个月开始时甲方新购买的飞机数量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 架,闲置的飞机数量分别为 y_1, y_2, y_3, y_4 架.4个月中,飞行员中教练和新飞行员数量分别为 u_1, u_2, u_3, u_4 人,闲置的熟练飞行员数量分别为 v_1, v_2, v_3, v_4 人.

优化目标是

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 200x_1 + 195x_2 + 190x_3 + 185x_4 + 10u_1 + 9.9u_2 + 9.8u_3 + \\ & 9.7u_4 + 7v_1 + 6.9v_2 + 6.8v_3 + 6.7v_4 \end{aligned}$$

需要考虑的约束包括

1) 飞机数量限制:4 个月中执行飞行任务的飞机分别为 100,150,150,200 架,但只有 80,120,120,160 架能够返回供下个月使用.

$$\text{第 1 个月: } 100 + y_1 = 110$$

$$\text{第 2 个月: } 150 + y_2 = 80 + y_1 + x_1$$

$$\text{第 3 个月: } 150 + y_3 = 120 + y_2 + x_2$$

$$\text{第 4 个月: } 200 + y_4 = 120 + y_3 + x_3$$

2) 飞行员数量限制:4 个月中执行飞行任务的熟练飞行员分别为 300,450,450,600 人,但只有 240,360,360,480 人能够返回(下个月一定休假).

$$\text{第 1 个月: } 300 + 0.05u_1 + v_1 = 330$$

$$\text{第 2 个月: } 450 + 0.05u_2 + v_2 = u_1 + v_1$$

$$\text{第 3 个月: } 450 + 0.05u_3 + v_3 = u_2 + v_2 + 240$$

$$\text{第 4 个月: } 600 + 0.05u_4 + v_4 = u_3 + v_3 + 360$$

于是,优化模型为

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 200x_1 + 195x_2 + 190x_3 + 185x_4 + 10u_1 + 9.9u_2 + 9.8u_3 + 9.7u_4 + \\ & 7v_1 + 6.9v_2 + 6.8v_3 + 6.7v_4 \end{aligned}$$

$$\text{s. t. } y_1 = 10$$

$$y_1 + x_1 - y_2 = 70$$

$$y_2 + x_2 - y_3 = 30$$

$$y_3 + x_3 - y_4 = 80$$

$$0.05u_1 + v_1 = 30$$

$$u_1 + v_1 - 0.05u_2 - v_2 = 450$$

$$u_2 + v_2 - 0.05u_3 - v_3 = 210$$

$$u_3 + v_3 - 0.05u_4 - v_4 = 240$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4 \geq 0 \text{ 且为}$$

整数

用 LINDO 求解得到:最优解为 $x_1 = 60, x_2 = 30, x_3 = 80, x_4 = 0, y_1 = 10, y_2 = y_3 = y_4 = 0, u_1 = 460, u_2 = 220, u_3 = 240, u_4 = 0, v_1 = 7, v_2 = 6, v_3 = 4, v_4 = 4$; 目标函数值为 42 324.40.

如果每名熟练飞行员可以作为教练每个月指导不超过 20 名飞行员(包括他

自己在内)进行训练,则应将教练与新飞行员分开:

设4个月飞行员中教练为 u_1, u_2, u_3, u_4 人,新飞行员数量分别为 w_1, w_2, w_3, w_4 人.其它符号不变.飞行员的数量限制约束为

$$\text{第1个月: } 300 + u_1 + v_1 = 330$$

$$\text{第2个月: } 450 + u_2 + v_2 = u_1 + v_1 + w_1, w_1 \leq 20u_1$$

$$\text{第3个月: } 450 + u_3 + v_3 = u_2 + v_2 + 240 + w_2, w_2 \leq 20u_2$$

$$\text{第4个月: } 600 + u_4 + v_4 = u_3 + v_3 + 360 + w_3, w_3 \leq 20u_3$$

优化模型作相应修改,用LINDO求解得到:最优解为 $u_1 = 22, u_2 = 11, u_3 = 12, u_4 = 0, v_1 = 8, v_2 = v_3 = v_4 = 0, w_1 = 431, w_2 = 211, w_3 = 228, w_4 = 0$ ($x_1 \sim x_4, y_1 \sim y_4$ 不变);目标函数值为42 185.80.

6. 设 y_1, z_1 分别是产品A中是来自混合池和原料丙的吨数, y_2, z_2 分别是产品B中是来自混合池和原料丙的吨数;混合池中原料甲、乙、丁所占的比例分别为 x_1, x_2, x_4 .优化目标是总利润最大,即

$$\begin{aligned} \text{Max } & (9 - 6x_1 - 16x_2 - 15x_4)y_1 + (15 - 6x_1 - 16x_2 - 15x_4)y_2 + (9 - 10)z_1 \\ & + (15 - 10)z_2 \end{aligned}$$

约束条件为:

$$1) \text{ 原料最大供应量限制: } x_4(y_1 + y_2) \leq 50$$

$$2) \text{ 产品最大需求量限制: } y_1 + z_1 \leq 100, y_2 + z_2 \leq 200$$

3) 产品最大含硫量限制:

$$\begin{aligned} \text{对产品 A, } & \frac{(3x_1 + x_2 + x_4)y_1 + 2z_1}{y_1 + z_1} \leq 2.5, \text{ 即 } (3x_1 + x_2 + x_4 - 2.5)y_1 - \\ & 0.5z_1 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{对产品 B, 类似可得 } (3x_1 + x_2 + x_4 - 1.5)y_2 + 0.5z_2 \leq 0$$

$$4) \text{ 其他限制: } x_1 + x_2 + x_4 = 1, x_1, x_2, x_4, y_1, z_1, y_2, z_2 \geq 0$$

用LINGO求解得到结果为: $x_2 = x_4 = 0.5, y_2 = z_2 = 100$,其余为0;目标函数值为450.

7. 由于所有可能的切割模式很多,这里不采用枚举切割模式的方式建模,而是建立整数非线性规划模型.

记 $b = (290, 315, 350, 455)$ 为4种产品的长度, $n = (15, 28, 21, 30)$ 为4种产品的需求量.设第 i 种切割模式下每根原料钢管生产4种产品的数量分别为 $r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i}$,该模式使用 x_i 次,即使用该模式切割 x_i 根原料钢管($i = 1, 2, 3, 4$),且切割模式次序是按照使用频率从高到低排列的.

约束条件为

$$1) \text{ 产品数量: } \sum_{j=1}^4 x_j r_j \geq n_j \quad (j=1,2,3,4)$$

2) 切割模式: 引入 0-1 变量 $y_i = 1$ 表示使用第 i 种模式, $y_i = 0$ 表示不使用 ($i=1,2,3,4$),

$$1\,750 y_i \leq \sum_{j=1}^4 b_j r_j \leq 1\,850 y_i \quad (i=1,2,3,4)$$

$$y_i \leq \sum_{j=1}^4 r_j \leq 5 y_i \quad (i=1,2,3,4)$$

$$y_i \leq x_i \leq 30 y_i \quad (i=1,2,3,4)$$

$$y_{i+1} \leq y_i \quad (i=1,2,3)$$

$$x_{i+1} \leq x_i \quad (i=1,2,3)$$

3) 为了减少搜索空间引入的约束: 使用的原料钢管不可能少于 $\lceil \sum_{j=1}^4 b_j n_j / 1\,850 \rceil$; 一根原料钢管最多生产 5 根产品, 使用的原料钢管不可能少于 $\lceil \sum_{j=1}^4 n_j / 5 \rceil$. 所以

$$\sum_{i=1}^4 x_i \geq \max \left(\left\lceil \sum_{j=1}^4 b_j n_j / 1\,850 \right\rceil, \left\lceil \sum_{j=1}^4 n_j / 5 \right\rceil \right) = 19$$

优化目标为

$$\text{Min } \sum_{i=1}^4 (x_i + 0.1 \times i \times y_i)$$

用 LINGO 求解 (x_i 和 r_j 均为整数) 得到: 只使用 3 种切割模式, 分别使用 9, 7, 3 (次); 每根原料钢管用第 1 种模式生产 4 种产品各 1, 2, 0, 2 (根), 用第 2 种模式生产 4 种产品各 0, 1, 3, 1 (根), 用第 3 种模式生产 4 种产品各 2, 1, 0, 2 (根); 目标函数值为 19.6.

8. 假设水源流入水量是在每个月开始发生的, 根据题中的数据, 水库中的水应允许不发电而直接放走.

设 $x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B2}$ 分别为本月和下月水库 A, B 供应电站 A, B 发电的水量, $y_{A1}, y_{A2}, y_{B1}, y_{B2}$ 分别为本月和下月从水库 A, B 直接放走的水量, $z_{A1}, z_{A2}, z_{B1}, z_{B2}$ 分别为本月和下月结束时水库 A, B 的水量. 用 u_1, u_2 分别表示本月和下月以高价 (200 元/千度) 售出的电量, v_1, v_2 分别表示本月和下月以低价 (140 元/千度) 售出的电量.

优化目标为

$$\text{Max } 200(u_1 + u_2) + 140(v_1 + v_2)$$

约束条件有

1) 每个月的发电量等于当月卖出的电量:

$$400x_{A1} + 200x_{B1} = u_1, 400x_{A2} + 200x_{B2} = u_2 + v_2$$

2) 水量守恒约束:

$$x_{A1} + y_{A1} + z_{A1} = 1\,900 + 200, x_{B1} + y_{B1} + z_{B1} = 850 + 40 + x_{A1} + y_{A1}$$

$$x_{A2} + y_{A2} + z_{A2} = z_{A1} + 130, x_{B2} + y_{B2} + z_{B2} = z_{B1} + 15 + x_{A2} + y_{A2}$$

3) 发电能力限制:

$$400x_{A1} \leq 60\,000, 400x_{A2} \leq 60\,000$$

$$200x_{B1} \leq 35\,000, 200x_{B2} \leq 35\,000$$

4) 水库蓄水量限制:

$$1\,200 \leq z_{A1} \leq 2\,000, 1\,200 \leq z_{A2} \leq 2\,000$$

$$800 \leq z_{B1} \leq 1\,500, 800 \leq z_{B2} \leq 1\,500$$

5) 高价电量的限制:

$$u_1 \leq 50\,000, u_2 \leq 50\,000$$

注意到总发电量中尽量以高价卖出,以上约束可以保证只有 $u_1 = 50\,000$ 时才可能有 $v_1 > 0$, 只有 $u_2 = 50\,000$ 时才可能有 $v_2 > 0$.

用 LINDO 求解得到:

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 0.5276000E+08

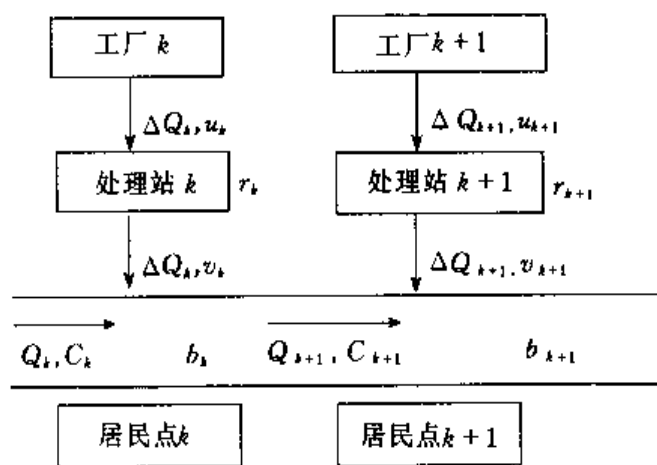
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
U1	50000.000000	0.000000
U2	50000.000000	0.000000
V1	45000.000000	0.000000
V2	189000.000000	0.000000
XA1	150.000000	0.000000
XB1	175.000000	0.000000
XA2	150.000000	0.000000
XB2	895.000000	0.000000
YA1	0.000000	28000.000000
ZA1	1950.000000	0.000000
YB1	65.000000	0.000000
ZB1	800.000000	0.000000

YA2	730.000000	0.000000
ZA2	1200.000000	0.000000
YB2	0.000000	28000.000000
ZB2	800.000000	

即水库 A 供应电站 A 发电的水量本月和下月均为 150 万 m^3 , 水库 B 供应电站 B 发电的水量本月和下月分别为 175 万 m^3 和 895 万 m^3 ; 本月和下月以高价售出的电量均为 50 000 千度, 本月和下月以低价售出的电量分别为 45 000 和 189 000 千度; 总收入 527.6×10^5 元.

9. 设有 n 个工厂和 n 个污水处理站, 以处理站出口向上游划分江面, 如下图. 记第 k 段江面的流量和污水浓度分别为 Q_k 和 C_k , 工厂 k 和处理站 k 流出的污水流量相同, 均为 ΔQ_k , 而污水浓度分别为 u_k, v_k , 处理站 k 的处理系数为 r_k , 第 k 段江面的自净系数为 b_k . 通常 ΔQ_k 远小于 Q_k , 当没有其它水源入江时, 可视 Q_k 为常数 Q , 国家标准规定的水的污染浓度为 C_0 .

以上参数中 $Q, C_0, C_1, \Delta Q_k, u_k, r_k, b_k$ 已知, v_k 为决策变量.



在 Q_k 简化为常数 Q 的情况下, 处理站 k 的污水与江水混合后的污水浓度为 $D_k = C_k + \frac{\Delta Q_k}{Q} v_k$, 第 k 段江面自净后的污水浓度为 $C_{k+1} = b_k D_k$, 处理站 k 的处理费用为 $r_k \Delta Q_k (u_k - v_k)$, 于是在江面上所有地段的水污染达到国家标准的条件下, 使总费用最小的模型为

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad T &= \sum_{k=1}^n r_k \Delta Q_k (u_k - v_k) \\ \text{s. t.} \quad D_k &= C_k + \frac{\Delta Q_k}{Q} v_k \end{aligned}$$

$$C_{k+1} = b_k D_k$$

$$D_k \leq C_0$$

$$v_k \leq u_k$$

对于具体问题, $Q = 1\,000 \times 10^{12}$ l/min, $C_1 = 0.8$ mg/l, $C_0 = 1$ mg/l, $\Delta Q_1 = \Delta Q_2 = \Delta Q_3 = 5 \times 10^{12}$ l/min, $u_1 = 100$, $u_2 = 60$, $u_3 = 50$ mg/l, $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ 万元/ $((10^{12}$ l/min) \times (mg/l)), $b_1 = 0.9$, $b_2 = 0.6$.

(1) 按照上面的模型,用 LINGO 求解得到结果为: $v_1 = 40$, $v_2 = 20$, $v_3 = 50$ (mg/l),即工厂 3 无需处理污水;最小总费用为 500 万元.

(2) 只需要将上面模型中的 $D_k \leq C_0$ 改为 $C_k \leq C_0$,用 LINGO 求解得到结果为: $v_1 = 62.2$, $v_2 = 60$, $v_3 = 50$ (mg/l),即工厂 2,3 均无需处理污水;最小总费用为 189 万元.

10. 用 M_i 表示第 i 种方案机器的数目(0-1 变量), x_{ij} 表示第 i 种方案机器用于生产第 j 种规格线材的时间(单位:千小时), ($i = 1, 2, 3, 4, 5$; $j = 1, 2$).

费用(均以千元为单位)包括:新购及改进设备年折旧费($0.05K$),设备年固定费用(F)、年运行费用(R)、废品损失(L),其中:

$$K = 200M_2 + 100M_4 + 500M_5$$

$$F = 30M_1 + 50M_2 + 80M_3 + 100M_4 + 140M_5$$

$$R = 5(x_{11} + x_{12}) + 7(x_{21} + x_{22}) + 8(x_{31} + x_{32}) + 8(x_{41} + x_{42}) + 12(x_{51} + x_{52})$$

设备 1 的年度废品损失为 $0.030 \times 0.02 \times (1\,000x_{11} + 800x_{12}) = 0.6x_{11} + 0.48x_{12}$,类似地有

$$L = 0.6x_{11} + 0.48x_{12} + 0.9x_{21} + 0.84x_{22} + 1.8x_{31} + 1.5x_{32} + 2.4x_{41} + 1.95x_{42} + 2.4x_{51} + 1.8x_{52}$$

优化目标是

$$\begin{aligned} \text{Min } 0.05K + F + R + L = & 30M_1 + 60M_2 + 80M_3 + 105M_4 + 165M_5 \\ & + 5.6x_{11} + 5.48x_{12} + 7.9x_{21} + 7.84x_{22} + 9.8x_{31} + 9.5x_{32} + \\ & 10.4x_{41} + 9.95x_{42} + 14.4x_{51} + 13.8x_{52} \end{aligned}$$

约束条件有:

1) 满足需求:裸铜线不仅直接供应市场,还可以作为半成品供塑包机生产塑包线,所以裸铜线(规格 1)的需求量为 $3\,000 + 1\,200x_{31} + 1\,600x_{41}$.裸铜线(规格 1)由设备 1,2 生产,考虑到废品损失,应有 $0.98 \times (1\,000x_{11} + 1\,500x_{21}) \geq 3\,000 + 1\,200x_{31} + 1\,600x_{41}$,即

$$980x_{11} + 1\,470x_{21} - 1\,200x_{31} - 1\,600x_{41} \geq 3\,000$$

同理有

$$784x_{12} + 1\,372x_{22} - 1\,000x_{32} - 1\,300x_{42} \geq 2\,000$$

$$1\,164x_{31} + 1\,552x_{41} + 1\,552x_{51} \geq 10\,000$$

$$970x_{32} + 1\,261x_{42} + 1\,164x_{52} \geq 8\,000$$

2) 机器生产能力的限制:每台机器每年最多只能工作 8 000 小时,即

$$x_{i1} + x_{i2} \leq 8M_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

3) 现有生产设备数量的限制:

$$M_1 = 1$$

$$M_3 + M_4 = 1$$

4) 变量范围的限制: M_i 为 0-1 变量, x_{ij} 非负.

用LINDO 求解得到:

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)	573.9489	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
M1	1.000000	30.000000
M2	1.000000	56.000000
M3	1.000000	80.000000
M4	0.000000	85.800003
M5	1.000000	125.844315
X11	0.222356	0.000000
X12	0.000000	0.714286
X21	1.892579	0.000000
X22	6.107421	0.000000
X31	0.000000	2.186298
X32	6.379382	0.000000
X41	0.000000	2.648396
X42	0.000000	0.000000
X51	6.443299	0.000000
X52	1.556701	0.000000

即需要新购 II 型拉丝机和联合机各 1 台,不需要改造塑包机设备;相应的任务分配可以从 x_{ij} 的数值得到;总费用为 574 千元.

11. 记 t_{ij} 为第 i 名同学参加第 j 阶段面试需要的时间(已知), 令 x_{ij} 表示第 i 名同学参加第 j 阶段面试的开始时刻(不妨记早上 8:00 面试开始为 0 时刻) ($i=1,2,3,4; j=1,2,3$).

优化目标为 $\text{Min } T = \text{Max}_i \{x_{i3} + t_{i3}\}$.

约束条件:

1) 时间先后次序约束(每人只有参加完前一个阶段的面试后才能进入下一个阶段):

$$x_{ij} + t_{ij} \leq x_{i,j+1} \quad (i=1,2,3,4; j=1,2)$$

2) 每个阶段 j 同一时间只能面试 1 名同学: 用 0-1 变量 y_{ik} 表示第 k 名同学是否排在第 i 名同学前面(1 表示是, 0 表示否), 则

$$x_{ij} + t_{ij} - x_{kj} \leq T y_{ik} \quad (i, k=1,2,3; j=1,2,3; i < k)$$

$$x_{kj} + t_{kj} - x_{ij} \leq T(1 - y_{ik}) \quad (i, k=1,2,3; j=1,2,3; i < k)$$

将目标函数改写为

$$\text{Min } T$$

$$\text{s. t. } T \geq x_{13} + t_{13}$$

$$T \geq x_{23} + t_{23}$$

$$T \geq x_{33} + t_{33}$$

$$T \geq x_{43} + t_{43}$$

加上约束条件 1), 2), 用 LINGO 求解得到:

Local optimal solution found at iteration: 4357

Objective value: 84.00000

Variable	Value	Reduced Cost
T	84.00000	0.000000
X13	36.00000	0.000000
T13	20.00000	0.000000
X23	56.00000	0.000000
T23	18.00000	0.000000
X33	74.00000	0.000000
T33	10.00000	0.000000
X43	21.00000	0.000000
T43	15.00000	0.000000
X11	8.000000	0.000000

T11	13.00000	0.000000
X12	21.00000	0.000000
T12	15.00000	0.000000
X21	21.00000	0.000000
T21	10.00000	0.000000
X22	36.00000	0.000000
T22	20.00000	0.000000
X31	37.50000	0.000000
T31	20.00000	0.000000
X32	57.75000	0.000000
T32	16.00000	0.000000
X41	0.000000	0.9999970
T41	8.000000	0.000000
X42	11.00000	0.000000
T42	10.00000	0.000000
Y12	0.000000	- 83.99950
Y13	0.000000	0.000000
Y14	1.000000	83.99950
Y23	0.000000	- 83.99950
Y24	1.000000	0.000000
Y34	1.000000	0.000000

即所有面试完成至少需要 84 分钟. 面试顺序为 4-1-2-3(丁-甲-乙-丙).

第5章 习 题

1. 对于 5.1 节传染病的 SIR 模型,证明:

(1) 若 $s_0 > 1/\sigma$, 则 $i(t)$ 先增加, 在 $s = 1/\sigma$ 处最大, 然后减少并趋于零; $s(t)$ 单调减少至 s_∞ .

(2) 若 $s_0 < 1/\sigma$, 则 $i(t)$ 单调减少并趋于零, $s(t)$ 单调减少至 s_∞ .

2. 对于传染病的 SIR 模型证明(23)~(25)式.

3. 在 5.2 节经济增长模型中,为了适用于不同的对象可将产量函数 $Q(t)$ 折算成现金,仍用 $Q(t)$ 表示.考虑到物价上升因素我们记物价上升指数为 $p(t)$ (设 $p(0) = 1$),则产品的表面价值 $y(t)$ 、实际价值 $Q(t)$ 和物价指数 $p(t)$ 之间满足 $y(t) = Q(t)p(t)$.

(1) 导出 $y(t)$, $Q(t)$, $p(t)$ 的相对增长率之间的关系,并作出解释.

(2) 设雇用工人数量为 $L(t)$,每个工人工资 $w(t)$,企业的利润简化为从产品的收入 $y(t)$ 中扣除工人工资和固定成本.利用道格拉斯生产函数讨论,企业应雇用多少工人能使利润最大.

4. 在 5.3 节正规战争模型(3)中,设乙方与甲方战斗有效系数之比为 $a/b = 4$,初始兵力 x_0 与 y_0 相同.

(1) 问乙方取胜时的剩余兵力是多少,乙方取胜的时间如何确定.

(2) 若甲方在战斗开始后后备部队以不变的速率 r 增援,重新建立模型,讨论如何判断双方的胜负.

5. 在 5.4 节的房室模型中,证明方程(3)对应的齐次方程通解如(4),(5)式所示,说明方程的两个特征根 α 和 β 一定是负实根.

6. 模仿 5.4 节建立的二室模型来建立一室模型(只有中心室),在快速静脉注射、恒速静脉滴注(持续时间为 τ)和口服或肌肉注射 3 种给药方式下求解血药浓度,并画出血药浓度曲线的图形.

7. 利用上题建立的一室模型,讨论按固定时间间隔 T 每次给予固定剂量 D 的多次重复给药方式.为了维持药品的疗效和保证机体的安全,要求血药浓度 c 控制在 (c_1, c_2) 范围内.设已知中心室容积为 V .

(1) 在快速静脉注射的多次重复给药方式下,写出血药浓度表达式并作图.讨论怎样确定 T 和 D ,使血药浓度的变化满足上述要求;实际上为了简化起见,

常采取加大首次剂量给药的方式,给出这种情况下的给药方案.

(2) 在恒速静脉滴注和口服(或肌肉注射)的多次重复给药方式下,给出血药浓度变化的简图,并选择一种方式讨论确定 T 和 D 的问题.

8. 在 5.5 节香烟过滤嘴模型中,

(1) 设 $M = 800\text{mg}$, $l_1 = 80\text{mm}$, $l_2 = 20\text{mm}$, $b = 0.02$, $\beta = 0.08$, $v = 50\text{mm/s}$, $\alpha = 0.3$, 求 Q 和 Q_1/Q_2 .

(2) 若有一支不带过滤嘴的香烟,参数同上.比较全部吸完和只吸到 l_1 处的情况下,进入人体毒物量的区别.

9. 在 5.6 节人口的预测和控制模型中,总和生育率 $\beta(t)$ 和生育模式 $h(r, t)$ 是两种控制人口增长的手段.试说明我国目前的人口政策,如提倡一对夫妇只生一个孩子、晚婚晚育,及生育第 2 胎的一些规定,可以怎样通过这两种手段加以实施.

10. 将 5.8 节得到的万有引力定律(18)式与熟知的形式(19)进行比较.查询太阳质量、地球运行轨道(椭圆)的长半轴、引力常数等数据,说明二者是一致的.

* 11. 对于技术革新的推广,在下列几种情况下分别建立模型.

(1) 推广工作通过已经采用新技术的人进行,推广速度与已采用新技术的人数成正比,推广是无限的.

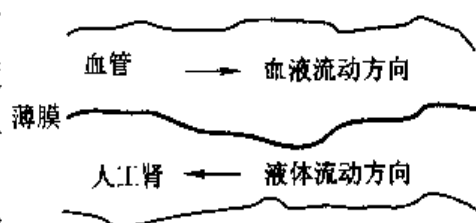
(2) 总人数有限,因而推广速度还会随着尚未采用新技术人数的减少而降低.

(3) 在(2)的前提下考虑广告等媒介的传播作用^[11,31].

* 12. 建立耐用消费品市场销售量的模型.如果知道了过去若干时期销售量的情况,如何确定模型的参数.

* 13. 人工肾是帮助人体从血液中带走废物的装置,它通过一层薄膜与需要带走废物的血管相通,如右图.人工肾中通以某种液体,其流动方向与血液在血管中的流动方向相反,血液中的废物透过薄膜进入人工肾.

设血液和人工肾中液体的流速均为常数,废物进入人工肾的数量与它在这两种液体中的浓度差成正比.人工肾总长 l . 建立单位时间内人工肾带走废物数量的模型^[11].



* 14. 在鱼塘中投放 n_0 尾鱼苗,随着时间的增长,尾数将减少而每尾的重量将增加.

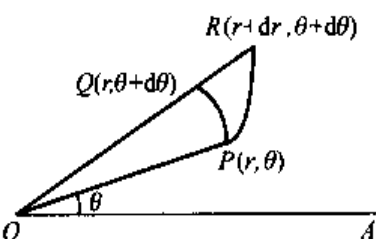
(1) 设尾数 $n(t)$ 的(相对)减少率为常数;由于喂养引起的每尾鱼重量的增加率与鱼表面积成正比,由于消耗引起的每尾鱼重量的减少率与重量本身成正

比,分别建立尾数和每尾鱼重的微分方程,并求解.

(2) 用控制网眼的办法不捕小鱼,到时刻 T 才开始捕捞,捕捞能力用尾数的相对减少量 $| \dot{n}/n |$ 表示,记作 E ,即单位时间捕获量是 $En(t)$. 问如何选择 T 和 E ,使从 T 开始的捕获量最大^[11].

* 15. 侦察机搜索潜艇. 设 $t=0$ 时艇在 O 点,飞机在 A 点, $OA=6$ 哩. 此时艇潜入水中并沿着飞机不知道的某一方向以直线形式逃去,艇速 20 哩/时. 飞机以速度 40 哩/时按照待定的航线搜索潜艇,当且仅当飞到艇的正上方时才可发现它.

(1) 以 O 为原点建立极坐标系 (r, θ) , A 点位于 $\theta=0$ 的向径上,见右图. 分析图中由 P, Q, R 组成的小三角形,证明在有限时间内飞机一定可以搜索到潜艇的航线,是先从 A 点沿直线飞到某点 P_0 ,再从 P_0 沿一条对数螺线飞行一周,而 P_0 是一个圆周上的任一点. 给出对数螺线的表达式,并画出一条航线的示意图.



(2) 为了使整条航线是光滑的,直线段应与对数螺线在 P_0 点相切. 找出这条光滑的航线.

(3) 在所有一定可以发现潜艇的航线中哪一条航线最短,长度是多少. 光滑航线的长度又是多少^[12].

* 16. 建立铅球掷远模型. 不考虑阻力,设铅球初速为 v ,出手高度为 h ,出手角度为 α (与地面夹角),建立投掷距离与 v, h, α 的关系式,并在 v, h 一定的条件下求最佳出手角度.

* 17. 建立肿瘤生长模型. 通过大量医疗实践发现肿瘤细胞的生长有以下现象:1) 当肿瘤细胞数目超过 10^{11} 时才是临床可观察的;2) 在肿瘤生长初期,几乎每经过一定时间肿瘤细胞就增加一倍;3) 由于各种生理条件限制,在肿瘤生长后期肿瘤细胞数目趋向某个稳定值.

(1) 比较 Logistic 模型与 Gompertz 模型: $\frac{dn}{dt} = -\lambda n \ln \frac{n}{N}$, 其中 $n(t)$ 是细胞数, N 是极限值, λ 是参数.

(2) 说明上述两个模型是 Usher 模型: $\frac{dn}{dt} = \frac{\lambda n}{a} \left(1 - \left(\frac{n}{N} \right)^a \right)$ 的特例^[24].

* 18. 与 17 题中 Usher 模型类似的是 θ -Logistic 模型: $\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \left(\frac{x}{N} \right)^\theta \right)$, 当 $\theta=1$ 时即为普通的 Logistic 模型. 讨论 $\theta < 1$ 和 $\theta > 1$ 时模型的性质^[38].

* 19. 药物动力学中的 Michaelis-Menton 模型为 $\frac{dx}{dt} = -\frac{kx}{a+x} (k, a > 0)$,

$x(t)$ 表示人体内药物在时刻 t 的浓度. 研究这个方程的解的性质^[38].

(1) 对于很多药物(如可卡因), a 比 $x(t)$ 大得多, Michaelis-Menton 方程及其解如何简化.

(2) 对于另一些药物(如酒精), $x(t)$ 比 a 大得多, Michaelis-Menton 方程及其解如何简化.

20. 建立一个模型说明要用三级火箭发射人造卫星的道理.

(1) 设卫星绕地球作匀速圆周运动, 证明其速度为 $v = R \sqrt{g/r}$, R 为地球半径, r 为卫星与地心距离, g 为地球表面重力加速度. 要把卫星送上离地面 600 km 的轨道, 火箭末速 v 应为多少.

(2) 设火箭飞行中速度为 $v(t)$, 质量为 $m(t)$, 初速为零, 初始质量 m_0 , 火箭喷出的气体相对于火箭的速度为 u , 忽略重力和阻力对火箭的影响. 用动量守恒原理证明 $v(t) = u \ln \frac{m_0}{m(t)}$. 由此你认为要提高火箭的末速应采取什么措施.

(3) 火箭质量包括 3 部分: 有效载荷(卫星) m_p ; 燃料 m_f ; 结构(外壳、燃料仓等) m_s , 其中 m_s 在 $m_f + m_s$ 中的比例记作 λ , 一般 λ 不小于 10%. 证明若 $m_p = 0$ (即火箭不带卫星), 则燃料用完时火箭达到的最大速度为 $v_m = -u \ln \lambda$. 已知目前的 $u = 3 \text{ km/s}$, 取 $\lambda = 10\%$, 求 v_m . 这个结果说明什么.

(4) 假设火箭燃料燃烧的同时, 不断丢弃无用的结构部分, 即结构质量与燃料质量以 λ 和 $1 - \lambda$ 的比例同时减少, 用动量守恒原理证明 $v(t) = (1 - \lambda) u \ln \frac{m_0}{m(t)}$. 问燃料用完时火箭末速为多少, 与前面的结果有何不同.

(5) (4) 是个理想化的模型, 实际上只能用建造多级火箭的办法一段段地丢弃无用的结构部分. 记 m_i 为第 i 级火箭质量(燃料和结构), λm_i 为结构质量(λ 对各级是一样的). 有效载荷仍用 m_p 表示. 当第 1 级的燃料用完时丢弃第 1 级的结构, 同时第 2 级点火. 再设燃烧级的初始质量与其负载质量之比保持不变, 比例系数为 k . 证明 3 级火箭的末速 $v_3 = 3u \ln \frac{k+1}{\lambda k+1}$. 计算要使 $v_3 = 10.5 \text{ km/s}$, 发射 1 吨重的卫星需要多重的火箭(u, λ 用以前的数据). 若用 2 级或 4 级火箭, 结果如何. 由此得出使用 3 级火箭发射卫星的道理^[55].

第5章习题参考解答

1. SIR 模型(14)式可写作 $\frac{di}{dt} = \mu i(\sigma s - 1)$, $\frac{ds}{dt} = -\lambda si$. 由后一方程知 $\frac{ds}{dt} < 0$, $s(t)$ 单调减少.

(1) 若 $s_0 > \frac{1}{\sigma}$, 当 $\frac{1}{\sigma} < s < s_0$ 时, $\frac{di}{dt} > 0$, $i(t)$ 增加; 当 $s = \frac{1}{\sigma}$ 时, $\frac{di}{dt} = 0$, $i(t)$ 达到最大值 i_m ; 当 $s < \frac{1}{\sigma}$ 时, $\frac{di}{dt} < 0$, $i(t)$ 减少且 $i_\infty = 0$ ((18)式).

(2) 若 $s_0 < \frac{1}{\sigma}$, $\frac{di}{dt} < 0$, $i(t)$ 单调减少至零.

2. 由 5.1 节(13)、(14)式得, $\frac{ds}{dr} = -\sigma s$, $s(0) = s_0$, 解为 $s = s_0 e^{-\sigma r}$. 再由(12)、(13)式, 即有 $\frac{dr}{dt} = \mu(1 - r - s_0 e^{-\sigma r})$, 当 $\sigma r \ll 1$ 时, 取 $e^{-\sigma r}$ Taylor 展开的前三项, 得 $\frac{dr}{dt} = \mu \left[(1 - s_0 + r(s_0 \sigma - 1) - \frac{s_0 \sigma^2 r^2}{2}) \right]$, 它在 $r(0) = 0$ 下的解即为(25)式.

3.

(1) 由 $y(t) = Q(t)p(t)$ 可得 $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{Q}}{Q} + \frac{\dot{p}}{p}$, 即产品的表面价值增长率等于实际价值增长率与价格指数增长率之和.

(2) 若固定成本为 $c(t)$, 则企业利润为 $R(t) = y(t) - L(t)w(t) - c(t)$. 因为 $y(t) = Q(t)p(t)$, $Q(t) = aL'(t)K^{1-r}(t)$, 代入 $R(t)$ 后表为 $w(t)$ 的函数:

$J[w(t)] = aL'(t)K^{1-r}(t)p(t) - L(t)w(t) - c(t)$, 利用 $\frac{\partial J}{\partial w} = 0$, 可得到最优解 $w^*(t) = \left(\frac{rap(t)}{w(t)} \right)^{1/(1-r)} K(t)$, 并且可以验证 $\frac{\partial^2 J}{\partial w^2} \Big|_{w^*} < 0$, ($r < 1$), J 在 w^* 取极大值.

4.

(1) 由 5.3 节图 11, 乙方取胜时的剩余兵力为 $y(t_1) = \sqrt{\frac{ay_0^2 - br_0^2}{a}} = \frac{\sqrt{3}}{2} y_0$.

要确定乙方取胜时间 t_1 , 需求解方程(3), 可得

$x(t) = [(x_0 - y_0 \sqrt{a/b})e^{\sqrt{abt}} + (x_0 + y_0 \sqrt{a/b})e^{-\sqrt{abt}}]/2$. 令 $x(t_1) = 0$, 且由 $a/b = 4$ 可算出 $t_1 = \ln 3/4b$, t_1 与甲方战斗有效系数 b 成反比.

(2) 在这种情况下, 模型(3)的第1个方程改为 $\dot{x} = -ay + r$, 相轨线为 $ay^2 - ry - bx^2 = k$, $k = ay_0^2 - ry_0 - bx_0^2$, 5.3 节图 11 中的轨线上移 $r/2a$, 乙方取胜的条件为 $k > 0$, 即 $\left(y_0 - \frac{r}{2a}\right)^2 > \frac{b}{a}x_0^2 + \frac{r^2}{4a^2}$.

5. 方程(3)的对应齐次方程可写作 $\dot{c} = Ac$, 其中 $c(t) = [c_1(t), c_2(t)]^T$,

$$A = \begin{bmatrix} -(k_{12} + k_{13}) & \frac{v_2}{v_1}k_{21} \\ \frac{v_1}{v_2}k_{12} & -k_{21} \end{bmatrix}. \text{特征方程为 } \lambda^2 + p\lambda + q = 0, \text{ 其中}$$

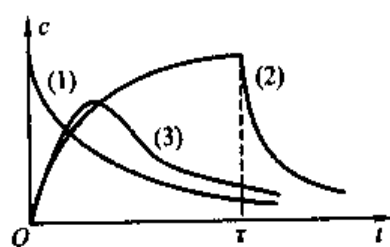
$p = k_{12} + k_{13} + k_{21}$, $q = k_{21}k_{13}$, 特征根 λ_1, λ_2 满足 $\lambda_1 + \lambda_2 = -p$, $\lambda_1\lambda_2 = q$, 所以 λ_1, λ_2 为负实根, 即(4), (5)式中的 α, β , 有 $\alpha = -\lambda_1, \beta = -\lambda_2$ ($\alpha, \beta > 0$).

6. 设给药速率 $f_0(t)$, 中心室药量 $x(t)$, 血药浓度 $c(t)$, 容积 V , 排除速率为常数 k , 则 $\dot{x} + kx = f_0(t)$, $x(t) = Vc(t)$.

(1) 快速静脉注射: 设给药量为 D , 则 $f_0(t) = 0, c(0) = \frac{D_0}{V}$, 解得 $c(t) = \frac{D}{V}e^{-kt}$.

(2) 恒速静脉滴注(持续时间为 τ): 设滴注速率为 k_0 , 则 $f_0(t) = k_0, c(0) = 0$, 解得

$$c(t) = \begin{cases} \frac{k_0}{Vk}(1 - e^{-kt}), & 0 \leq t \leq \tau \\ \frac{k_0}{Vk}(1 - e^{-k\tau})e^{-k(t-\tau)}, & t > \tau \end{cases}$$



(3) 口服或肌肉注射: $f_0(t) = k_0 D_0 e^{-k_0 t}$ (见 5.4 节(13)式), 解得

$$c(t) = \begin{cases} \frac{k_{01} D_0}{V(k_{01} - k)}(e^{-kt} - e^{-k_{01}t}), & k \neq k_0 \\ \frac{k D_0}{V} t e^{-kt}, & k = k_{01} \end{cases}$$

3 种情况下的血药浓度曲线如右图.

7.

(1) 由第 6 题(1)的结果可知

$$c(T^-) = \frac{D}{V} e^{-kT}, c(T^+) = \frac{D}{V} (1 + e^{-kT})$$

$$c(2T^-) = \frac{D}{V} (e^{-kT} + e^{-2kT}), c(2T^+) = \frac{D}{V} (1 + e^{-kT} + e^{-2kT})$$

...

$$c(nT^-) = \frac{D}{V} (e^{-kT} + e^{-2kT} + \dots + e^{-nkT}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{D}{V(e^{kT} - 1)} = \frac{De^{kT}}{V(1 - e^{-kT})}$$

$$c(nT^+) = \frac{D}{V} (1 + e^{-kT} + e^{-2kT} + \dots + e^{-nkT}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{D}{V(1 - e^{-kT})}$$

如图 1 所示,若在稳态下($t \rightarrow \infty$)要求 $c_1 \leq c \leq c_2$,只须解

$$c_1 = \frac{D}{V(e^{kT} - 1)}, c_2 = \frac{D}{V(1 - e^{-kT})}, \text{当 } V, k \text{ 已知时,可以算出}$$

$$D = V(c_2 - c_1), T = \frac{1}{k} \ln \frac{c_2}{c_1} \quad (1)$$

若要求在整个过程中 $c_1 \leq c(t) \leq c_2$,则应取 $c_1 = c(T^-) = \frac{D}{Ve^{kT}}$,重新计算 T ,

D ,归结为求解 $c_1 e^{2kT} - c_2 e^{kT} + c_2 = 0, D^2 - Vc_2 D + c_1 c_2 V^2 = 0$.

一种简化的给药方案是加大首次剂量 D_0 ,使血药浓度由 0 升至 c_2 ,应有 $D_0 = Vc_2$,以后的剂量 D 和间隔 T 与(1)式相同,如图 2.

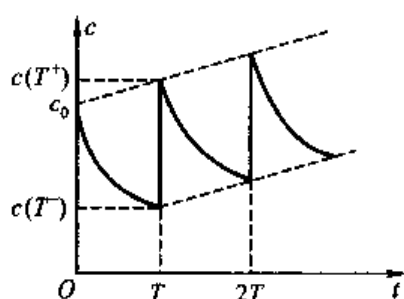


图 1

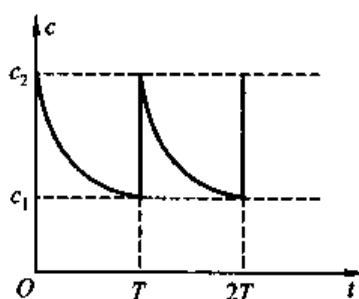


图 2

(2) 由第 5 题(2),(3)的结果可知,恒速静脉滴注和口服或肌肉注射的多次给药方式中的 $c(t)$ 分别如图 3 和图 4.

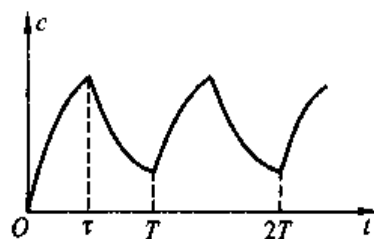


图 3

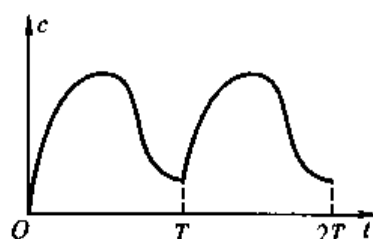


图 4

对于恒速静脉滴注,用类似(1)的方法根据第5题(2)的结果,可得稳态浓度为 $c(nT + \tau) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{k_0}{Vk} \frac{1 - e^{-k\tau}}{1 - e^{-kT}}, c(nT) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{k_0}{Vk} \frac{e^{k\tau} - 1}{e^{kT} - 1}$,要求在稳态下, $c_1 \leq c \leq c_2$,解得 $T = \tau + \frac{1}{k} \ln \frac{c_2}{c_1}, k_0 = c_1 Vk \frac{e^{kT} - 1}{e^{k\tau} - 1}$. 对于口服给药方案,请参看参考文献[54].

8.

(1) $Q \approx 230$ 毫克, $Q_1/Q_2 \approx 0.976$.

(2) 全部吸完与吸到 l_1 处进入人体毒物量之比为 $\frac{\frac{bl}{e^{\frac{bl}{v}}} - e^{-\frac{abl}{v}}}{\frac{bl}{e^{\frac{bl}{v}}} - e^{-\frac{abl}{v}}} \approx 1.25$.

9. 一对夫妻只生一个孩子,即总和生育率 $\beta(t) = 1$;晚婚晚育相当于生育模式 $h(r)$ 中(5.6节(13)式)使 r_1 和 r_c 增大;生育第2胎的一些规定可相当于 $\beta(t)$ 略高于1,且 $h(r)$ 曲线(5.6节图19)扁平一些(规定生2胎要间隔多少年).

10. 对比5.8节(18)与(19)式,应验证 $\frac{4\pi^2}{\lambda} = kM, \lambda = \frac{T^2}{a^3}$, 即 $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = kM$. 查出 $a = 1.49 \times 10^{11}$ m, $T = 3.16 \times 10^7$ s, $k = 6.71 \times 10^{-11}$ m/kg·s², $M = 1.96 \times 10^{30}$ kg,可算得 $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = 13.07 \times 10^{19}, kM = 13.15 \times 10^{19}$,二者一致.

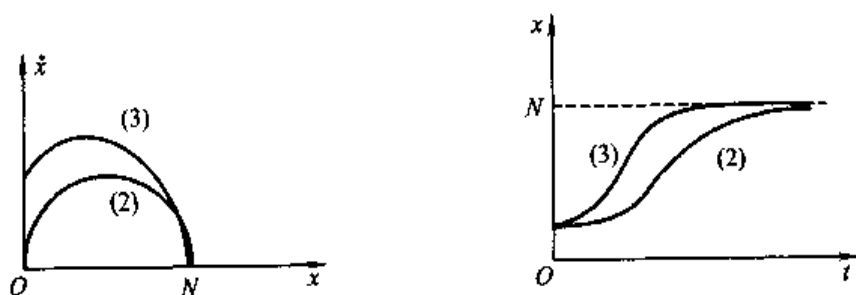
* 11. 设 t 时刻采用新技术的人数为 $x(t)$.

(1) 指数模型 $\frac{dx}{dt} = \lambda x$.

(2) Logistic 模型 $\frac{dx}{dt} = ax(N - x)$, N 为总人数.

(3) 广告等媒介在早期作用较大,它对传播速度的影响与尚未采用新技术的人数成正比,在模型(2)的基础上,有 $\frac{dx}{dt} = (ax + b)(N - x)$.

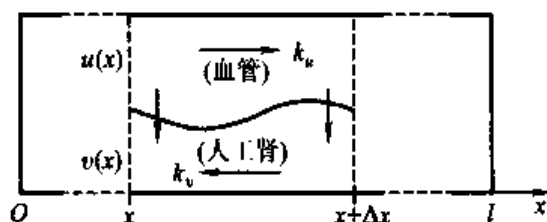
(2)和(3)区别见下图.



* 12. 设耐用品销售量为 $x(t)$,可用 Logistic 模型描述 $x(t)$ 的变化规律,即

$\frac{dx}{dt} = kx(N-x)$, 其中 N 是市场饱和量, k 是比例系数, N, k 可由过去若干时期的销售量 $x_i(t_i), i=1, 2, \dots$ 确定, 不妨设 $t_{i+1} - t_i = \Delta t = 1$, 则方程可离散化为 $\Delta x_i = kNx_i - kx_i^2$, Δx_i 可取 $x_{i+1} - x_i$ 或 $(x_{i+1} - x_{i-1})/2$, N 和 k 可由最小二乘法估计.

* 13. 以血液流动方向为正方向建立坐标 x , 如下图, 血液和人工肾中废物浓度分别记作 $u(x)$ 和 $v(x)$, 血液和人工肾中液体流动的速度分别记作 k_u 和 k_v .



考察 $(x, x + \Delta x)$ 血液中废物浓度的变化, 得

$$k_u u(x) = \lambda [u(x) - v(x)] dx + k_u u(x + dx), \text{ 于是 } k_u \frac{du}{dx} = -\lambda(u - v), \lambda > 0.$$

同理, $k_v \frac{dv}{dx} = -\lambda(u - v)$, 边界条件为 $u(0) = u_0, v(l) = 0$, 可解得

$$u(x) = u_0 \frac{k_u e^{-\alpha l} - k_v e^{-\alpha x}}{k_u e^{-\alpha l} - k_v}, \quad v(x) = u_0 \frac{k_u e^{-\alpha l} - k_u e^{-\alpha x}}{k_u e^{-\alpha l} - k_v}, \quad \text{其中 } \alpha = \lambda \left(\frac{1}{k_u} - \frac{1}{k_v} \right).$$

单位时间内人工肾带走的血液中的废物量为

$$Q = \int_0^l \lambda(u - v) dx = -k_u \int_0^l \frac{du}{dx} dx = k_u [u_0 - u(l)] = u_0 k_u \frac{1 - e^{-\alpha l}}{1 - \frac{k_u}{k_v} e^{-\alpha l}}.$$

$$\text{表示人工肾性能的指标—清除率 } I \text{ 定义为 } I = \frac{Q}{u_0} = k_v \frac{1 - e^{-\alpha l}}{1 - \frac{k_u}{k_v} e^{-\alpha l}}.$$

* 14.

(1) 尾数 $n(t)$ 满足 $\dot{n} = -\lambda n (\lambda > 0)$, $n(0) = n_0$ 得 $n(t) = n_0 e^{-\lambda t}$. 每尾鱼重 $w(t)$ 满足 $\dot{w} = \alpha w^{2/3} - \beta w$, 不妨近似设 $w(0) = 0$, 得 $w(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^3 (1 - e^{-\beta t})^3$.

(2) 设 $t = T$ 时开始捕捞, 且单位时间捕捞率为 E , 则 $t \geq T$ 时有 $\dot{n} = -(\lambda + E)n$, 因此得 $n(t) = n_0 e^{-\lambda T} e^{-(\lambda + E)(t - T)}$, 单位时间捕捞鱼的尾数为 $En(t)$, 每尾鱼重 $w(t)$, 所以从 T 开始的总捕捞量是 $y = \int_T^\infty w(t) En(t) dt =$

$\int_0^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 [1 - e^{\beta(1-\tau)}]^\beta E n_0 e^{-\lambda T} e^{(\lambda+E)\tau} d\tau$, 问题为求 λ, E 使 y 最大, 可用数值法求解.

* 15.

(1) 记飞机速度 $u=40$ 哩/时, 艇速 $v=20$ 哩/时. 设 PR 是所求航线上的一段, 即当潜艇沿 θ 航行时飞机、潜艇在 (r, θ) 相遇 (图 1), 那么当潜艇沿 $\theta + \Delta\theta$ 航行时, 二者必在 $(r + \Delta r, \theta + \Delta\theta)$ 相遇, 记 PR 弧长为 ds , 则 $\frac{ds}{dr} = \frac{u}{v} = 2$, 注意到 $(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2$, 即可得到 $r = r_0 e^{(\theta - \theta_0)/\sqrt{3}}$, 这是一条对数螺线, (r_0, θ_0) 是满足 $OP_0 = AP_0/2$ 的任意一点 P_0 的坐标, 而 P_0 位于以 $(2, \pi)$ 为圆心、半径为 4 哩的圆周上.

飞机从 A 沿直线飞至 P_0 , 再沿螺线飞行, 最远飞行一圈至 P_2 , 总能发现潜艇 (图 2 中实线为飞机航线, 虚线为潜艇航线).

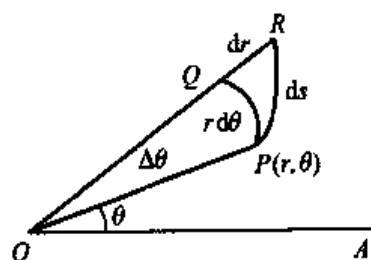


图 1

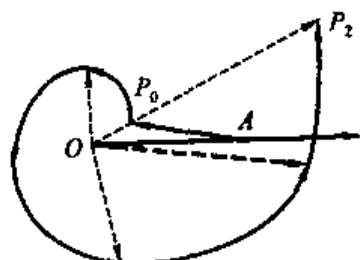


图 2

(2) 考察对数螺线上任一点 P 的切线与该点的向径夹角 α (图 3), 有 $\cot \alpha = \frac{dr}{rd\theta}$, 对于 $r = r_0 e^{(\theta - \theta_0)/\sqrt{3}}$, 夹角 $\alpha = \tan^{-1} \sqrt{3} = \pi/3$, 而螺线起始点 P_0 所在的圆周上只有 $P_1(2\sqrt{3}, \pi/2)$ 点使 AP_1 与 OP_1 的夹角也是 $\pi/3$ (图 4), 所以沿 $AP_1 P_3$ 的航线是光滑的.

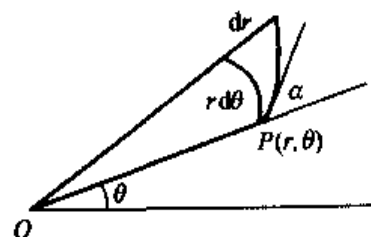


图 3

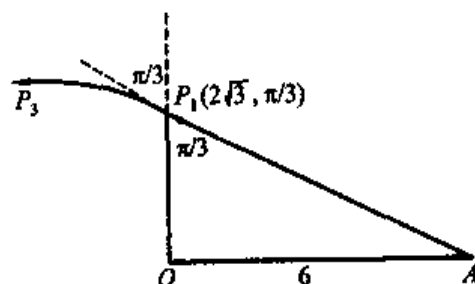


图 4

(3) 一定可以发现潜艇的航线是, 直线段 AP_0 加上螺线一圈 $P_0 P_2$ (图 2).

显然最短的航线是取 P_0 点为 $(2, 0)$, 沿螺线 $r = 2e^{\theta/\sqrt{3}}$ 飞行至 P_2^* 点. P_2^* 的向径 $r = 2e^{2\pi/\sqrt{3}}$ 即为潜艇的航程, 因为 $u = 2v$, 故飞机最短航线的长度为 $2 \times 2e^{2\pi/\sqrt{3}} \approx 150$ 哩.

同理, 光滑航线的长度为 $2 \times 2\sqrt{3}e^{2\pi/\sqrt{3}} \approx 260$ 哩.

如果计算螺线的长度, 则需将 $r = r_0 e^{(\theta - \theta_0)/\sqrt{3}}$ 代入 $P_0 P_2 = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2}$ 作积分.

* 16. 在右图坐标下铅球运动方程为

$$\ddot{x} = 0, \ddot{y} = -g, x(0) = 0, y(0) = h,$$

$$\dot{x}(0) = v \cos \alpha, \dot{y}(0) = v \sin \alpha.$$

解出 $x(t), y(t)$ 后, 可以求得铅球掷远为

$$R = \frac{v^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha + \left(\frac{v^2}{g^2} \sin^2 \alpha + \frac{2h}{g} \right)^{1/2} v \cos \alpha,$$

这个关系还可表为 $R^2 g = 2v^2 \cos^2 \alpha (h + R \tan \alpha)$.

由此计算 $\left. \frac{dR}{d\alpha} \right|_{\alpha^*} = 0$, 得最佳出手角度 $\alpha^* = \sin^{-1} \frac{v}{\sqrt{2(v^2 + gh)}}$, 和最佳成绩

$$R^* = \frac{v}{g} \sqrt{v^2 + 2gh}. \text{ 设 } h = 1.5 \text{ m}, v = 10 \text{ m/s, 则 } \alpha^* \approx 41.4^\circ, R^* = 11.4 \text{ m}.$$

* 17.

(1) Gompertz 模型 $\frac{dn}{dt} = -\lambda n \ln \frac{n}{N}, n(0) = n_0$ 的解为 $n(t) = Ne^{\left(\frac{n_0}{N}\right)e^{-\lambda t}}$, 有以下性质: $t \rightarrow \infty$ 时 $n(t) \rightarrow N$; t 较小时 $e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t, n(t) \approx n_0 e^{\left(\frac{n_0}{N}\right)\lambda t}$, 即增长率 $r = \lambda \ln \frac{N}{n_0}$ 的指数增长模型; $n < \frac{N}{e}, \frac{d^2 n}{dt^2} > 0, n > \frac{N}{e}, \frac{d^2 n}{dt^2} < 0, n = \frac{N}{e}$ 是曲线的拐点.

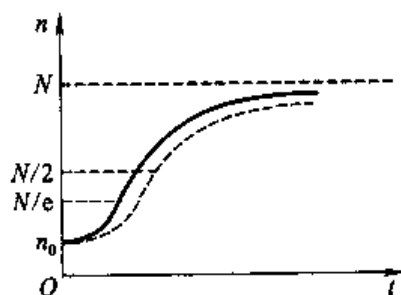
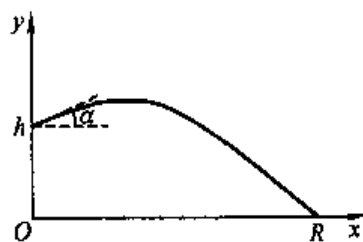
由上可得 $n(t)$ 曲线的示意图如右图实线, 与 Logistic 模型 $\frac{dn}{dt} = \lambda n \left(1 - \frac{n}{N}\right)$ 相似 (右图虚线).

(2) Usher 模型

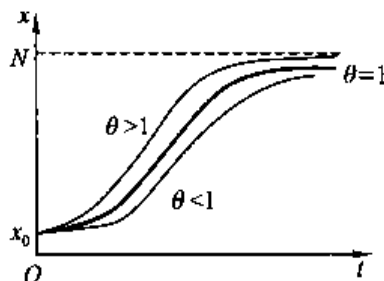
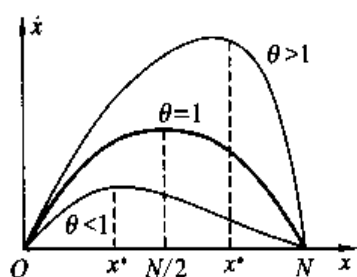
$$\frac{dn}{dt} = \frac{\lambda n}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{n}{N} \right)^\alpha \right]. \alpha = 1 \text{ 时, 即为 Logistic 模}$$

型; $\alpha \rightarrow 0$ 时, 取极限可知化为 Gompertz 模型.

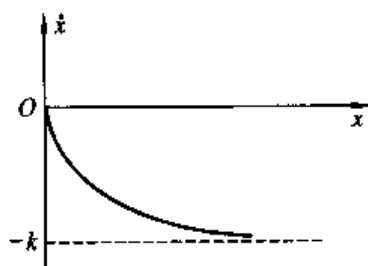
* 18. θ -Logistic 模型: $\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \left(\frac{x}{N} \right)^\theta \right)$. 通过 $\dot{x} \sim x$ 的图形作出 $x \sim t$ 的图形研究模型的性质. $\theta = 1$ 时为普通的 Logistic 模型, 如下图中的粗线. 可以计



算 $\dot{x} \sim x$ 曲线的极值点为 $x' = \alpha N, \alpha = (\theta + 1)^{-1/\theta}, \theta < 1$ 时 $\alpha < 1/2$, 且 \dot{x} 较小, $\dot{x} \sim x$ 曲线平缓, $x \sim t$ 曲线在下方; $\theta > 1$ 时 $\alpha > 1/2$, 且 \dot{x} 较大, $\dot{x} \sim x$ 曲线陡峭, $x \sim t$ 曲线在上方.



* 19. 对于 $\frac{dx}{dt} = -\frac{kx}{a+x} (k, a > 0)$, 可以通过 $\dot{x} \sim x$ 的图形作出 $x \sim t$ 的图形, 得到模型的性质.



(1) 若 a 比 $x(t)$ 大得多, 则方程可简化为 $\dot{x} = -kx/a$, 解为负指数函数.

(2) 若 $x(t)$ 比 a 大得多, 则方程可简化为 $\dot{x} = -k$, 解为线性函数.

* 20.

(1) 地球对卫星引力 $F = \frac{kMm}{r^2}$, M, m 分别为地球和卫星的质量, 因为在地球表面上有 $\frac{kMm}{R^2} = mg$, 得到 $kM = R^2 g$, 于是 $F = mg \left(\frac{R}{r}\right)^2$. 又卫星向心力为 $F_1 = \frac{mv^2}{r}$, 由 $F = F_1$ 得到 $v = R \sqrt{g/r}$. 取 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $R = 6400 \text{ km}$, $r = 6400 + 600 = 7000 \text{ km}$ 代入, 得火箭末速应为 $v \approx 7.6 \text{ km/s}$.

(2) 考察 t 到 $t + \Delta t$ 时刻火箭的动量守恒:

$m(t)v(t) - m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) = [m(t) - m(t + \Delta t)][v(t) - u]$, 左端是火箭动量的减少, 右端是喷出气体的动量, 由此可得: $m \frac{dv}{dt} + u \frac{dm}{dt} = 0$, 即 $\frac{dv}{dt} = -u \frac{d \ln m}{dt}$, 在 $v(0) = 0$ 的条件下, 解为 $v(t) = u \ln \frac{m_0}{m(t)}$. 可以看出, 为了

增加火箭速度 v , 一是改善燃料提高气体喷出的速度 u ; 二是在 m_0 给定时, 改善火箭结构以减少火箭质量 $m(t)$.

(3) 将 $m_s = \lambda(m_f + m_s) = \lambda(m_0 - m_p)$ 且 $m_p = 0$ 代入(2)的结果, 即得 $v_m = -u \ln \lambda$. 当 $u = 3 \text{ km/s}$, $\lambda = 10\%$ 时, 得到 $v_m \approx 7 \text{ km/s} < 7.6 \text{ km/s}$. 这个结果说明, 在忽略重力、阻力, 不携带卫星的情况下, 火箭的最大速度才 7 km/s , 还不到进入高 600 km 圆形轨道的火箭应有的末速 7.6 km/s , 所以用单级火箭不能发射卫星.

(4) 在(2)的动量守恒式中, 左端不变, 而右端丢弃的结构部分的动量为 $\lambda[m(t) - m(t + \Delta t)]v(t)$, 喷出气体的动量为 $(1 - \lambda)[m(t) - m(t + \Delta t)][v(t) - u]$, 于是可解得 $v(t) = (1 - \lambda)u \ln \frac{m_0}{m(t)}$, 当燃料用完时, m_f 丢弃, 只剩下 m_p , 于是火箭末速为 $v = (1 - \lambda)u \ln \frac{m_0}{m_p}$.

(5) 利用(2)的结果, $v(t) = u \ln \frac{m_0}{m(t)}$, 第 1 级火箭的燃料用完时, $m(t) = m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3$, 末速 $v_1 = u \ln \frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}$. 丢弃 λm_1 , 第 2 级火箭点火, 其末速为 $v_2 = v_1 + u \ln \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}$. 同理, 第 3 级火箭的末速 $v_3 = v_2 + u \ln \frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}$, 于是 $v_3 = u \ln \left[\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \cdot \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \cdot \frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3} \right]$. 根据 k 的定义有 $k = \frac{m_3}{m_p} = \frac{m_2}{m_p + m_3} = \frac{m_1}{m_p + m_2 + m_3} = \frac{m_0}{m_p + m_1 + m_2 + m_3}$, 于是 $v_3 = 3u \ln \frac{k+1}{\lambda k+1}$. 要使 $v_3 = 10.5 \text{ km/s}$, 当 $u = 3 \text{ km/s}$ 和 $\lambda = 0.1$ 时, 可算出 $k \approx 3.25$, 而由 k 的定义可知 $\frac{m_0}{m_p} = (k+1)^3$. 若 $m_p = 1 \text{ t}$, 则 $m_0 \approx 77 \text{ t}$.

用同样的方法可以计算, 若用 2 级火箭, 则 $m_0 \approx 149 \text{ t}$; 若用 4 级火箭, 则 $m_0 \approx 65 \text{ t}$. 由此可见, 用 3 级火箭比 2 级火箭 m_0 减少许多, 而用 4 级火箭则不值得.

第6章 习 题

1. 在 6.1 节捕鱼模型中,如果渔场鱼量的自然增长仍服从 Logistic 规律,而单位时间捕捞量为常数 h ,

(1) 分别就 $h > rN/4$, $h < rN/4$, $h = rN/4$ 这 3 种情况讨论渔场鱼量方程的平衡点及其稳定状况.

(2) 如何获得最大持续产量,其结果与 6.1 节的产量模型有何不同.

2. 与 Logistic 模型不同的另一种描述种群增长规律的是 Gompertz 模型:

$$\dot{x}(t) = rx \ln \frac{N}{x}, \text{ 其中 } r \text{ 和 } N \text{ 的意义与 Logistic 模型相同.}$$

设渔场鱼量的自然增长服从这个模型,且单位时间捕捞量为 $h = Ex$. 讨论渔场鱼量的平衡点及其稳定性,求最大持续产量 h_m 及获得最大产量的捕捞强度 E_m 和渔场鱼量水平 x_0^* .

3. 在 6.3 节种群竞争模型中设 $\sigma_1 \sigma_2 = 1$ ($\sigma_1 \neq \sigma_2$),求平衡点并分析其稳定性.

4. 对于 6.3 节种群竞争模型的第 3 种情况: $\sigma_1 < 1, \sigma_2 < 1$ (图 4-3),分析相轨线的趋势并画出示意图,解释平衡点 P_3 稳定的意义.

5. 在 6.4 节种群相互依存模型中,按以下 4 种情况作相轨线示意图,并解释平衡点稳定的意义.

(1) $\sigma_2 < 1, \sigma_1 \sigma_2 < 1$.

(2) $\sigma_2 > 1, \sigma_1 \sigma_2 > 1$.

(3) $\sigma_1 > 1, \sigma_2 < 1, \sigma_1 \sigma_2 > 1$.

(4) $\sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1, \sigma_1 \sigma_2 < 1$ (相轨线已由图 6 给出,可作为参考).

6. 与 6.4 节的模型稍有不同,如果两个种群都能独立生存,共处时又能相互提供食物,试建立种群依存模型并讨论平衡点的稳定性,解释稳定的意义.

7. 对于第 6 题,如果两个种群都不能独立生存,但共处时可以相互提供食物,试建模以讨论共处的可能性.

8. 在 6.5 节的食饵—捕食者系统中,如果在食饵方程(1)中增加自身阻滞作用的 Logistic 项,方程(2)不变,讨论平衡点及稳定性,解释其意义.

9. 如果在 6.5 节的食饵和捕食者方程中都增加 Logistic 项,即方程(16), (17),讨论平衡点及稳定性.

10. 如果食饵—捕食者系统中,捕食者掠食的对象只是成年的食饵,而未成年的食饵因体积太小免遭捕获.在适当的假设下建立这三者之间关系的模型,求平衡点^[39].

* 11. 一个岛屿上栖居着食肉爬行动物和哺乳动物,又长着茂盛的植物.爬行动物以哺乳动物为食物,哺乳动物又依赖植物生存.在适当假设下建立三者之间关系的模型,求平衡点^[39].

* 12. 大陆上物种数目可以看作常数,各物种独立地从大陆向附近一岛屿迁移.岛上物种数量的增加与尚未迁移的物种数目有关,而随着迁移物种的增加又导致岛上物种的减少.在适当假设下建立岛上物种数的模型,并讨论稳定状况^[31].

* 13. 人体注射葡萄糖溶液时,血液中葡萄糖浓度 $g(t)$ 的增长率与注射速率 r 成正比,与人体血液容积 V 成反比,而由于人体组织的吸收作用, $g(t)$ 的减少率与 $g(t)$ 本身成正比.分别在以下几种假设下建立模型,并讨论稳定情况.

(1) 人体血液容积 V 不变.

(2) V 随着注入溶液而增加.

(3) 由于排泄等因素 V 的增加有极限值^[31].

* 14. 讨论资金积累、国民收入与人口增长的关系.

(1) 若国民平均收入 x 与按人口平均资金积累 y 成正比,说明仅当总资金积累的相对增长率 k 大于人口的相对增长率 r 时,国民平均收入才是增长的.

(2) 作出 $k(x)$ 和 $r(x)$ 的示意图,说明二曲线交点是平衡点,讨论它的稳定性.

(3) 分析人口激增会引起什么后果^[6].

* 15. 讨论另一种捕鱼业持续收获的效益模型.设渔场鱼量方程仍为 6.1 节 (3) 式,但捕捞强度为变量 $E(t)$,其变化规律是;当单位时间收入 T 大于支出 S 时(见 6.1 节(9)式) E 增加, T 小于 S 时 E 减少, E 的变化率与 $T - S$ 成正比.

(1) 建立关于 $E(t)$ 的方程,求 $x(t)$, $E(t)$ 的平衡点并讨论其稳定性.

(2) 将所得结果与 6.1 节的效益模型和捕捞过度模型进行比较^[41].

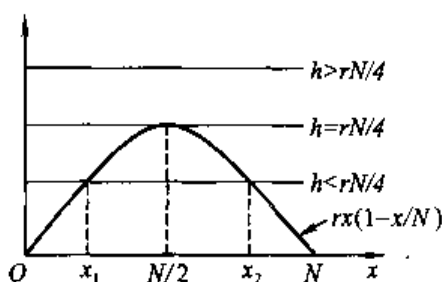
第6章习题参考解答

1. 模型为 $\dot{x} = F(x) = rx\left(1 - \frac{x}{N}\right) - h$.

(1) 平衡点由 $F(x) = 0$ 确定, 由右图可知, 当 $h > rN/4$ 时, 无平衡点; 当 $h < rN/4$ 时, 有 2 个平衡点 $x_1 (< N/2)$, $x_2 (> N/2)$, 经判断得 x_1 不稳定, x_2 稳定.

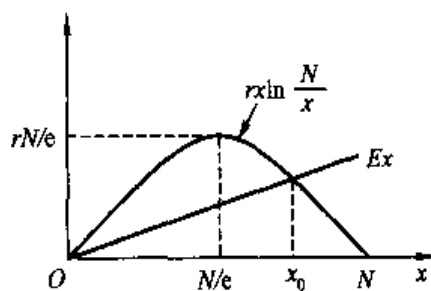
当 $h = rN/4$ 时, 平衡点 $x_0 = N/2$.

由 $F'(x_0) = 0$ 不能判断其稳定性, 但因为对于 $x > x_0$ 及 $x < x_0$ 均有 $F(x) < 0$, 即 $\dot{x} < 0$, 所以 x_0 不稳定.



值得注意的是, 若将 $h = rN/4$ 代入模型求解, 可得 $x(t) = \frac{N}{rt + c} + \frac{N}{2}$, 其中 c 由初始值确定, 若 $x(0) < N/2$, $t \rightarrow \infty$ 时 $x(t)$ 不会趋向 $N/2$, 即 x_0 不稳定.

(2) 由图可知, 要获得最大持续产量, 应使渔场鱼量 $x > N/2$ 且尽量接近 $N/2$, 与 6.1 节产量模型不同的是, 这里不能让 $x = N/2$, 因为这个平衡点不稳定, 而由于各种因素的干扰, 要实现 $x > N/2$ 且接近 $N/2$ 是困难的.



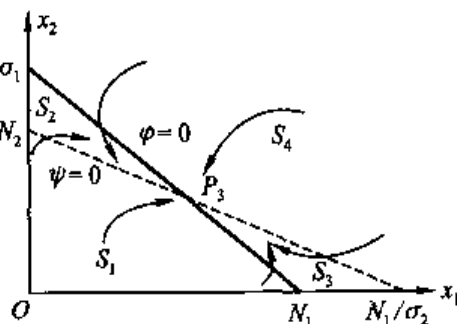
2. 模型为 $\dot{x} = F(x) = rx \ln \frac{N}{x} - Ex$, 如右

图所示, 有 2 个平衡点: $x = 0$ 和 $x_0 = Ne^{E/r}$. 可证 $x = 0$ 不稳定, x_0 稳定 (与 E , r 的大小无关). 最大持续产量为 $h_m = rN/e$, 获得 h_m 的 $E_m = r$, $x_0^* = N/e$.

3. 在条件 $\sigma_1 \sigma_2 = 1$ 下, 记 $\sigma_1 = \sigma$, 即 $\sigma_2 = 1/\sigma$. 有 3 个平衡点: $P_1(N_1, 0)$, N_2/σ_1 , $P_2(0, N_2)$, $P_3(0, 0)$. P_3 不稳定; $\sigma < 1$ 时, P_2 不稳定, P_1 稳定; $\sigma > 1$ 时, 反之.

4. 如右图, $\varphi = 0$ 和 $\psi = 0$, 将第 1 象限分为 4 个区域:

$S_1: \dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 > 0$



$$S_2: \dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 < 0$$

$$S_3: \dot{x}_1 < 0, \dot{x}_2 > 0$$

$$S_4: \dot{x}_1 < 0, \dot{x}_2 < 0$$

轨线如图($\varphi=0$ 是垂直等倾线, $\psi=0$ 是水平等倾线).

$\sigma_1 < 1$ 表示在消耗供养甲的资源中乙弱于甲, $\sigma_2 < 1$ 表示在消耗供养乙的资源中甲弱于乙, 于是二者共存, P_3 稳定.

5.

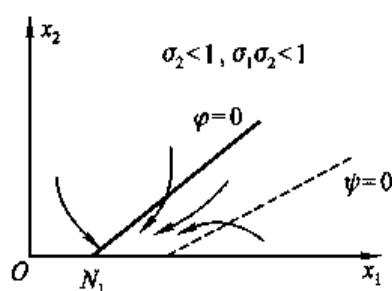


图 1

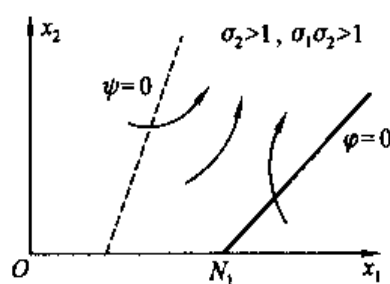


图 2

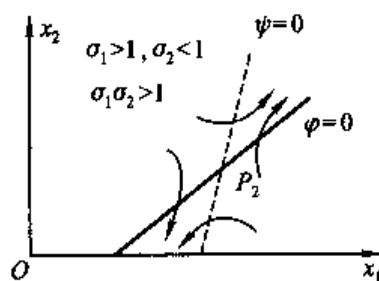


图 3

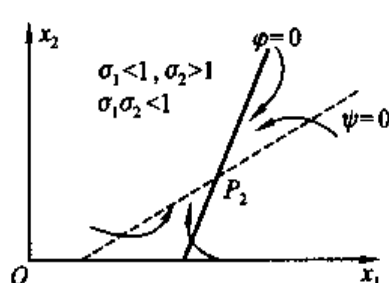


图 4

图 1 所示情况下, $P_1(N_1, 0)$ 稳定, 即能够独立生存的种群甲趋向最大容量, 而不能独立生存的种群乙终将灭绝. 图 4 所示情况下, P_2 稳定, 甲、乙分别趋向非零的有限值. 而其余两种情况无稳定平衡点, 相互提供食物可能使二者均趋向无穷, 如图 2.

$$6. \text{ 模型为 } \dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right), \dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

平衡点及其稳定性如下:

平衡点	p	q	稳定条件
$P_1(0,0)$	$-(r_1+r_2)$	$r_1 r_2$	不稳定
$P_2(N_1,0)$	$r_1 - r_2(1+\sigma_2)$	$-r_1 r_2(1+\sigma_2)$	不稳定
$P_3(0,N_2)$	$r_2 - r_1(1+\sigma_1)$	$-r_1 r_2(1+\sigma_1)$	不稳定
$P_4\left(\frac{N_1(1+\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(1+\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\frac{r_1(1+\sigma_1)+r_2(1+\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\frac{r_1 r_2(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1\sigma_2 < 1$

可知,只在 $\sigma_1\sigma_2 < 1$ 的情况下, P_4 稳定, 甲乙才分别趋向非零的有限值, 否则由于二者均能独立生存又相互提供食物, 将使二者均趋向无穷.

$$7. \text{ 模型为 } \dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(-1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_2 \frac{x_2}{N_2} \right), \dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

平衡点及其稳定性如下:

平衡点	p	q	稳定条件
$P_1(0,0)$	$r_1 + r_2$	$r_1 r_2$	稳定
$P_2\left(\frac{N_1(1+\sigma_1)}{\sigma_1\sigma_2-1}, \frac{N_2(1+\sigma_2)}{\sigma_1\sigma_2-1}\right)$	$\frac{r_1(1+\sigma_1)+r_2(1+\sigma_2)}{\sigma_1\sigma_2-1}$	$\frac{-r_1 r_2(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)}{\sigma_1\sigma_2-1}$	不稳定

可知,不论 σ_1, σ_2 如何, P_1 稳定, 二者均终将灭绝; 而当 $\sigma_1\sigma_2 > 1$ 时, 存在平衡点 P_2 , 但它是不稳定的.

8. 利用 6.4, 6.5 节的符号将模型表为

$$\dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right), \dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} \right)$$

平衡点及其稳定性如下:

平衡点	p	q	稳定条件
$P_1(0,0)$	$-r_1 + r_2$	$-r_1 r_2$	不稳定
$P_2(N,0)$	$r_1 - r_2(\sigma_2 - 1)$	$-r_1 r_2(\sigma_2 - 1)$	$\sigma_2 < 1$
$P_3\left(\frac{N_1}{\sigma_2}, \frac{N_2(\sigma_2 - 1)}{\sigma_1\sigma_2}\right)$	r_1/σ_2	$r_1 r_2(\sigma_2 - 1)$	$\sigma_2 > 1$

可知,当 $\sigma_2 < 1$ 时,因食饵不能为捕食者提供足够食物, P_2 稳定, 即捕食者将灭绝, 而食饵趋向最大容量; 而当 $\sigma_2 > 1$ 时, P_3 稳定, 二者共存, 分别趋向非零的有限值.

9. 模型见 6.5 节(16),(17)式,平衡点及其稳定性如下:

平衡点	p	q	稳定条件
$P_1(0,0)$	$-r_1 + r_2$	$-r_1 r_2$	不稳定
$P_2(N_1,0)$	$r_1 - r_2(\sigma_2 - 1)$	$-r_1 r_2(\sigma_2 - 1)$	$\sigma_2 < 1$
$P_3\left(\frac{N_1(\sigma_1 + 1)}{1 + \sigma_1 \sigma_2}, \frac{N_2(\sigma_2 - 1)}{1 + \sigma_1 \sigma_2}\right)$	$\frac{r_1(\sigma_1 + 1) + r_2(\sigma_2 - 1)}{1 + \sigma_1 \sigma_2}$	$\frac{r_1 r_2(\sigma_1 + 1)(\sigma_2 - 1)}{1 + \sigma_1 \sigma_2}$	$\sigma_2 > 1$

平衡点稳定的意义与第 8 题相似.

10. 设 $x_{11}(t)$ 为成年食饵数量, $x_{12}(t)$ 为未成年食饵数量, $x_2(t)$ 为捕食者数量, 由未成年变为成年食饵的存活率为 r , 仍不考虑各个种群自身的阻滞增长作用, 则模型为

$$\dot{x}_{11} = rx_{12} - \lambda_1 x_{11} x_2, \dot{x}_{12} = r_1 x_{11} - rx_{12}, \dot{x}_2 = x_2(-r_2 - \lambda_2 x_{11})$$

式中其余符号与 6.5 节(1),(2)式相同. 平衡点为 $P_1(0,0,0)$, $P_2(r_2/\lambda_2, r_1 r_2/r\lambda_2, r_1/\lambda_1)$, P_2 点中 x_{11} 和 x_2 的结果与 6.5 节相同.

* 11. 植物、哺乳动物、爬行动物的数量分别记作 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$. 若不考虑自然资源对植物生长的限制, 则模型为

$$\dot{x}_1 = x_1(r_1 - \lambda_1 x_2), \dot{x}_2 = x_2(-r_2 + \lambda_2 x_1 - \mu x_3), \dot{x}_3 = x_3(-r_3 + \lambda_3 x_2)$$

式中常数可作类似 6.5 节的解释. 平衡点为 $P_1(0,0,0)$, $P_2(r_2/\lambda_2, r_1/\lambda_1, 0)$, P_2 点中 x_1 和 x_2 的结果与 6.5 节相同.

* 12. 记岛上物种数为 $x(t)$, 大陆上物种数为 N . 设 $x(t)$ 的增加率与尚未迁移的物种数 $N - x$ 成正比, 同时 $x(t)$ 的减少率与已迁移的物种数 x 成正比, 则

$$\dot{x}(t) = \alpha(N - x) - \beta x \quad (\alpha, \beta > 0), \text{稳定状态是 } x_0 = \frac{\alpha N}{\alpha + \beta}.$$

* 13. 基本模型为

$$\frac{dg}{dt} = k_1 \frac{r}{V} - k_2 g \quad (k_1, k_2 > 0, \text{常数}) \quad (1)$$

(1) V 为常数时, 平衡点 $g_0 = \frac{k_1 r}{k_2 V}$ 稳定.

(2) 不妨设

$$\frac{dV}{dt} = \beta \quad (\beta > 0, \text{常数}) \quad (2)$$

方程(1),(2)不存在平衡点. 若由(2)解出 $V(t) = V_0 + \beta t$ 代入(1), 则(1)不是自治方程.

(3) 不妨设

$$\frac{dV}{dt} = \mu(V_1 - V) (\mu > 0, \text{常数}) \quad (3)$$

方程(1),(3)存在平衡点: $(g^*, V^*) = \left(\frac{k_1 r}{k_2 V_1}, V_1 \right)$, 它是稳定的. 若由(3)解出 $V(t) = V_1 - (V_1 - V_0)e^{-\mu t}$ 代入(1), 则(1)不是自治方程.

* 14.

(1) 记总资金积累为 $u(t)$, 总人口为 $v(t)$. 按假设 $\dot{u} = ku$, $\dot{v} = rv$, 又 $x(t) = \alpha y(t)$ ($\alpha > 0$, 常数), $y(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$, 可得 $\dot{x}(t) = \alpha \frac{v\dot{u} - u\dot{v}}{v^2} = (k - r)x$, 所以当 $k > r$ 时, $x(t)$ 增加.

(2) 若资金积累增长率 k 和人口增长率 r 由国民平均收入 x 确定, 一般情况下, $k(x), r(x)$ 都是升函数. 二曲线交点 M 的横坐标 x^* 是平衡点 (如图 1). 因为 $x = x^*$ 时, $k = r$, $\dot{x} = 0$. 该平衡点的稳定性取决于平衡点附近 $k(x)$ 和 $r(x)$ 的增长速度. 若 $k'(x) > r'(x)$, 则平衡点不稳定 (图 1), 即国民平均收入将不断增长, 反之, 则 x^* 稳定 (图 2), 即国民收入将停滞.

(3) 在不稳定平衡点 x^* 的情况下, 国民平均收入不断增长. 假定人口增长率突然增加, 造成 $r(x)$ 在 M_1 点再次与 $k(x)$ 相交 (图 3), 则 x_1^* 是稳定平衡点.

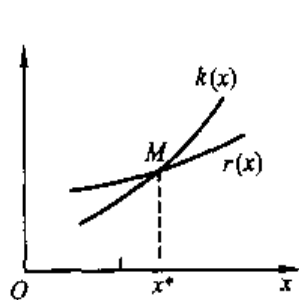


图 1

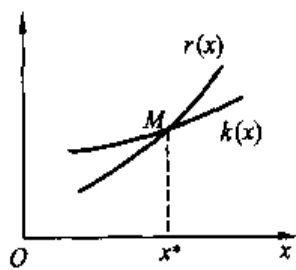


图 2

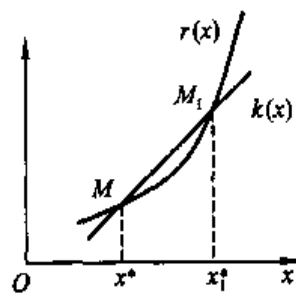


图 3

* 15.

(1) 模型为 $\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{N} \right) - Ex$, $\dot{E} = k(T - s) = k(px - c)E$, $k > 0$. 平衡点 (x_0, E_0) 及其稳定性为:

平衡点	p	q	稳定条件
$(0, 0)$	$-r + c$	$-rc$	不稳定
$(N, 0)$	$r - (pN - c)$	$-r(pN - c)$	$p < c/N$
$\left(\frac{c}{p}, r \left(1 - \frac{c}{pN} \right) \right)$	$\frac{rc}{pN}$	$rc \left(1 - \frac{c}{pN} \right)$	$p > c/N$

(2) 当 $p < c/N$ 时, $\dot{E} < 0$, $E(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, 于是 $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} N$, 平衡点 $(N, 0)$ 稳

定.

当 $p > c/N$ 时, 稳定点 $x_0 = \frac{c}{p}$ 完全由成本—价格比决定, 出现捕捞过度, 与 6.1 节捕捞过度模型一致.

第7章 习 题

1. 对于7.1节蛛网模型讨论下列问题:

(1) 因为一个时段上市的商品不能立即售完,其数量也会影响到下一时段的价格,所以第 $k+1$ 时段的价格 y_{k+1} 由第 $k+1$ 和第 k 时段的数量 x_{k+1} 和 x_k 决定.如果仍设 x_{k+1} 仍只取决于 y_k ,给出稳定平衡的条件,并与7.1节的结果进行比较.

(2) 若除了 y_{k+1} 由 x_{k+1} 和 x_k 决定之外, x_{k+1} 也由前两个时段的价格 y_k 和 y_{k-1} 确定.试分析稳定平衡的条件是否还会放宽.

2. 验证阻滞增长模型(7.3节)的(15)~(18)式.

3. 用计算机解阻滞增长模型(7.3节方程(6)).比如令 b 从1.8逐渐增加,考察序列 x_k 收敛、2倍周期收敛、4倍周期收敛……,直至一片混乱的情况.试以 b 为横坐标,收敛点为纵坐标作图与7.3节图8比较.

4. 举出几个差分形式阻滞增长模型的应用实例.

5. 在7.4节按年龄分组的种群增长模型中,设一群动物最高年龄为15岁,每5岁一组,分成3个年龄组,各组的繁殖率为 $b_1=0, b_2=4, b_3=3$,存活率为 $s_1=1/2, s_2=1/4$,开始时3组各有1000只.求15年后各组分别有多少只,以及时间充分长以后种群的增长率(即固有增长率)和按年龄组的分布.

6. 在7.4节按年龄分组的种群增长模型中,证明当时间充分长以后若总和繁殖率 $R>1$,则种群增长,若 $R<1$ 则种群减少.

* 7. 在按年龄分组的种群增长模型基础上,建立种群的稳定收获模型.

(1) 设年龄组区间、时段长度都正好等于种群的繁殖周期,种群的按年龄组分布、Leslie矩阵及增长规律仍用7.4节的 $x(k+1)=Lx(k)$ 表示.如果时段 k 第 i 年龄组种群的增加量就是这个时段的收获量,表示为 $x_i(k)-x_i(k-1)=h_i(k)x_i(k), i=1,2,\dots,n, k=1,2,\dots$,其中 $h_i(k)$ 为收获系数.

所谓稳定收获是指,各个时段同一年龄组的收获量不变,即 $h_i(k)$ 和 $x_i(k)$ (在收获之后)与 k 无关.用 H 表示以 h_i 为对角元素的对角阵,证明稳定收获模型可表为 $Lx-x=HLx$,其中 x 是种群的按年龄组的稳定分布.

(2) 证明获得稳定收获的充要条件是: h_i 满足

$$(1-h_1)[b_1+b_2s_1(1-h_2)+\dots+b_ns_1s_2\cdots s_{n-1}(1-h_2)\cdots(1-h_n)]=1$$

且 $x = cx^*$ (c 是大于零的常数), 其中

$$x^* = [1, s_1(1-h_2), \dots, s_1s_2\cdots s_{n-1}(1-h_2)\cdots(1-h_n)]^T$$

(3) 利用第 5 题的数据至少给出 H 和 x 的两组解, 并计算按年龄组稳定收获的分布.

* 8. 讨论稳定收获模型(第 7 题)的两个特例.

(1) 有些种群最年幼的级别具有较大的经济价值, 所以饲养者只收获这个年龄组的种群, 于是 $h_1 = h, h_2 = \cdots = h_n = 0$. 给出这种情况下稳定收获的充要条件, 并在第 5 题数据下求收获系数、种群的稳定分布和收获量按年龄组的稳定分布.

(2) 对于随机捕获的种群, 区分年龄是困难的, 不妨假定 $h_1 = \cdots = h_n = h$. 讨论与(1)同样的问题.

第7章习题参考解答

1.

(1) 简单地假设 y_{k+1} 由 x_{k+1} 和 x_k 的平均值决定, 模型为

$$\begin{cases} y_{k+1} - y_0 = -\alpha \left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2} - x_0 \right), & \alpha > 0 \\ x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0), & \beta > 0 \end{cases}$$

得 $2x_{k+2} + \alpha\beta x_{k+1} + \alpha\beta x_k = 2(1 + \alpha\beta)x_0$, 与 7.1 节(B)的结果相同, 平衡点稳定的条件仍为 $\alpha\beta < 2$.

(2) 设 x_{k+1} 也由 y_k 和 y_{k-1} 的平均值决定, 模型为

$$\begin{cases} y_{k+1} - y_0 = -\alpha \left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2} - x_0 \right), & \alpha > 0 \\ x_{k+1} - x_0 = \beta \left(\frac{y_k + y_{k-1}}{2} - y_0 \right), & \beta > 0 \end{cases}$$

得 $4x_{k+3} + \alpha\beta x_{k+2} + 2\alpha\beta x_{k+1} + \alpha\beta x_k = c$, c 由 α, β, x_0, y_0 决定, 其特征方程为 $4\lambda^3 + \alpha\beta\lambda^2 + 2\alpha\beta\lambda + \alpha\beta = 0$. 该方程所有特征根 $|\lambda| < 1$ 的条件(即平衡点稳定的条件)仍为 $\alpha\beta < 2$.

2. 在 7.3 节(13)式中, 令 $1 - x = y$, 得

$$y^3 - y^2 + \frac{1}{b}y - \frac{1}{b^3} = 0 \quad (1)$$

已知 $x^* = 1 - \frac{1}{b}$, 即 $y^* = \frac{1}{b}$ 是(1)的一个平衡点, 于是(1)式化为

$$\left(y - \frac{1}{b}\right) \left[y^2 - \left(1 - \frac{1}{b}\right)y + \frac{1}{b^2}\right] = 0 \quad (2)$$

方程(2)的另外二根为 $y_{1,2}^* = \frac{b-1 \pm \sqrt{b^2-2b-3}}{2b}$, $x_{1,2}^* = 1 - y_{1,2}^*$, 即为(15)式.

注意到 $b > 3$, (16)式直接可证.

(17) 式由 f 的表达式(14)式及复合函数求导法则导出.

将(15)式代入(17)式, 则稳定条件 $|f^{(2)}(x_{1,2}^*)| < 1$ 化为 $|1 - (b^2 - 2b - 3)| < 1$, 由此可得 $3 < b < 1 + \sqrt{6}$, 即(18)式.

3. 略

4. 略

5. 15年后各组分别有14375只、1375只、875只.固有增长率是1.5.稳定的按年龄组的分布为 $(1, 1/3, 1/18)^T$.

6. 由7.4节定理1及(11)式可知, $R=1$ 是 $\lambda=1$ 的充分条件.又因(11)式可写作: $1 = \frac{b_1}{\lambda} + \frac{b_2 s_1}{\lambda^2} + \cdots + \frac{b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{\lambda^n}$, 所以当 $\lambda > 1$ 时, 必有 $R > 1$; 当 $\lambda < 1$ 时, $R < 1$.反之, 亦有 $R > 1$ 时 $\lambda > 1$; $R < 1$ 时 $\lambda < 1$.再由(15)式即得 $R > 1$ 时, 种群增长; $R < 1$ 时种群减少.

* 7.

(1) 利用 $x(k+1) = Lx(k)$ 可将 $x_i(k) - x_i(k-1) = h_i(k)x_i(k)$ 表示为

$$Lx(k) - x(k-1) = H(k)Lx(k-1)$$

其中 $H(k)$ 表示以 $h_i(k)$ 为对角元素的对角阵.在稳定收获下 $H(k) = H$, $x(k) = x$, 于是得

$$Lx - x = HLx$$

(2) 上述模型可写作 $(I - H)Lx = x$, 即 $(I - H)L$ 的特征根 $\lambda = 1$.

$$\text{又}(I - H)L = \begin{bmatrix} b_1(1-h_1) & b_2(1-h_1) & \cdots & b_{n-1}(1-h_1) & b_n(1-h_1) \\ s_1(1-h_2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2(1-h_3) & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1}(1-h_n) & 0 \end{bmatrix}$$

与7.4节的 L 矩阵相比, L 中的 b_i 相当于 $(I - H)L$ 中的 $b_i(1 - h_1)$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), L 中的 s_i 相当于 $(I - H)L$ 中的 $s_i(1 - h_{i+1})$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), 根据定理1和第7题 $R=1$ 是 $\lambda=1$ 的充要条件, 将 $(I - H)L$ 中的 $R=1$ 表示出来, 即为所要求的证明.

(3) 按照(2)的结果, 以第5题的数据 $b_1 = 0, b_2 = 4, b_3 = 3, s_1 = 1/2, s_2 = 1/4$ 代入, h_i 应满足

$$(1 - h_1) \left[2(1 - h_2) + \frac{3}{8}(1 - h_2)(1 - h_3) \right] = 1 \quad (1)$$

且 $x = cx^*, x^* = \left[1, \frac{1}{2}(1 - h_2), \frac{1}{8}(1 - h_2)(1 - h_3) \right]^T$, x^* 为种群的稳定分布,

而收获量按年龄组的稳定分布为 HLx^* .

满足(1)式的解很多, 如

$h_1 = 0, h_2 = 1/2, h_3 = 1$, 可得 $x^* = (1, 1/4, 0)^T$, $HLx^* = (0, 1/4, 1/16)^T$;

$h_1 = h_2 = h_3 = 1/3$, 可得 $x^* = (1, 1/3, 1/18)^T$, $HLx^* = (1/2, 1/6, 1/36)^T$.

* 8.

(1) 稳定收获充要条件为 $(1-h)(b_1 + b_2 s_1 + \cdots + b_n s_1 \cdots s_{n-1}) = 1$, 对于所给数据, 得 $h = 11/19$, $\mathbf{x}^* = (1, 1/2, 1/8)^T$, $\mathbf{HLx}^* = (209/152, 0, 0)^T$.

(2) 稳定收获充要条件为 $(1-h)[b_1 + b_2 s_1 (1-h) + \cdots + b_n s_1 \cdots s_{n-1} (1-h)^{n-1}] = 1$. 对于所给数据得 $h = 1/3$, $\mathbf{x}^* = (1, 1/3, 1/18)^T$, $\mathbf{HLx}^* = (1/2, 1/6, 1/36)^T$.

第 8 章 习 题

1. 证明 8.1 节层次分析模型中定义的 n 阶一致阵 A 有下列性质:

- (1) A 的秩为 1, 惟一非零特征根为 n ;
- (2) A 的任一列向量都是对应于 n 的特征向量.

2. 对于 n 阶成对比较阵 $A = (a_{ij})$, 设 $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \epsilon_{ij}$, $\epsilon_{ij} = 1 + \delta_{ij}$, 其中 $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ 是对应于最大特征根的特征向量, δ_{ij} 表示 a_{ij} 在一致性附近的扰动. 若 δ_{ij} 为方差 σ^2 的随机变量, 证明一致性指标 $CI \approx \sigma^2/2$.

3. 证明 8.1 节中用对数最小二乘法得到的权向量((16)式)与实用算法中根法的计算结果相同.

4. 用层次分析法解决一两个实际问题, 例如:

(1) 学校评选优秀学生或优秀班级, 试给出若干准则, 构造层次结构模型. 可分为相对评价和绝对评价两种情况讨论.

(2) 你要购置一台个人电脑, 考虑功能、价格等的因素, 如何作出决策.

(3) 为大学毕业的青年建立一个选择志愿的层次结构模型.

(4) 你的家乡准备集资兴办一座小型饲养场, 是养猪, 还是养鸡、养鸭、养兔…….

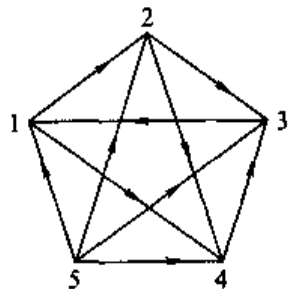
* 5. 为减少层次分析法中的主观成分, 可请若干专家每人构造成对比较阵. 试给出一种由若干个成对比较阵确定权向量的方法.

* 6. 用另一种方法构造成对比较阵 $A = (a_{ij})$: a_{ij} 表示因素 C_i 与 C_j 的影响之差, $a_{ji} = -a_{ij}$, 于是 A 为反对称阵, 并且, 当 $a_{ik} + a_{kj} = a_{ij}$ ($i, k, j = 1, 2, \dots, n$)

时 A 是一致阵. 规定权向量 $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ 应满足 $\sum_{i=1}^n w_i = 0$, a_{ij} 可记作 $a_{ij} = (w_i - w_j) + \epsilon_{ij}$ (对一致阵 $\epsilon_{ij} = 0$). 试给出一种由 A 确定权向量 w 的方法. 与 1—9 尺度对应, 这里用 0—8 尺度, 即 a_{ij} 取值范围是 0, 1, \dots , 8 及 -1, \dots , -8.

7. 右图是 5 位网球选手循环赛的结果. 作为竞赛图, 它是双向连通的吗? 找出几条完全路径, 用适当方法排出 5 位选手的名次.

8. 排名次的另一方法是考察“失分向量”以代替得



分向量(选手输掉场次的数目为他的失分),按失分由小到大排列名次.

(1) 证明:这相当于把竞赛图中各有向边反向后,按得分向量排列名次,再把名次倒过来.

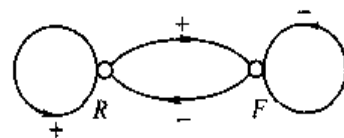
(2) 用失分向量方法对 8.2 节图 13(4)的竞赛图排列名次.结果与用得分向量方法一致吗?

9. 利用 8.3 节的定理 4,5 说明,为了把 8.3 节图 14 不稳定的能源利用系统变为冲量和值稳定的,如果限制只能改变两条有向边的符号,那么只有 3 种可行方案:改变 $v_1 v_2$ 和 $v_3 v_5$ (如 8.3 节所述);改变 $v_2 v_1$ 和 $v_5 v_6$;改变 $v_2 v_1$ 和 $v_6 v_7$.

10. 考察由野兔 R 和狐狸 F 组成的生态系统,在野兔的食物资源充足的情况下,其带符号的有向图如右所示.

(1) 解释图中 $+$, $-$ 号的意义.

(2) 若初始时段野兔有一增量,且设 $v(0) = (10, 10)$,计算 $v(1), v(2)$.

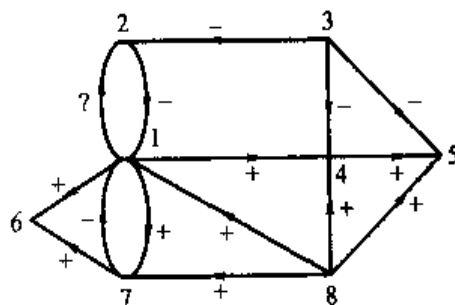


(3) 证明该系统对所有简单冲量过程都是冲量和值稳定的,从生态意义上进行解释.

(4) 说明若用权描述二者的相互作用,则在某种加权的情况下系统不再稳定,并从生态意义上进行解释.

11. 食肉动物 C 、食草动物 H 和草 P 组成生态系统,因为草地有限,草过密会使草的生长减慢.用带符号的有向图建立这个系统的冲量过程模型,并证明冲量过程是不稳定的.

12. 公共汽车系统用带符号的有向图表示如下,其中只有单位距离票价随着乘客行程的增加应该提高还是降低尚未确定(图中有向边 $1 \rightarrow 2$ 的标以?号).讨论这个符号应为 $+$ 还是 $-$ 才能使冲量过程稳定.



1—乘客的行程;2—单位距离票价;3—节油量;4—燃料消耗;

5—污染;6—事故;7—晚点;8—居民人数

13. 在 8.4 节中证明由 (7), (8) 给出的 shapley 值 $\Phi(v)$ 满足 $\varphi_i(v) \geq v(i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

14. 某甲(农民)有一块土地,若从事农业生产可收入 1 万元.若将土地租给某乙(企业家)用于工业生产,可收入 3 万元.当旅店老板请企业家参与经营时,收入达 4 万元.为促成最高收入的实现,试用 Shapley 值方法分配各人的所得.

15. 理事会有五个常任理事和十个非常任理事,提案仅当全部常任理事和至少四个非常任理事赞成时方可通过.求每位常任理事和每位非常任理事在投票中的权重.

16. 奇数个席位的理事会由三派组成,议案表决实行过半数通过方案.证明在任一派都不能操纵表决的条件下,三派占有的席位不论多少,他们在表决中的权重都是一样的.

17. 证明 8.5 节中当候选人数目 $m = 2$ 且选民人数 $n \geq 2$ 时,简单多数规则满足 Arrow 公理.

18. 举例说明 8.5 节中确定选举结果的记分规则不满足 Arrow 公理 2.

* 19. 设 $I = (1, 2, \dots, n)$ 和 $A = (x, y, \dots)$ 分别是选民和候选人集合, (p_1, p_2, \dots, p_n) 是 I 对 A 的一次投票(为简单起见,不考虑两候选人等同的情况).选举结果 p 不是对 A 的一个排序,而只是决定一名优胜者(第一名).现举出以下几种选举规则:

(1) (p_1, p_2, \dots, p_n) 中排在第一名最多的那位候选人为优胜者.

(2) 若多于或等于半数的选民将 x 排在其它候选人之前, x 是优胜者.

(3) 若多于或等于半数的选民将 x 排在第一位,则 x 是优胜者;若没有这样的 x ,就把排在第一位最多的两个候选人 x, y 进行比较,当多于或等于半数的选民将 x 排在 y 前面时, x 是优胜者.

(4) 得分(Borda 数)居第一位的为优胜者.

问这些规则都能确定优胜者吗?对于同一次投票这些规则决定的优胜者相同吗?你还能提出一些决定优胜者的选举规则吗?

20. 用最小距离意义下的选举规则研究 8.5 节(3)式给出的投票.

(1) 如果以 $\sum_{i=1}^3 d(p, p_i)$ 最小为原则确定选举结果 p ,说明 p 可以是 p_1, p_2 或 p_3 中任一个.

(2) 如果以 $\sum_{i=1}^3 d^2(p, p_i)$ 最小为原则确定选举结果 p ,说明 $p: x \sim y \sim z$.

第 8 章习题参考解答

1.

(1) 由 8.1 节(4)式得, 对任意 2 列 i, j , 有 $\frac{a_{ik}}{a_{jk}} = a_{ij} (k=1, 2, \dots, n)$, 即 i 列与 j 列对应分量成比例 ($i, j=1, 2, \dots, n$), 故 A 秩为 1.

因为任意矩阵的特征根之和等于其对角元素之和, A 的对角元素之和为 $n(a_{ii}=1)$, 而秩为 1 的阵 A 只有一个非零的特征根, 故这个根是 n .

(2) 特征向量 $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 满足 $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = nx_i, i=1, 2, \dots, n$. 将 A 的任一列向量 $(a_{1k}, \dots, a_{nk})^T$ 代入, 有 $\sum_{j=1}^n a_{ij}a_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ik} = na_{ik}, i, k=1, 2, \dots, n$, 所以它是特征向量.

2. 记 A 的特征根为 λ , 由 $\lambda w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}w_j (i=1, 2, \dots, n)$ 和 $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}\epsilon_{ij}$ 可得 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{w_j}{w_i}, \lambda - 1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left(\epsilon_{ij} + \frac{1}{\epsilon_{ij}} \right)$. 注意到 $\epsilon_{ij} = 1 + \delta_{ij}$, 一致性指标为

$$CI = \frac{\lambda - n}{n - 1} = \frac{\lambda - 1}{n - 1} - 1 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\delta_{ij}^2}{1 + \delta_{ij}} \approx \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \delta_{ij}^2 \approx \frac{\sigma^2}{2}.$$

3. 记 $Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\ln a_{ij} - \ln \frac{w_i}{w_j} \right)^2$, 由 $\frac{\partial Q}{\partial w_k} = 0 (k=1, 2, \dots, n)$, 得

$$\sum_{j=1}^n (\ln a_{kj} - \ln w_k + \ln w_j) \left(-\frac{1}{w_k} \right) + \sum_{i=1}^n (\ln a_{ik} - \ln w_i + \ln w_k) \left(\frac{1}{w_k} \right) = 0$$

$$\text{即 } 2n \ln w_k = \sum_{j=1}^n (\ln a_{kj} - \ln a_{jk} + 2 \ln w_j), \ln w_k^n = \sum_{j=1}^n \ln(w_j a_{kj}) = \ln \left(\prod_{j=1}^n w_j a_{kj} \right),$$

$$w_k = \left(\prod_{j=1}^n w_j \right)^{1/n} \left(\prod_{j=1}^n a_{kj} \right)^{1/n} (k=1, 2, \dots, n). \text{ 利用 } \sum_{k=1}^n w_k = 1, \text{ 得}$$

$$w_k = \frac{\left(\prod_{j=1}^n a_{kj} \right)^{1/n}}{\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n a_{kj} \right)^{1/n}}, \text{ 与根法结果相同.}$$

4. 略

*5. 设有 s 个专家的成对比较矩阵 $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$ ($k = 1, 2, \dots, s$), 要给出综合的权向量 $w = (w_1, \dots, w_n)$, 方法很多, 如

方法一: 由 $A^{(k)}$ 求出权向量 $w^{(k)} = (w_1^{(k)}, \dots, w_n^{(k)})$. 再求几何平均值 \tilde{w}_i ,

$$\tilde{w}_i = \prod_{k=1}^s (w_i^{(k)})^{\lambda_k} \quad (i = 1, \dots, n), \quad \lambda_k \text{ 是第 } k \text{ 个专家的加权因子, 满足 } \sum_{k=1}^s \lambda_k = 1. \text{ 最后归一化为 } w_i = \frac{\tilde{w}_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{w}_i}.$$

方法二: 先取 $a_{ij}^{(k)}$ 的几何平均, 得到综合的成对比较阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$,

$$a_{ij} = \prod_{k=1}^s (a_{ij}^{(k)})^{\lambda_k} \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad \lambda_k \text{ 同上, 再由 } A \text{ 计算权向量 } w.$$

*6. 由 $a_{ij} = w_i - w_j + \varepsilon_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$), 共 n^2 个方程, 要确定 w_i, ε_{ij} 共 $n^2 + n$ 个未知数, 需增加 n 个方程. 上式对 j 求和得

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = nw_i - \sum_{j=1}^n w_j + \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

令

$$\lambda = \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2)$$

注意到 $\sum_{i=1}^n w_i = 0$, 并将(1)再对 i 求和, 可得

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (3)$$

(2), (3)代入(1)则得

$$w_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij} - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4)$$

对于一致阵有 $\lambda = 0$, $w_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$. 不一致程度可用 λ/n 衡量.

7. 竞赛图是双向连通的, 2—4—5—3—1, 5—3—1—2—4 等都是完全路

径, 图的邻接矩阵为: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

各级得分向量为 $s = s^{(1)} = (2, 2, 1, 2, 3)^T$, $s^{(2)} = (4, 3, 2, 4, 5)^T$, $s^{(3)} = (7, 6, 4, 7, 9)^T$, $s^{(4)} = (13, 11, 7, 13, 17)^T$. 由此可知, 名次为 5, 1(4), 2, 3(选手 1 和 4

名次相同). 这个结果也可由计算 A 的最大特征根 λ 和对应特征向量 s 得到: $\lambda = 1.8393$,

$$s = (0.2137, 0.1794, 0.1162, 0.2137, 0.2769)^T.$$

8.

(1) 若得分向量为 $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, 失分向量为 $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $p_i = n + 1 - s_i$, 显然, 若 $s_i > s_j$, 则 $p_i < p_j$.

(2) 当 8.2 节图 13-4 的有向边反向后, 其邻接矩阵为 $B = A^T =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

各级失分向量为 $p^{(1)} = (1, 1, 2, 2)$, $p^{(2)} = (2, 1, 2, 3)$, $p^{(3)} = (3, 2, 3, 3)$, $p^{(4)} = (3, 3, 5, 5)$, $p^{(5)} = (5, 3, 6, 8)$, \dots , 按失分由小到大排列名次为: 2, 1, 3, 4. 这个结果也可由计算 B 的最大特征根 λ (与 A 的 λ 相同) 及对应特征向量 p 得到: $p = (0.230, 0.167, 0.280, 0.323)^T$. 可见结果与用得分向量排列的名次不同.

9. 按照定理必须使 a_2, a_3, a_5 同时变为 -1 . $a_2 = -1$ 即 $v_1 v_2 = +1$ 或 $v_2 v_1 = +1$. 当 $v_1 v_2 = +1$ 时, 只有 $v_3 v_5 = -1$ 才有 $a_3 = a_5 = -1$; 当 $v_2 v_1 = +1$ 时, 只有 $v_5 v_6 = -1$ 或 $v_6 v_7 = -1$ 时才有 $a_3 = a_5 = -1$.

10.

(1) 图中 $+$ 号表示某时段野兔增加时, 导致下一时段它自身的增加(繁殖)和狐狸的增加(提供了食物), $-$ 号表示某个时段狐狸增加时, 导致下一时段它自身的减少(竞争食物)和野兔的减少(被吃掉).

(2) 记 R 为 V_1 , F 为 V_2 , 则有向图的邻接矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

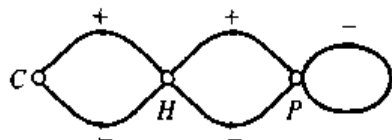
已知 $v(0) = (10, 10)$, $p(0) = (1, 0)$, 可以算出 $p(1) = (1, 1)$, $v(1) = (11, 11)$, $p(2) = (0, 0)$, $v(2) = (11, 11)$.

(3) A 的特征根为 0, 所以冲量和值稳定. 因为野兔(或狐狸)的增加导致双方的增加(或减少), 而双方的增加(或减少)导致二者都不再变化.

(4) 若二者的相互作用远大于内部作用, 设加权有向图的邻接矩阵为 $w = \begin{bmatrix} 1 & k_1 \\ -k_2 & -1 \end{bmatrix}$, 其中 $k_1, k_2 \gg 1$, 则 w 特征根的模大于 1, 系统不再稳定, 较大的相互作用导致双方数量的越来越大的变化.

11. 如图所示, 记 C, H, P 分别为 V_1, V_2, V_3 .

邻接矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,



A 的特征多项式为 $f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1$.

因为 $f(0) = 1, f(-1) = -1$, 所以有一根 $\lambda_1 \in (-1, 0)$, 又因为 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, 故必存在模大于 1 的特征根, 冲量过程不稳定.

12. 记弧(1,2)的符号为 a , a 为 1 或 -1, 冲量过程的邻接矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A 的特征多项式为 $\lambda^8 [\lambda^3 + (a+1)\lambda + 1]$, 当 $a = -1$ 时, 弧(1,2)为 -1, 即单位距离票价随着乘客行程的增加而降低时, 系统是稳定的. 反之, 系统不稳定.

13. 根据特征函数的性质(8.4 节的(4)式), $v(s) - v(s \setminus i) \geq v(i)$. 又对于(8)式, 有

$$\begin{aligned} \sum_{s \in S_i} w(|s|) &= \sum_{|s|=1}^n w(|s|) C_{n-1}^{|s|-1} \\ &= \sum_{|s|=1}^n \frac{(n-|s|)! (|s|-1)!}{n!} \frac{(n-1)!}{(n-|s|)! (|s|-1)!} = 1. \end{aligned}$$

则由(7)式可得 $\varphi_i(v) \geq v(i)$.

14. 甲、乙、丙所得应为 250 元, 50 元, 100 元. (注意: 若没有甲的土地, 乙、丙将没有收入)

15. 集合 I 为 $I = \{1, \dots, 5, 6, \dots, 15\}$, 其中 $i = 1, \dots, 5$ 表示常任理事, $i = 6, \dots, 15$ 表示非常任理事. 将集合 $s = \left(\bigcap_{i=1}^5 \{i\} \right) \cap (\{6\}, \dots, \{15\})$ 中任意 k 个元素的集合, $k = 4, \dots, 10$ 的特征函数定义为 1, I 中其它集合的特征函数定义为 0. 因为这样的集合有 C_{10}^k 个, 且 $w(|s|) = \frac{(k+5-1)! [15-(k+5)]!}{15!}$ ($k = 4, \dots, 10$). 所以, 任一常任理事的 shapley 值 (即投票时占的比重) 为: $\varphi_i = \sum_{k=4}^{10} w(|s|) \cdot C_{10}^k \approx 0.196$ ($i = 1, \dots, 5$). 可知任一非常任理事的 shapley 值为

$$\varphi_i \approx \frac{1}{10}(1 - 5 \times 0.196) = 0.002 \quad (i = 6, \dots, 15).$$

16. 设三派的席位分别为 n_1, n_2, n_3 , 记 $n_1 + n_2 + n_3 = n$ (奇数). 任一派不能操纵表决, 即 $n_1, n_2, n_3 < \frac{n+1}{2}$, 于是 $n_1 + n_2, n_1 + n_3, n_2 + n_3 > \frac{n+1}{2}$, 即任二派的席位过半数. 显然三派的权重都是一样的, 各占 $1/3$.

17. 设候选人为 x 和 y , 选民为 $i = 1, 2, \dots, n$ ($n \geq 2$). 按照简单多数规则, 若第一次投票使 $(x > y)$, 成立的 $\{i\}$ 过半数, 结果为 $x > y$, 且第二次投票中使 $(x > y)$, 成立的 $\{i\}$ 至少过半数, 结果当然也为 $x > y$, 公理 1 成立. 只有 $A_1 \neq A$ 时公理 2 才有意义, 而对于仅有的二位 x, y , A_1 中只能有一位候选人 x 或 y , 无排序问题, 公理 2 自然成立. 若所有的 $\{i\}$ 都有 $(x > y)_i$, 则必有 $x > y$, 公理 3 成立. 若对某个 $\{i\}$ 有 $(x > y)_i$, 设 $(x > y)_j$ ($j = 1, \dots, n, j \neq i$), 那么使 $(x > y)_i$ 成立的 $\{i\}$ 不超过半数, 结果不能是 $x > y$, $\{i\}$ 不是独裁者, 公理 4 成立.

18. 例如有两次投票:

p_1	p_2	p'_1	p'_2
x	y	x	y
z	x	y	z
y	z	z	x

候选人子集 $\{x, y\}$ 在两选民两次投票中的排序不变, 但第一次投票的 $B(x) = 3, B(y) = 2$, 确定 $(x > y)$. 而第二次投票的 $B(x) = 2, B(y) = 3$ 确定 $(y > x)$, 违犯公理 2.

* 19. 规则(1)仅在两名或两名以上候选人被同样多的选民排在第一名时, 无法决定获胜者外, 通常可决定获胜者. 规则(2)在没有一个候选人能被半数以上选民排在第一位时, 无法决定获胜者, 这种情况有相当大的可能出现. 规则(3)通常可以决定获胜者, 除非有偶数选民, 且在比较排在首位最多的两位候选人 x, y 时恰好有一半选民将 x 排在 y 前面. 规则(4)通常可决定获胜者, 除非 Borda 数最高的有两位或两位以上候选人.

对于同一次投票这些规则决定的获胜者可以不同, 例如 100 个选民对 3 位候选人 x, y, z 的投票结果是:

45 个选民	30 个选民	25 个选民
x	y	z
y	z	y
z	x	x

则规则(1)决定 x 获胜; 规则(2), (3), (4)决定 y 获胜.

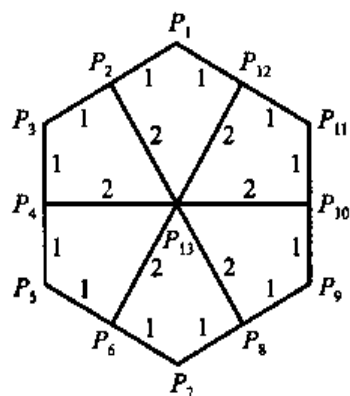
20. 3 位候选人的选举结果共有 13 种, 记作 $p_i, i = 1, 2, \dots, 13$.

$$p_1: x > y > z; \quad p_2: x \sim y > z;$$

$$\begin{aligned}
p_3: y > x > z; & \quad p_4: y > x \sim z; \\
p_5: y > z > x; & \quad p_6: y \sim z > x; \\
p_7: z > y > x; & \quad p_8: z > x \sim y; \\
p_9: z > x > y; & \quad p_{10}: x \sim z > y; \\
p_{11}: x > z > y; & \quad p_{12}: x > y \sim z; \\
p_{13}: x \sim y \sim z.
\end{aligned}$$

按照 8.5 节(12), (13)式对于距离的定义, 计算 $d(p_i, p_j)$.

将 p_i 和 $d(p_i, p_j)$ 表示如图(当 p_i, p_j 有直接连线时, 线上数字表示 $d(p_i, p_j)$; 当 p_i, p_j 没有直接连线时, $d(p_i, p_j)$ 是最短的各段连线距离之和). 8.5 节(3)式的选举结果记为 p'_1, p'_2, p'_3 , 于是 $p'_1 = p_1$; $p'_2 = p_5$; $p'_3 = p_9$.



(1) 求 $\text{Min}_p \sum_{i=1}^3 d(p, p'_i)$ 借助于图, 适当地用枚

举法, 可知 $p = p'_1$ 或 p'_2 或 p'_3 , 且 $\sum_{i=1}^3 d(p, p'_i) = 8$.

(2) 求 $\text{Min}_p \sum_{i=1}^3 d^2(p, p'_i)$, 类似地可知 $p = p_{13}$, 且 $\sum_{i=1}^3 d^2(p, p'_i) = 27$.

第9章 习 题

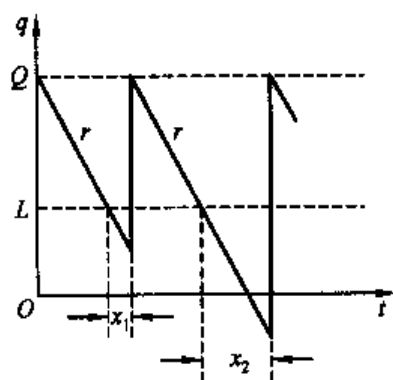
1. 在 9.1 节传送带效率模型中, 设工人数 n 固定不变. 若要提高传送带效率 D , 一种简单的办法是增加一个周期内通过工作台的钩子数 m , 比如增加一倍, 其它条件不变. 另一种办法是在原来放置一只钩子的地方放置两只钩子, 其它条件不变, 于是每个工人在任何时刻可以同时触到两只钩子, 只要其中有一只是空的, 他就可以挂上产品, 这种办法用的钩子数量与第一种办法一样. 试推导这种情况下传送带效率的公式, 从数量关系上说明这种办法比第一种办法好.

2. 利用 9.2 节的模型计算, 若每份报纸的购进价为 0.75 元, 售出价为 1 元, 退回价为 0.6 元, 需求量服从均值 500 份, 均方差 50 份的正态分布, 报童每天应购进多少份报纸才能使平均收入最高, 这个最高收入是多少?

3. 在 9.3 节中将假设条件 4 改为一周的销售是均匀进行的, 如图 5 所示. 试确定使平均费用达到最小的策略 S .

4. 某商店要订购一批商品零售, 设购进价 c_1 , 售出价 c_2 , 订购费 c_0 (与数量无关), 随机需求量 r 的概率密度为 $p(r)$, 每件商品的贮存费为 c_3 (与时间无关). 问如何确定订购量才能使商店的平均利润最大, 这个平均利润是多少. 为使这个平均利润为正值, 需要对订购费 c_0 加什么限制?

5. 建立交货时间为随机变量的存贮模型. 设商品订货费为 c_1 , 每件商品单位时间的贮存费为 c_2 , 缺货费为 c_3 , 单位时间需求量为 r . 右图中 L 称订货点. 当贮存量降至 L 时订货, 而交货时间 x 是随机的, 如图中的 x_1, x_2, \dots . 设 x 的概率密度函数为 $p(x)$. 订货量使下一周期初的贮存量达到固定值 Q . 为了使总费用最小, 选择合适的目标函数建立模型, 确定最佳订货点 L .



6. 在 9.4 节中证明方程 (13) 仅有一个负根 z^* , 并且 z^* 给出 (12) 式 $J(z)$ 的极小值.

7. 在 9.4 节给出的例子中, 若 $l = 2.0\text{m}$ 不变, 而均方差减为 $\sigma = 10\text{cm}$, 问均值 m 应为多大, 每得到一根成品材的浪费量多大 (与原来的数值相比较).

8. 在 9.4 节中若钢材粗轧后, 长度在 l_1 与 l 之间的可降级使用, 长度小子

l_1 的才整根报废, 试选用合适的目标函数建立优化模型, 使某种意义下的浪费量最小.

9. 推导 9.5 节的(12)式.

10. 作出与确定性阻滞增长模型相应的假设, 建立随机性的阻滞增长模型.

11. 假设在 9.5 节的模型(2), (3)式中, 只考虑出生, 忽略死亡, 验证 $P_n(t)$ 满足负二项分布, 即 $P_n(t) = C_{n-n_0}^{n_0} (e^{-\lambda t})^{n_0} (1 - e^{-\lambda t})^{n-n_0}$, $n = n_0, n_0 + 1, \dots$.

12. 考察一种既不同于指数模型、也不同于阻滞增长模型的情况: 人口为 $x(t)$, 最大允许人口为 x_m , t 到 $t + \Delta t$ 时间内人口增长量与 $x_m - x(t)$ 成正比.

(1) 建立确定性模型, 将结果作图, 与指数模型和阻滞增长模型的结果进行比较.

(2) 作出适当的假设, 建立相应的随机性模型, 求出人口的期望, 并解释其与(1)中的 $x(t)$ 在形式上完全一致的意义.

第9章习题参考解答

1. 在原来放置一只钩子处放置的两只钩子称为一个钩对. 今一周期内通过 m 个钩对, 任一钩对被任一名工人触到的概率 $p = 1/m$, 不被触到的概率 $q = 1 - p$, 于是任一钩对为空的概率是 q^n , 钩对上只挂上 1 件产品的概率是 npq^{n-1} , 一周期通过的 $2m$ 个钩子中, 空钩的平均数是 $m(2q^n + npq^{n-1})$, 带走产品的平均数是 $2m - m(2q^n + npq^{n-1})$, 未带走产品的平均数是 $n - [2m - m(2q^n + npq^{n-1})]$, 按照 9.1 节的定义, 有

$$E = 1 - D = 1 - \frac{m}{n} \left[2 - 2 \left(1 - \frac{1}{m} \right)^n - \frac{n}{m} \left(1 - \frac{1}{m} \right)^{n-1} \right]$$

利用 $\left(1 - \frac{1}{m} \right)^n$ 和 $\left(1 - \frac{1}{m} \right)^{n-1}$ 的近似展开, 可得 $E \approx \frac{(n-1)(n-2)}{6m^2} \approx \frac{n^2}{6m^2}$,

注意: $\left(1 - \frac{1}{m} \right)^n$ 展开取 4 项, $\left(1 - \frac{1}{m} \right)^{n-1}$ 展开取 3 项. 而第一种方法显然有 $E' \approx \frac{n}{4m}$, 于是 $E = \beta E'$, $\beta = \frac{2n}{3m}$. 当 $m > n$ 时, $\beta < 1$, 所以第二种方法比第一种方法好.

2. 按照 9.2 节 (5) 式, $a - b = 0.25$, $b - c = 0.15$, $P_1/P_2 = 5/3$, 由 $p(r)$ 服从 $N(\mu, \sigma)$, $\mu = 500$, $\sigma = 50$, 可得 $n = \mu + 0.32\sigma = 516$, 即每天购进 516 份报纸.

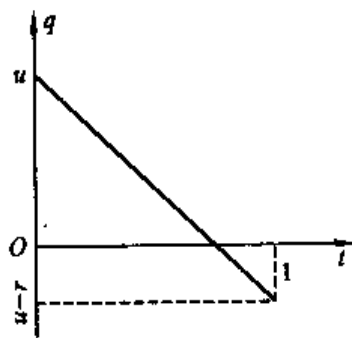
按照 (2) 式, 可得最高收入约为 117 元.

3. 在 9.3 节中当 $u \leq r$ 时, 图 5 应如右所示. 贮存量 $q < 0$ 表示缺货, 在均匀销售情况下, 9.3 节 (1), (2) 式应改为

$$J(u) = \begin{cases} c_0 + c_1 u + L(x + u), & u > 0 \\ L(x), & u = 0 \end{cases}$$

$$L(x) = c_2 \int_0^x \left(x - \frac{r}{2} \right) p(r) dr + c_2 \int_x^\infty \frac{x}{2} p(r) dr + c_3 \int_x^\infty \frac{r-x}{2} p(r) dr$$

(c_2, c_3 原来定义为每件商品一周的贮存费和缺货费, 在 $x \leq r$ 的情形下, 贮存和缺货虽都不是一周, 但费用仍按一周计).



$$\frac{dJ}{du} = c_1 + c_2 \int_0^{x+u} p(r)dr + \frac{c_2}{2} \int_{x+u}^{\infty} p(r)dr - \frac{c_3}{2} \int_{x+u}^{\infty} p(r)dr$$

$$\text{令 } \frac{dJ}{du} = 0, \text{ 记 } x+u = S, \text{ 则 } \frac{\int_0^S p(r)dr}{\int_S^{\infty} p(r)dr} = \frac{\frac{c_3 - c_2}{2} - c_1}{c_2 + c_1}.$$

4. 设订购量为 u , 则平均利润为

$$\begin{aligned} J(u) &= c_2 \left(\int_0^u rp(r)dr + \int_u^{\infty} up(r)dr \right) - \left[c_0 + c_1 u + c_3 \int_0^u (u-r)p(r)dr \right] \\ &= (c_2 - c_1)u - c_0 - (c_2 + c_3) \int_0^u (u-r)p(r)dr \end{aligned}$$

$$u \text{ 的最优值 } u^* \text{ 满足 } \int_0^{u^*} p(r)dr = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_3}.$$

最大利润为 $J(u^*) = (c_2 + c_3) \int_0^{u^*} rp(r)dr - c_0$. 为使这个利润为正值, 应有

$$c_0 < (c_2 + c_3) \int_0^{u^*} rp(r)dr.$$

5. 由贮存量 $q(t)$ 的图形可以写出一个交货周期的期望费用为

$$C(L) = c_1 + \int_0^{L/r} c_2 \frac{Q^2 - (L - rx)^2}{2r} p(x)dx + \int_{L/r}^{\infty} \left[c_2 \frac{Q^2}{2r} + c_3 \frac{(rx - L)^2}{2r} \right] p(x)dx$$

可以算出 $\frac{dC}{dL} = -c_2 \int_0^{L/r} \left(\frac{L}{r} - x \right) p(x)dx - c_3 \int_{L/r}^{\infty} \left(x - \frac{L}{r} \right) p(x)dx$, 显然

$\frac{dC}{dL} < 0$, 所以当 $L = Q$ 时, $C(L)$ 最小, 这个结果是自然的.

实际上, 本题的指标函数应取单位时间的期望费用. 因为进货周期的期望为

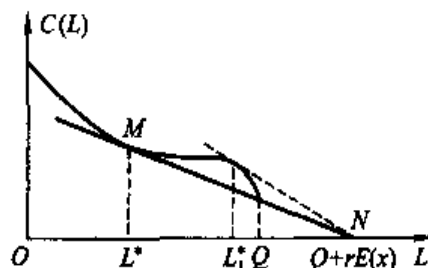
$T(L) = \frac{Q - L}{r} + E(x)$, 其中 $E(x)$ 为交货时间的期望, 所以可定义指标函数

$$S(L) = C(L)/T(L).$$

由 $\left. \frac{dS}{dL} \right|_{L^*} = 0$ 可以解出 $L^* - \frac{C(L^*)}{C'(L^*)} = Q + rE(x)$.

由 $C(L)$ 求 L^* 的图解法如右图:

先作出 $C(L)$ 图形 (计算 $C''(L)$ 可知 $C(L)$ 由下凸变上凸), 然后由 $L = Q + rE(x)$ 的点 N 作曲线的切线, 切点 M 的横坐标即为 L^* . 另一条切线 (右图虚线) 得到的 L_1^* 不是极小值点.



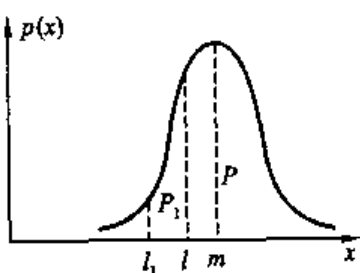
6. 不难证明, 当 $Z < 0$ 时, $\frac{dF}{dZ} < 0$, F 单调减, 所以方程 (13) 只有一个负根

Z^* . 可以算出 $\left. \frac{d^2 J}{dZ^2} \right|_{Z^*} = \frac{(\lambda - Z^*) \varphi'(Z^*)}{\Phi^2(Z^*)} < 0$, 所以 $J(Z^*)$ 为极小值.

7. $\lambda = l/\sigma = 20$, 解 (13) 得 $Z^* = -2.1$. 再由 (11), (18) 式, $\mu^* = 22.1$, $m^* = 2.21m$, 此即最佳均值.

又可算出 $p(m^*) = 0.9821$, 每一根成品材的浪费量为 $J_1 = \frac{m^*}{p(m^*)} - l = 0.25m$, 比原来的 $0.45m$ 减少甚多.

8. 如图, 设 $\int_{l_1}^{\infty} p(x) dx = P$, $\int_{l_1}^l p(x) dx = P_1$,



每粗轧一根钢材浪费的平均长度为

$$\begin{aligned} w &= \int_{-\infty}^{l_1} x p(x) dx + \int_{l_1}^l (x - l_1) p(x) dx + \int_l^{\infty} (x - l) p(x) dx \\ &= m - lP - l_1 P_1 \end{aligned}$$

若先轧 N 根钢材, 则成品材有 NP 根, 降级材有 NP_1 根, 设每一根降级材可折合 $\alpha (< 1)$ 根成品材 (就效益而言), 那么, 选用每一根成品材浪费的平均长度为目标函数 J , 则 $J(m) = \frac{m - lP(m) - l_1 p_1(m)}{P(m) + \alpha P_1(m)}$. 令 $\mu = \frac{m}{\sigma}$, $\lambda = \frac{l}{\sigma}$, $\lambda_1 = \frac{l_1}{\sigma}$, 则 $P(m) = \Phi(\lambda - \mu)$, $P_1(m) = \Phi(\lambda_1 - \mu) - \Phi(\lambda - \mu)$. 目标函数可化为

$$J(\mu) = \frac{\mu - (\lambda - \lambda_1) \Phi(\lambda - \mu) - \lambda_1 \Phi(\lambda_1 - \mu)}{(1 - \alpha) \Phi(\lambda - \mu) + \alpha \Phi(\lambda_1 - \mu)}.$$

9. 记 $R(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(t)$, 则 $D(t) = R(t) - E^2(t)$, 利用 9.5 节 (3) 式可得

$$\frac{dR}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{dP_n}{dt} = 2(\lambda - \mu) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n + (\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{\infty} n P_n$$

再由 (5), (9) 式得 $\frac{dR}{dt} = 2rR + n_0(\lambda + \mu)e^r$, $r = \lambda - \mu$.

此方程在初始条件 $R(0) = n_0^2$ 下解为 $R(t) = \left(n_0^2 + n_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} \right) e^{2rt} - n_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{rt}$. 于是 $D(t) = n_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{rt} (e^{2rt} - 1)$.

10. 假定只考虑出生, 不考虑死亡, 9.5 节 (2) 式简化为 $\frac{dP_n}{dt} = b_{n-1} P_{n-1} - b_n P_n$. 在阻滞增长条件下, 假设 4 中的 $b_n = \lambda n$ 应改为 $b_n = \lambda n \left(1 - \frac{n}{N} \right)$, N 为 n

的极限值. 于是时刻 t 人口为 n 的概率 $P_n(t)$ 满足 $\frac{dP_n}{dt} = \lambda(n-1)$

$\left(1 - \frac{\lambda-1}{N}\right)P_{n-1} - \lambda n \left(1 - \frac{n}{N}\right)P_n$. 由此难以得到 $E(t)$ 的封闭形式表示式.

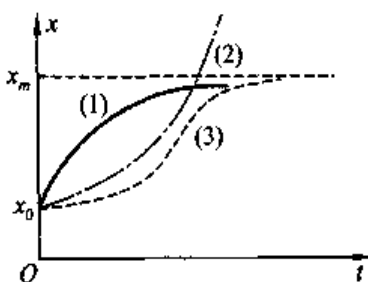
11. (3) 式为 $\frac{dP_n}{dt} = \lambda(n-1)P_{n-1} - \lambda n P_n$, 将 $P_n(t)$ 表达式直接代入即可验证(注: 当 $n = n_0$ 时, 设 $0^0 = 1$).

12.

(1) $\dot{x} = r(x_m - x)$, $r > 0$, $x(0) = x_0$, 解为 $x(t) = x_m - (x_m - x_0)e^{-rt}$. 其图形及其它模型比较如右图.

(2) $P_n(t)$ 定义同 9.5 节, 假设只考虑出生, 不考虑死亡, 在 9.5 节的假设 4 中将 $b_n = \lambda n$ 改为 $b_n = r(x_m - x)$, 则 $P_n(t)$ 满足

$$\frac{dP_n}{dt} = r[x_m - (n-1)]P_{n-1} - r(x_m - n)P_n$$



(1) 本题模型 (2) 指数增长模型 (3) Logistic 模型

可得期望 $E(t)$ 满足 $\frac{dE}{dt} = -rE + rx_m$, $E(0) = x_0$,

解为 $E(t) = x_m - (x_m - x_0)e^{-rt}$, 与(1)中结果 $x(t)$ 形式上一致. 在随机模型中, r 是单位时间内出生一人的概率 b_n 中的比例系数, 在平均意义下, 与(1)中的系数 r 是一致的.

第 10 章 习 题

1. 下表列出了某城市 18 位 35 岁~44 岁经理的年平均收入 x_1 (千元), 风险偏好度 x_2 和人寿保险额 y (千元) 的数据, 其中风险偏好度是根据发给每个经理的问卷调查表综合评估得到的, 它的数值越大, 就越偏爱高风险. 研究人员想研究此年龄段中的经理所投保的人寿保险额与年均收入及风险偏好度之间的关系. 研究者预计, 经理的年均收入和人寿保险额之间存在着二次关系, 并有把握地认为风险偏好度对人寿保险额有线性效应, 但对于风险偏好度对人寿保险额是否有二次效应以及两个自变量是否对人寿保险额有交互效应, 心中没底.

请你通过表中的数据来建立一个合适的回归模型, 验证上面的看法, 并给出进一步的分析¹⁶⁶.

序号	y	x_1	x_2	序号	y	x_1	x_2
1	196	66.290	7	10	49	37.408	5
2	63	40.964	5	11	105	54.376	2
3	252	72.996	10	12	98	46.186	7
4	84	45.010	6	13	77	46.130	4
5	126	57.204	4	14	14	30.366	3
6	14	26.852	5	15	56	39.060	5
7	49	38.122	4	16	245	79.380	1
8	49	35.840	6	17	133	52.766	8
9	266	75.796	9	18	133	55.916	6

2. 一个医药公司的新药研究部门为了掌握一种新止痛剂的疗效, 设计了一个药物实验, 给 24 名患有同种病痛的病人使用这种新止痛剂的以下 4 个剂量中的某一个: 2 g, 5 g, 7 g 和 10 g, 并记录每个病人病痛明显减轻的时间 (以分钟计). 为了解新药的疗效与病人性别和血压有什么关系, 试验过程中研究人员把病人按性别及血压的低、中、高三档平均分配来进行测试. 通过比较每个病人血压的历史数据, 从低到高分成 3 组, 分别记作 0.25, 0.50 和 0.75. 实验结束后, 公司的记录结果见下表 (性别以 0 表示女, 1 表示男).

请你为公司建立一个模型,根据病人用药的剂量、性别和血压组别,预测出服药后病痛明显减轻的时间.

病人 序号	病痛减轻时间 (min)	用药剂量 (g)	性别	血压组别
1	35	2	0	0.25
2	43	2	0	0.50
3	55	2	0	0.75
4	47	2	1	0.25
5	43	2	1	0.50
6	57	2	1	0.75
7	26	5	0	0.25
8	27	5	0	0.50
9	28	5	0	0.75
10	29	5	1	0.25
11	22	5	1	0.50
12	29	5	1	0.75
13	19	7	0	0.25
14	11	7	0	0.50
15	14	7	0	0.75
16	23	7	1	0.25
17	20	7	1	0.50
18	22	7	1	0.75
19	13	10	0	0.25
20	8	10	0	0.50
21	3	10	0	0.75
22	27	10	1	0.25
23	26	10	1	0.50
24	5	10	1	0.75

3. 某地人事部门为研究中学教师的薪金与他们的资历、性别、教育程度及培训情况等因素之间的关系,要建立一个数学模型,分析人事策略的合理性,特别是考察女教师是否受到不公正的待遇,以及她们的婚姻状况是否会影响收入.为此,从当地教师中随机选了 3 414 位进行观察,然后从中保留了 90 个观察对

象,得到了下表给出的相关数据.尽管这些数据具有一定的代表性,但是仍有统计分析的必要.现将表中数据的符号介绍如下:

Z ~月薪(元); X_1 ~工作时间(月); $X_2=1$ ~男性, $X_2=0$ ~女性, $X_3=1$ ~男性或单身女性, $X_3=0$ ~已婚女性; X_4 ~学历(取值0~6,值越大表示学历越高); $X_5=1$ ~受雇于重点中学, $X_5=0$ ~其它; $X_6=1$ ~受过培训的毕业生, $X_6=0$ ~未受过培训的毕业生或受过培训的肄业生; $X_7=1$ ~已两年以上未从事教学工作, $X_7=0$ ~其它.注意组合 $(X_2, X_3)=(1, 1), (0, 1), (0, 0)$ 的含义.

(1) 进行变量选择,建立变量 $X_1 \sim X_7$ 与 Z 的回归模型(不一定包括每个自变量),说明教师的薪金与哪些变量的关系密切,是否存在性别和婚姻状况上的差异.为了数据处理上的方便,建议对薪金取对数后作为因变量.

(2) 除了变量 $X_1 \sim X_7$ 本身之外,尝试将它们的平方项或交互项加入到模型中,建立更好的模型^[16].

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7		Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
1	998	7	0	0	0	0	0	0	18	1 127	42	0	0	0	1	0	0
2	1 015	14	1	1	0	0	0	0	19	1 095	47	0	0	0	0	0	1
3	1 028	18	1	1	0	1	0	0	20	1 113	52	0	0	0	0	0	1
4	1 250	19	1	1	0	0	0	0	21	1 462	52	0	1	2	0	1	0
5	1 028	19	0	1	0	1	0	0	22	1 182	54	1	1	0	0	0	0
6	1 028	19	0	0	0	0	0	0	23	1 404	54	0	0	0	1	0	0
7	1 018	27	0	0	0	0	0	1	24	1 182	54	0	0	0	0	0	0
8	1 072	30	0	0	0	0	0	0	25	1 594	55	1	1	2	1	1	0
9	1 290	30	1	1	0	0	0	0	26	1 459	66	0	0	0	1	0	0
10	1 204	30	0	1	0	0	0	0	27	1 237	67	1	1	0	1	0	0
11	1 352	31	0	1	2	0	1	0	28	1 237	67	0	1	0	1	0	0
12	1 204	31	0	0	0	1	0	0	29	1 496	75	0	1	0	0	0	0
13	1 104	38	0	0	0	0	0	0	30	1 424	78	1	1	0	1	0	0
14	1 118	41	1	1	0	0	0	0	31	1 424	79	0	1	0	0	0	0
15	1 127	42	0	0	0	0	0	0	32	1 347	91	1	1	0	1	0	0
16	1 259	42	1	1	0	1	0	0	33	1 343	92	0	0	0	0	0	1
17	1 127	42	1	1	0	0	0	0	34	1 310	94	0	0	0	1	0	0

续表

	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇		Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇
35	1 814	103	0	0	2	1	1	0	63	1 852	227	0	0	0	1	0	0
36	1 534	103	0	0	0	0	0	0	64	1 852	232	0	0	0	0	0	1
37	1 430	103	1	1	0	0	0	0	65	1 995	235	0	0	0	0	0	1
38	1 439	111	1	1	0	1	0	0	66	2 616	245	1	1	3	1	1	0
39	1 946	114	1	1	3	1	1	0	67	2 324	253	1	1	0	1	0	0
40	2 216	114	1	1	4	1	1	0	68	1 852	257	0	1	0	0	0	1
41	1 834	114	1	1	4	1	1	1	69	2 054	260	0	0	0	0	0	0
42	1 416	117	0	0	0	0	0	1	70	2 617	284	1	1	3	1	1	0
43	2 052	139	1	1	0	1	0	0	71	1 948	287	1	1	0	0	0	0
44	2 087	140	0	0	2	1	1	1	72	1 720	290	0	1	0	0	0	1
45	2 264	154	0	0	2	1	1	1	73	2 604	308	1	1	2	1	1	0
46	2 201	158	1	1	4	0	1	1	74	1 852	309	1	1	0	1	0	1
47	2 992	159	1	1	5	1	1	1	75	1 942	319	0	0	0	1	0	0
48	1 695	162	0	1	0	0	0	0	76	2 027	325	1	1	0	0	0	0
49	1 792	167	1	1	0	1	0	0	77	1 942	326	1	1	0	1	0	0
50	1 690	173	0	0	0	0	0	1	78	1 720	329	1	1	0	1	0	0
51	1 827	174	0	0	0	0	0	1	79	2 048	337	0	0	0	0	0	0
52	2 604	175	1	1	2	1	1	0	80	2 334	346	1	1	2	1	1	1
53	1 720	199	0	1	0	0	0	0	81	1 720	355	0	0	0	0	0	1
54	1 720	209	0	0	0	0	0	0	82	1 942	357	1	1	0	0	0	0
55	2 159	209	0	1	4	1	0	0	83	2 117	380	1	1	0	0	0	1
56	1 852	210	0	1	0	0	0	0	84	2 742	387	1	1	2	1	1	1
57	2 104	213	1	1	0	1	0	0	85	2 740	403	1	1	2	1	1	1
58	1 852	220	0	0	0	0	0	1	86	1 942	406	1	1	0	1	0	0
59	1 852	222	0	0	0	0	0	0	87	2 266	437	0	1	0	0	0	0
60	2 210	222	1	1	0	0	0	0	88	2 436	453	0	1	0	0	0	0
61	2 266	223	0	1	0	0	0	0	89	2 067	458	0	1	0	0	0	0
62	2 027	223	1	1	0	0	0	0	90	2 000	464	1	1	2	1	1	0

4. 在 10.3 节酶促反应中, 如果用指数增长模型 $y = \beta_1 (1 - e^{-\beta_2 x})$ 代替 Michaelis-Menten 模型对经过嘌呤霉素处理的实验数据作非线性回归分析, 其结果将如何. 更进一步, 若选用模型 $y = \beta_1 (e^{-\beta_3 x} - e^{-\beta_2 x})$ 来拟合相同的数据, 其结果是否比指数增长模型有所改进. 试作出模型的残差图进行比较.

5. Logistic 增长曲线模型和 Gompertz 增长曲线模型是计量经济学等学科中的两个常用模型, 可以用来拟合销售量的增长趋势.

记 Logistic 增长曲线模型为 $y_t = \frac{L}{1 + ae^{-kt}}$, 记 Gompertz 增长曲线模型为 $y_t = Le^{-be^{-kt}}$, 这两个模型中 L 的经济学意义都是销售量的上限. 下表中给出的是某地区高压锅的销售量(单位: 万台), 为给出此两模型的拟合结果, 请考虑如下问题:

(1) Logistic 增长曲线模型是一个可线性化模型吗. 如果给定 $L = 3\,000$, 是否是一个可线性化模型, 如果是, 试用线性化模型给出参数 a 和 k 的估计值.

(2) 利用(1)所得到的 a 和 k 的估计值和 $L = 3\,000$ 作为 Logistic 模型的拟合初值, 对 Logistic 模型做非线性回归.

(3) 取初值 $L^{(0)} = 3\,000$, $b^{(0)} = 30$, $k^{(0)} = 0.4$, 拟合 Gompertz 模型. 并与 Logistic 模型的结果进行比较.

年份	t	y	年份	t	y
1981	0	43.65	1988	7	1 238.75
1982	1	109.86	1989	8	1 560.00
1983	2	187.21	1990	9	1 824.29
1984	3	312.67	1991	10	2 199.00
1985	4	496.58	1992	11	2 438.89
1986	5	707.65	1993	12	2 737.71
1987	6	960.25			

6. 某公司想用全行业的销售额作为自变量来预测公司的销售额, 下表给出了 1977—1981 年公司销售额和行业销售额的分季度数据(单位: 百万元).

(1) 画出数据的散点图, 观察用线性回归模型拟合是否合适.

(2) 建立公司销售额对全行业销售额的回归模型, 并用 DW 检验诊断随机误差项的自相关性.

(3) 建立消除了随机误差项目相关性后的回归模型^[40].

年	季	t	公司销售 额 y	行业销售 额 x	年	季	t	公司销售 额 y	行业销售 额 x
1977	1	1	20.96	127.3	1979	3	11	24.54	148.3
	2	2	21.40	130.0		4	12	24.30	146.4
	3	3	21.96	132.7	1980	1	13	25.00	150.2
	4	4	21.52	129.4		2	14	25.64	153.1
1978	1	5	22.39	135.0		3	15	26.36	157.3
	2	6	22.76	137.1		4	16	26.98	160.7
	3	7	23.48	141.2	1981	1	17	27.52	164.2
	4	8	23.66	142.8		2	18	27.78	165.6
1979	1	9	24.10	145.5		3	19	28.24	168.7
	2	10	24.01	145.3		4	20	28.78	171.7

7. 下表给出了某工厂产品的生产批量与单位成本(元)的数据,从散点图可以明显地发现,生产批量在 500 以内时,单位成本对生产批量服从一种线性关系,生产批量超过 500 时服从另一种线性关系,此时单位成本明显下降.希望你构造一个合适的回归模型全面地描述生产批量与单位成本的关系.

生产批量	650	340	400	800	300	600	720	480	440	540	750
单位成本	2.48	4.45	4.52	1.38	4.65	2.96	2.18	4.04	4.20	3.10	1.50

第 10 章习题参考解答

1. 最终的回归方程为 $\hat{y} = -62.3489 + 0.8396x_1 + 5.6846x_2 + 0.0371x_1^2$, 且 $R^2 = 0.9996$, $F = 11070.2944$, $p = 0.0000$ (如模型中加入 x_2^2 , x_1x_2 项, 其回归系数置信区间均含零点). 表明只有经理们的年均收入及其二次项和风险偏好度本身对他们投保的人寿保险额有显著影响.

2. 记病人用药的剂量、性别、血压组别, 和服药后病痛明显减轻时间分别为 x_1, x_2, x_3, y , 建立的回归模型为

$$\hat{y} = 50.4557 - 7.2050x_1 + 5.6667x_2 + 35.4321x_3 + 0.4369x_1^2 - 8.3340x_1x_3,$$

且 $R^2 = 0.9205$, $F = 41.7416$, $p = 0.0000$.

用该模型可以对病痛明显减轻时间 y 进行预测, 如对男性、血压组别为 0.5 者, 根据用药剂量 x_1 g 预测 y 分钟 (四舍五入) 的一组结果如下:

x_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	53	44	36	28	22	16	11	7	4

3.

(1) 用 MATLAB 的统计工具箱中的 stepwise 命令作逐步回归, 为了数据处理上的方便, 令 $Y = \lg Z$, 得到如下回归模型:

$$\hat{Y} = 3.068360 + 0.0007259X_1 + 0.0446022X_4$$

且 $R^2 = 0.7874$, $F = 161.1$. 教师的薪金只与工作时间和学历的关系密切, 不存在性别和婚姻状况上的差异.

(2) 将它们的平方项或交互项加入到模型中, 用逐步回归可以得到更好的回归模型如 $\hat{Y} = 2.9975 + 0.00194X_1 - 0.00000289X_1^2 + 0.02227X_4 + 0.06079X_6 - 0.0224X_7$, 且 $R^2 = 0.9056$, $F = 161.2301$. 尽管 X_6 和 X_7 对于模型是“统计显著”的, 说明培训和从事教学工作对薪金有影响, 但是该两项对于 R^2 的贡献率很低, 可以将它们从模型中移出, 得到下面的模型:

$$\hat{Y} = 3.0016115 + 0.0018344X_1 - 0.000002641X_1^2 + 0.0390777X_4$$

此时的 $R^2 = 0.8917$, $F = 236.0527$. 虽然模型的 R^2 值稍比前面模型的小一点,

但其 F 值却有很大提高,而且自变量个数减少了 2 个.

4. 对指数增长模型 $y = \beta_1(1 - e^{-\beta_2 x})$, 参数的估计结果为

参 数	参数估计值	置 信 区 间
β_1	192.096 9	[173.879 35 210.314 5]
β_2	11.384 6	[7.756 6 15.012 5]

其剩余标准差 $s = 17.440 0$.

对模型 $y = \beta_1(e^{-\beta_3 t} - e^{-\beta_2 t})$, 参数的估计结果为

参 数	参数估计值	置 信 区 间
β_1	155.617 3	[129.866 2 181.368 3]
β_2	17.811 1	[10.071 5 25.550 6]
β_3	-0.267 0	[-0.471 6 -0.062 3]

其剩余标准差 $s = 14.214 0$, 拟合效果比指数增长模型更好一点.

5.

(1) Logistic 模型不是可线性化模型, 而给定 L 后是一个可线性化模型. 若 $L = 3\ 000$, 可由线性模型估计出 $a = 7.978\ 1, \hat{k} = 0.301\ 6$.

(2) 作非线性回归得 Logistic 模型 $\hat{y}_t = \frac{3\ 260.42}{1 + 30.535\ 0e^{-0.414\ 8t}}, R^2 = 0.998\ 3$.

(3) 作非线性回归得 Gompertz 模型 $\hat{y}_t = 4\ 810.076\ 0e^{-4.592\ 0e^{-0.174\ 7t}}, R^2 = 0.999\ 7$.

6. 未经处理的原始模型为 $\hat{y}_t = -1.454\ 75 + 0.176\ 28x_t; DW = 0.735 < d_L = 1.2$; 随机误差项有正自相关性. 通过作变换 $y_t^* = y_t - 0.631\ 166y_{t-1}; x_t^* = x_t - 0.631\ 166x_{t-1}$, 消除了随机误差项自相关性后的回归模型为 $\hat{y}_t = -0.393\ 96 + 0.631\ 166y_{t-1} + 0.173\ 76x_t - 0.109\ 67x_{t-1}$, 此时所对应的 $DW = 1.65 > d_U = 1.40$, 表明随机误差项已无自相关性.

7. 生产批量与单位成本分别记作 x 和 y , 为表示 x 在 500 以下和以上时, y 与 x 的不同关系, 引入一个虚拟变量 D , 令 $D = \begin{cases} 1, & x > 500 \\ 0, & x \leq 500 \end{cases}$, 建立线性回归模

型 $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 (x - 500)D + \varepsilon$, 得到的结果为

参 数	参数估计值	置 信 区 间
β_0	6.162 1	[5.036 8 7.287 4]
β_1	-0.004 7	[-0.007 4 -0.002 0]
β_2	-0.003 6	[-0.007 6 0.000 3]
$R^2 = 0.976\ 3 \quad F = 164.714\ 3 \quad p = 0$		

当生产批量小于 500 时, 每增加一个单位批量, 单位成本降低 0.004 7 元; 当生产批量超过 500 时, 每增加一个单位批量, 单位成本降低 $0.004\ 7 + 0.003\ 6 = 0.008\ 3$ 元.

从散点图看, 似乎也可以拟合 x 的二次回归模型 $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon$, 不妨一试.

第 11 章 习 题

1. 在 11.2 节中将钢琴销售的存贮策略修改为:当周末库存量为 0 或 1 时,订购,使下周初的库存达到 3 架;否则,不订购.建立马氏链模型,计算稳态下失去销售机会的概率,和每周的平均销售量.

2. 在 11.2 节中将钢琴销售的存贮策略修改为:当周末库存量为 0 时,订购量为本周销售量加 2 架;否则,不订购.建立马氏链模型,计算稳态下失去销售机会的概率,和每周的平均销售量.

3. 对于 11.3 节中的近亲繁殖模型,推导转移概率矩阵 $P((6) \text{式})$ 的第 4,5 行.

4. 在基因遗传过程中,考虑 3 种基因类型:优种 $D(dd)$,混种 $H(dr)$ 和劣种 $R(rr)$.对于任意的个体,每次用一混种与之交配,所得后代仍用混种交配,如此继续下去.构造马氏链模型,说明它是正则链,求稳态概率及由优种和混种出发的首次返回平均转移次数.如果改为每次用优种交配,再构造马氏链模型,说明它是吸收链,求由混种和劣种出发变为优种的平均转移次数.

5. 色盲具有遗传性,由两种基因 c 和 s 的遗传规律决定.男性只有一个基因 c 或 s ;女性有两个基因 cc, cs 或 ss .当某人具有基因 c 或 cc 时则呈色盲表征.基因遗传关系是:男孩等概率地继承母亲两个基因中的一个;女孩继承父亲的那个基因,并等概率地继承母亲的一个基因.由此可以看出,当母亲是色盲时男孩一定色盲,女孩却不一定.用马氏链模型研究非常极端的近亲结婚情况下的色盲遗传,即同一对父母的后代婚配.父母的基因组合共有 6 种类型,形成马氏链模型的 6 种状态,问哪些是吸收状态.若父亲非色盲而母亲为色盲,问平均经过多少代其后代就会变成全为色盲或全不为色盲的状态,变成这两种状态的概率各为多大?

6. 两种不同的外部表征是由两种不同基因决定的,这两种基因的遗传关系是相互独立的.例如猪的毛有颜色表征(黑和白)与质地表征(粗和光).对于每一种表征仍分为优种 $D(dd)$,混种 $H(dr)$ 和劣种 $R(rr)$ 3 种基因类型,两种表征的组合则有 9 种基因类型.在完全优势遗传中,优种和混种的猪毛颜色黑、质地粗,劣种则颜色白、质地光,这样共有 4 种外部表征组合,即黑粗、黑光、白粗、白光.假设群体的两种外部表征对应的基因中 d 和 r 的比例相同(即均为 $1/2$),在随机交配情况下构造马氏链模型.证明在稳定情况下上述 4 种外部表征组合的

比例为 9:3:3:1.

7. 设等级结构的转移矩阵 Q 仍由 11.4 节(16)式给出,理想的结构为 $a^* = (0.2, 0.3, 0.5)$,证明 $a^* \in B$ (稳定域),若初始结构为 $a(0) = (0.2, 0.8, 0)$,用 11.4 节介绍的问题 E_1, E_2, E_3 的解法求调入比例 r ,使 $a(1)$ 尽量接近 a^* .

8. 如果在等级结构模型中将距离函数的定义由 11.4 节(26)式改为 $D(a^{(1)}, a^{(2)}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i |a_i^{(1)} - a_i^{(2)}|$,试给出求解问题 E_1 的方法.

9. 一个服务网络由 k 个工作站 v_1, v_2, \dots, v_k 依次串接而成,当某种服务请求到达工作站 v_i 时, v_i 能够处理的概率为 p_i ,转往下一站 v_{i+1} 处理的概率为 q_i ($i=1, 2, \dots, k-1$, 设 $q_k=0$),拒绝处理的概率为 r_i ,满足 $p_i + q_i + r_i = 1$. 试构造马氏链模型,确定到达 v_i 的请求平均经过多少工作站才能获得接受处理或拒绝处理的结果,被接受和拒绝的概率各多大.

10. 用马氏链模型讨论空气污染问题. 有 k 个城市 v_1, v_2, \dots, v_k ,每一时刻 $t=0, 1, 2, \dots, v_i$ 的空气中污染物浓度为 $c_i(t)$,从 t 到 $t+1$, v_i 空气中污染物扩散到 v_j 去的比例是 p_{ij} ,有 $\sum_{j=1}^k p_{ij} \leq 1$ ($i=1, 2, \dots, k$),而扩散到 k 个城市之外的那部分污染物永远不再回来. 在每个时刻各城市的污染源都排出一定的污染物,记 v_i 排出的为 d_i . 按照环境管理条例要求,对充分大的 t 必须 $c_i(t) \leq c_i^*$. 试建立马氏链模型,在已知 p_{ij} 和 c_i^* 的条件下确定 d_i 的限制范围,满足管理条例的

要求. 设 $k=3$, p_{ij} 由矩阵 $Q = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ 给出, $c_i^* = 25$ ($i=1, 2, 3$),求 d_i 的范围^[43].

第 11 章习题参考解答

1. 仍以第 n 周初的库存量为状态 S_n , $S_n = 2, 3$. 需求概率不变. 容易算出状态转移概率矩阵为 $P = \begin{bmatrix} 0.368 & 0.632 \\ 0.368 & 0.632 \end{bmatrix}$. 稳态概率分布为 $w = (0.368, 0.632)$. 稳态下失去销售机会的概率 $p = 0.041$, 每周的平均销售量 $R = 0.947$.

2. 需求概率不变, 算出 $P(D_n = 0) = P(D_n = 1) = 0.368$, $P(D_n = 2) = 0.184$, $P(D_n = 3) = 0.061$, $P(D_n = 4) = 0.015$, $P(D_n = 5) = 0.003$, $P(D_n = 6) = 0.001$, $P(D_n > 6) = 0$ (在小数点后取 3 位意义下). 仍以第 n 周初的库存量为状态 S_n , $S_n = 1, 2, 3, \dots, 8$. 可以算出状态转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.368 & 0 & 0.632 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.368 & 0.368 & 0 & 0.264 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.184 & 0.368 & 0.368 & 0 & 0.080 & 0 & 0 & 0 \\ 0.061 & 0.184 & 0.368 & 0.368 & 0 & 0.019 & 0 & 0 \\ 0.015 & 0.061 & 0.184 & 0.368 & 0.368 & 0 & 0.004 & 0 \\ 0.003 & 0.015 & 0.061 & 0.184 & 0.368 & 0.368 & 0 & 0.001 \\ 0.001 & 0.003 & 0.015 & 0.061 & 0.184 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0.003 & 0.015 & 0.061 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix}.$$

稳态概率分布为 $w = (0.2497, 0.2375, 0.3369, 0.1266, 0.0450, 0.0040, 0.0003, 0)$. 稳态下失去销售机会的概率 $p = 0.0919$.

3. 根据 11.3 节表 4 计算, 对于状态 $i = 1(DD), 2(RR), 3(DH), 4(DR), 5(HH), 6(HR)$, $p_{45} = 1$, $p_{4j} = 0 (j \neq 5)$ 是显然的. $p_{51} = P(\text{后代配对为 } DD | \text{父母配对为 } HH) = 1/4 \times 1/4 = 1/16$, $p_{53} = P(\text{后代雄性为 } D, \text{雌性为 } H | \text{父母配对为 } HH) + P(\text{后代雄性为 } H, \text{雌性为 } D | \text{父母配对为 } HH) = 1/4 \times 1/2 + 1/2 \times 1/4 = 1/4$, $p_{54} = 1/4 \times 1/4 + 1/4 \times 1/4 = 1/8$. 其余类推.

4. 状态定义为 $i = 1(D), 2(H), 3(R)$, 用混种交配时, 转移概率矩阵为 $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, 由 $P^2 > 0$ 知, 马氏链是正则链, 稳定状态向量为 $w = (1/4, 1/2, 1/4)$. 由优种 (D) 和混种 (R) 出发的首次平均转移次数分别为 4 和 2.

用优种交配时,转移概率矩阵为 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $i = 1(D)$ 是吸

收状态, $p_{21} > 0$, 马氏链是吸收链.

由 $M = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $y = Me = (2, 3)^T$. 知由 $i = 2(H)$, $i = 3(R)$ 出发, 变为 $i = 1(D)$ 的平均转移次数分别为 2 和 3.

5. 六种状态 (c, cc) , (s, ss) , (c, cs) , (c, ss) , (s, cc) , (s, cs) , 记作 $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. 状态转移阵 P 及 $M = (I - Q)^{-1}$, $y = Me$, $F = MR$ 为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix},$$

$$M = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 8 \\ 8 & 1 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix},$$

可知, $i = 1(c, cc)$, $2(s, ss)$ 是吸收态. 由 $i = 5(s, cc)$ 平均经过 6 代变为 (c, cc) 的概率为 $2/3$, 变为 (s, ss) 的概率为 $1/3$.

6. 定义 $i = 1(DD)$, $2(DH)$, $3(DR)$, $4(HD)$, $5(HH)$, $6(HR)$, $7(RD)$, $8(RH)$, $9(RR)$. 其中第 1 字母表示颜色基因类型, 第 2 字母表示质地基因类型. 在这两种基因类型中 d 与 r 的比例均为 $1/2$, 且随机交配方式下, 转移概率矩阵为

$$p = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/8 & 1/8 & 0 \\ 1/16 & 1/8 & 1/16 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/8 & 1/16 \\ 0 & 1/8 & 1/8 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

DD DH DR HD HH HR RD RH RR

与 11.3 节(1)式转移阵(其中 $p = q = 1/2$) $P' = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} D \\ R \\ H \end{matrix}$

比较,不妨用分块矩阵将 P 表示为 $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$, P' 表示为 $P' = (a'_{ij})$.

则可以看出 $P_{ij} = a'_{ij} P'(i, j = 1, 2, 3)$. 从本题与 P' 的意义不难解释上面的结果.

注意到,对于 P' 的马氏链,稳定分布是 $w' = (1/4, 1/2, 1/4)$, 它对应于 H 的行向量. 可以验证,对于本题,稳定分布是对应于 HH 的行向量,即 $w = (1/16, 1/8, 1/16, 1/8, 1/4, 1/8, 1/16, 1/8, 1/16)$. 4 种外部表征组合:黑粗包含状态 1(DD), 2(DH), 4(HD), 5(HH), 黑光包含 3(DR), 6(HR), 白粗包含 7(RD), 8(RH), 白光为 9(RR). 将 w 中对应这 4 个组合的概率相加,即得其比例为 9:3:3:1.

7. 由 11.4 节(17)式可立即验证 $a^* \in B$. 在所给数据下,可以算出 $y_1 = 1$, $y_2 = -2.6$, $y_3 = 2.6$, 故令 $r_2^* = 0$, 再由 $r_1 = y_1 - \alpha$, $r_3 = y_3 - \alpha$, 确定 $\alpha = 1.3$. 因 $y_1 - 1.3 \leq 0$, 故令 $r_1^* = 0$, 由 $r_3 = y_3 - \alpha$ 重新确定 $\alpha = 1.6$, 故 $r_3^* = 1$. 即调入比例 $r^* = (0, 0, 1)$, 可使 $a(1)$ 尽量接近 a^* , 不难算出 $a(1) = (0.1, 0.56, 0.34)$.

8. 对于问题 E_1 , 在与(29)式一样的记号下,问题 E_2 为

$$\text{Min} \sum_{i=1}^k \lambda_i |y_i - r_i|, r_i \geq 0, \sum_{i=1}^k r_i = 1$$

与 11.3 节解 E_2 的方法相似,得 y_i 分为 $y_i \geq 0$ 和 $y_i < 0$, 有

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i |y_i - r_i| = \sum_j \lambda_j (y_j - r_j) + \sum_l \lambda_l (|y_l| + r_l),$$

令 $r_l = r_l^* = 0$, r_j 由问题 E_3

$$\text{Min} \sum_j \lambda_j y_j - \sum_j \lambda_j r_j, 0 \leq r_j \leq y_j, \sum_j r_j = 1$$

确定. 为解 E_3 , 将 λ_j 由大到小排列, 不妨设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, 令 $r_1 = r_1^* = \text{Min}(y_1, 1)$, 若 $r_1^* = 1$ 则停止; 若 $r_1^* < 1$, 则令 $r_2 = r_2^* = \text{Min}(y_2, 1 - r_1^*)$; 若 $r_1 + r_2 = 1$, 则停止, 否则继续进行下去.

特别, 若 $\lambda_j = 1 (\forall j)$, $\sum_j r_j = 1$ 为常数, 则 r_j 可在满足条件 $0 \leq r_j \leq y_j$, $\sum_j r_j = 1$ 下任取.

* 9. 服务请求到达工作站 v_i 记作状态 $i, i = 1, 2, \dots, k$. 增加状态 $i = 0$ 表示请求被拒绝; $i = 00$ 表示请求被接受. 于是转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & 0 & & \\ p_1 & r_1 & 0 & q_1 & & \\ p_2 & r_2 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ p_{k-1} & r_{k-1} & 0 & & q_{k-1} & \\ p_k & r_k & & & 0 & \end{bmatrix} \begin{matrix} (00) \\ (0) \\ (1) \\ (2) \\ \vdots \\ (k-1) \\ (k) \end{matrix}$$

(00) (0) (1) (2) ... (k)

可以算出 $M = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_1 q_2 & \cdots & q_1 q_2 & \cdots & q_{k-1} \\ & 1 & q_2 & \cdots & q_2 q_3 & \cdots & q_{k-1} \\ & & \ddots & & & \vdots & \\ & 0 & & \ddots & & & 1 \end{bmatrix}$,

到达 v_i 的请求获得接受或拒绝时,平均经过的工作站数由 $y = Me$ 算出为 $1 + q_i + q_i q_{i+1} + \cdots + q_i \cdots q_{k-1}$. 由 $F = MR$ 可得,被接受的和被拒绝的概率分别为 $p_i + q_i p_{i+1} + \cdots + q_i \cdots q_{k-1} p_k$ 和 $r_i + q_i r_{i+1} + \cdots + q_i \cdots q_{k-1} r_k$.

* 10. 建模完全类似于 11.5 节资金流通,其中(2)式为 $c(t) = c(0)Q^t + d \sum_{s=0}^{t-1} Q^s$. $c(t) = (c_1(t), \cdots, c_k(t))$ 为污染物浓度. $Q = (p_{ij})$ 为扩散比例. $d = (d_1, \cdots, d_k)$ 为排放浓度. 由(4)式,在 t 充分大时,要求 $c(\infty) = d(I - Q)^{-1} \leq c^*$, $c^* = (c_1^*, \cdots, c_k^*)$. d 的限制范围由此式确定. 对于所给的 Q 和 c^* ,上式为

$$\begin{cases} 3d_1 + 3d_2 + 3d_3 \leq 25 \\ 3d_1 + 6d_2 + 6d_3 \leq 25 \\ 3d_1 + 4.5d_2 + 6d_3 \leq 25 \end{cases}$$

≤ 25 即可.

第 12 章 习 题

1. 在 12.2 节生产计划制订模型中, 当 $Q < \frac{k_2 T^2}{4k_1}$ 时求最优解. 图 5 中 t_1 的确定可视为曲线 S_3 始端在直线 $x=0$ 上变动的泛函极值问题.

2. 经研究发现在短跑比赛中, 运动员由于生理条件的限制在达到一定的高速度后不可能持续发挥自己的最大冲力. 假设运动员克服生理限制后能发挥的冲力 $f(t)$ 满足 $\dot{f}(t)/f(t) = -\frac{1}{k}$, k 是冲力限制系数, $f(0) = F$ 为最大冲力.

将上述关系代入 12.5 节赛跑模型的(2)式, 求出短跑比赛时速度 $u(t)$ 和距离 $s(t)$ 的表达式, 及达到最高速度的时间, 作出 $v(t)$ 的示意图.

某届奥运会男子百米决赛前 6 名在比赛中到达距离 s 处所用的时间 t 和当时的速度 v 如下表所示(平均值):

$s(\text{m})$	0	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
$t(\text{s})$	0	0.955	2.435	3.435	4.355	5.230	6.085	6.945	7.815	8.690	9.575
$v(\text{m/s})$	0	5.24	9.54	10.52	11.19	11.62	11.76	11.49	11.47	11.36	11.22

试从这组数据估计出参数 τ, k, F . 算出 $v(t)$ 的理论值与实际数据比较. 你对这个模型有什么解释和评价^[59].

3. 用 12.6 节的动态规划方法建立如下的设备更新模型:

(1) 一台设备(如卡车、机床等)每年初要作出“继续使用”还是“更新”的决定. 假定随着设备使用年龄的增长, 设备一年创造的收入、维修费用及更新的净费用均已知道, 制订一个有限年度的设备更新计划, 使总的净利润最大.

(2) 在(1)的基础上增加一个可以采取的决策——修复, 即一次全面整修, 能使旧设备的收入增加、维修费降低, 修复费用又低于更新费用. 同时, 设备一年创造的收入、维修费用及更新的净费用, 除与设备使用年龄有关外, 还与修复的时间有关. 重新建立设备更新模型, 使总的净利润最大.

* 4. 用 12.6 节的动态规划方法解决如下的系统可靠性问题: 系统由若干部件串接而成, 只要一个部件出现故障, 系统就不能正常工作. 为提高系统可靠性每个部件都装有备件, 一旦原部件出现故障, 备件就自动进入系统. 显然, 备件越

多系统可靠性越大,但费用也越高.问题是在一定的总费用下,如何配置各部件的备件使系统的可靠性最大.

(1) 由 n 个部件串接的系统,当部件 k 配置 j 个备件时,该部件正常工作的概率及费用均已知,在总费用不超过给定值的条件下,建立使系统的可靠性最大的模型.

(2) 设 $n=3$ 且每个部件至多配置 3 个备件,部件 k 配置 j 个备件时正常工作的概率 p_{kj} 及费用 c_{kj} 如下:

p_{kj}		备件数量 j			c_{kj}		备件数量 j		
		1	2	3			1	2	3
部件号 k	1	0.5	0.7	0.9	部件号 k	1	2	4	5
	2	0.7	0.8	0.9		2	3	5	6
	3	0.6	0.8	0.9		3	1	2	3

总费用不超过 10,如何配置各部件的备件数使系统的可靠性最大.

* 5. 一家集生产、销售于一体的公司,希望生产率和贮存量都尽量稳定在预先设定的水平上,如果销售量可以预测,公司需要制订一个根据贮存量控制生产率的策略.

(1) 以在一定时间 T 内生产率和贮存量与设定值误差的(加权)平方和最小为目标,给出泛函极值问题.

(2) 设销售量为常数,求出最优解,并在 T 很大的情况下给出生产率和贮存量之间的关系.

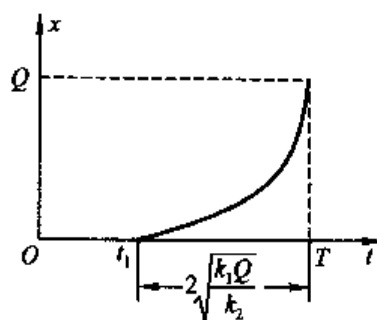
第 12 章习题参考解答

1. 当 $Q < \frac{k_2 T^2}{4k_1}$, 即 $T > \sqrt{\frac{k_1 Q}{k_2}}$ 时, 原边界条件 $x(0) = 0$ 应改成 $x(t_1) = 0$.

横截条件为 $(F - \dot{x}F_x)|_{t_1} = 0$, 由此可得 $\dot{x}(t_1) = 0$.

求解
$$\begin{cases} k_2 - 2k_1 \ddot{x} = 0 \\ \dot{x}(t_1) = 0, x(T) = Q, x(t_1) = 0 \end{cases}$$

得 $x(t) = \frac{k_2}{4k_1}(t - t_1)^2$, $t_1 = T - 2\sqrt{\frac{k_1 Q}{k_2}}$, 如图示.



2. 由 $\frac{\dot{f}}{f} = -\frac{1}{k} (k > 0)$ 和 $f(0) = F$, 得 $f(t) =$

$F e^{-t/k}$. 代入 12.5 节(2)式, 有

$$\begin{cases} \dot{v} + \frac{v}{\tau} = F e^{-t/k} \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq T, T \text{ 是赛程所需时间})$$

解得

$$v(t) = \frac{\tau k F}{k - \tau} (e^{-t/k} - e^{-t/\tau}) \quad (k > \tau) \quad (1)$$

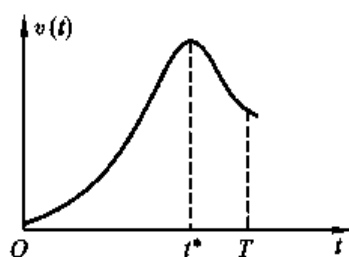
$$s(t) = \frac{\tau k F}{k - \tau} (-\tau + k - k e^{-t/k} + \tau e^{-t/\tau}) \quad (2)$$

$$t^* = \frac{\tau k}{k - \tau} \ln \frac{k}{\tau} \quad (3)$$

t^* 是 $v(t)$ 达到最大的时间. (3) 式代入 (1), (2) 可得 $v^* = v(t^*)$, $s^* = s(t^*)$. 又由所给数据, 得 $t^* = 6.085\text{s}$, $v^* = 11.76\text{m/s}$, $s^* = 55\text{m}$. 代入 (1) ~ (3) 式计算出 $\tau = 1.845\text{s}$, $k = 43.4\text{s}$, $F = 7.32\text{m/s}^2$. 将这些数据代入 (1) 得

$$v(t) = 14.1(e^{-t/43.4} - e^{-t/1.845}) \quad (4)$$

用 (4) 式计算 $v(t)$ (理论值) 与实际值比较如下:



$v(t)$ (实际值)	0	5.24	9.54	10.52	11.19	11.62	11.76	11.49	11.47	11.36	11.22
$v(t)$ (理论值)	0	5.29	9.56	10.84	11.43	11.63	11.76	11.69	11.56	11.41	11.23

与 12.5 节给出的模型不同,由于冲力是递减的,所以即便是短跑,速度也在达到最大值 v^* 后,有一个减少的阶段 $[t^*, \tau]$,这与本题所给数据是吻合的.

3.

(1) 当设备使用年龄为 t 时,记设备一年创造的收入为 $r(t)$,维修费用为 $d(t)$,更新的净费用为 $q(t)$,不妨设计划开始年(记 $k=1$)设备的使用年龄为 s ,制订 n 年的计划.

定义状态 x_k 为设备在第 k 年的使用年龄 t ,决策 $u_k = R$ 表示第 k 年更新设备, $u_k = K$ 表示第 k 年继续使用,则状态转移为

$$x_{k+1} = \begin{cases} 1, & u_k = R \\ t+1, & u_k = K \end{cases}$$

一年的净利润为

$$v_k(t, u_k) = \begin{cases} r(0) - d(0) - q(t), & u_k = R \\ r(t) - d(t), & u_k = K \end{cases}$$

记第 k 年年龄为 t 的设备到 n 年底获得的最大净利润为 $f_k(t)$,则有以下递推公式:

$$f_k(t) = \text{Max} \begin{cases} r(0) - d(0) - q(t) + f_{k+1}(1), & u_k = R \\ r(t) - d(t) + f_{k+1}(t+1), & u_k = K \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq s+n, k = n, n-1, \dots, 2, 1$$

终端条件为 $f_{n+1}(t) = b(t)$, $b(t)$ 是年龄为 t 的设备的回收价值.按递推公式算至 $f_1(s)$ 即为总的最大净利润,并可得到最优策略.

(2) 增加决策——修复(记作 $u_k = W$)以后,记使用年龄为 t 并在 s 岁时(最后一次)修复的设备一年创造的收入为 $r(t, s)$,维修费用为 $d(t, s)$,更新的净费用为 $q(t, s)$,年龄为 t 的设备修复费用为 $h(t)$,不妨设 $k=1$ 时是一台新设备.

状态 x_k 应定义为二维变量 (t, s) ,记第 k 年年龄为 t 并在 s 岁修复的设备到 n 年底获得的最大净利润为 $f_k(t, s)$,则有以下递推公式:

$$f_k(t, s) = \text{Max} \begin{cases} r(0, 0) - d(0, 0) - q(t, s) + f_{k+1}(1, 0), & u_k = R \\ r(t, s) - d(t, s) + f_{k+1}(t+1, s), & u_k = K \\ r(t, t) - d(t, t) - h(t) + f_{k+1}(t+1, t), & u_k = W \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq n, s \leq t, k = n, n-1, \dots, 2, 1$$

终端条件为 $f_{n+1}(t, s) = b(t, s)$, $b(t, s)$ 是年龄为 t 并在 s 岁修复的设备的回收价值. 按递推公式算至 $f_1(0, 0)$ 即为总的最大净利润, 并可得到最优策略.

4.

(1) 这个配置问题本可以建立一个静态规划模型. 记部件 k ($k = 1, 2, \dots, n$) 配置 j 个备件 ($j = 1, 2, \dots, m$, 为简单起见, 设 m 与 k 无关) 时正常工作的概率为 p_{kj} , 费用为 c_{kj} . 记总费用的限制值为 c . 当部件 k 配置 j 个备件时令 $x_{kj} = 1$, 否则 $x_{kj} = 0$. 因为 n 个部件串接的系统正常工作的概率等于每个部件正常工作的概率之积, 所以

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \prod_{k=1}^n \sum_{j=1}^m x_{kj} p_{kj} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m x_{kj} c_{kj} \leq c \\ & \sum_{j=1}^m x_{kj} = 1, x_{kj} \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

这是非线性整数规划模型, 当 n, m 较大时难以求解. 下面建立动态规划模型.

按照对 n 个部件配置备件的次序划分阶段 $k = 1, 2, \dots, n$, 部件 k 配置备件的数量 j ($j = 1, 2, \dots, m$) 为决策 u_k , 根据费用的限制, 为部件 k 配置备件时所容许的费用为状态 x_k , 于是状态转移方程为 $x_{k+1} = x_k - c_{ku_k}$. 定义 $f_k(x_k)$ 为状态 x_k 下部件 k 到 n 组成的子系统的最大正常工作概率, 则有以下递推公式:

$$f_k(x_k) = \text{Max} [p_{kn_k} f_{k+1}(x_{k+1})], \quad u_k = 1, 2, \dots, m, \quad k = n, \dots, 2, 1$$

终端条件为 $f_{n+1}(x_{n+1}) = 1$.

(2) 按照(1)的模型计算得最优解为, 部件 1, 2, 3 分别配置 3, 1, 2 个备件, 系统正常工作概率为 0.504.

5.

(1) 记时刻 t 的贮存量 $x(t)$, 单位时间产量 (即生产率) 和销量分别为 $u(t)$ 和 $v(t)$, 则

$$\dot{x}(t) = u(t) - v(t) \quad (1)$$

设预先给定的生产率和贮存量分别为 u_0 和 x_0 , 则在时间 T 内 $u(t)$ 和 $x(t)$ 与 u_0 和 x_0 误差的 (加权 α) 平方和最小的泛函极值为

$$J(u(t)) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} (u(t) - u_0)^2 + \frac{\alpha^2}{2} (x(t) - x_0)^2 \right] dt \quad (2)$$

若设 $t = 0$ 和 $T = 0$ 时贮存量为 0, 则

$$x(0) = x(T) = 0 \quad (3)$$

将(1)代入(2)得

$$J(u(t)) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}(\dot{x}(t) + v(t) - u_0)^2 + \frac{\alpha}{2}(x(t) - x_0)^2 \right] dt \quad (4)$$

(3), (4) 构成一个固定端点的泛函极值问题.

(2) 当销量 $v(t) = v_0$ (常数) 时, (4) 式的欧拉方程为

$$\dot{x} - \alpha^2(x - x_0) = 0 \quad (5)$$

(5) 在条件(3)下的解为

$$x(t) = x_0 - x_0 \frac{(1 - e^{-\alpha^2 T})e^{\alpha^2 t} + (e^{\alpha^2 T} - 1)e^{-\alpha^2 t}}{e^{\alpha^2 T} - e^{-\alpha^2 T}} \quad (6)$$

代入(1)式得

$$u(t) = v_0 - \alpha x_0 \frac{(1 - e^{-\alpha^2 T})e^{\alpha^2 t} - (e^{\alpha^2 T} - 1)e^{-\alpha^2 t}}{e^{\alpha^2 T} - e^{-\alpha^2 T}} \quad (7)$$

由(6), (7)可得

$$u(t) = v_0 + \alpha(x_0 - x(t)) - \frac{2\alpha x_0(1 - e^{-\alpha^2 T})e^{\alpha^2 t}}{e^{\alpha^2 T} - e^{-\alpha^2 T}} \quad (8)$$

在 T 很大的情况下(8)式最后一项可忽略, 于是

$$u = v_0 + \alpha(x_0 - x) \quad (9)$$

即生产率 u 可以由贮存量 x 直接确定.

第 13 章 习 题

1. 在 13.1 节废水处理模型中,
 - (1) 分析单池模型(1),(2) 平衡点的稳定性.
 - (2) 求双池模型方程(8),(9)(即池 II)的平衡点并讨论其稳定性.
2. 在 13.2 节的连续交通流模型中,考察在 $[t, t + \Delta t]$ 内公路段 $[x, x + \Delta x]$ 的流量 $q(x, t)$ 和密度 $\rho(x, t)$ 的变化,直接导出交通流方程(5).
3. 在 13.2 节红绿灯模型中,讨论初始密度是拥挤流即 $\rho_0 > \rho^*$ 时密度函数 $\rho(x, t)$ 的变化(类似于图 10 对于稀疏流 $\rho_0 < \rho^*$ 的分析,画出分阶段的 $\rho(x, t)$ 示意图,求出“追上车队”和“堵塞消失”的时刻,分析间断点的变化规律等).
4. 证明红绿灯模型中左右间断线 $x_d(t)$ 和 $x_r(t)$ 当 t 足够大后以相同速度向前移动.
5. 讨论绿灯模型. 设初始密度 $t=0$ 为 $\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_m, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$
 - (1) 画出 $t > 0$ 时 $\rho(x, t)$ 的示意图.
 - (2) 证明 $t=0$ 时位于 $x = -d (d > 0)$ 处的车辆通过 $x=0$ 的时刻为 $t = 4d/u_m$.
 - (3) 证明 $[0, T]$ 内通过 $x=0$ 的车辆数为 $\rho_m u_m T/4$.
6. 在 13.3 节嵌入式模型中证明,当 $\lambda > 2$ 时方程(18)有 3 个根,即 z_1^* , 1 和 z_2^* .
7. 在 13.4 节中验证价格指数 I_2 ((4)式)满足公理 7 以外的其余公理;而且当条件(16)式成立时它也满足公理 7.
8. 验证价格指数 I_8 (13.4 节(10)式)满足公理 1~5,但不满足公理 6~8.
9. 给出价格指数 I_1 (13.4 节(3)式)满足公理 7 的条件,并解释该条件的实际含义.
10. 证明:若价格指数 I 满足公理 1~3,则满足公理 4.
11. 证明:若价格指数 I 满足公理 2, 3, 7, 则满足公理 5.
12. 在定义价格指数时如何构造权重 q 和 q^0 是关键之一,你认为应该如何确定权重. 当然,你也可以定义不同于 $I_1 \sim I_8$ 的价格指数,并说明其含义和性质.

第 13 章习题参考解答

1. 按照 6.7 节介绍的方法分析,

(1) 对于模型(1),(2)平衡点 (c, b) (见(3)式)

平衡点	p	q	稳定条件
$P_1\left(\frac{Vd+Q}{Vr_2}, \frac{Q(c_0-c)}{Vr_1c}\right)$	$\frac{Qr_2c_0}{Vd+Q}$	$\frac{Qr_2}{V}\left(c_0 - \frac{Vd+Q}{Vr_2}\right)$	$c = \frac{Vd+Q}{Vr_2} < c_0$
$P_2(c_0, 0)$	$2\frac{Q}{V} + d - r_2c_0$	$-\frac{Qr_2}{V}\left(c_0 - \frac{Vd+Q}{Vr_2}\right)$	$c < c_0$ 时不稳定

(2) 对于模型(8),(9)的平衡点 (c_2, b_2) (见(14),(12)式)

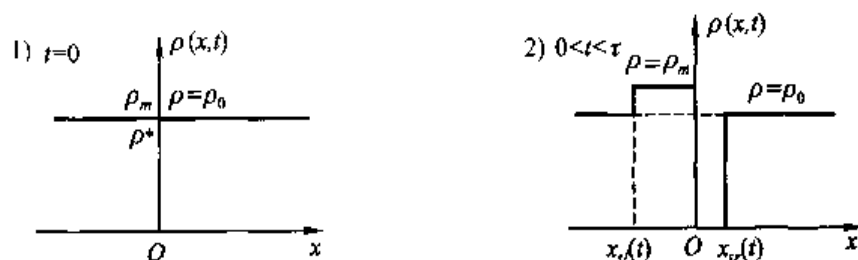
平衡点	p	q	稳定条件
(c_2, b_2)	$\frac{c_1\left(d+2\frac{Q}{V_2}\right) - c_2(r_2c_1+r_1b_1)}{c_2}$	$\frac{Q}{V_2c_2}\left[2c_1\left(d+\frac{Q}{r_2}\right) - c_2\left(r_2c_1 + r_1b_1 + d + \frac{Q}{r_2}\right)\right]$	稳定

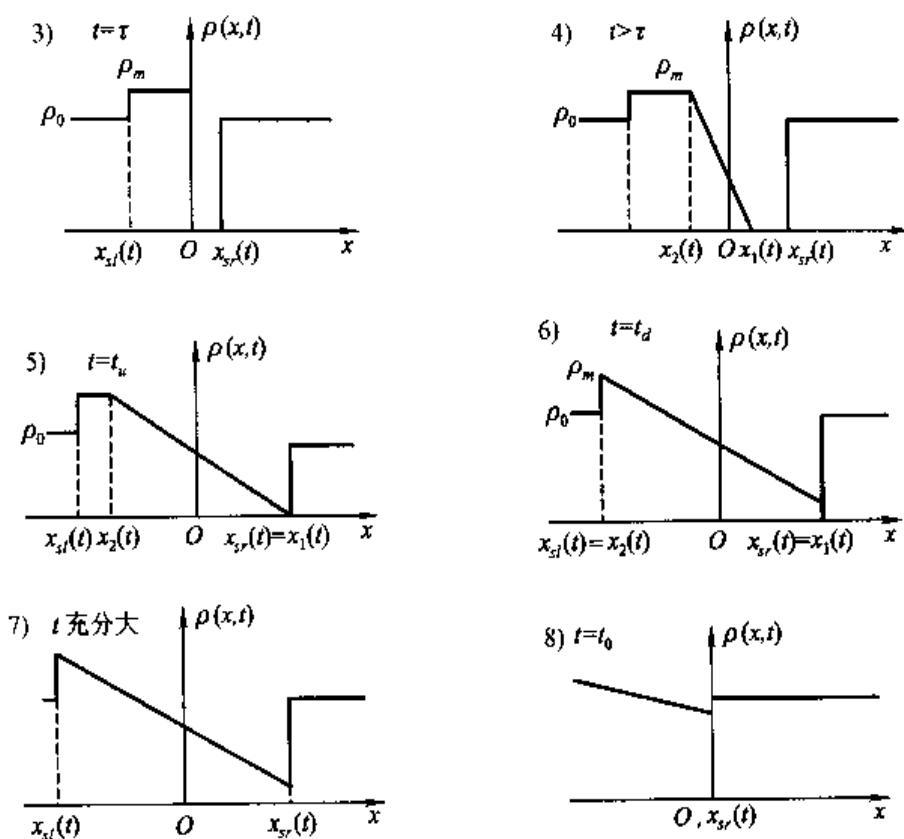
经过代数验算,可证 $c_1 > c_2, p, q > 0$.

2. $[t, t + \Delta t]$ 内 $[x, x + \Delta x]$ 路段上的车辆平衡方程为

$[q(x, t) - q(x + \Delta x, t)]\Delta t = \rho(x, t)\Delta x$, 可得 $\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

3. 对于 $\rho_0 > \rho^* = \rho_m/2$ 的情形, $\rho(x, t)$ 的变化如图





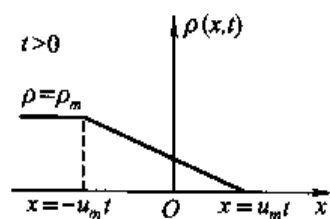
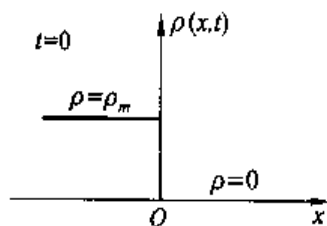
左右间断线 $x_{sl}(t)$, $x_{sr}(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, “追上车队”时刻 t_u , “堵塞消失”时刻 t_d 的表达式均与 13.2 节相同, 不同的是 $t_u < t_d$; t 充分大, $t_v(t)$ 由向前变为向后, 当 $t \geq t^*$, $x=0$ 处交通恢复.

4. 对于右间断线 $x_{sr}(t)$, $\rho^+ = \rho_0$, $\rho^- = \frac{\rho_m}{2} \left[1 - \frac{x_{sr}}{u_m(t-\tau)} \right]$, 由 13.2 节(2), (12)可得 $\frac{dx_{sr}}{dt} = \frac{x_{sl}}{2(t-\tau)} + \frac{u_m}{2} \left(1 - \frac{2\rho_0}{\rho_m} \right)$ (与(21)式相同). 定解条件为 $x_{sr}(t_n) = u_m(t_n - \tau)$, $t_n = \frac{\rho_m}{\rho_0} \tau$. 解为 $x_{sr}(t) = u_m \left(1 - \frac{2\rho_0}{\rho_m} \right) (t - \tau) + \beta_r (t - \tau)^{1/2}$, 其中 $\beta_r = \frac{2u_m\rho_0}{\rho_m} \left(\frac{(\rho_m - \rho_0)\tau}{\rho_0} \right)^{1/2} > 0$, 于是当 t 足够大时, $\frac{dx_{sr}}{dt} \approx u_m \left(1 - \frac{2\rho_0}{\rho_m} \right)$, 与(25)式表示的 $\frac{dx_{sr}}{dt}$ 相同.

5. 由 $q(\rho) = u_m \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right)$, 得 $u = u_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right)$ 和 $\frac{dq}{d\rho} = u_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m} \right)$.

(1) $\rho(x, t)$ 由 $t=0$ 到 $t>0$ 的示意图如下, 最前面的车以 $\frac{dx}{dt} = \frac{dq}{d\rho} \Big|_{\rho=0} = u_m$ 速度前进, 故 $x = u_m t$. 尚未启动的第一辆车位置以 $\frac{dx}{dt} = \frac{dq}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_m} = -u_m$ 速

度“后退”,故 $x = -u_m t$.



(2) $t=0$ 位于 $x = -d$ 的车辆将在 $t = \frac{d}{u_m}$ 开始前进,速度为 $\frac{dx}{dt} = u = u_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$,其中 ρ 满足 $x = u_m \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right)t$. 可得 $\frac{dx}{dt} = \frac{u_m}{2} + \frac{x}{2t}$,在条件 $x \Big|_{t=d/u_m} = -d$ 下解得 $x = u_m t - 2\sqrt{du_m t}$. 从 $x=0$ 求得 $t = \frac{4d}{u_m}$,即 $t = \frac{4d}{u_m}$ 时该车通过 $x=0$ 点.

(3) 位于 $x_1 = -d = -\frac{u_m T}{4}$ 的车在 $t=T$ 时通过 $x=0$ 点,而在 $x=0$ 和 $x=x_1$ 之间有 $\rho_m |x_1| = \frac{\rho_m u_m T}{4}$ 辆车,故 T 内通过 $x=0$ 的车共有 $\frac{\rho_m u_m T}{4}$ 辆.

6. 记 $H(w) = 2 - w$, $w=1$ 显然是(18)式的一个根. 又 $h'(1) = 1 - \lambda$, 当 $\lambda > 2$ 时, $h'(1) < -1$, 而 $H' = -1$, 故 $h(1^-) > H(1^-)$, $h(1^+) > H(1^+)$. 又因 $h(0) = h(\infty) = 0$, 所以必存在 $0 < z_1^* < 1$ 和 $1 < z_2^*$, 使 $h(z_1^*) = H(z_1^*)$, $h(z_2^*) = H(z_2^*)$. 即(18)式有三个根: $1, z_1^*, z_2^*$.

$$7. I_2(p, q \mid p^0, q^0) = \frac{pq}{p^0 q^0} = \frac{\sum_i p_i q_i}{\sum_i p_i^0 q_i^0}, \text{ 容易直接验证, 满足公理 } 1, 2, 3, 5, 6,$$

8.

对于公理 4: 记 $m = \min_i \frac{p_i}{p_i^0}, M = \max_i \frac{p_i}{p_i^0}$, 则 $mp_i^0 \leq p_i \leq Mp_i^0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 即 $mp^0 \leq p \leq Mp^0$. 于是 $mp^0 q \leq pq \leq Mp^0 q$, 即 $m \leq \frac{pq}{p^0 q^0} \leq M$.

$$\text{对于公理 7: } \frac{\frac{p \cdot \bar{q}}{p^0 \bar{q}^0}}{\frac{pq}{p^0 q^0}} = \frac{\frac{\bar{p} \bar{q}}{\bar{p}^0 \bar{q}^0}}{\frac{pq}{p^0 q^0}} = \frac{p^0 q}{\bar{p}^0 \bar{q}^0} = \frac{\bar{p}^0 \bar{q}}{p^0 q^0}, \text{ 在(16)式 } \bar{p}^0 = kp^0 \text{ 下成立.}$$

$$8. I_8(p, q \mid p^0, q^0) = \prod_i \left(\frac{p_i}{p_i^0} \right)^{r_i}, r_i = \frac{q_i}{\sum_j q_j}, \text{ 易知 } \sum_i r_i = 1, \text{ 可直接验证满}$$

足公理 1~5.

对于公理 6: $I(\Delta p, \Delta^{-1} q | \Delta p^0, \Delta^{-1} q^0) = \prod_i \left(\frac{\lambda_i p_i}{\lambda_i p_i^0} \right)^{r'_i} = \prod_i \left(\frac{p_i}{p_i^0} \right)^{r'_i}$, $r'_i = \frac{q_i/\lambda_i}{\sum_j q_j/\lambda_j}$, 显然, 对于任意的 $\lambda_i > 0$, $r'_i \neq r_i$, 故 $I(\Delta p, \Delta^{-1} q | \Delta p^0, \Delta^{-1} q^0) \neq I(p, q | p^0, q^0)$.

对于公理 7: $\frac{I(\bar{p}, \bar{q} | p^0, q^0)}{I(p, q | p^0, q^0)} = \frac{\prod_i \left(\frac{\bar{p}_i}{p_i^0} \right)^{\bar{r}_i}}{\prod_i \left(\frac{p_i}{p_i^0} \right)^{r_i}}$, $\frac{I(\bar{p}, \bar{q} | \bar{p}^0, \bar{q}^0)}{I(p, q | \bar{p}^0, \bar{q}^0)} = \frac{\prod_i \left(\frac{\bar{p}_i}{\bar{p}_i^0} \right)^{\bar{r}_i}}{\prod_i \left(\frac{p_i}{\bar{p}_i^0} \right)^{r_i}}$, 其

中 $\bar{r}_i = \frac{\bar{q}_i}{\sum_j \bar{q}_j}$, $r_i = \frac{q_i}{\sum_j q_j}$. 公理成立的条件是 $\prod_i \frac{(p_i^0)^{r_i}}{(p_i^0)^{r_i}} = \prod_i \frac{(\bar{p}_i^0)^{r_i}}{(\bar{p}_i^0)^{r_i}}$, 即 $\prod_i \left(\frac{p_i^0}{\bar{p}_i^0} \right)^{r_i} = \prod_i \left(\frac{p_i^0}{\bar{p}_i^0} \right)^{r_i}$. 而由于 q_i, \bar{q}_i 的任意性, 上述条件不成立.

因为显然有 $\lim_{p_i \rightarrow 0} I(p, q | p^0, q^0) = 0$, 公理 8 不成立.

9. $I_1(p, q | p^0, q^0) = \frac{pq^0}{p^0 q^0}$. 对于公理 7: 因为 $\frac{I(\bar{p}, \bar{q} | p^0, q^0)}{I(p, q | p^0, q^0)} = \frac{\bar{p}q^0}{p^0 q^0} = \frac{\bar{p}q^0}{p^0 q^0}$

$\frac{\bar{p}q^0}{p^0 q^0} \cdot \frac{I(\bar{p}, \bar{q} | \bar{p}^0, \bar{q}^0)}{I(p, q | \bar{p}^0, \bar{q}^0)} = \frac{\bar{p}\bar{q}^0}{\bar{p}^0 \bar{q}^0} = \frac{\bar{p}\bar{q}^0}{p^0 q^0}$. 可知公理 7 成立的条件是, 存在正数 k , 使

$q^0 = kq^0$, 即 $\bar{q}^0 = kq_i^0$, ($i = 1, \dots, n$), 表示两个基准年的不同商品的权重相差同一倍数.

10. 记 $m = \min_i \left(\frac{p_i}{p_i^0} \right)$, 于是 $mp^0 \leq p$, 故

$$m \stackrel{\text{公理 2}}{=} m I(p^0, q | p^0, q^0) \stackrel{\text{公理 3}}{=} I(mp^0, q | p^0, q^0) \stackrel{\text{公理 1}}{\leq} I(p, q | p^0, q^0).$$

及 $mp^0 \leq p$

同样, 记 $M = \max_i \left(\frac{p_i}{p_i^0} \right)$, 可证: $I(p, q | p^0, q^0) \leq M$.

$$11. \quad I(\lambda p, q | \lambda p^0, q^0) = \frac{I(\lambda p, q | \lambda p^0, q^0) \cdot I(p^0, q^0 | p^0, q^0)}{I(\lambda p^0, q^0 | \lambda p^0, q^0)}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{I(\lambda p, q \mid p^0, q^0) \cdot I(p^0, q^0 \mid p^0, q^0)}{\text{公理 7}}}{I(\lambda p^0, q^0 \mid p^0, q^0)} \cdot \frac{\frac{\lambda I(p, q \mid p^0, q^0) \cdot I(p^0, q^0 \mid p^0, q^0)}{\text{公理 3}}}{\lambda I(p^0, q^0 \mid p^0, q^0)} \\
& = I(p, q \mid p^0, q^0).
\end{aligned}$$

12. 构造权重 q 和 q^0 , 可以根据各种商品销售量(以金额计), 或者根据在居民日常支出中的比重.

综合题目

1. 赛程安排(2002年全国大学生数学建模竞赛D题)

你所在的年级有5个班,每班一支球队在同一块场地上进行单循环赛,共要进行10场比赛,如何安排赛程使对各队来说都尽量公平呢.下面是随便安排的一个赛程:记5支球队为A,B,C,D,E,在下表左半部分的右上三角的10个空格中,随手填上1,2,⋯,10,就得到一个赛程,即第1场A对B,第2场B对C,⋯,第10场C对E.为方便起见将这些数字沿对角线对称地填入左下三角.

这个赛程的公平性如何呢,不妨只看看各队每两场比赛中间得到的休整时间是否均等.表的右半部分是各队每两场比赛间相隔的场次数,显然这个赛程对A,E有利,对D则不公平.

	A	B	C	D	E	每两场比赛间相隔场次数
A	X	1	9	3	6	1,2,2
B	1	X	2	5	8	0,2,2
C	9	2	X	7	10	4,1,0
D	3	5	7	X	4	0,0,1
E	6	8	10	4	X	1,1,1

从上面的例子出发讨论以下问题:

(1) 对于5支球队的比赛,给出一个各队每两场比赛中间都至少相隔一场的赛程.

(2) 当 n 支球队比赛时,各队每两场比赛中间相隔的场次数的上限是多少.

(3) 在达到(2)的上限的条件下,给出 $n=8, n=9$ 的赛程,并说明它们的编制过程.

(4) 除了每两场比赛间相隔场次数这一指标外,你还能给出哪些指标来衡量一个赛程的优劣,并说明(3)中给出的赛程达到这些指标的程度.

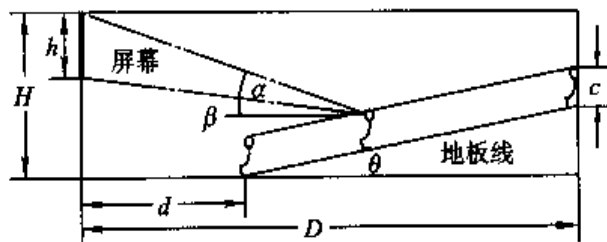
2. 影院座位设计

下图为影院的剖面示意图,座位的满意程度主要取决于视角 α 和仰角 β .视角 α 是观众眼睛到屏幕上、下边缘视线的夹角, α 越大越好;仰角 β 是观众眼睛到屏幕上边缘视线与水平线的夹角, β 太大使人的头部过分上仰,引起不舒适

感,一般要求 β 不超过 30° .

记影院屏幕高 h ,上边缘距地面高 H ,地板线倾角 θ ,第一排和最后一排座位与屏幕水平距离分别为 d 和 D ,观众平均坐高为 c (指眼睛到地面的距离).已知参数 $h=1.8, H=5, d=4.5, D=19, c=1.1$ (单位:m).

- (1) 地板线倾角 $\theta=10^\circ$,问最佳座位在什么地方.
- (2) 求地板线倾角 θ (一般不超过 20°),使所有观众的平均满意程度最大.
- (3) 地板线设计成什么形状可以进一步提高观众的满意程度.



影院剖面示意图

3. 节水洗衣机(1996 年全国大学生数学建模竞赛 B 题)

我国淡水资源有限,节约用水人人有责.洗衣在家庭用水中占有相当大的份额,目前洗衣机已非常普及,节约洗衣机用水十分重要.假设在放入衣物和洗涤剂后洗衣机的运行过程为:加水——漂洗——脱水——加水——漂洗——脱水……(称“加水——漂洗——脱水”为运行一轮).请为洗衣机设计一种程序(包括运行多少轮,每轮加水量等),使在满足一定洗涤效果的条件下,总用水量最少.选用合理的数据进行计算.对照目前常用的洗衣机的运行情况,对你的模型作出评价.

4. 教师工资调整方案(1995 年美国大学生数学建模竞赛 B 题)

美国一所大学新聘的一位主任要对该校教师工资进行调整,设计一个公正、合理的工资体系.教师目前状况和工资调整原则如下:

1) 教师职称由低到高分 4 个等级:讲师、助理教授、副教授、教授.获博士学位者聘为助理教授;读博士学位者聘为讲师,且得到学位时自动升为助理教授;副教授工作 7 年后可申请提升教授.

2) 无教学经验的讲师起始工资为 \$27 000;助理教授的起始工资为 \$32 000;按时提升(7 年或 8 年)并有 25 年以上教龄者工资大致为有博士学位的新教师的两倍.

3) 同一等级中教龄长者工资高,但是这种差别应该随着教龄的增加而渐减,并趋于一致.

4) 职称的提升应带来实质性利益,即若某人在短时间内获提升,则其所得

应大致等于正常情况下(不提升)7年增加的工资。

5) 每人的工资都不能减少;只要学校有钱,所有教师每年都增加工资;每年用于增加工资的总资金可能不同。

全校 204 位教师的教龄、职称和目前的(年)工资如下表所示(职称代号 0, 1, 2, 3 依次表示讲师、助理教授、副教授、教授)。

请你按照上述原则设计新的工资方案,并给出一个从目前状况到新方案的过渡方法。

序号	教龄	职称	工资	序号	教龄	职称	工资	序号	教龄	职称	工资
1	4	2	54 000	24	21	2	42 488	47	8	3	49 971
2	19	1	43 508	25	20	2	43 892	48	23	3	62 742
3	20	1	39 072	26	5	1	35 330	49	39	2	52 058
4	11	3	53 900	27	19	2	41 147	50	4	0	26 500
5	15	3	44 206	28	15	1	34 040	51	5	1	33 130
6	17	1	37 538	29	18	3	48 944	52	46	3	59 749
7	23	3	48 844	30	7	1	30 128	53	4	2	37 954
8	10	1	32 841	31	5	1	35 330	54	19	3	45 833
9	7	2	49 981	32	6	2	35 942	55	6	2	35 270
10	20	2	42 549	33	8	3	57 295	56	6	2	43 037
11	18	2	42 649	34	10	1	36 991	57	20	3	59 755
12	19	3	60 087	35	23	3	60 576	58	21	3	57 797
13	15	2	38 002	36	20	2	48 926	59	4	2	53 500
14	4	1	30 000	37	9	3	57 956	60	6	1	32 319
15	34	3	60 576	38	32	2	52 214	61	17	1	35 668
16	28	1	44 562	39	15	1	39 259	62	20	3	59 333
17	9	1	30 893	40	22	2	43 672	63	4	1	30 500
18	22	2	46 351	41	6	0	45 500	64	16	2	41 352
19	21	2	50 979	42	5	2	52 262	65	15	3	43 264
20	20	1	48 000	43	5	2	57 170	66	20	3	50 935
21	4	1	32 500	44	16	1	36 958	67	6	1	45 365
22	14	2	38 642	45	23	1	37 538	68	6	2	35 941
23	23	3	53 500	46	9	3	58 974	69	6	1	49 134

续表

序号	教龄	职称	工资	序号	教龄	职称	工资	序号	教龄	职称	工资
70	4	1	29 500	98	3	1	52 000	126	15	1	34 638
71	4	1	30 186	99	24	3	56 922	127	20	2	56 836
72	7	1	32 400	100	2	3	78 500	128	6	0	35 451
73	12	2	44 501	101	20	3	52 345	129	10	1	32 756
74	2	1	31 900	102	9	1	35 978	130	14	1	32 922
75	1	2	62 500	103	24	1	43 925	131	12	2	36 451
76	1	1	34 500	104	6	2	35 270	132	1	1	30 000
77	16	2	40 637	105	14	3	49 472	133	17	3	48 134
78	4	2	35 500	106	19	2	42 215	134	6	1	40 436
79	21	3	50 521	107	12	1	40 427	135	2	2	54 500
80	12	1	35 158	108	10	1	37 021	136	4	2	55 000
81	4	0	28 500	109	18	2	44 166	137	5	1	32 210
82	16	3	46 930	110	21	2	46 157	138	21	2	43 160
83	24	3	55 811	111	8	1	32 500	139	2	1	32 000
84	6	1	30 128	112	19	2	40 785	140	7	1	36 300
85	16	3	46 090	113	10	2	38 698	141	9	2	38 624
86	5	1	28 570	114	5	1	31 170	142	21	3	49 687
87	19	3	44 612	115	1	0	26 161	143	22	3	49 972
88	17	1	36 313	116	22	3	47 974	144	7	2	46 155
89	6	1	33 479	117	10	2	37 793	145	12	1	37 159
90	14	2	38 624	118	7	1	38 117	146	9	1	32 500
91	5	1	32 210	119	26	3	62 370	147	3	1	31 500
92	9	2	48 500	120	20	2	51 991	148	13	0	31 276
93	4	1	35 150	121	1	1	31 500	149	6	1	33 378
94	25	3	50 583	122	8	2	35 941	150	19	3	45 780
95	23	3	60 800	123	14	2	39 294	151	4	3	70 500
96	17	1	38 464	124	23	2	51 991	152	27	3	59 327
97	4	1	39 500	125	1	1	30 000	153	9	2	37 954

续表

序号	教龄	职称	工资	序号	教龄	职称	工资	序号	教龄	职称	工资
154	5	2	36 612	171	23	3	51 571	188	28	3	51 064
155	2	1	29 500	172	12	3	46 500	189	19	0	34 265
156	3	3	66 500	173	6	1	35 978	190	22	3	49 756
157	17	1	36 378	174	7	1	42 256	191	19	1	36 958
158	5	2	46 770	175	23	2	46 351	192	16	1	34 550
159	22	1	42 772	176	22	3	48 280	193	22	3	50 576
160	6	1	31 160	177	3	1	55 500	194	5	1	32 210
161	17	1	39 072	178	15	2	39 265	195	2	1	28 500
162	20	1	42 970	179	4	1	29 500	196	12	2	41 178
163	2	3	85 500	180	21	2	48 359	197	22	3	53 836
164	20	1	49 302	181	23	3	48 844	198	19	2	43 519
165	21	2	43 054	182	1	1	31 000	199	4	1	32 000
166	21	3	49 948	183	6	1	32 923	200	18	2	40 089
167	5	3	50 810	184	2	0	27 700	201	23	3	52 403
168	19	2	51 378	185	16	3	40 748	202	21	3	59 234
169	18	2	41 267	186	24	2	44 715	203	22	3	51 898
170	18	1	42 176	187	9	2	37 389	204	26	2	47 047

5. 一个飞行管理问题(1995年全国大学生数学建模竞赛A题)

在约 10 000 m 高空的某边长为 160 km 的正方形区域内,经常有若干架飞机作水平飞行.区域内每架飞机的位置和速度向量均由计算机记录其数据,以便进行飞行管理.当一架欲进入该区域的飞机到达区域边缘时,记录其数据后,要立即计算并判断是否会与区域内的飞机发生碰撞.如果会碰撞,则应计算如何调整各架(包括新进入的)飞机飞行的方向角,以避免碰撞.现假定条件如下:

- 1) 不碰撞的标准为任意两架飞机的距离大于 8 km;
- 2) 飞机飞行方向角调整的幅度不应超过 30 度;
- 3) 所有飞机飞行速度均为每小时 800 km;
- 4) 进入该区域的飞机在到达该区域边缘时,与区域内飞机的距离应在 60 km 以上;
- 5) 最多需考虑 6 架飞机;

6) 不必考虑飞机离开此区域后的状况.

请你对这个避免碰撞的飞行管理问题建立数学模型,列出计算步骤,对以下数据进行计算(方向角误差不超过 0.01 度),要求飞机飞行方向角调整的幅度尽量小.

设该区域 4 个顶点的坐标为: $(0,0), (160,0), (160,160), (0,160)$.

记录数据为:

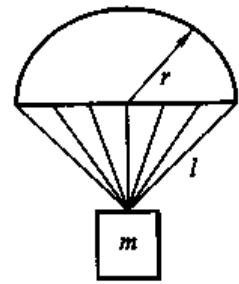
飞机编号	横坐标 x	纵坐标 y	方向角(度)
1	150	140	243
2	85	85	236
3	150	155	220.5
4	145	50	159
5	130	150	230
新进入	0	0	52

注:方向角指飞行方向与 x 轴正向的夹角.

6. 降落伞的选择

为向灾区空投救灾物资共 2 000 kg,需选购一些降落伞.已知空投高度为 500 m,要求降落伞落地时的速度不能超过 20 m/s.降落伞面为半径 r 的半球面,用每根长 l 共 16 根绳索连接的载重 m 位于球心正下方球面处,如图.

每个降落伞的价格由三部分组成.伞面费用 C_1 由伞的半径 r 决定,见表 1;绳索费用 C_2 由绳索总长度及单价 4 元/m 决定;固定费用 C_3 为 200 元.



降落伞在降落过程中受到的空气阻力,可以认为与降落速度和伞面积的乘积成正比.为了确定阻力系数,用半径 $r = 3$ m、载重 $m = 300$ kg 的降落伞从 500 m 高度作降落试验,测得各时刻 t 的高度 x ,见表 2.

试确定降落伞的选购方案,即共需多少个,每个伞的半径多大(在表 1 中选择),在满足空投要求的条件下,使费用最低.

r (m)	2	2.5	3	3.5	4
C_1 (元)	65	170	350	660	1 000

表 1

$t(s)$	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
$x(m)$	500	470	425	372	317	264	215	160	108	55	1

表 2

7. 会议分组安排(1997 年美国大学生数学建模竞赛 B 题)

为了让会议能充分讨论,不被某些权势人物所支配,往往在全体会议前安排一些小组会,并且分成若干段,使不同组的与会者有效地混合.

某公司董事会共 29 位成员,其中 9 位是在职董事.现计划开一天小组会,上午 3 段,下午 4 段.上午每段分 6 个组,每组由一位资深职员(非董事)主持,于是每个资深职员要主持 3 个不同的小组会;下午每段分 4 个组,没有资深职员主持.分组安排要满足以下准则:

- 1) 上午的 3 段不允许任一董事参加同一位资深职员主持的两次会议;
- 2) 在职董事均匀地分配在每段的各小组内.

请给出一份 1~9 号在职董事、10~29 号董事和 1~6 号资深职员的分组名单,使每一董事和另一董事在同一小组开会的次数尽量相同,并使不同段的小组中一起开会的董事最少.

8. 飞机排队(1989 年美国大学生数学建模竞赛 B 题)

机场通常都是用“先来后到”的原则来分配飞机跑道,即当飞机准备好离开登机口时,驾驶员电告地面控制中心,加入等候跑道的队伍.

假设控制塔可以从快速联机数据库中得到每架飞机的如下信息:

- 1) 预定离开登机口的时间;
- 2) 实际离开登机口的时间;
- 3) 机上乘客人数;
- 4) 预定在下一站转机的人数和转机的时间;
- 5) 到达下一站的预定时间.

又设共有七种飞机,载客量从 100 人起以 50 人递增,载客最多的一种是 400 人.

试开发和分析一种能使乘客和航空公司双方满意的数学模型.

9. 牧场管理^[22]

有一块一定面积的草场放牧羊群,管理者要估计草场能放牧多少羊,每年保留多少母羊羔,夏季要贮存多少草供冬季之用.

为解决这些问题调查了如下的背景材料:

- 1) 本地环境下这一品种草的日生长率为

季节	冬	春	夏	秋
日生长率(g/m^2)	0	3	7	4

2) 羊的繁殖率 通常母羊每年产 1~3 只羊羔, 5 岁后被卖掉. 为保持羊群的规模可以买进羊羔, 或者保留一定数量的母羊. 每只母羊的平均繁殖率为

年龄	0~1	1~2	2~3	3~4	4~5
产羊羔数	0	1.8	2.4	2.0	1.8

3) 羊的存活率 不同年龄的母羊的自然存活率(指存活一年)为

年龄	1~2	2~3	3~4
存活率	0.98	0.95	0.80

4) 草的需求量 母羊和羊羔在各个季节每天需要的草的数量(kg)为

季节	冬	春	夏	秋
母羊	2.10	2.40	1.15	1.35
羊羔	0	1.00	1.65	0

注: 只关心羊的数量, 而不管它们的重量. 一般在春季产羊羔, 秋季将全部公羊和一部分母羊卖掉, 保持羊群数量不变.

10. 零件的参数设计(1997 年全国大学生数学建模竞赛 A 题)

一件产品由若干零件组装而成, 标志产品性能的某个参数取决于这些零件的参数. 零件参数包括标定值和容差两部分. 进行成批生产时, 标定值表示一批零件该参数的平均值, 容差则给出了参数偏离其标定值的容许范围. 若将零件参数视为随机变量, 则标定值代表期望值, 在生产部门无特殊要求时, 容差通常规定为均方差的 3 倍.

进行零件参数设计, 就是要确定其标定值和容差. 这时要考虑两方面因素: 一是当各零件组装成产品时, 如果产品参数偏离预先设定的目标值, 就会造成质量损失, 偏离越大, 损失越大; 二是零件容差的大小决定了其制造成本, 容差设计得越小, 成本越高.

试通过如下的具体问题给出一般的零件参数设计方法.

粒子分离器某参数(记作 y)由 7 个零件的参数(记作 x_1, x_2, \dots, x_7)决定, 经验公式为:

$$y = 174.42 \left(\frac{x_1}{x_5} \right) \left(\frac{x_3}{x_2 - x_1} \right)^{0.85} \times \sqrt{\frac{1 - 2.62 \left[1 - 0.36 \left(\frac{x_4}{x_2} \right)^{0.56} \right]^{3/2} \left(\frac{x_4}{x_2} \right)^{1.16}}{x_6 x_7}}$$

y 的目标值(记作 y_0)为 1.50. 当 y 偏离 $y_0 \pm 0.1$ 时, 质量损失为 1 000 元; 当 y 偏离 $y_0 \pm 0.3$ 时, 损失为 9 000 元.

零件参数的标定值有一定的容许变化范围; 容差分为 A, B, C 三个等级, 用与标定值的相对值表示, A 等为 $\pm 1\%$, B 等为 $\pm 5\%$, C 等为 $\pm 10\%$. 7 个零件参数标定值的容许范围, 及不同容差等级零件的成本(元)如下表(符号/表示无此等级零件):

	标定值容许范围	A 等成本	B 等成本	C 等成本
x_1	[0.075, 0.125]	/	25	/
x_2	[0.225, 0.375]	20	50	/
x_3	[0.075, 0.125]	/	50	200
x_4	[0.075, 0.125]	50	100	/
x_5	[1.125, 1.875]	50	/	/
x_6	[12, 20]	/	25	100
x_7	[0.562 5, 0.935]	/	25	100

现进行成批生产, 每批产量 1 000 个. 在原设计中, 7 个零件参数的标定值为: $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.3$, $x_3 = 0.1$, $x_4 = 0.1$, $x_5 = 1.5$, $x_6 = 16$, $x_7 = 0.75$; 容差均取最便宜的等级.

请你综合考虑 y 偏离 y_0 造成的损失和零件成本, 重新设计零件参数(包括标定值和容差), 并与原设计比较, 总费用降低了多少.

11. 汽车保险^[22]

某保险公司只提供一年期的综合车险保单业务, 这一年内, 若客户没有要求赔偿, 则给予额外补助. 所有参保人被分为 0, 1, 2, 3 四类. 类别越高, 从保险费中得到的折扣越多. 在计算保险费时, 新客户属于 0 类. 在客户延续其保险单时, 若在上一年没有要求赔偿, 则可提高一个类别; 若客户在上一年要求过赔偿, 如果可能则降低两个类别, 否则为 0 类. 客户退出保险, 则不论是自然的还是事故死亡引起的, 将退还其保险金的适当部分.

现在政府准备在下一年开始实施安全带法规, 如果实施了该法规, 虽然每年的事故数量不会减少, 但事故中受伤司机和乘员数肯定会减少, 从而医药费将有所下降. 这是政府预计会出现的结果, 从而期望减少保险费的数额. 这样的结果

果真会出现吗？这是该保险公司目前最关心的问题。根据采用这种法规的国家的统计资料可以知道，死亡的司机会减少 40%，遗憾的是医疗费的下落不容易确定下来，有人认为，医疗费会减少 20% 到 40%。假设当前年度该保险公司的统计报表如下表 1 和表 2。

保险公司希望你能给出一个模型，来解决上述问题，并以表 1 和表 2 的数据为例，验证你的方法。并给出在医疗费下降 20% 和 40% 的情况下，公司今后 5 年每年每份保险费应收多少才比较合理？给出你的建议。

基本保险费:775 元					
类别	没有索赔时补贴比例(%)	续保人数	新投保人数	注销人数	总投保人数
0	0	1 280 708	384 620	18 264	1 665 328
1	25	1 764 897	1	28 240	1 764 898
2	40	1 154 461	0	13 857	1 154 461
3	50	8 760 058	0	324 114	8 760 058

总收入:6 182 百万元,偿还退回:70 百万元,净收入:6 112 百万元;

支出:149 百万元,索赔支出:6 093 百万元,超支:130 百万元。

表 1 本年度发放的保险单数

类别	索赔人数	死亡司机人数	平均修理费(元)	平均医疗费(元)	平均赔偿费(元)
0	582 756	11 652	1 020	1 526	3 195
1	582 463	23 315	1 223	1 231	3 886
2	115 857	2 292	947	823	2 941
3	700 872	7 013	805	814	2 321

总修理费:1 981 百万元,总医疗费:2 218 百万元,

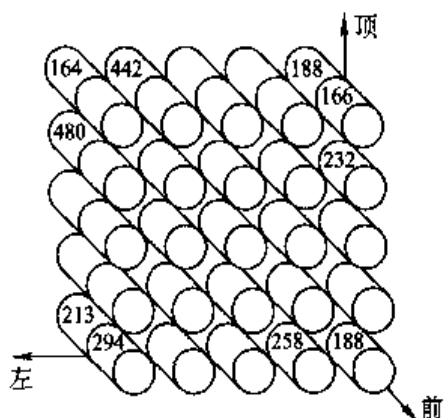
总死亡赔偿费:1 894 百万元,总索赔费:6 093 百万元。

表 2 本年度的索赔款

12. 药物在脑中的分布(1990 年美国大学生数学建模竞赛 A 题)

研究脑功能失调的人员要测试新的药物的效果,例如治疗帕金森症向脑部注射多巴胺的效果。为了精确估计药物影响到的脑部区域,必须估计注射后药物在脑内空间分布区域的大小和形状。

研究数据包括 50 个圆柱体组织的每个样本药物含量的测定值(见附图和附表),每个圆柱体样本的长为 0.76 mm,直径为 0.66 mm,这些互相平行的圆柱体样本的中心位于网格距为 1 mm × 0.76 mm × 1 mm 的格点上,所以圆柱体互相间在底面上接触,侧面互不接触(见附图所示).注射是在最高计数的那个圆柱体的中心附近进行的.自然在圆柱体之间以及由圆柱体样本覆盖的区域外也有药物.



试估计受到药物影响的区域中药物的分布.

一个单位表示一个闪烁微粒的计数,或多巴胺的 4.753×10^{-13} 克分子量.例如,附表指出位于后排当中那个圆柱体的含药量是 28 353 个单位.

后排垂直截面					前排垂直截面				
164	442	1 320	414	188	163	324	432	243	166
480	7 022	14 411	5 158	352	712	4 055	6 098	1 043	232
2 091	23 027	28 353	13 138	681	2 137	15 531	19 742	4 785	330
789	21 260	20 921	11 731	727	444	11 431	14 960	3 182	301
213	1 303	3 765	1 715	453	294	2 061	1 036	258	188

13. 血样的分组检验^[17]

在一个很大的人群中通过血样检验普查某种疾病,假定血样为阳性的先验概率为 p (通常 p 很小).为减少检验次数,将人群分组,一组人的血样混合在一起化验.当某组的混合血样呈阴性时,即可不经检验就判定该组每个人的血样都为阴性;而当某组的混合血样呈阳性时,则可判定该组至少有一人血样为阳性,于是需要对这组的每个人再作检验.

(1) 当 p 固定时(如 0.01%, ..., 0.1%, ..., 1%, ...)如何分组,即多少人一组,可使平均总检验次数最少,与不分组的情况比较.

(2) 当 p 多大时不应分组检验.

(3) 当 p 固定时如何进行二次分组(即把混合血样呈阳性的组再分成小组检验,重复一次分组时的程序).

(4) 讨论其它分组方式,如二分法(人群一分为二,阳性组再一分为二,继续下去)、三分法等.

14. 强烈的碰撞(1999 年美国大学生数学建模竞赛 A 题)

美国国家航空和航天局(NASA)从过去某个时间以来一直在考虑一颗大的小行星撞击地球会产生的后果。

作为这种努力的组成部分,要求你们队考虑这种撞击的后果,假如该小行星撞击到了南极洲的话.人们关心的是撞到南极洲比撞到地球的其他地方可能会有很不同的后果。

假设小行星的直径大约为 1 000 m,并且正好在南极与南极洲大陆相撞。

要求你们队对这样一颗小行星的撞击提供评估.特别是,NASA 希望有一个关于这种撞击下可能的人类人员伤亡数量和所在地区的估计,对南半球海洋的食物生产区域造成的破坏的估计,以及由于南极洲极地冰岩的大量融化造成的沿海地区的洪水的估计。

15. 彩票中的数学(2002 年全国大学生数学建模竞赛 B 题)

近年来“彩票飓风”席卷中华大地,巨额诱惑使越来越多的人加入到“彩民”的行列,目前流行的彩票主要有“传统型”和“乐透型”两种类型。

“传统型”采用“10 选 6+1”方案:先从 6 组 0~9 号球中摇出 6 个基本号码,每组摇出一个,然后从 0~4 号球中摇出一个特别号码,构成中奖号码.投注者从 0~9 十个号码中任选 6 个基本号码(可重复),从 0~4 中选一个特别号码,构成一注,根据单注号码与中奖号码相符的个数多少及顺序确定中奖等级.以中奖号码“abcdef+g”为例说明中奖等级,如表 1(X 表示未选中的号码)。

中 奖 等 级	10 选 6+1(6+1/10)					
	基 本 号 码		特别号码	说 明		
一等奖	abcdef		g	选 7 中(6+1)		
二等奖	abcdef			选 7 中(6)		
三等奖	abcdeX	Xbcdef		选 7 中(5)		
四等奖	abcdXX	XbcdeX	XXcdef		选 7 中(4)	
五等奖	abcXXX	XbcdXX	XXcdeX	XXXdef		选 7 中(3)
六等奖	abXXXX	XbcXXX	XXcdXX	XXXdeX	XXXXef	选 7 中(2)

表 1

“乐透型”有多种不同的形式,比如“33 选 7”的方案:先从 01~33 个号码球中一个一个地摇出 7 个基本号,再从剩余的 26 个号码球中摇出一个特别号码.投注者从 01~33 个号码中任选 7 个组成一注(不可重复),根据单注号码与中奖号码相符的个数多少确定相应的中奖等级,不考虑号码顺序.又如“36 选 6+1”的方案,先从 01~36 个号码球中一个一个地摇出 6 个基本号,再从剩下的 30 个

号码球中摇出一个特别号码.从 01~36 个号码中任选 7 个组成一注(不可重复),根据单注号码与中奖号码相符的个数多少确定相应的中奖等级,不考虑号码顺序.这两种方案的中奖等级如表 2.

中 奖 等 级	33 选 7(7/33)		说 明	36 选 6+1(6+1/36)		说 明
	基 本 号 码	特 别 号 码		基 本 号 码	特 别 号 码	
一等奖	●●●●●●●		选 7 中(7)	●●●●●●●	★	选 7 中(6+1)
二等奖	●●●●●●○	★	选 7 中(6+1)	●●●●●●●		选 7 中(6)
三等奖	●●●●●●○		选 7 中(6)	●●●●●○●	★	选 7 中(5+1)
四等奖	●●●●●○●	★	选 7 中(5+1)	●●●●●○●		选 7 中(5)
五等奖	●●●●●○●		选 7 中(5)	●●●●●○●	★	选 7 中(4+1)
六等奖	●●●●●○●	★	选 7 中(4+1)	●●●●●○●		选 7 中(4)
七等奖	●●●●●○●		选 7 中(4)	●●●●●○●	★	选 7 中(3+1)

注:●为选中的基本号码;★为选中的特别号码;○为未选中的号码.

表 2

以上两种类型的总奖金比例一般为销售总额的 50%,投注者单注金额为 2 元,单注若已得到高级别的奖就不再兼得低级别的奖.现在常见的销售规则及相应的奖金设置方案如表 3,其中一、二、三等奖为高项奖,后面的为低项奖.低项奖数额固定,高项奖按比例分配,但一等奖单注保底金额 60 万元,封顶金额 500 万元,各高项奖额的计算方法为:

$$[(\text{当期销售总额} \times \text{总奖金比例}) - \text{低项奖总额}] \times \text{单项奖比例}$$

- (1) 根据这些方案的具体情况,综合分析各种奖项出现的可能性、奖项和奖金额的设置以及对彩民的吸引力等因素评价各方案的合理性.
- (2) 设计一种“更好”的方案及相应的算法,并据此给彩票管理部门提出建议.
- (3) 给报纸写一篇短文,供彩民参考.

序号	奖项 方案	一等奖	二等奖	三等奖	四等奖	五等奖	六等奖	七等奖	备 注
		比 例	比 例	比 例	金 额	金 额	金 额	金 额	
1	6+1/10	50%	20%	30%	50				按序
2	6+1/10	60%	20%	20%	300	20	5		按序
3	6+1/10	65%	15%	20%	300	20	5		按序

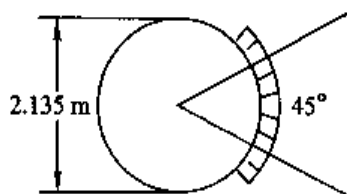
续表

序号	奖项 方案	一等奖 比 例	二等奖 比 例	三等奖 比 例	四等奖 金 额	五等奖 金 额	六等奖 金 额	七等奖 金 额	备 注
4	6+1/10	70%	15%	15%	300	20	5		按序
5	7/29	60%	20%	20%	300	30	5		
6	6+1/29	60%	25%	15%	200	20	5		
7	7/30	65%	15%	20%	500	50	15	5	
8	7/30	70%	10%	20%	200	50	10	5	
9	7/30	75%	10%	15%	200	30	10	5	
10	7/31	60%	15%	25%	500	50	20	10	
11	7/31	75%	10%	15%	320	30	5		
12	7/32	65%	15%	20%	500	50	10		
13	7/32	70%	10%	20%	500	50	10		
14	7/32	75%	10%	15%	500	50	10		
15	7/33	70%	10%	20%	600	60	6		
16	7/33	75%	10%	15%	500	50	10	5	
17	7/34	65%	15%	20%	500	30	6		
18	7/34	68%	12%	20%	500	50	10	2	
19	7/35	70%	15%	15%	300	50	5		
20	7/35	70%	10%	20%	500	100	30	5	
21	7/35	75%	10%	15%	1 000	100	50	5	
22	7/35	80%	10%	10%	200	50	20	5	
23	7/35	100%	2 000	20	4	2			无特别号
24	6+1/36	75%	10%	15%	500	100	10	5	
25	6+1/36	80%	10%	10%	500	100	10		
26	7/36	70%	10%	20%	500	50	10	5	
27	7/37	70%	15%	15%	1 500	100	50		
28	6/40	82%	10%	8%	200	10	1		
29	5/60	60%	20%	20%	300	30			

表 3

16. 铅球掷远^[22]

铅球掷远比赛的场地是直径 2.135 m 的圆,要求运动员从场地中将 7.257 kg 重的铅球投掷在 45° 的扇形区域内,如图.观察运动员比赛的录像发现,他们的投掷角度变化较大,一般在 $38^\circ \sim 45^\circ$,有的高达 55° ,试建立模型讨论以下问题:



- (1) 以出手速度、出手角度、出手高度为参数,建立铅球掷远的数学模型.
- (2) 给定出手高度,对于不同的出手速度,确定最佳出手角度.比较掷远结果对出手速度和出手角度的灵敏性.
- (3) 考虑运动员推铅球时用力展臂的动作,改进上面的模型.

综合题目参考解答

1. 赛程安排(2002 年全国大学生数学建模竞赛 D 题)

(1) 用多种方法都能给出一个达到要求的赛程.

(2) 用多种方法可以证明 n 支球队“各队每两场比赛最小相隔场次 r 的上界”(如 $n=5$ 时上界为 1)是 $\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$, 如:

设赛程中某场比赛是 i, j 两队, i 队参加的下一场比赛是 i, k 两队 ($k \neq j$), 要使各队每两场比赛最小相隔场次为 r , 则上述两场比赛之间必须有除 i, j, k 以外的 $2r$ 支球队参赛, 于是 $n \geq 2r + 3$, 注意到 r 为整数即得 $r \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$.

(3) 用构造性的办法可以证明这个上界是可以达到的, 即对任意的 n 编排出达到该上界的赛程. 如对于 $n=8, n=9$ 可以得到:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	每两场比赛 相隔场次数	相隔场 次总数
A_1	×	1	5	9	13	17	21	25	3,3,3,3,3,3	18
A_2	1	×	20	6	23	11	26	16	4,4,4,3,2,2	19
A_3	5	20	×	24	10	27	15	2	2,4,4,4,3,2	19
A_4	9	6	24	×	28	24	3	19	2,2,4,4,4,3	19
A_5	13	23	10	28	×	4	18	7	2,2,2,4,4,4	18
A_6	17	11	27	14	4	×	8	22	3,2,2,2,4,4	17
A_7	21	26	15	3	18	8	×	12	4,3,2,2,2,4	17
A_8	25	16	2	19	7	22	12	×	4,4,3,2,2,2	17

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	每两场比赛 相隔场次数	相隔场 次总数
A_1	×	36	6	31	11	26	16	21	1	4,4,4,4,4,4,4	28
A_2	36	×	2	27	7	22	12	17	32	4,4,4,4,4,4,3	27
A_3	6	2	×	35	15	30	20	25	10	3,3,4,4,4,4,4	26
A_4	31	27	35	×	3	18	8	13	23	4,4,4,4,3,3,3	25
A_5	11	7	15	3	×	34	24	29	19	3,3,3,3,4,4,4	24
A_6	26	22	30	18	34	×	4	9	14	4,4,3,3,3,3,3	23
A_7	16	12	20	8	24	4	×	33	28	3,3,3,3,3,3,4	22
A_8	21	17	25	13	29	9	33	×	5	3,3,3,3,3,3,3	21
A_9	1	32	10	23	19	14	28	5	×	3,4,3,4,3,4,3	24

可以看到, $n=8$ 时每两场比赛相隔场次数只有 2, 3, 4, $n=9$ 时每两场比赛相隔场次数只有 3, 4, 以上结果可以推广, 即 n 为偶数时每两场比赛相隔场次数只有 $\frac{n}{2}-2, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}, n$ 为奇数时只有 $\frac{n-3}{2}, \frac{n-1}{2}$.

(4) 衡量赛程优劣的其它指标如:

平均相隔场次 记第 i 队第 j 个间隔场次数为 $c_{ij}, i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, n-2$, 则平均相隔场次为

$$\bar{r} = \frac{1}{n(n-2)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-2} c_{ij}$$

\bar{r} 是赛程整体意义下的指标, 它越大越好. 可以计算 $n=8, n=9$ 的 \bar{r} , 并讨论它是否达到了上界.

相隔场次的最大偏差 定义

$$f = \text{Max}_{i,j} |c_{ij} - \bar{r}|$$

$$g = \text{Max}_i \left| \sum_{j=1}^{n-2} c_{ij} - (n-2)\bar{r} \right|$$

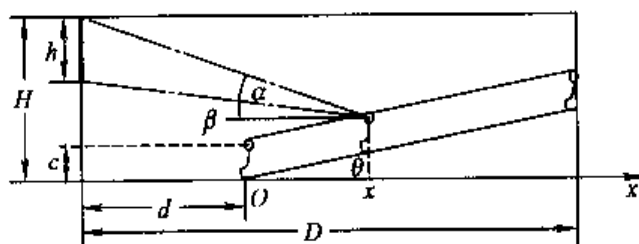
f 为整个赛程相隔场次的最大偏差, g 为球队之间相隔场次的最大偏差, 它们都是越小越好. 可以计算 $n=8, n=9$ 的 f, g , 并讨论它是否达到了上界.

参考文献:《工程数学学报》第 20 卷第 5 期, 2003

2. 影院座位设计

建立满意度函数 $f(\alpha, \beta)$, 可以认为 α 和 β 无关, $f(\alpha, \beta) = g(\alpha) - h(\beta)$, g, h 取尽量简单的形式, 如 $g(\alpha) = \alpha; h(\beta) = 0 (\beta \leq 30^\circ), h(\beta) = h_0 (\beta > 30^\circ)$.

(1) 可将 $\beta \leq 30^\circ$ 作为必要条件, 以 α 最大为最佳座位的标准.



在上图中以第 1 排座位为坐标原点建立坐标轴 x , 可以得到

$$\beta = \arctan\left(\frac{H-c-x\tan\theta}{x+d}\right), \alpha = \arctan\left(\frac{H-c-x\tan\theta}{x+d}\right) - \arctan\left(\frac{H-c-h-x\tan\theta}{x+d}\right)$$

β 是 x 的减函数. 可得 $x \approx 1.7\text{m}$, 即第 3 (或 4) 排处 $\beta = 30^\circ$. 又通过计算或分析可知 α 也是 x 的减函数, 所以第 3 (或 4) 排处是最佳座位.

(2) 设定一个座位间隔 l (如 0.5 m), x 从 0 (或 $\beta \leq 30^\circ$ 处) 到 $D-d$ 按 l 离散, 对于 $\theta (0^\circ \sim 20^\circ)$ 计算 α 的平均值, 得 $\theta = 20^\circ$ 时其值最大.

(3) 可设地板线是 x 的二次曲线 $ax + bx^2$, 寻求 a, b 使 α 的平均值最大.

实际上,还应考虑前排不应挡住后排的视线.

3. 节水洗衣机(1996年全国大学生数学建模竞赛B题)

该问题不要求对洗衣的微观机制(物理、化学方面)深入研究,只需从宏观层次去把握.宏观上洗衣的基本原理是用洗涤剂通过漂洗把吸附在衣物上的污物溶于水中,再脱去污水带走污物;洗衣的过程是通过“加水——漂洗——脱水”程序的反复运行,使残留在衣物上的污物越来越少,直到满意的程度;洗涤剂也是不希望留在衣物上的东西,可将“污物”定义为衣物上原有污物与洗涤剂的总和.

假设每轮漂洗后污物均匀地溶于水中;每轮脱水后衣物含水量为常数 c . x_0 ~ 初始污物量, u_k ~ 第 k 轮加水量, x_k ~ 第 k 轮脱水后污物量 ($k=1,2,\dots$). 设每轮脱水前后污物在水中的浓度不变. 于是 $\frac{x_0}{u_1} = \frac{x_1}{c}$, $\frac{x_1}{u_2+c} = \frac{x_2}{c}$, \dots , $\frac{x_{n-1}}{u_{n-1}+c} =$

$$\frac{x_n}{c}, \text{ 得到 } \frac{x_n}{x_0} = \frac{c^n}{u_1(u_2+c)\cdots(u_n+c)}.$$

在最终污物量与初始污物量之比 x_n/x_0 小于给定的清洁度条件下,求各轮加水量 u_k ($k=1,\dots,n$),使总用水量最小,即

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{k=1}^n u_k \\ & \text{s. t. } \frac{c^n}{u_1(u_2+c)\cdots(u_n+c)} < \varepsilon \end{aligned}$$

等价于

$$\begin{aligned} & \text{Min } u_1 + (u_2+c) + \cdots + (u_n+c) \\ & \text{s. t. } u_1(u_2+c)\cdots(u_n+c) = a \end{aligned}$$

a 为常数可得 $u_1 = u_2+c = \cdots = u_n+c$, 即第 $2 \sim n$ 轮加水量 $u_k = u$ (常数), 第 1 轮加水量 $u_1 = u+c$.

令 $u = cx$, 问题简化为

$$\begin{aligned} & \text{Min } nx \\ & \text{s. t. } \left(\frac{1}{1+x} \right)^n < \varepsilon \end{aligned}$$

其解为 $x \rightarrow 0$, 即 $u \rightarrow 0$, 而 $n \rightarrow \infty$. 这实际上是不合理的. 应该加上对 u 的限制:

$$v_1 \leq u \leq v_2. \text{ 则得 } n_{\min} \leq n \leq n_{\max}, \text{ 其中 } n_{\min} = \left\lceil \frac{\alpha}{\ln(1+v_2/c)} \right\rceil + 1, n_{\max} =$$

$$\left\lceil \frac{\alpha}{\ln(1+v_1/c)} \right\rceil + 1. \text{ 这样, } n \text{ 为有限的几个数, 可一一比较. 具体数据计算从略.}$$

参考文献:《数学的实践与认识》第 27 卷第 1 期, 1997

4. 教师工资调整方案(1995年美国大学生数学建模竞赛B题)

题目对职称提升年限表述得不甚清楚(如未提及助理教授的提升),教龄也未区分是在什么职称下工作的年限,所以应该作出一些相应的简化假设.按所给信息,工资仅取决于职称和教龄.建立新工资方案的一种办法是将职称折合成教龄,如定义 $x = \text{教龄 } t + 7 \times k$ (对于讲师、助理教授、副教授、教授, k 分别取值 0, 1, 2, 3), 然后寻求工资函数 $I(x)$, 使之满足题目的要求, 如 $I(0) = 27\,000$, $I(7) = 32\,000$ 等, 以及 x 较大时 $\frac{d^2 I}{dx^2} < 0$. 另一种办法是职称、教龄分别对待, 工资函数 $J(k, t)$ 从多种函数中选择, 如最简单的线性函数 $J(k, t) = a_k + b_k t$, a_k, b_k ($k = 0, 1, 2, 3$) 根据一定条件确定.

按照第一种办法得到的新工资方案, 以职称和教龄综合指标为 x 的教师的工资都应为 $I(x)$, 而人们的目前工资会低于或高于它. 根据题目要求, 高工资不应降低, 低工资则应逐渐提高, 尽快达到理想值 $I(x)$. 需要做的只是根据每人(目前)工资(与理想值的)差额, 制定学校提供的提薪资金的分配方案. 它应该是简单、合理、容易被人接受的.

按以上原则可以建立不同的模型, 应通过检验比较其优劣. 检验可基于题目所给数据, 按照提薪计划运行若干年, 考察接近理想方案的情况, 即用过渡时期的情况检验模型; 也可进行随机模拟, 按照一定规则随机产生数据(可以包括聘用、提职、解聘、退休的人数和时间等), 再按照提薪计划运行, 考察接近理想方案的情况.

参考文献: 叶其孝, 《大学生数学建模竞赛辅导教材》(四), 湖南教育出版社, 2001

5. 一个飞行管理问题(1995 年全国大学生数学建模竞赛 A 题)

设 α_{ij} 为第 i 架飞机与第 j 架飞机的碰撞角(即 $\alpha_{ij} = \arcsin(8/r_{ij})$, 其中 r_{ij} 为这两架飞机连线的长度), β_{ij} 为第 i 架飞机相对于第 j 架飞机的相对速度(矢量)与这两架飞机连线(从 i 指向 j 的矢量)的夹角(以连线矢量为基准, 逆时针方向为正, 顺时针方向为负), θ_i 为第 i 架飞机飞行方向角调整量.

本问题中的优化目标函数可以有不同的形式: 如使所有飞机的最大调整量最小; 所有飞机的调整量绝对值之和最小等. 以所有飞机的调整量绝对值之和最小, 可以得到如下的数学规划模型:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \sum_{i=1}^6 |\theta_i| \\ \text{s. t. } & \left| \beta_{ij} + \frac{1}{2}(\theta_i + \theta_j) \right| > \alpha_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 6, i \neq j \\ & |\theta_i| \leq 30^\circ, \quad i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

为了利用 LINGO 求解这个数学规划模型,可以首先采用其他数学软件计算出 α_{ij} 和 β_{ij} . 其实, α_{ij} 和 β_{ij} 也是可以直接使用 LINGO 来计算的,这相当于解关于 α_{ij} 和 β_{ij} 的方程,只是解方程并非 LINDO 软件的特长. 这里我们作为一个例子,看看如何利用 LINGO 计算 α_{ij} . 可输入如下模型到 LINGO 求解 α_{ij} :

```
MODEL:
1]SETS:
2]   plane/1..6/:x0,y0;
3]   link(plane,plane):alpha,sin2;
4]ENDSETS
5]   @FOR(LINK(I,J)|I#NE#J):
6]       sin2(I,J)=64/((X0(I)-X0(J))*(X0(I)-X0(J))+
7]           (Y0(I)-Y0(J))*(Y0(I)-Y0(J)));
8]   );
9]   @FOR(LINK(I,J)|I#NE#J):
10]      (@SIN(alpha*3.14159265/180.0))-2=SIN2;
11]   );
12]DATA:
13]   x0=150,85,150,145,130,0;
14]   y0=140,85,155,50,150,0;
15]enddata
END
```

计算结果如下:

α_{ij}	$j=1$	2	3	4	5	6
$i=1$	0.000 0	5.391 2	32.231 0	5.091 8	20.963 4	2.234 5
2	5.391 2	0.000 0	4.804 0	6.613 5	5.807 9	3.815 9
3	32.231 0	4.804 0	0.000 0	4.364 7	22.833 7	2.125 5
4	5.091 8	6.613 5	4.364 7	0.000 0	4.537	2.989 8
5	20.963 4	5.807 9	22.833 7	4.537 7	0.000 0	2.309 8
6	2.234 5	3.815 9	2.125 5	2.989 8	2.309 8	0.000 0

β_{ij} 也可类似地利用 LINGO 求得, 计算结果如下:

β_{ij}	$j = 1$	2	3	4	5	6
$i = 1$	0.000 0	109.263 6	-128.250 0	24.179 8	173.065 1	14.474 9
2	109.263 6	0.000 0	-88.871 1	-42.243 6	-92.304 8	9.000 0
3	-128.250 0	-88.871 1	0.000 0	12.476 3	-58.786 2	0.310 8
4	24.179 8	-42.243 6	12.476 3	0.000 0	5.969 2	-3.525 6
5	173.065 1	-92.304 8	-58.786 2	5.969 2	0.000 0	1.914 4
6	14.474 9	9.000 0	0.310 8	-3.525 6	1.914 4	0.000 0

于是,该飞机管理的数学规划模型可如下输入 LINGO 求解:

MODEL:

1]SETS:

2] plane/1..6/:cita;

3] link(plane,plane):alpha,beta;

4]ENDSETS

5] min = @sum(plane:@abs(cita));

6] @for(plane(1);

7] @bnd(-30,cita(1),30);

8]);

9] @for(link(i,j)|I#NE#J:

10] @ABS(beta(I,J)+0.5*cita(I)+0.5*cita(J))

11] >alpha(I,J);

12]);

13]DATA:

14] alpha=0.000 0 5.391 2.....

...2.309 8 0.000 0

20] ;

21] beta=0.000 010 9.263 6.....

...1.914 4 0.000 0

27] ;

28]enddata

END

[注] alpha,beta 中数据略去,见上面表格.

求解结果如下:

OPTIMUM FOUND AT STEP 197

SOLUTION OBJECTIVE VALUE = 3.630

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
CITA(1)	0.2974033E-06	-1.000 000
CITA(2)	-0.1424833E-05	-0.715 033 4
CITA(3)	2.557 866	1.000 000
CITA(4)	-0.3856641E-04	0.0000000E+00
CITA(5)	0.2098838E-05	-1.000 000
CITA(6)	1.071 594	0.0000000E+00
.....	(以下略)	

由此可知最优解为: $\theta_3 \approx 2.56^\circ$, $\theta_6 \approx 1.07^\circ$ (其它调整角度为 0).

评注:如果将目标改为最大调整量最小,则可进一步化简得到线性规划模型,也可用 LINDO 或 LINGO 求解.

参考文献:《数学的实践与认识》第 26 卷第 1 期,1996

6. 降落伞的选择

这个优化问题的决策变量是降落伞数量 n 和每个伞的半径 r ,可先将 n 和 r 看作连续变量,建立优化模型,求得最优解后,再按题目要求作适当调整.

目标函数是降落伞的费用,可以根据表 1 数据拟合伞面费用 C_1 与伞的半径 r 的关系.约束条件主要是伞的落地速度不能超过 20 m/s,需要建立并求解降落伞速度满足的微分方程,其中空气阻力系数要通过表 2 数据拟合.

设 $C_1 = ar^b$, a, b 用表 1 数据拟合;每根绳索长度 $l = \sqrt{2}r$.降落伞只受重力和空气阻力的作用,阻力与降落速度和伞面积的乘积成正比,阻力系数用表 2 数据拟合;初速为零.

模型的目标函数为降落伞的费用 $C = n(C_1 + C_2 + C_3)$,其中 $C_1 = ar^b$, $C_2 = 4 \times 16 \times \sqrt{2}r \approx 90.5r$, $C_3 = 200$,得

$$C = n(ar^b + 90.5r + 200) \quad (1)$$

记时刻 t 伞的速度为 $v(t)$,高度为 $x(t)$,阻力为 kr^2v , k 待定.由牛顿第二定律, $v(t)$ 满足

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kr^2v, \quad v(0) = 0 \quad (2)$$

其中 $m = 2000/n$ (一个降落伞的载重), g 为重力加速度. (2) 式的解

$$v = \frac{2000g}{kr^2n} (1 - e^{-\frac{kr^2n}{2000}t}) \quad (3)$$

又初始高度为 500 m,得到

$$x = 500 - \frac{2000g}{kr^2n}t + \frac{2000^2g}{k^2r^4n^2} (1 - e^{-\frac{kr^2n}{2000}t}) \quad (4)$$

落地速度不超过 20 m/s,即 $x=0$ 时 (4) 式的根 t 代入 (3) 式后, $v(t) \leq 20$. 整个优化模型可记作

$$\begin{aligned}
& \text{Min } C = n(ar^b + 90.5r + 200) \\
& \text{s.t. } 500 - \frac{2\,000g}{kr^2n}t + \frac{2\,000^2g}{k^2r^4n^2}(1 - e^{-\frac{kr^2n}{2\,000}t}) = 0 \\
& \quad \frac{2\,000g}{kr^2n}(1 - e^{-\frac{kr^2n}{2\,000}t}) \leq 20 \\
& \quad n \geq 1, r \geq 2
\end{aligned} \tag{5}$$

当参数 a, b, k 确定后, 即可求解模型(5)得到 n, r , 再作适当调整.

a, b 利用 MATLAB 软件估计得到 $a = 4.303\,9, b = 3.977\,9$, 取 $a = 4.3, b = 4$. 估计 k 时注意到 $m = 300 (n = 1), r = 3$, 利用 MATLAB 软件得到 $k = 18.458\,3$.

将 a, b, k 代入模型(5), 用 MATLAB 求解, 得到 $n = 6.007\,2, r = 2.969\,5, C = 4\,824.49$.

将结果调整为 $n = 6, r = 3$, 即选购 6 个降落伞, 每个半径 3 m. 把这个结果代入(3)和(4), 得落地速度 $v = 19.672\,8\text{ m/s}$, 符合要求. 费用为 $C = 6 \times (350 + 90.5 \times 3 + 200) = 4\,920$ 元.

7. 会议分组安排(1997 年美国大学生数学建模竞赛 B 题)

这是一个分派的优化问题, 优化指标是: 董事对相遇(即两位董事在同一组开会)次数相同; (不同段的)两组内共同董事数最少. 准则是: 任一董事不在同一资深职员主持的两段会中; 在职董事均匀分派.

据常识 29 位董事应均匀分派, 即上午的 6 组中 5 组各 5 人, 1 组 4 人; 下午的 4 组中 3 组各 7 人, 1 组 8 人. 在此基础上可估计董事对的平均相遇次数: 29 位董事可组合成 $C_{29}^2 = 406$ 对, 而均匀分派下为董事对提供的相遇次数 532, 平均相遇次数为 $\frac{532}{406} \approx 1.3$. 所以优化的分派应是每一董事对的相遇次数为 1 或 2, 不出现(或尽量少出现)相遇次数为 0, 3, 4, ... 的情况.

可以构造整数规划模型, 将优化指标转化为目标函数, 以准则为约束条件. 也可以直接建立衡量分派方案优劣的指标函数, 它由若干子指标加权而成, 而上而给出的优化指标和准则都作为子指标.

在看到的优秀论文中结果最好的是, 相遇次数为 0, 1, 2, 3 分别有 32, 218, 152, 4(对). 如果相遇 0 次、3 次的对数更少, 结果将更好, 你能得到吗?

参考文献: 叶其孝, 《大学生数学建模竞赛辅导教材》(四), 湖南教育出版社, 2001

8. 飞机排队(1989 年美国大学生数学建模竞赛 B 题)

题目给出的条件和信息很少, 需作若干简化假设, 如:

1) 机场仅有一条飞机跑道供起飞, 任何飞机起飞占用跑道的的时间相同, 记

作时间窗口 Δ ;

2) 第 i 架飞机在第 j 个窗口起飞的费用与其他飞机无关;

3) 允许飞机最迟起飞的时间相同, 记作 τ , 若起飞时间不超过 τ , 则加速飞行仍可按时到达; 若超过 τ , 则飞机晚点到达, 转机的乘客将误机;

4) 转机的乘客误机损失费相同.

设 $t=0$ 有 n 架飞机请求起飞, 控制塔要设计一个起飞次序, 即为每架飞机分配一个窗口, 使总费用最小. 费用包括延迟起飞的附加费和付给乘客的损失费.

设第 i 架飞机在第 j 个窗口起飞的费用为 c_{ij} , 若安排第 i 架飞机在第 j 个窗口起飞, 定义 $x_{ij}=1$; 否则 $x_{ij}=0$, 于是总费用为

$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

x_{ij} 应满足

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

(1), (2) 是典型的 0-1 规划. 剩下的关键问题是确定 c_{ij} .

记第 i 架飞机在第 j 个窗口起飞的时间为 t , $t = (j-1)\Delta$, 时刻表上预定起飞的时间为 t_1 , 预定到达下一站的时间是 t_2 , 飞行距离是 d , 飞行的正常速度和最大速度分别是 v 和 v_m . 根据最迟起飞时间 τ 的定义有 $d = (t_2 - t_1)v = (t_2 - \tau)v_m$, 于是

$$\tau = t_2 - (t_2 - t_1)v/v_m \quad (3)$$

当 $t_1 \leq t \leq \tau$ 时加速飞行导致的附加费与距离和延迟时间成正比, 设为 $f_1(t) = k(t_2 - \tau)(t - t_1)$, 系数 k 可从经济上确定; 乘客抱怨折合的损失费设为 $g_1(t) = ap \exp(\alpha(t - t_1) - 1)$, p 是乘客人数, a, α 是待定参数.

当 $t > \tau$ 时加速飞行导致的附加费为 $f_1(\tau)$; 乘客抱怨折合的损失费为 $g_1(t)$; 转机乘客的损失费设为 $f_2(t) = bq$, q 是转机人数, b 是待定参数.

由上可得

$$c_{ij} = \begin{cases} f_1(t) + g_1(t), & t_1 \leq t \leq \tau \\ f_1(\tau) + g_1(t) + f_2(t), & t > \tau \end{cases} \quad (4)$$

这里只有 a, α, b 是带主观性的、比较难以确定的参数, 应该估计它们的变化对结果的影响.

可以自己产生一组模拟数据作计算.

参考文献: 叶其孝, 《大学生数学建模竞赛辅导教材》, 湖南教育出版社, 1993

9. 牧场管理^[22]

用 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ 表示母羊按年龄(0~1, 1~2, ..., 4~5)的分布向量, 由母羊的繁殖率和存活率可得种群数量的转移矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1.8 & 2.4 & 2.0 & 1.8 \\ q & & & & \\ & 0.98 & & & \\ & & 0.95 & & \\ & & & 0.80 & \end{bmatrix}$$

其中空白处为 0, q 是 0~1 岁(即羊羔)的存活率, 可以控制. 为保持羊群数量 N 不变, 需满足 $x = Px$, 由此可得 $q = 0.136$, $x = N(0.668, 0.091, 0.089, 0.085, 0.067)^T$. 可知当 N 不变时每年产羊羔数量为 $0.668N$, 秋冬季存活的母羊数量为 $0.332N$.

设草场面积为 $S(\text{m}^2)$, 根据各个季节草的需求量(kg)和生长率, 应有:

$$\text{冬季 } 2.1 \times 0.332N = 0.697N$$

$$\text{春季 } 0.668N + 2.4 \times 0.332N = 1.465N < 0.003S$$

$$\text{夏季 } 1.65 \times 0.668N + 1.15 \times 0.332N = 1.484N < 0.007S$$

$$\text{秋季 } 1.35 \times 0.332N = 0.448N < 0.004S$$

可以算出, 只要春季满足 $N/S < 0.00205$ (每平方米草地羊的数量), 夏季和秋季都不成问题. 若夏季贮存草 $y \text{ kg/m}^2$, 保存到冬季用, 则需有 $1.484N/S < 0.007 - y$, 其中 N/S 以春季需满足的数值代入, 可得 $y < 0.0039 \text{ kg/m}^2$, 而冬季的需求量是 $0.697 \times 0.00205 = 0.0014 \text{ kg/m}^2$, 故夏季的贮存足够冬季之用.

10. 零件的参数设计(1997 年全国大学生数学建模竞赛 A 题)

这个优化问题的目标是, 由产品的质量损失和零件的成本二者构成的费用函数最小. 质量损失取决于产品参数偏离目标值 y_0 大小, 由所给数据可设质量损失函数 $L(y) = 10^5(y - y_0)^2$.

设零件参数为相互独立的随机变量 x_1, x_2, \dots, x_n , 期望和均方差分别记作 x_{i0} 和 σ_i , (绝对)容差记为 $r_i = 3\sigma_i$, 相对容差记为 $t_i = r_i/x_{i0}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 再记 $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. 产品参数记作 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 成批生产时, 平均每件产品的质量损失用 $L(y)$ 的期望度量, 记为 $Q(x_0, t) = E[L(y)]$. 零件成本取决于容差, 第 i 批零件成本记作 $c_i(t_i)$, 零件总成本是 $C(t) = c_1(t_1) + \dots + c_n(t_n)$. 于是优化问题为, 求 x_0 和 t 使目标函数 $Z(x_0, t) = E[L(y)] + C(t)$ 最小.

可以导出 $E[L(y)] = 10^5 E(y - y_0)^2 = 10^5 [(Ey - y_0)^2 + \sigma_y^2]$, 其中 σ_y^2 是 y 的方差. 问题在于怎样简化 f , 使 E_y 和 σ_y^2 容易计算.

注意: 使 $E_y = y_0$ 是否是最优解.

决策变量 x_0 是连续的, t 是离散的, 应选择适当的方法求解这个优化问题.

参考结果为, 参数标定值 $x_0 = (0.075, 0.375, 0.125, 0.1185, 1.1616, 19.96, 0.5625)$, 容差等级 (B, B, B, C, C, B, B), (平均每件) 产品的总费用 $Z = 748.7$ 元.

参考文献:《数学的实践与认识》第 28 卷第 1 期, 1998

11. 汽车保险^[22]

假设保险公司的保险费分为纯保险费和附加保险费两部分, 附加保险费用于公司的部分业务支出, 客户一旦投保, 这部分钱将不再退回. 根据数据可以计算出每个客户承担的这部分钱为 $M_0 = 17.01$ 元. 设 M 为基本保险费, 一年中某客户在 t 个月后退保, 则应退回的保费为 $M_1 = (M - M_0) \times \frac{12-t}{12}$, 且假设受伤获赔的司机当年不注销, 注销人仅为死亡客户和没要求索赔而自然退出的两类. 还可以假设不同级别的司机获得的死亡赔偿费相同等.

由数据可以算出各类别司机中的死亡率、索赔率和自然注销率等, 而且若采用安全带法规后死亡率下降 40%, 其余的不变, 在此条件下, 平均医药费会下降 20% 到 40%. 由于新投保人已知, 注意考察各类人员的来源 (例如 0 类客户包括新客户与从 1, 2 类客户降级下来的客户), 列出他们之间的关系, 编程计算出今后五年客户中各类人的数量. 这是解决问题的关键之一.

然后根据假设, 利用已有的各类司机的数据, 计算出每年度各类司机的汽车平均修理费、医疗费、死亡赔偿费以及偿还退回费. 最后计算出这 5 个年度的收入. 利用

$$\text{收入} = \text{支出} + \text{修理费} + \text{医疗费} + \text{死亡赔偿费} + \text{偿还退回费}$$

可估算出今后五年每年度应收取的保费.

参考结果为 (单位: 元):

医疗费下降 20% 时, 每年的保费依次为: 637.99, 637.00, 635.01, 634.45, 633.87.

医疗费下降 40% 时, 每年的保费依次为: 580.93, 580.11, 578.27, 577.78, 577.24.

12. 药物在脑中的分布 (1990 年美国大学生数学建模竞赛 A 题)

药物在脑中的传输看作在均匀介质中的扩散, 伴随之吸收和代谢引起的衰减, 不考虑对流. 题目附图中“左、前、顶”分别为 x, y, z 轴, 记时刻 t , (x, y, z) 处的药物浓度为 $c(x, y, z, t)$, x, y, z 方向的扩散系数为 E_x, E_y, E_z , 衰减系数为 k , 则 $c(x, y, z, t)$ 满足扩散方程

$$\frac{\partial c}{\partial t} = E_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + E_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + E_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - kc \quad (1)$$

设 $t=0$ 时注射点为 (x_0, y_0, z_0) , 注射量为 M , 即初始条件为 (x_0, y_0, z_0) 处强度 M 的点源函数. 因为题目给出的样本的区域比脑的范围小得多, 所以可认为扩散过程在无穷空间进行, 于是(1)的解为

$$c(x, y, z, t) = \frac{M}{(4\pi t)^{3/2} (E_x E_y E_z)^{1/2}} \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{4tE_x} - \frac{(y-y_0)^2}{4tE_y} - \frac{(z-z_0)^2}{4tE_z} - kt \right] \quad (2)$$

设全部样本数据是在 $t=1$ (单位) 瞬时完成的, 且可设注射点 $y_0 = l/2$ (l 为圆柱体样本长度).

(2) 式有 7 个待定参数, 得到它们就能计算任意时刻、任意位置的药物浓度, 从而确定药物影响区域.

同时估计 7 个参数是很复杂的非线性最小二乘, 样本不够多难以得到好的结果, 应设法尽量减少要估计的参数.

x_0, z_0 能够直接用样本数据拟合一个二次函数 $ax^2 + bz^2 + cxz + dx + ez + f$, 用线性最小二乘得到.

M 和 k 相关性很强, 应先设定一个如 M . 至于扩散系数 E_x, E_y, E_z , 由数据在 x, z 方向的近似对称性可设 $E_x = E_z$, 这样, 需要作非线性最小二乘拟合的只有 3 个参数: E_x, E_y, k . 当然, 还可以代入他们的拟合值再估计 M 和 E_z .

作最小二乘拟合时需将空间离散化, 每个圆柱体样本的药物浓度由(2)式按数值积分得到. 7 个参数的参考结果: $x_0 = 3.268, z_0 = 2.726, M = 1.4 \times 10^6, E_x = E_z = 0.375, E_y = 0.275, k = 0.140$.

根据资料, 天然的多巴胺在脑中的浓度大于 10 计数单位/立方毫米, 所以可以认为 $c=10$ 的边界是药物影响所及的范围. 而由(2)式可知, 随着 t 的增加, 这个边界先扩大后缩小, 那么应取最大的那个边界.

这个问题还可以作统计分析及灵敏性分析 (如参数变化 10% 时结果变化多少).

参考文献: 叶其孝, 《大学生数学建模竞赛辅导教材》, 湖南教育出版社, 1993

13. 血样的分组检验^[17]

设总人数为 n , 已知每人血样阳性的先验概率为 p , 记血样阴性的概率 $q = 1 - p$.

(1) 设分 x 组, 每组 k 人 (n 很大, x 能整除 $n, k = n/x$), 混合血样检验 x 次. 阳性组的概率为 $p_1 = 1 - q^k$, 阳性组数的平均值为 $x p_1$, 这些组需每人检验, 平均次数为 $k x p_1$, 所以平均总检验次数 $N = x + k x p_1$, 一个人的平均检验次数为 N/n , 记作

$$E(k) = \frac{1}{k} + 1 - q^k = \frac{1}{k} + 1 - (1 - p)^k \quad (1)$$

问题是给定 p 求 k 使 $E(k)$ 最小.

p 很小时利用 $(1-p)^k \approx 1-kp$ 可得

$$E(k) \approx \frac{1}{k} + kp \quad (2)$$

显然 $k = p^{-1/2}$ 时 $E(k)$ 最小. 因为 k 需为整数, 所以应取 $k = [p^{-1/2}]$ 和 $k = [p^{-1/2}] + 1$, 比较 $E(k)$, 得到 k 的最优值, 见表 1.

p	0.01%	0.1%	1%	2%	5%
k	100	32	10	8	5
$E(k)$	0.020	0.063	0.196	0.274	0.426

表 1 一次分组检验结果

随着 p 的增加 k 减小, $E(k)$ 变大. 只要 $E(k) < 1$, 就应分组.

注: 若不取近似, 利用导数可得 $q^k k^2 = -1/\ln q$ 时 $E(k)$ 最小.

(2) 当 $E(k) > 1$ 时不应分组. 由(1)得 $p > 1 - k^{-1/k}$, 检查 $k = 2, 3$, 可知当 $p > 0.307$ 不应分组.

(3) 将第 1 次检验的每个阳性组再分 y 小组, 每小组 m 人 (y 整除 k , $m = k/y$). 因为第 1 次阳性组的平均值为 $x p_1$, 所以第 2 次需分小组平均检验 $y x p_1$ 次, 而阳性小组的概率为 $p_2 = 1 - q^m$ (为计算 p_2 简单起见, 将第 1 次所有阳性组合在一起分小组), 阳性小组总数的平均值为 $x p_1 y p_2$, 这些小组需每人检验, 平均检验次数为 $m x p_1 y p_2$, 所以平均总检验次数 $N = x + y x p_1 + m x p_1 y p_2$, 一个人的平均检验次数为 N/n , 记作 (注意: $n = kx = myx$)

$$E(k, m) = \frac{1}{k} + \frac{p_1}{m} + p_1 p_2 = \frac{1}{k} + \frac{1}{m} (1 - q^k) + (1 - q^k) (1 - q^m), q = 1 - p \quad (3)$$

问题是给定 p 求 k, m 使 $E(k, m)$ 最小.

p 很小时(3)式可简化为

$$E(k, m) \approx \frac{1}{k} + \frac{kp}{m} + kmp^2 \quad (4)$$

解得

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} p^{-3/4}, m = p^{-1/2} \quad (5)$$

且要求 $k, m, k/m$ 均为整数. 经在(5)的结果附近计算, 比较 $E(k, m)$, 得到 k, m 的最优值, 见表 2.

p	0.01%	0.1%	1%	2%	5%
k	700	50	24	16	8
m	100	25	12	8	4
$E(k, m)$	0.0028	0.0232	0.084	0.138	0.305

表 2 二次分组检验结果

与表 1 比较可知,二次分组的效果 $E(k, m)$ 比一次分组的效果 $E(k)$ 更好.

14. 强烈的碰撞(1999 年美国大学生数学建模竞赛 A 题)

这个模型有两个主要部分,一是撞击产生多大的能量,并因而形成多大的陨石坑,二是能使多少冰融化,其后果如何.因为题目基本上没有给出什么条件,所以需要作一些简化假设,并调查许多有关资料.

1) 撞击能量和陨石坑的大小

计算撞击产生的动能需要小行星的质量和撞击时的速度,查阅资料得典型小行星的密度为 $2.5 \times 10^{12} \text{ kg/km}^3$,算出直径 1 000 m 的小行星质量为 $m = 1.31 \times 10^{12} \text{ kg}$.为计算撞击时的速度假设小行星的运动只受太阳、地球和月亮的引力作用,服从万有引力定律.

以太阳为坐标原点,记小行星的位置、速度、加速度为 $\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}$,太阳、地球和月亮的位置、速度和质量为 $\vec{x}_i, \vec{v}_i, m_i, i = 1, 2, 3$,采用离散化计算,即已知 t 时刻的 $\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}$ 后,按以下公式计算 $t + \Delta t$ 时刻的 $\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}$ (引力常数记作 k):

$$\begin{aligned}\vec{a}(t + \Delta t) &= k \sum_{i=1}^3 \frac{m_i (\vec{x}(t) - \vec{x}_i(t))}{|\vec{x}(t) - \vec{x}_i(t)|^3} \\ \vec{v}(t + \Delta t) &= \vec{v}(t) + \vec{a}(t + \Delta t) \Delta t, \\ \vec{x}(t + \Delta t) &= \vec{x}(t) + \vec{v}(t + \Delta t) \Delta t + \vec{a}(t + \Delta t) \Delta t^2 / 2\end{aligned}\quad (1)$$

而 $t = 0$ 时太阳、地球和月亮的特征由资料得到:

	太阳($i=1$)	地球($i=2$)	月亮($i=3$)
m_i (kg)	1.99×10^{30}	5.97×10^{24}	7.35×10^{23}
r_i (km)	6.96×10^5	6.38×10^3	$1\,074 \times 10^1$
\vec{x} (km)	$(0, 0, 0)$	$\vec{x}_1 + (1.50 \times 10^8, 0, 0)$	$\vec{x}_2 + (0.384 \times 10^5, 0)$
\vec{v} (km/s)	$(0, 0, 0)$	$\vec{v}_1 + (0.298, 0)$	$\vec{v}_2 + (-1.02, 0, 0)$

小行星初始时刻在距地球 $1.54 \times 10^6 \text{ km}$ 任意位置处,相对于太阳的速度与地球相同,并加上一个大小为 10 km/s ,指向离地心不超过 $9.57 \times 10^3 \text{ km}$ 的任意一点的速度,由此计算撞击的过程.

从 $t=0$ 开始, 给定的 Δt (如 10s), 按(1)计算当小行星与地球的距离小于它们的半径之和时发生碰撞. 在撞击处记 $\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_2$, $\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_2$, 则撞击角度 α , 撞击速度 u 和撞击处地球纬度 β 为

$$\alpha = -\arcsin\left(\frac{\Delta \vec{x}}{|\Delta \vec{x}|}, \frac{\Delta \vec{v}}{|\Delta \vec{v}|}\right), u = |\Delta \vec{v}|,$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{\Delta \vec{x} \times (0, 0, 1)}{\sqrt{(\Delta \vec{x} \times (1, 0, 0))^2 + (\Delta \vec{x} \times (0, 1, 0))^2}}\right)$$

对于小行星初始时刻的任意位置可以作多次模拟, 从太阳系平面内或平面外飞向地球, 这样得到的一个参考结果是, 约 1% 的机会撞击在大于南纬 80° 的地方; 从太阳系平面内撞击的角度 α 约 18° , 太阳系平面外为 45° ; 速度 u 为 15 km/s, 与文献相符.

由此可得撞击产生的动能为 $E = mu^2/2 = 1.5 \times 10^{20}$ J, 相当于 3.5×10^4 百万吨 TNT.

有资料给出了撞击在地面上的陨石坑的直径:

$$D = 0.64 \left(\frac{Y}{\rho_1}\right)^{1/3.4} \left(\frac{20\,000}{u}\right)^{0.1} (\cos \alpha)^{0.5} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{0.083}$$

其中 Y 是以百万吨 TNT 计的能量, ρ_1, ρ_2 分别是目标物和撞击物的密度. 计算时采用 $\alpha = 30^\circ$, 冰密度 $\rho_1 = 0.9 \text{ g/cm}^3$, 得陨石坑直径约为 15 km.

资料给出, 陨石坑深度与直径之比约 1:5 或 1:7, 于是直径 15 km 时深度约 2.5~3 km. 考虑到撞击角度较小, 且冰层下有坚实的岩层, 认为陨石坑深度不会超过 2 km.

2) 冰层融化情况及其后果

南极冰层的平均厚度为 2 km, 温度为 -76°C , 根据冰融化的物理常数可算出, 撞击产生的全部动能 1.5×10^{20} J 能融化 340 km^3 的冰, 即使全部融化的水流入海洋, 提高海平面不到 1 mm.

如果撞击产生的全部动能只用于提高直径 1 km 的小行星下面的冰的温度, 根据直径 1 km 的圆下冰的质量为 1.5×10^{12} kg 及物理常数可算出, 水温可提高到 $48\,000^\circ\text{C}$ (汽化). 由于能量不可能全部用于加热冰层, 上述结果是过分的.

为估计这个过高的水温能融化多少冰, 将南极看作厚 2 km、宽 6 000 km 的二维平面, 用热传导方程求解, 初始温度是直径 1 km 圆外为 -76°C , 圆内为 $48\,000^\circ\text{C}$, 得到最多融化 $5.7 \times 10^7 \text{ m}^3$ 的冰, 且需要 10 天时间. 这样长的时间即使能融化, 也很难流入海洋.

还可以讨论引发地震和海啸的影响.

参考文献: 叶其孝, 《大学生数学建模竞赛辅导教材》(四), 湖南教育出版社,

15. 彩票中的数学(2002年全国大学生数学建模竞赛B题)

建模的准备工作之一是计算获各项奖的概率. 29种方案可分为四类, K_1 : 10选6+1(6+1/10)型, K_2 : n 选 m (m/n)型, K_3 : n 选 $m+1$ ($m+1/n$)型, K_4 : n 选 m (m/n)无特别号型, 分别给出计算概率的公式:

● K_1 : 10选6+1(6+1/10)型

$$p_1 = \frac{1}{5 \times 10^6} = 2 \times 10^{-7}, p_2 = \frac{4}{5 \times 10^6} = 8 \times 10^{-7}, p_3 = \frac{2 \times C_9^1}{10^6} = 1.8 \times 10^{-5},$$

$$p_4 = \frac{2C_9^1 C_{10}^1 + C_9^1 C_9^1}{10^6} = 2.61 \times 10^{-4}, p_5 = \frac{2C_9^1 C_{10}^1 C_{10}^1 + 2C_9^1 C_9^1 C_{10}^1}{10^6} = 3.42 \times 10^{-3},$$

$$p_6 = \frac{2 \times C_9^1 C_{10}^1 C_{10}^1 C_{10}^1 + 3 \times C_9^1 C_9^1 C_{10}^1 C_{10}^1 - (3 \times C_9^1 \times C_9^1 + 2 \times C_9^1)}{10^6} = 4.1995 \times 10^{-2}.$$

● K_2 : n 选 m (m/n)型

$$p_1 = \frac{1}{C_n^m}, p_2 = \frac{C_m^{m-1}}{C_n^m}, p_3 = \frac{C_m^{m-1} C_{n-(m+1)}^1}{C_n^m}, p_4 = \frac{C_m^{m-2} C_{n-(m+1)}^1}{C_n^m},$$

$$p_5 = \frac{C_m^{m-2} C_{n-(m+1)}^2}{C_n^m}, p_6 = \frac{C_m^{m-3} C_{n-(m+1)}^2}{C_n^m}, p_7 = \frac{C_m^{m-3} C_{n-(m+1)}^3}{C_n^m}.$$

● K_3 : n 选 $m+1$ ($m+1/n$)型

$$p_1 = \frac{1}{C_n^{m+1}}, p_2 = \frac{C_{n-(m+1)}^1}{C_n^{m+1}}, p_3 = \frac{C_m^{m-1} C_{n-(m+1)}^1}{C_n^{m+1}}, p_4 = \frac{C_m^{m-1} C_{n-(m+1)}^2}{C_n^{m+1}},$$

$$p_5 = \frac{C_m^{m-2} C_{n-(m+1)}^2}{C_n^{m+1}}, p_6 = \frac{C_m^{m-2} C_{n-(m+1)}^3}{C_n^{m+1}}, p_7 = \frac{C_m^{m-3} C_{n-(m+1)}^3}{C_n^{m+1}}.$$

● K_4 : n 选 m (m/n)无特别号型

$$p_1 = \frac{1}{C_n^m}, p_2 = \frac{C_m^{m-1} C_{n-m}^1}{C_n^m}, p_3 = \frac{C_m^{m-2} C_{n-m}^2}{C_n^m}, p_4 = \frac{C_m^{m-3} C_{n-m}^3}{C_n^m},$$

$$p_5 = \frac{C_m^{m-4} C_{n-m}^4}{C_n^m}.$$

评价各方案的合理性的办法有多种, 如

(1) 风险决策的效用函数法: 可取偏大型正态分布函数 $A(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$ ($x > 0$) 为效用函数, 并将彩票方案对彩民的吸引力分为奖金的吸引力和中奖率的吸引力两个部分, 分别构造两个满意度函数 $A(s)$ 和 $A(p)$, 并依据有关数据将彩民分为冒险者、中立者和避险者三类, 确定其比例, 按照各自的最大满意度分别确定相应的满意参数 σ_i ($i = 1, 2, 3$), 得到满意度函数 $\varphi_i(s) = 1 - e^{-\left(\frac{s}{\sigma_i}\right)^2}$, $\psi_i(p) = 1 - e^{-\left(\frac{p}{\sigma_i}\right)^2}$ ($i = 1, 2, 3$), 由此构造出吸引度函数

$f = a_1[\varphi_1(s_1) + \psi_1(p_1)] + a_2[\varphi_2(\bar{s}_{23}) + \psi_2(p_{(13)})] + a_3[\varphi_3(\bar{s}_{47}) + \psi_3(p_{(17)})]$
 其中 \bar{s}_{ij} 表示第 i 等奖到第 j 等奖的奖金的平均值, $p_{(ij)}$ 表示第 i 等奖到第 j 等奖的概率之和.

以 f 为合理性指标函数对已有方案进行评价,并对各奖项的设置、奖金比例、奖金数额和相应的概率给出约束,可建立非线性优化模型,寻求“更好”的方案.

(2) 层次分析法:由于考虑的因素可多可少,比较矩阵和权重的确定比较困难,缺少可靠的依据.建议综合考虑一等奖金额、低项奖金额、中奖率和中奖面等因素,并经社会调查得到彩民对各因素重视的程度,确定相应的权重.

用层次分析法研究这个问题,不是十分有效的方法,使用得当也只能对问题(一)进行讨论,解决问题(二)却无能为力.

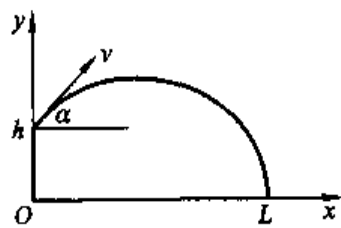
(3) 分类加权法:将彩民分为风险喜好型、风险厌恶型和中性型三类,不同类型的彩民对各因素的看法不同.可根据社会调查或网上资料数据给出相应的权重.这种方法也有一定的主观性.

参考文献:《工程数学学报》第 20 卷第 5 期,2003

16. 铅球掷远

(1) 如右图,出手速度、出手角度、出手高度分别为 v, α, h , 掷远为 L , 不难得到

$$L = \frac{v^2}{2g} \sin 2\alpha + \sqrt{\left(\frac{v^2}{2g} \sin 2\alpha\right)^2 + \frac{2hv^2}{g} \cos^2 \alpha} \quad (1)$$

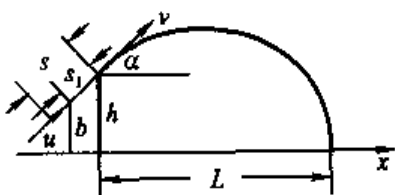


(2) L 是 v 和 h 的增函数,但是最佳出手角度 α 只能数值地计算. L 对 v, α 的灵敏度虽然可以分别用 $S(L, v) = \frac{dL}{dv} \frac{v}{L}$, $S(L, \alpha) = \frac{dL}{d\alpha} \frac{\alpha}{L}$ 来度量,但是它们也只能数值地计算.可以发现, L 对 v 的灵敏度远大于对 α 的灵敏度.

(3) 运动员展臂过程中用的力为常数 F , 设 F 与 α 无关,则铅球在 α 方向的加速度为

$$a = F/m - g \sin \alpha \quad (2)$$

其中 m 是铅球质量. 设展臂前球速是 u , 球在展臂过程中运动的距离是 s , 如右图, 则出手速度 v 满足



$$v^2 = u^2 + 2as \quad (3)$$

(2) 代入(3)得

$$v^2 = (u^2 + 2sF/m) - 2sg \sin \alpha \quad (4)$$

即出手速度与出手角度 α 有关, 随着 α 的增加而减小.

设肩高 b , 臂长 s_1 , 肩恰在场地边界, 则掷远为

$$D = L + s_1 \cos \alpha \quad (5)$$

其中用(1)式计算 L 时, v 用(4)式, $h = b + s_1 \sin \alpha$, 且一般 $s = 1.9s_1$. 于是需要给定 b, s_1, u , 讨论 F 和 α 的影响.