

NUMERISCHE STRÖMUNGSMECHANIK  
SOMMERSEMESTER 2016

---

# Hausaufgabe

---

Name: Roland Zimmermann  
Matrikelnummer: 21426901  
Mail Adresse: roland.zimmermann@stud.uni-goettingen.de  
Abgabetermin: 05.08.2016

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2. Fragestellung</b>	<b>3</b>
<b>3. Theorie</b>	<b>4</b>
3.1. Die Diffusions-Advektion-Gleichung . . . . .	4
3.2. Das FTCS-Schema . . . . .	5
3.3. Das BTCS-Schema . . . . .	6
<b>4. Durchführung der Aufgaben</b>	<b>8</b>
4.1. Aufgabe 1: Untersuchung von $\vec{v}$ . . . . .	8
4.2. Aufgabe 2: FTCS-Lösung . . . . .	9
4.3. Aufgabe 3: Numerische Korrektheit der FTCS-Lösung . . . . .	10
4.4. Aufgabe 4: Auswertung verschiedener FTCS-Lösungen . . . . .	11
4.5. Aufgabe 5: Beurteilung der Stabilität der FTCS-Lösung . . . . .	14
4.6. Aufgabe 6: BTCS-Lösung . . . . .	16
<b>5. Auswertung der Ergebnisse</b>	<b>18</b>
5.1. Numerische Korrektheit der FTCS-Lösung . . . . .	18
5.2. Aufgabe 5: Beurteilung der Stabilität der FTCS-Lösung . . . . .	18
<b>Literatur</b>	<b>18</b>
<b>A. Quellcode</b>	<b>19</b>
A.1. Hauptprogramme . . . . .	19
A.2. Hilfsbibliotheken . . . . .	26

---

## 1. Einleitung

Viele Verhaltensweisen und Effekte in der Natur können durch partielle Differenzialgleichungen beschrieben werden. Die Lösung dieser ist allerdings nur in wenigen, speziellen Fällen analytisch möglich. Für die restlichen Fälle müssen numerische Lösungsverfahren verwendet werden. Gerade diese Szenarien spielen beispielsweise in der Auto- und Luftfahrtindustrie eine relevante Rolle bei der Produktentwicklung und Optimierung. In dieser Arbeit werden hier durch motiviert zwei verschiedene Lösungsverfahren für ein solches Problem implementiert und anschließend analysiert.

## 2. Fragestellung

In dieser Hausaufgabe wird die Wärmeausbreitung (siehe 3.1) in einem zweidimensionalen, rechteckigen System betrachtet werden. Diese soll durch ein extern erzeugtes Geschwindigkeitsfeld (beispielsweise durch einen Ventilator) verstärkt werden. Dieses Vektorfeld soll nicht zeitabhängig sein, und lässt sich in dimensionsloser Form durch

$$\vec{v} = (\pi \sin(2\pi x) \cos(\pi y), -2\pi \cos(2\pi x) \sin(\pi y))^t$$

beschreiben. In dem betrachteten System gibt es für jeden der vier Ränder je eine Randbedingung. So soll die Temperatur auf dem oberen Rand  $T = 1$  und auf dem unteren  $T = 0$  betragen. An dem linken und rechten Rand soll dagegen die jeweilige Normalenableitung verschwinden. Dies wird durch eine wärmeisolierende Wand in dem System bedingt. Zu Beginn soll eine Temperaturverteilung der Form  $T_{start} = y$  vorliegen.

Zur Untersuchung des System fallen mehrere Aufgaben an. So wird zuerst das Geschwindigkeitsfeld selber untersucht (siehe 4.1). Anschließend wird eine erste numerische Lösung des Problems (im *FTCS-Schema*) durchgeführt (siehe 4.2). Daraufhin wird nun die numerische Korrektheit dieser Lösung untersucht (siehe 4.3). Schließlich werden für verschiedene Parameter Simulationen durchgeführt, um unter anderem die Stabilität zu beurteilen (siehe 4.4, 4.5). Schließlich wird das Problem noch einmal gelöst, diesmal aber im *BTCS-Schema* (siehe 4.6).

Abschließend wird noch ein kurzer Vergleich der beiden Verfahren hinsichtlich ihrer Resultate und der benötigten Rechenzeit durchgeführt.

Alle hierfür benötigten Programme und Hilfsroutinen werden in *C++* implementiert.

---

## 3. Theorie

### 3.1. Die Diffusions-Advektion-Gleichung

Die Ausbreitung von Flüssigkeiten, Gasen beziehungsweise von Energie kann zum einen durch die *Diffusionsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}T = D\nabla^2T \quad (1)$$

und zum anderen durch die *Advektionsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}T = -\nabla \cdot (\vec{v} \cdot T) \quad (2)$$

beschrieben werden. Hierbei stehen  $T$  für die Verteilung der Energie (Temperatur),  $t$  für die Zeit und  $D$  für die Diffusionskonstante. Während die *Diffusionsgleichung* die zeitliche Ausbreitung der Partikel beziehungsweise der Energie, bedingt durch zufällige Bewegungen, beschreibt, beschreibt die *Advektionsgleichung* den Partikelfluss der durch ein Geschwindigkeitsfeld herbeigeführt wird.

Fasst man diese beiden Effekte aus den Gleichungen (2) und (1) zusammen, so erhält man die *Diffusions-Advektion-Gleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t}T = D\nabla^2T - \nabla \cdot (\vec{v} \cdot T)$$

Hierbei kann nun, wenn ein gegebenes externes, divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld gegeben ist, dieses aus der Divergenz herausgelöst werden, sodass sich

$$\frac{\partial}{\partial t}T + \vec{v} \cdot \nabla T = D\nabla^2T \quad (3)$$

ergibt.

Durch das Einführen der *Péclet-Zahl*

$$Pe = \frac{Lv\rho c_p}{\lambda}$$

ist eine Entdimensionalisierung der Gleichung (3) möglich. Hierbei stehen  $L$  für eine charakteristische Länge,  $v$  für eine Geschwindigkeit,  $\rho$  für die Dichte,  $c_p$  für die spezifische Wärmekapazität und  $\lambda$  für die Wärmeleitfähigkeit des jeweiligen Mediums. Somit ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t}T + Pe \cdot \vec{v} \cdot \nabla T = \nabla^2T \quad (4)$$

### 3.2. Das FTCS-Schema

Eine mögliche Methode zur Lösung einer solchen partiellen Differenzialgleichung ist durch die Verfahrensgruppe der finiten Differenzen gegeben. Eine hierfür geeignete Diskretisierung des Problems ist in Form eines *FTCS*-Schemas (Forward in Time, Centered in Space) gegeben. Hierbei wird der Raum in der  $x$ -Richtung in  $(N_x + 1)$ - und in der  $y$ -Richtung in  $(N_y + 1)$  Stützstellen unterteilt, sodass sich ein räumliches Gitter ergibt. Zwischen diesen Punkten herrscht ein jeweiliger Abstand von  $\Delta x = X/N_x$  und  $\Delta y = Y/N_y$ , wobei  $X$  und  $Y$  für die Ausmaße des zu beschreibenden Problems in der  $x$ - und  $y$ -Richtung sind.

Die Temperatur  $T(x, y)$ , die hiermit beschrieben werden soll, geht somit in die Form  $T_{i,j}$  über, wobei  $i$  der Index des Punktes in der  $x$ - und  $j$  der in der  $y$ -Richtung ist. Diese Indizes laufen von 0 bis  $N_x$  beziehungsweise  $N_y$ .

Um nun noch die Zeit zu erfassen, wird auch diese in Punkte diskretisiert, die einen Abstand  $\Delta t$  haben. Sodass sich insgesamt ein dreidimensionaler Würfel ergibt, dessen verschiedenen Ebenen für die verschiedenen Zeitpunkte stehen. Erneut geht die Temperatur  $T(x, y) = T_{i,j}$  über in  $T_{i,j}^N$ , wobei  $N$  für den zeitlichen Index steht. Auch hier wird von 0 an indiziert.

Diese Aufteilung erlaubt es nun, die in den Gleichung (4) vorkommenden Ableitungen zu beschreiben. Hierbei wird in dem *FTCS*-Schema die zeitliche Ableitung in der ersten und die räumlichen in der zweiten Ordnung beschrieben. Die Ordnung gibt hierbei jeweils an, wie stark der Fehler von der jeweiligen Schrittweite abhängt. Bei einem Verfahren zweiter Ordnung hängt dieser Fehler von  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$  ab. Es ergibt sich für die Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}T(x, y) &= \frac{T_{i,j}^{N+1} - T_{i,j}^N}{\Delta t}, \\ \frac{\partial}{\partial x}T(x, y) &= \frac{T_{i+1,j}^N - T_{i-1,j}^N}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x, y) &= \frac{T_{i+1,j}^N - 2T_{i,j}^N + T_{i-1,j}^N}{\Delta x^2}.\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (4) und Umstellen nach  $T_{i,j}^{N+1}$  erhält man schließlich in der zweiten räumlichen Ordnung

$$\begin{aligned}T_{i,j}^{N+1} = T_{i,j}^N + \Delta t \left[ -Pe \left( v_{i,j}^x \frac{T_{i+1,j}^N - T_{i-1,j}^N}{2\Delta x} + v_{i,j}^y \frac{T_{i,j+1}^N - T_{i,j-1}^N}{2\Delta x} \right) \right. \\ \left. + \frac{T_{i+1,j}^N - 2T_{i,j}^N + T_{i-1,j}^N}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^N - 2T_{i,j}^N + T_{i,j-1}^N}{\Delta y^2} \right] \quad (5)\end{aligned}$$

womit die Integration durchgeführt werden kann. Die Ausdrücke  $v^x$  und  $v^y$  stehen für die jeweilige  $x$ - und  $y$ -Komponente des zeitlich konstanten Geschwindigkeitsfeldes an dem

jeweiligen Ort.

Des Weiteren sind allerdings noch die Randbedingungen zu beachten. Bei *Dirichlet*-Rändern muss an dem Schema nichts geändert werden. Bei *Neumann*-Rändern dagegen schon. Exemplarisch wird hierfür als Beispiels der linke Rand betrachtet, auf dem die erste Ableitung in  $x$ -Richtung verschwinden soll. Durch eine Taylor-Entwicklung und einen Koeffizientenvergleich erhält man die diskretisierte Randbedingung zweiter Ordnung

$$T_{i,j}^{N+1} - \frac{4}{3}T_{i+1,j}^{N+1} + \frac{1}{3}T_{i+2,j}^{N+1} = 0.$$

### 3.3. Das BTCS-Schema

Ein alternativer Ansatz zur Lösung ist das *BTCS*-Schema (Backward in Time, Centered in Space), bei der räumlich erneut eine Diskretisierung zweiter Ordnung durchgeführt wird, diese allerdings zum Zeitpunkt  $(N+1)$  ausgewertet wird. Zeitlich wird auch wieder ein Verfahren erster Ordnung verwendet. Somit ergibt sich der Ausdruck

$$T_{i,j}^N = T_{i,j}^{N+1}\alpha + \beta_{i-1,j}^- T_{i-1,j}^{N+1} + \beta_{i+1,j}^+ T_{i+1,j}^{N+1} + \gamma_{i,j-1}^- T_{i,j-1}^{N+1} + \gamma_{i,j+1}^+ T_{i,j+1}^{N+1}. \quad (6)$$

Dabei wurden die folgenden Abkürzungen eingeführt und benutzt

$$\begin{aligned} \alpha &= \Delta t \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta t} \right), \\ \beta_{i,j}^\pm &= \Delta t \left( -\frac{1}{\Delta x^2} \pm \frac{Pe v_{i,j}^x}{2\Delta x} \right), \\ \gamma_{i,j}^\pm &= \Delta t \left( -\frac{1}{\Delta y^2} \pm \frac{Pe v_{i,j}^y}{2\Delta y} \right). \end{aligned}$$

Um das Problem nun besser beschreiben zu können, wird das zweidimensionale Feld in einen eindimensionalen Spaltenvektor zusammengefasst. Hierfür ist es notwendig, die Indizes umzubenennen. Hierbei wird ab jetzt die folgende Konvention benutzt: durchlaufe erst alle  $x$ -Werte zu einem festen  $y$ -Wert, und erhöhe das  $y$ . Dies bewirkt, dass die Zeilen des Feldes hintereinander geschrieben werden:

$$T_{i,j}^N = T_{i+N_y j}^N.$$

Nun kann die Gleichung (6) als eine Matrixoperation der Form

$$\vec{T}^N = M \cdot \vec{T}^{N+1},$$

mit der Matrix  $M$  ausgedrückt werden. Diese hat die fünf Diagonalen, die ungleich null sind in ihrem Hauptteil, und zwei weitere Submatrizen, die fast nur eine Hauptdiagonale haben, die ungleich null ist. Somit schreibe  $M$  nun als Blockmatrix

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C} \end{pmatrix}.$$

---

Hierbei stehen  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  jeweils für eine Matrix. Die Matrix  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4/3 & 1/3 & . & 1/3 & -4/3 & 2 & -4/3 & 1/3 & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

setzt die Randbedingungen am oberen, linken und rechten Rand ums. Die Matrix  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dagegen setzt die Randbedingungen am unteren Rand um. Die Matrix  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \gamma^- & . & \beta^- & \alpha & \beta^+ & . & \gamma^+ & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \gamma^- & . & \beta^- & \alpha & \beta^+ & . & \gamma^+ & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^- & . & \beta^- & \alpha & \beta^+ & . & \gamma^+ & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & \gamma^- & . & \beta^- & \alpha & \beta^+ & . & \gamma^+ & . \\ 0 & . & . & 0 & \gamma^- & . & \beta^- & \alpha & \beta^+ & . & \gamma^+ \end{pmatrix},$$

setzt die implizite Gleichung (6) um, ist also das Kernstück des *BTCS-Schemas*.

Um das System nun um einen Zeitschritt weiter zu simulieren, muss die Matrix  $\text{extbf}M$  invertiert werden - beziehungsweise das Gleichungssystem  $\mathbf{M}\vec{x} = \vec{b}$  gelöst werden.

Hierfür hat sich das *SOR-Verfahren*, welches eine Modifikation des *Gauß-Seidel-Verfahrens* ist, als besonders geeignet herausgestellt. Dies sind beides iterative Lösungsverfahren.

Um diese zu benutzen, wird die Matrix zuerst in drei Teilmatrizen  $\mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$  zerlegt, wobei  $\mathbf{D}$  eine Diagonal-,  $\mathbf{L}$  eine untere Dreiecks- und  $\mathbf{U}$  eine obere Dreiecksmatrix ist. Zudem wird der *Residuen-Vektor*  $\vec{r}_n = \mathbf{M}\vec{x}_n - \vec{b}$  eingeführt, wobei der Index den jeweiligen Iterationsschritt angibt. Dieser Vektor beschreibt die Differenz zwischen

---

der korrekten und der iterativen Lösung der Gleichung  $Mx = b$ .

Durch diese Zerlegung ist es möglich eine rekursive Bestimmungsformel [2, S. 25ff]

$$\vec{x}^n = \vec{x}^{n-1} - \alpha(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\vec{r}^{n-1}$$

aufzustellen. Hierbei ist  $\alpha$  der so genannte *Relaxationsparameter*. Bei dem *Gauss-Seidel-Verfahren* ist er gleich null.

Diese Matrizen-Gleichung kann in Summenschreibweise durch Eigenschaften triagonaler Matrizen aus der linearen Algebra auch als

$$x_i^{n+1} = (1 - \alpha)x_i^n + \frac{\alpha}{m_{i,i}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} m_{i,j}x_j^{n+1} - \sum_{j=i}^N m_{i,j}x_j^n \right) \quad (7)$$

aufgefasst werden [2, S.30], wobei  $N$  die Dimensionen des Problems angibt.

## 4. Durchführung der Aufgaben

### 4.1. Aufgabe 1: Untersuchung von $\vec{v}$

Für die numerische Betrachtung des Problems spielt der Einfluss von  $\vec{v}$  eine entscheidende Rolle. Ist dieses Geschwindigkeitsfeld nämlich divergenzfrei, so ergibt sich eine mögliche, vereinfachende Betrachtung in diskretisierter Form nach Gleichung (5). Für das externe Feld

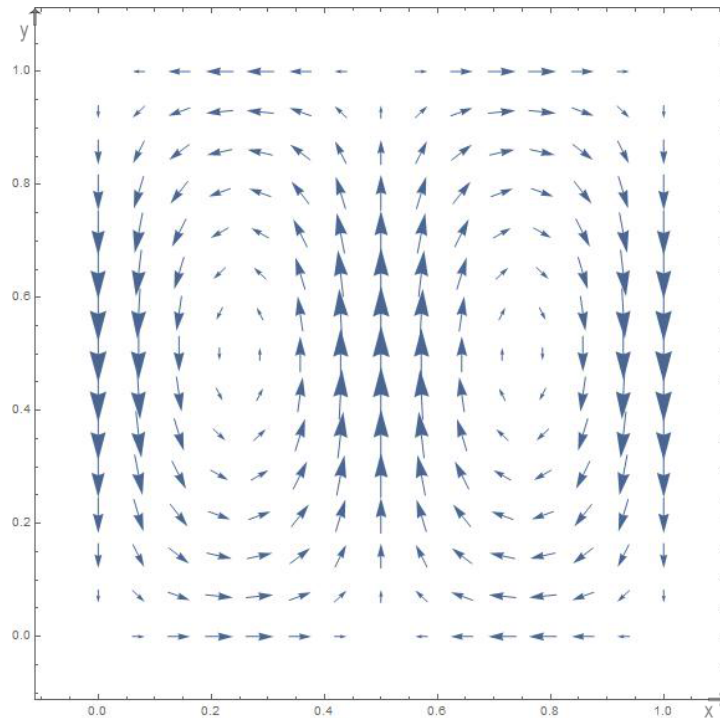
$$\vec{v} = (\pi \sin(2\pi x) \cos(\pi y), -2\pi \cos(2\pi x) \sin(\pi y))^t$$

gilt

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(\pi \sin(2\pi x) \cos(\pi y)) + \frac{\partial}{\partial y}(-2\pi \cos(2\pi x) \sin(\pi y)) = 0;$$

es ist somit divergenzfrei. Es bietet sich zudem an, das Feld grafisch darzustellen. Dies kann in Abbildung (1) nachvollzogen werden.





**Abbildung 1:** Grafische Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v}$  in Abhängigkeit von  $x$  und  $y$ .

Es ist zu erkennen, dass das Feld zwei Zentren hat, um die sich je ein Strudel bildet. Diese laufen in der Mitte zusammen, und strömen zum oberen Rand hin.

## 4.2. Aufgabe 2: FTCS-Lösung

Um nun eine erste numerische Lösung erzeugen zu können, wird das zuvor in (3.2) hergeleitete Verfahren benutzt. Hierfür wird direkt eine etwas allgemeinere Implementation gewählt, welche in der Integration auch möglich Quellterme berücksichtigt. Dieser Ansatz wird gewählt, da im weiteren Verlauf dieser Arbeit (siehe 4.3) die numerische Korrektheit des Integrators überprüft werden soll. Hierfür wird die eine Quelle hinzugefügt, welche eine analytische Lösung erlaubt.

Das Programm besteht aus zwei verschiedenen Routinen. Die *main*-Methode liest gewünschte Eingangsparameter, wie die Schrittweite  $\Delta t$ , die maximale Integrationszeit  $t_{max}$ , die Péclet-Zahl  $Pe$ , die Gitterauflösung  $N_x$  und  $N_y$  und einen weiteren Parameter, der angibt, ob ein Quellterm erzeugt werden soll, ein (Zeile 78-119). Zudem erzeugt sie Objekte des Types `vector<vector<double>>`, in welchem der Temperaturverlauf in dem Rechteck, und ein etwaiger Quellterm abgespeichert werden. Hierfür wird ein *vector* statt eines Feldes genutzt, um möglich *Access Violation Exceptions* zu vermeiden und um Memory-leaks zu reduzieren (Zeile 121-163).

---

In einer Schleife wird in den gewählten Zeitschritten bis zur Endzeit iteriert, und für jede Zeit ein Integrationsschritt durchgeführt (Zeile 131-163). Zuletzt wird die berechnete Temperaturverteilung in die vorher angegebene Datei ausgegeben (Zeile 199-209).

Der jeweilige Integrationsschritt wird von der *ftcs\_time\_step*-Methode ausgeführt. Diese legt zuerst eine Kopie des übermittelten Feldes an, um auf Grundlage dieser, die Ableitungsterme berechnen zu können. Hierfür wird in einer Schleife über das gesamte Gitter iteriert, und jeweils der  $\nabla^2 T$  und der  $\vec{v}_0 \cdot \nabla T$  Term einzeln berechnet und anschließend nach Gleichung (8) als Änderung von  $T$  verrechnet (Zeile 19-59). Abschließend werden noch die *Dirichlet*- und *Neumann*-Ränder beachtet und die Werte passend aktualisiert (Zeile 61-76).

### 4.3. Aufgabe 3: Numerische Korrektheit der FTCS-Lösung

Zur Beurteilung der Korrektheit der numerischen Lösung wird normalerweise erstmal versucht, das Ergebnis mit der analytischen Lösung zu vergleichen. Da dieses Problem allerdings nicht analytisch lösbar ist, muss hier anders verfahren werden. Als Ansatz hierbei wird eine mögliche stationäre Lösung geraten, und die Differenzialgleichung um einen Quellterm so ergänzt, dass dies die exakte Lösung des Problems ist.

Für diese konstruierte stationäre Lösung wird der Ansatz

$$T^* = \cos(\pi x) \sin(\pi y) + y$$

gewählt, da dies sowohl die Startverteilung umsetzt, als auch die vier Randbedingungen erfüllt. Um den Quellterm  $Q$  zu korrigieren, wird  $T^*$  in die stationäre Gleichung

$$Pe \cdot \vec{v} \nabla T^* = \nabla^2 T^* + Q$$

eingesetzt, welche auch Quellen berücksichtigt. Es ergibt sich somit

$$Q = Pe \cdot \vec{v} \nabla T^* - \nabla^2 T^*,$$

was sich nach Einsetzen des Ansatzes und des gegebenen Geschwindigkeitsfeldes zu

$$Q = \pi^2 (2 \cos(\pi x) \sin(\pi y) - Pe \cdot \cos(\pi x)^3 \sin(2\pi y)) - 2Pe \cdot \pi \cos(2\pi x) \sin(\pi y)$$

ergibt.

Berücksichtigt man diesen Quellterm in dem *FTCS-Schema*, folgt:

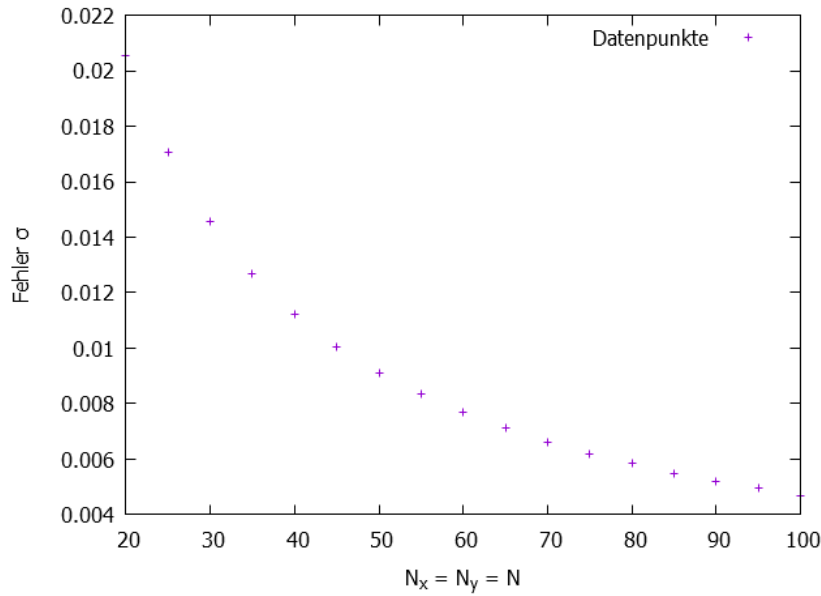
$$T_{i,j}^{N+1} = T_{i,j}^N + \Delta t \left[ -Pe \left( v_{i,j}^x \frac{T_{i+1,j}^N - T_{i-1,j}^N}{2\Delta x} + v_{i,j}^y \frac{T_{i,j+1}^N - T_{i,j-1}^N}{2\Delta x} \right) + \frac{T_{i+1,j}^N - 2T_{i,j}^N + T_{i-1,j}^N}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^N - 2T_{i,j}^N + T_{i,j-1}^N}{\Delta y^2} + Q_{i,j} \right] \quad (8)$$

Dieser Quellterm wurde in den Zeilen 148 bis 161 in (A.1) implementiert. Nun kann zu jedem Zeitpunkt die Differenz zwischen der stationären Lösung  $T_{i,j}^*$  und der numerischen Lösung  $T_{i,j}^N$  berechnet werden als

$$\sigma^N = \sqrt{(\sum_{i,j} (T_{i,j}^N - T_{i,j}^*)^2)}.$$

Diese Abweichung wird nun alle 100 Zeitschritte ausgegeben. Dies wurde in der *main*-Methode in Zeile 175 bis 196 implementiert.

Setzt man nun noch  $N_x = N_y$ , und variiert diese Werte für ein festes  $\Delta t$ , so können Aussagen getroffen werden, über die Abweichungen der stationären numerischen  $T$  und der tatsächlichen stationären Lösung  $T^*$  in Abhängigkeit von der Gittergröße.



**Abbildung 2:** Grafische Auftragung der numerischen Abweichung  $\sigma$  in Abhängigkeit von der Gittergröße  $N$ .

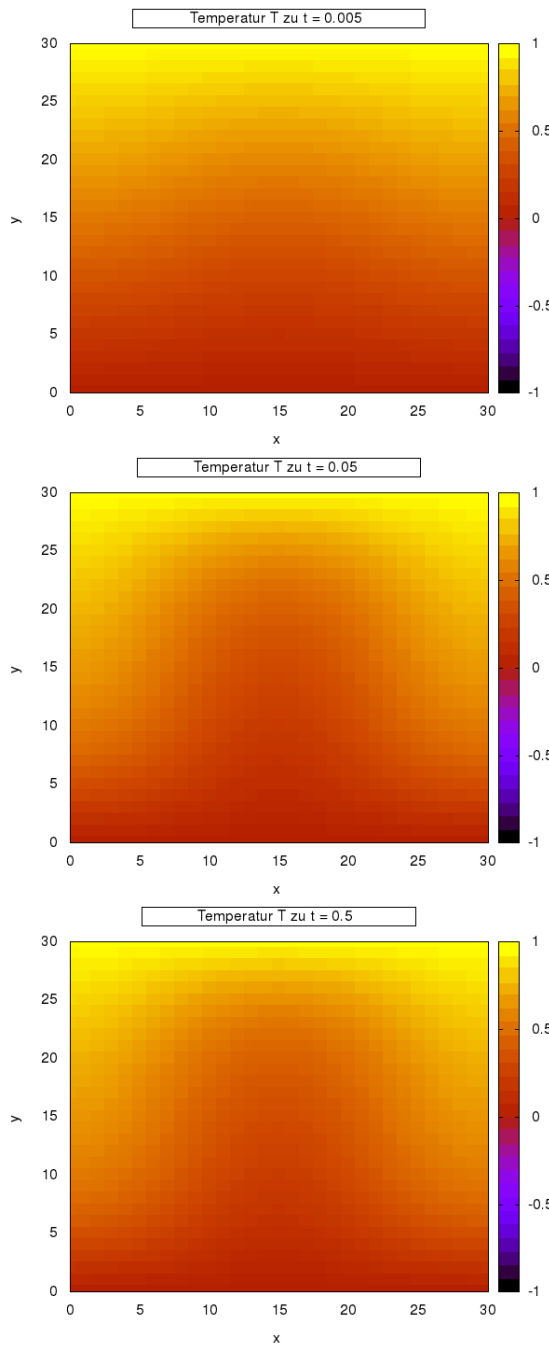
In Abbildung (2) ist der Verlauf des Fehlers  $\sigma$  in Abhängigkeit von  $N_x = N_y$  für  $Pe = 2$  für einen Zeitschritt von  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$  aufgetragen. Zudem wurde eine Regression durchgeführt, welche eine Abhängigkeit der Form  $\sigma = N^{-1.2}$  ergeben hat. Dazu ist noch anzumerken, dass für größere  $N$ -Werte (größer als 115) der Fehler nicht mehr weiter sinkt, sondern sogar stark anwächst, da die numerische Lösung divergent wird.

#### 4.4. Aufgabe 4: Auswertung verschiedener FTCS-Lösungen

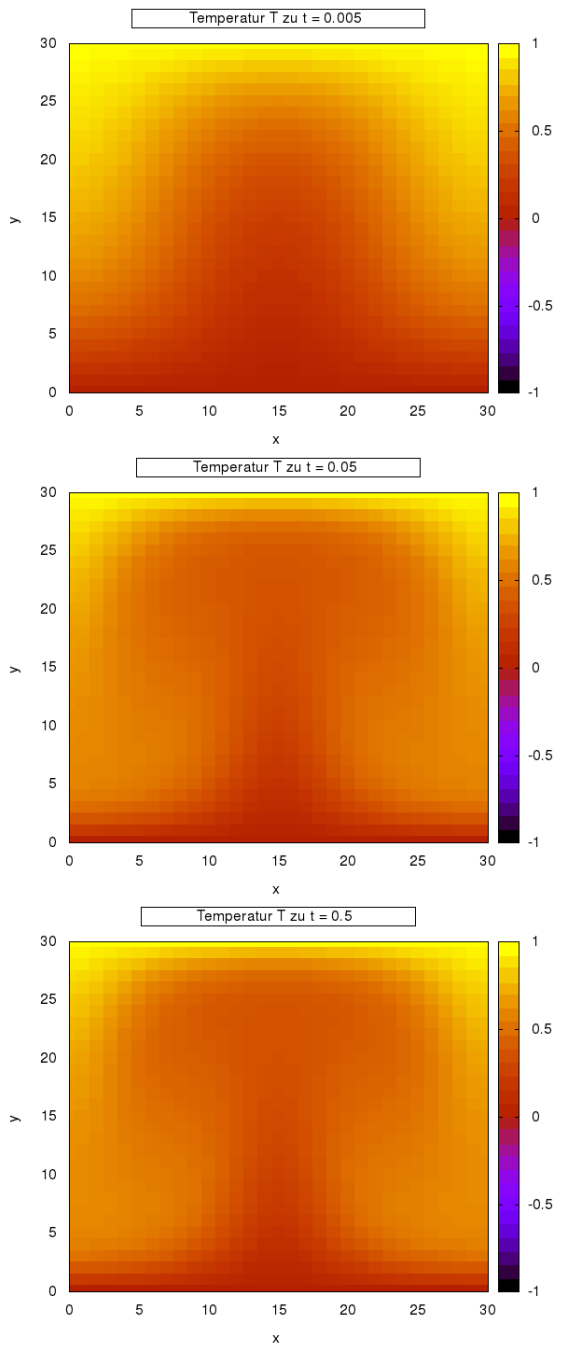
Im weiteren Verlauf wird der zuvor eingeführte Quellterm  $Q = 0$  gesetzt. Nun kann das Temperaturfeld  $T$  für zwei verschiedene *Péclet-Zahlen*  $Pe = 2$  und  $Pe = 10$  simuliert,

---

und zu den drei Zeitpunkten  $t = 0.005$ ,  $t = 0.05$  und  $t = 0.5$  visualisiert werden. Hierfür wird  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$  und  $N = N_x = N_y = 30$  angenommen. Die Darstellungen sind in den Abbildungen (3) und (4) zu finden.



**Abbildung 3:** Temperatur für  $Pe = 2$ .



**Abbildung 4:** Temperatur für  $Pe = 10$ .

Hierbei ergibt sich unabhängig von der *Péclet-Zahl* eine ähnliche Temperaturverteilung. So ist sie im unteren Bereich deutlich geringer, als im oberen Bereich, was durch die *Dirichlet*-Randbedingungen hervorgerufen wird. Zudem ist sie in der Mitte deutlich geringer, als rechts und links daneben. Dies lässt sich gut durch die Verteilung durch das Geschwindigkeitsfeld erklären. Diese transportiert anschaulich die vorhandene Wärme aus der Mitte hinweg, und verteilt sich im oberen Bereich. Bei der größeren *Péclet-Zahl*  $Pe = 10$  ergibt sich eine stärkere Verteilung, sodass ein stärker ausgeprägtes Gefälle zwischen warm und kalt entsteht. Für beide Parameter geht das System allerdings schon nach der kurzen Zeitspanne  $t = 0.05$  in eine annähernd stationäre Lösung über - die Unterschiede zwischen den Verteilung für  $t = 0.05$  und  $t = 0.5$  sind minimal.

#### 4.5. Aufgabe 5: Beurteilung der Stabilität der FTCS-Lösung

Um weitere Aussagen über die numerische Lösung treffen zu können, wird nun noch die Stabilität betrachtet. Hierfür wird zuerst für  $N = N_x = N_y = 30$  die maximale Zeitschrittgröße  $\Delta t_{max}^{Pe}$  für die *Péclet-Zahlen*  $Pe \in \{0.1, 1.0, 10\}$  bestimmt. Diese ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\Delta t_{max}^{0.1} &= 2.788 \cdot 10^{-4}, \\ \Delta t_{max}^{1.0} &= 2.789 \cdot 10^{-4}, \\ \Delta t_{max}^{10} &= 2.795 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Dies liefert einen ersten Eindruck: Die Stabilitätsgrenze hängt von  $Pe$  ab, und nimmt für steigende  $Pe$  in gewissen, geringen Maßen in dem hier betrachteten Intervall zu. Für eine genauere Aussage wird nun eine *von-Neumann-Stabilitätsanalyse* durchgeführt. Hierfür wird für die Lösung ein Ansatz der generellen Form

$$T_{i,j}^N = \xi^N e^{i(k_x \Delta x \cdot i + k_y \Delta y \cdot j)}$$

gewählt. Durch Einsetzen in Gleichung (5) und Kürzen ergibt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned}\xi = 1 - \frac{\Delta t Pe v^x}{2\Delta x} (e^{ik_x \Delta x} - e^{-ik_x \Delta x}) - \frac{\Delta t Pe v^y}{2\Delta y} (e^{ik_y \Delta y} - e^{-ik_y \Delta y}) - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{2\Delta t}{\Delta y^2} \\ + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (e^{ik_x \Delta x} + e^{-ik_x \Delta x}) + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (e^{ik_y \Delta y} + e^{-ik_y \Delta y}),\end{aligned}$$

welcher durch trigonometrische Identitäten in

$$\begin{aligned}\xi = 1 - i\Delta t Pe \left( \frac{v^x}{\Delta x} \sin(k_x \Delta x) + \frac{v^y}{\Delta y} \sin(k_y \Delta y) \right) + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \cos(k_x \Delta x) + \frac{2\Delta t}{\Delta y^2} \cos(k_y \Delta y) \\ - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{2\Delta t}{\Delta y^2}\end{aligned}$$

---

übergeht. Damit das Verfahren konvergiert, muss  $\xi$  kleiner 1 ein. Nähert man hier den Sinus und den Cosinus mit den Maximalwerten, und schätzt die Komponenten  $v^x$  und  $v^y$  nach oben durch  $\pi$  und  $2\pi$  ab, so ergibt sich

$$\lambda^2 (64 + (Pe2\pi\Delta x)^2) - 16\lambda < 0, \quad (9)$$

mit der *CFL-Zahl*  $\lambda = \Delta t / \Delta x^2$ . Eine Lösung dieser Ungleichung ergibt folgenden Bereich, sodass das *FTCS-Schema* konvergiert:

$$0 < \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{4}{16 + (\Delta_x Pe\pi)^2}. \quad (10)$$

Hierdurch kann der maximale Zeitschritt, für den das Verfahren konvergiert durch

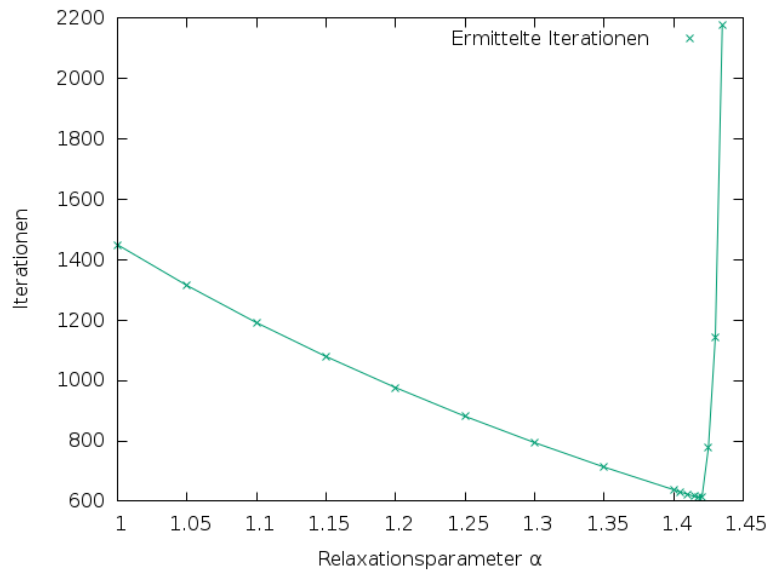
$$\Delta t_{max} = \frac{4\Delta x^2}{16 + (\pi Pe\Delta_x)^2} \quad (11)$$

ausgedrückt werden.

## 4.6. Aufgabe 6: BTCS-Lösung

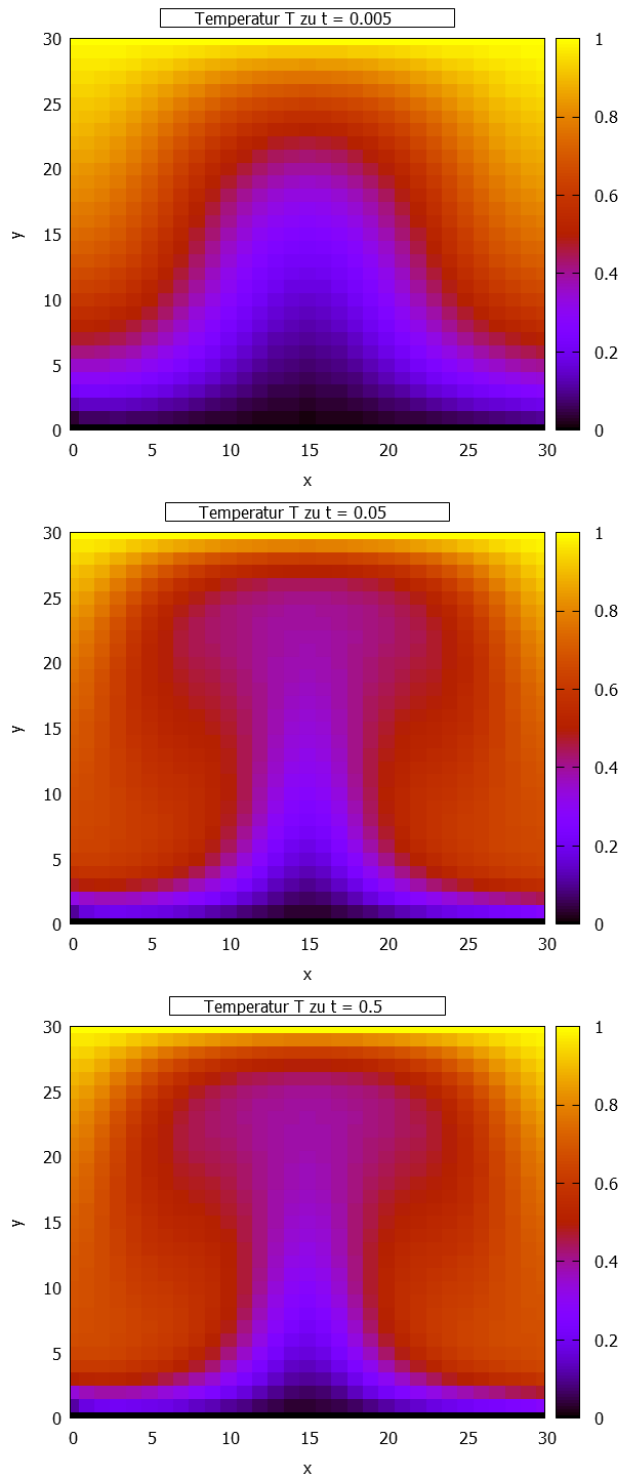
Nachdem zuvor die explizite Diskretisierung untersucht wurde, wird das Problem nun implizit im *BTCS-Schema* betrachtet (siehe 3.3). Dazu werden im Hauptprogramm in (A.1) vier Routinen benötigt. Die *main*-Methode liest die eingegebene Parameter erneut ein (Zeile 50-88), und befüllt die zuvor beschriebene Matrix  $\mathbf{M}$ . Dazu wird ein Objekt der Klasse *square\_matrix* aus (A.2) benutzt (Zeile 90-123). Diese erbt von der Klasse *matrix*, welche in (A.2) und (A.2) definiert wird. Hierbei werden die Routinen *beta* und *gamma* benutzt, welche die so benannten Variablen für den jeweiligen Gitterpunkt berechnen (Zeile 21-48). Weitergehend wird das Temperaturfeld nicht mehr in einem zwei sondern in einem eindimensionalen Objekt gespeichert. Dieses wird zunächst mit den gewünschten Startwerten initialisiert (Zeile 143-155).

Nun wird über das zu betrachtende Zeitintervall iteriert, und in jedem Integrationsschritt die zuvor aufgestellte Matrix invertiert. Dafür wurde das *SOR-Verfahren* in (A.2) und (A.2) nach Gleichung (7) implementiert. Dabei werden in jedem einzelnen Iterations-schritt die Residuen  $\vec{r} = \mathbf{M}\vec{x} - \vec{b}$  für die Lösung von  $\mathbf{M}\vec{x} = \vec{b}$  berechnet, und gefordert, dass der Betrag dieser kleiner als  $|\vec{r}| < 10^{-4}$  ist. Dies wird als Abbruchbedingung im dem *SOR-Verfahren* genutzt. Um die Vorteile des *SOR* wirklich nutzen zu können, muss zuerst ein geeigneter Relaxationsparameter  $\alpha$  ermittelt werden. Hierzu wird  $Pe = 10$ ,  $N_x = N_y = 30$  und  $\Delta t = 100$  gesetzt. Nun wird  $\alpha$  mit einer Schrittweite von 0.05 ab 1.0 variiert und die benötigten Iterationen ermittelt.



**Abbildung 5:** Grafische Darstellung der benötigten Iterationen zur Konvergenz in Abhängigkeit vom Relaxationsparameter  $\alpha$ .





Die grafische Auftragung der so ermittelten Ergebnisse ist in Abbildung (5) zu finden. Es ist gut erkennbar, dass das bei  $\alpha = 1.41$  die geringste Anzahl an Iterationen benötigt wurde. Somit wird im weiteren Verlauf dieser Parameter genutzt.

Schließlich wird das zuvor implementierte und getestete Verfahren noch einmal für die Parameterwahl aus Aufgabenpunkt (4.4) angewendet, um die Ergebnisse miteinander zu vergleichen. Hierfür wurde also erneut  $Pe = 10$ ,  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$  und  $t \in \{0.005, 0.05, 0.5\}$  gewählt. Die hierdurch erhaltenen Temperaturverteilungen sind erneut als Heatmap in Abbildung (6) dargestellt.

**Abbildung 6:** Temperatur nach dem *BTCS-Schema* für  $Pe = 10$  und  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$ .

---

## 5. Auswertung der Ergebnisse

### 5.1. Numerische Korrektheit der FTCS-Lösung

Durch den Vergleich in Abschnitt (4.3) ist erkennbar, dass der numerische Fehler für größere Gitter deutlich geringer wird. Dieser Abfall hat allerdings auch eine bestimmte Grenze. Überschreitet  $N = N_x = N_y$  diesen Wert, so kann die numerische Lösung nicht mehr konvergieren. Den Grund für dieses Verhalten (Abweichung der *CFL-Zahl*) ist in Abschnitt (4.5) beschrieben und erklärt. Anzumerken ist noch, dass der Fehler noch rapider gefallen wäre, wenn man den Gesamtfehler durch die Anzahl der zu berechnenden Gitterpunkte zwecks einer Normalisierung geteilt hätte.

### 5.2. Aufgabe 5: Beurteilung der Stabilität der FTCS-Lösung

Die zuvor in Abschnitt (4.5) hergeleitete Gleichung für den maximal gültigen Zeitschritt  $\Delta t_{max}$  ist durch die Abschätzungen nach oben, eine obere Schranke. Liegt  $\lambda$  außerhalb des Bereiches, aber nahe an der Grenze, so ist ein Konvergieren nicht sicher ausgeschlossen. Liegt  $\lambda$  allerdings in dem Bereich, so konvergiert das Verfahren sicher. Dieses Verhalten konnte an den zuvor empirisch ermittelten Grenzen für  $\Delta t$  verifiziert werden. Hierbei zeigte sich allerdings, dass die Aussagen der Gleichung (11) für geringe *Péclet-Zahlen* zu stark sind, und noch zu viele Werte ausschließen, für die das Verfahren noch konvergiert. Allerdings konnte durch exemplarische Tests bei höheren Werten ein Verhalten festgestellt werden, welches dem durch die Formel beschriebenen entspricht: je höher die Zahl wird, desto feiner muss die Zeitintegration gewählt werden.

## Literatur

- [1] Andres Honecker, Thomas Pruschke, Salvatore R. Manmana,  
*Scriptum zur Vorlesung: Computergestütztes wissenschaftliches Rechnen.*  
Göttingen, Sommersemester 2016
- [2] W. Auzinger,  
*Lecture Notes Iterative Solution of Large Linear Systems.*  
Wien, 2011

---

## A. Quellcode

### A.1. Hauptprogramme

```
1 #include <iostream>
2 #include <fstream>
3 #include <vector>
4 #include <cstdlib>
5 #include <iomanip>
6 #include <cmath>
7
8 using namespace std;
9
10 //custom type which describes a 2d grid. use this instead of arrays for access
11 //violation safety
12 typedef vector<vector<double> > grid_t;
13
14 //integrates the ODE with the FTCS scheme and returns the error, compared with the
15 //stationary solution. expects the parameters:
16 // values: a grid_t object which contains current distribution of the temperature T
17 // v0x, v0y: a grid_t object which contains the x/y component of the velocity v0
18 // source: a grid_t object which contains the source values
19 // delta_t, delta_x, delta_y, pe: the time-step-size, the step size in x/y direction
20 // and the Péclet number
21 void ftcs_time_step(grid_t& values, grid_t v0x, grid_t v0y, grid_t source, const
22 double delta_t, const double delta_x, const double delta_y, const double pe)
23 {
24     //get the dimensions of the grid
25     size_t dimension_x = values.size();
26     size_t dimension_y = values.at(0).size();
27
28     //create copy of the grid with the same dimensions
29     //this will be used for the calculation of the derivatives
30     grid_t old_values;
31
32     for (size_t x=0; x<dimension_x; x++)
33     {
34         //add a new row
35         old_values.push_back(vector<double>());
36         for (size_t y=0; y<dimension_y; y++)
37         {
38             //copy value
39             old_values.at(x).push_back(values.at(x).at(y));
40         }
41     }
42
43     double gradient_t_times_v0;
44     double laplacian_t;
45
46     //loop over the entire inner grid (ignore the 4 outer sides of the rectangle) and
47     //calculate the new value using the FTCS-scheme
48     for (size_t x=1; x<dimension_x-1; x++)
49     {
50         for (size_t y=1; y<dimension_y-1; y++)
51         {
52             //calculates the 2nd ordner laplacian of the temp.
53             laplacian_t = 1.0/pow(delta_x,2)*(old_values.at(x+1).at(y) -
54                 2.0*old_values.at(x).at(y) + old_values.at(x-1).at(y))
55                 + 1.0/pow(delta_y,2)*(old_values.at(x).at(y+1) - 2.0*old_values.at(x).at(y)
56                 + old_values.at(x).at(y-1));
```

---

```

52     //calculates the inner product of the gradient of the temp. and v0
53     gradient_t_times_v0 =
54         v0x.at(x).at(y)/(2.0*delta_x)*(old_values.at(x+1).at(y)-old_values.at(x-1).at(y))
55         +
56         v0y.at(x).at(y)/(2.0*delta_y)*(old_values.at(x).at(y+1)-old_values.at(x).at(y-1));
57
58     //integration step according to eq. (8)
59     values.at(x).at(y) += delta_t * (laplacian_t - pe*gradient_t_times_v0 +
60         source.at(x).at(y));
61 }
62 }
63 //now take care of the four boundary conditions
64 //left/right boundaries (Neumann boundaries)
65 for (size_t y=0; y<dimension_y; y++)
66 {
67     values.at(0).at(y) = 1.0/3.0*(4.0*values.at(0+1).at(y) - values.at(0+2).at(y));
68     values.at(dimension_x-1).at(y) = -2.0/3.0*(-2.0*values.at(dimension_x-2).at(y) +
69         1.0/2.0*values.at(dimension_x-3).at(y));
70 }
71 //bottom/top boundaries (Dirichlet boundaries)
72 for (size_t x=0; x<dimension_x; x++)
73 {
74     values.at(x).at(0) = 0.0;
75     values.at(x).at(dimension_y-1) = 1.0;
76 }
77 }
78 int main(int argc, char* argv[])
79 {
80     //print information for the usage
81     cout << "Use this program to calculate the temperature with the FTCS-scheme in the
82         rectangle with a source, and to compare the stationary solution with the
83         numerical." << endl;
84     cout << "Expects the following set of parameters:" << endl;
85
86     cout << "\toutput file:\tThe path to the file in which the results will be stored."
87         << endl;
88     cout << "\tN_x:\tThe amount of grid points in the x-direction." << endl;
89     cout << "\tN_y:\tThe amount of grid points in the y-direction." << endl;
90     cout << "\tPe:\tThe Péclet-Number" << endl;
91     cout << "\tMax t\tThe maximum time until the system will be simulated." << endl;
92     cout << "\tDelta t\tThe time step size for the integration." << endl;
93     cout << "\tUse external heat source\tIf set to 1, then the source Q will be used."
94         << endl;
95
96     //read entered parameters
97
98     //create output stream
99     ofstream outputFile;
100     outputFile.open(argv[1]);
101     outputFile << fixed << setprecision(5);
102
103     //the amount of grid points in the x direction
104     const size_t dimension_x = (atoi)(argv[2])+1;
105     //the distance between to grid points
106     const double delta_x = 1.0/(dimension_x-1);
107
108     //the amount of grid points in the y direction
109     const size_t dimension_y = (atoi)(argv[3])+1;
110     //the distance between to grid points

```

---

```

107  const double delta_y = 1.0/(dimension_y-1);
108
109  //Péclet-number
110  const double pe = atof(argv[4]);
111  //maximum time until which the system will be simulated
112  const double max_t = atof(argv[5]);
113  //the time step size
114  const double delta_t = atof(argv[6]);
115
116  const bool use_source = atoi(argv[7]) == 1;
117
118  cout << "Entered parameters:" << endl;
119  cout << "\tNx: " << dimension_x << "\tNy: " << dimension_y << "\tPe: " << pe <<
    "\tMax t: " << max_t << "\tDelta t: " << delta_t << endl;
120
121  //to store the x component of the velocity v0
122  grid_t v0x;
123  //to store the y component of the velocity v0
124  grid_t v0y;
125  //to store the current temperature
126  grid_t values;
127  //to store the source of the temperature
128  grid_t sources;
129
130  //create the new grids
131  for (size_t x=0; x<dimension_x; x++)
132  {
133      //add a new row
134      v0x.push_back(vector<double>());
135      v0y.push_back(vector<double>());
136      values.push_back(vector<double>());
137      sources.push_back(vector<double>());
138
139      for (size_t y=0; y<dimension_y; y++)
140      {
141          //add the v0 values
142          v0x.at(x).push_back(M_PI*sin(2*M_PI*x*delta_x)*cos(M_PI*y*delta_y));
143          v0y.at(x).push_back(-2.0*M_PI*cos(2*M_PI*x*delta_x)*sin(M_PI*y*delta_y));
144
145          //add the start temperature of the rectangle
146          values.at(x).push_back(y*delta_y);
147
148          //add the source of the temperature of the rectangle
149          if (use_source)
150          {
151              sources.at(x).push_back(
152                  pow(M_PI,2)*(cos(M_PI*delta_x*x)*sin(M_PI*delta_y*y)*2
153                      - pe*pow(cos(x*delta_x*M_PI),3)*sin(2*M_PI*delta_y*y))
154                      -pe*2*M_PI*cos(2*M_PI*delta_x*x)*sin(M_PI*y*delta_y)
155              );
156          }
157          else
158          {
159              //no heat source is desired => set it to 0 for all points
160              sources.at(x).push_back(0.0);
161          }
162      }
163  }
164
165  //to print just every 100th error comparison
166  size_t iteration = 0;
167  //is being used to calculate the numerical error compared to stat.solution
168  double error;

```

---

```

169 //loop over the time, until we have reached the maximum time
170 for (double t=0.0; t<max_t; t+=delta_t)
171 {
172     ftcs_time_step(values, v0x, v0y, sources, delta_t, delta_x, delta_y, pe);
173
174     //the heat source is beeing used => calculate the difference
175     if (use_source)
176     {
177         //now calculate the difference, compared to the stationary solution
178         //loop over all elements and compare them
179         error = 0.0;
180         for (size_t x=0; x<dimension_x; x++)
181         {
182             for (size_t y=0; y<dimension_y; y++)
183             {
184                 error += pow(
185                     values.at(x).at(y) -
186                     (cos(M_PI*delta_x*x)*sin(M_PI*delta_y*y)+y*delta_y)
187                     ,2);
188             }
189         }
190         //print every 100th error value
191         if (iteration++ % 100 == 0)
192         {
193             cout << "time:\t" << t << "\terror:\t" << error << "\n" << flush;
194             iteration = 0;
195         }
196     }
197 }
198
199 //print the final grid's values in the givven output file in a matrix form
200 for (size_t y=0; y<dimension_y; y++)
201 {
202     for (size_t x=0; x<dimension_x; x++)
203     {
204         outputFile << values.at(x).at(y) << "\t";
205     }
206     outputFile << "\n";
207 }
208
209 return 1;
210 }

```

### Quellcode: Implementation des FTCS-Schemas

```

1 #include <iostream>
2 #include <fstream>
3 #include <vector>
4 #include <cstdlib>
5 #include <iomanip>
6 #include <cmath>
7 #include "../lib/linear-system.h"
8 #include "../lib/square-matrix.h"
9
10 using namespace std;
11 using namespace numerical;
12
13 //custom type which describes a 2d grid. use this instead of arrays for access
14 //violation safety
15 typedef vector<vector<double>>> grid_t;
16
17 /*calculates the variable beta. expects the parameters:

```

---

```

17  plus: indicates whether beta plus or beta minus will be calculated
18  delta_t, delta_x, delta_y, pe: the time-step-size, the step size in x/y direction
    and the Péclet number
19  x,y: the x/y coordinate of the point on which beta is desired
20  */
21  double beta(bool plus, double delta_t, double delta_x, double delta_y, double pe,
    double x, double y)
22  {
23      if (plus)
24      {
25          return delta_t*(-1.0 / pow(delta_x, 2) + (pe*(M_PI*sin(2 *
    M_PI*x*delta_x)*cos(M_PI*y*delta_y))) / (2.0*delta_x));
26      }
27      else
28      {
29          return delta_t*(-1.0 / pow(delta_x, 2) - (pe*(M_PI*sin(2 *
    M_PI*x*delta_x)*cos(M_PI*y*delta_y))) / (2.0*delta_x));
30      }
31  }
32
33  /*calculates the variable gamma. expects the parameters:
34  plus: indicates whether gamma plus or gamma minus will be calculated
35  delta_t, delta_x, delta_y, pe: the time-step-size, the step size in x/y direction
    and the Péclet number
36  x,y: the x/y coordinate of the point on which gamma is desired
37  */
38  double gamma(bool plus, double delta_t, double delta_x, double delta_y, double pe,
    double x, double y)
39  {
40      if (plus)
41      {
42          return delta_t*(-1.0 / pow(delta_y, 2) + (pe*(-2.0*M_PI*cos(2 *
    M_PI*x*delta_x)*sin(M_PI*y*delta_y))) / (2.0*delta_y));
43      }
44      else
45      {
46          return delta_t*(-1.0 / pow(delta_y, 2) - (pe*(-2.0*M_PI*cos(2 *
    M_PI*x*delta_x)*sin(M_PI*y*delta_y))) / (2.0*delta_y));
47      }
48  }
49
50  int main(int argc, char* argv[])
51  {
52      //print information for the usage
53      cout << "Use this program to calculate the temperature with the BTCS-scheme in the
    rectangle." << endl;
54      cout << "Expects the follwing set of parameters:" << endl;
55
56      cout << "\toutput file:\tThe path to the file in which the results will be stored."
    << endl;
57      cout << "\tN_x:\t\tThe amount of grid points in the x-direction." << endl;
58      cout << "\tN_y\t\tThe amount of grid points in the y-direction." << endl;
59      cout << "\tPe:\t\tThe Péclet-Number" << endl;
60      cout << "\tMax t\t\tThe maximum time until the system will be simulated." << endl;
61      cout << "\tDelta t\t\tThe time step size for the integration." << endl;
62
63      //read entered parameters
64
65      //create output stream
66      ofstream outputFile;
67      outputFile.open(argv[1]);
68      outputFile << fixed << setprecision(5);
69

```

---

```

70 //the amount of grid points in the x direction
71 const size_t dimension_x = (atoi)(argv[2])+1;
72 //the distance between to grid points
73 const double delta_x = 1.0/(dimension_x-1);
74
75 //the amount of grid points in the y direction
76 const size_t dimension_y = (atoi)(argv[3])+1;
77 //the distance between to grid points
78 const double delta_y = 1.0/(dimension_y-1);
79
80 //Péclet-number
81 const double pe = atof(argv[4]);
82 //maximum time until which the system will be simulated
83 const double max_t = atof(argv[5]);
84 //the time step size
85 const double delta_t = atof(argv[6]);
86
87 cout << "Entered parameters:" << endl;
88 cout << "\tNx: " << dimension_x << "\tNy: " << dimension_y << "\tPe: " << pe <<
      "\tMax t: " << max_t << "\tDelta t: " << delta_t << endl;
89
90 //the length of the value vector
91 size_t n = dimension_x*dimension_y;
92
93 //create a new square matrix (nXn) to store the matrix M
94 square_matrix coeff_matrix(n, 0);
95
96 //create const value for the variable alpha
97 const double alpha = delta_t * (2.0 / pow(delta_x, 2) + 2.0 / pow(delta_y, 2)) + 1.0;
98
99 //now set the values of the three matrices
100
101 //Matrix A
102 //main diagonal for the neuman boundaries
103 for (size_t i = 0; i<dimension_x; i++)
104 {
105     coeff_matrix.set_value(i, i, 1.0);
106 }
107
108 //first row (for the dirichlet boundaries)
109 coeff_matrix.set_value(0, 0, 2.0);
110 coeff_matrix.set_value(0, 1, -4.0 / 3.0);
111 coeff_matrix.set_value(0, 2, 1.0 / 3.0);
112
113 for (size_t i = dimension_x; i<n; i += dimension_x)
114 {
115     coeff_matrix.set_value(0, i - 2, 1.0 / 3.0);
116     coeff_matrix.set_value(0, i - 1, -4.0 / 3.0);
117     coeff_matrix.set_value(0, i, 2.0);
118     coeff_matrix.set_value(0, i + 1, -4.0 / 3.0);
119     coeff_matrix.set_value(0, i + 2, 1.0 / 3.0);
120 }
121
122 coeff_matrix.set_value(0, dimension_x - 1, -4.0 / 3.0);
123 coeff_matrix.set_value(0, dimension_x - 2, 1.0 / 3.0);
124
125 //Matrix B
126 //contains the biggest part of the BTCS-scheme
127 for (size_t i = dimension_x; i<n - dimension_x; i++)
128 {
129     coeff_matrix.set_value(i, i - dimension_x, gamma(false, delta_t, delta_x, delta_y,
      pe, i % dimension_x, i/dimension_x));

```



---

```

130     coeff_matrix.set_value(i, i - 1, beta(false, delta_t, delta_x, delta_y, pe, i %
        dimension_x, i/dimension_x));
131     coeff_matrix.set_value(i, i, alpha);
132     coeff_matrix.set_value(i, i + 1, beta(true, delta_t, delta_x, delta_y, pe, i %
        dimension_x, i/dimension_x));
133     coeff_matrix.set_value(i, i + dimension_x, gamma(true, delta_t, delta_x, delta_y,
        pe, i % dimension_x, i/dimension_x));
134 }
135
136 //Matrix C
137 //main diagonal for the neuman boundaries
138 for (size_t i = n - dimension_x; i<n; i++)
139 {
140     coeff_matrix.set_value(i, i, 1.0);
141 }
142
143 //create two vectors to store the temperature and to calculate the new one
144 vector<double> values;
145 vector<double> old_values;
146
147 //fill them with the starting temperature
148 for (size_t y = 0; y<dimension_y; y++)
149 {
150     for (size_t x = 0; x<dimension_x; x++)
151     {
152         old_values.push_back(y*delta_y);
153         values.push_back(y*delta_y);
154     }
155 }
156
157 //loop over the time, until we have reached the maximum time
158 for (double t = 0.0; t<max_t; t += delta_t)
159 {
160     //invert the matrix M/solve the linear system to get the new temperature(value)
161     linear_system_solve_sor(coeff_matrix, values, old_values, 1.44, 1e-4);
162
163     //copy the new values into the old_values vector for the next iteration
164     for (size_t i = 0; i<n; i++)
165     {
166         old_values.at(i) = values.at(i);
167     }
168 }
169
170 //print the final grid's values in the givven output file in a matrix form
171 for (size_t i = 0; i<n; i++)
172 {
173     outputFile << values.at(i) << "\t";
174     if (i > 0 && (i+1) % dimension_x == 0)
175     {
176         outputFile << endl;
177     }
178 }
179
180 return 1;
181 }

```

**Quellcode:** Implementation des BTCS-Schemas

---

## A.2. Hilfsbibliotheken

```
1 #include "matrix.h"
2
3 #ifndef SQUAREMATRIX_H
4 #define SQUAREMATRIX_H
5 namespace numerical
6 {
7     class square_matrix : public matrix
8     {
9     public:
10         //creates a nXn matrix
11         square_matrix(int n) : matrix(n,n) {}
12         //creates a nXn matrix and initializes all values with defaultValue
13         square_matrix(int n, double defaultValue) : matrix(n,n, defaultValue) {};
14     };
15 }
16 #endif
```

Quellcode: square\_matrix.h

```
1 #include <fstream>
2
3 #ifndef MATRIX_H
4 #define MATRIX_H
5 namespace numerical{
6     class matrix
7     {
8     public:
9         //creates a new nXm matrix
10         matrix(size_t n, size_t m);
11         //creates a new nXm matrix and initializes all values with defaultValue
12         matrix(size_t n, size_t m, double defaultValue);
13         //destructor
14         ~matrix();
15
16         //returns the number of rows/columns
17         size_t get_n();
18         size_t get_m();
19
20         //returns the value in row n, column m
21         double get_value(size_t n, size_t m);
22         //sets the value in row n, column m
23         void set_value(size_t n, size_t m, double value);
24     private:
25         double** data;
26         size_t n;
27         size_t m;
28     };
29 }
30 #endif
```

Quellcode: matrix.h

```
1 #include "square_matrix.h"
2 #include <vector>
3
4 using namespace std;
5
6 #ifndef LINEARSYSTEM_H
7 #define LINEARSYSTEM_H
8 namespace numerical
```

---

```

9 {
10     size_t linear_system_solve_sor(square_matrix& coeff_matrix, vector<double> &x,
        vector<double> &b, double alpha, double error_threshold);
11     double linear_system_solve_sor_step(square_matrix& coeff_matrix, vector<double> &x,
        vector<double> &b, double alpha);
12
13     void multiply_matrix_vector(matrix& matrix, vector<double> &x, vector<double>
        &result);
14 }
15 #endif

```

### Quellcode: linear\_system.h

```

1 #include "matrix.h"
2 #include <iostream>
3
4 namespace numerical{
5     //creates a new nXm matrix
6     matrix::matrix(size_t n, size_t m)
7     {
8         this->n = n;
9         this->m = m;
10        data = new double*[m];
11        for (size_t i=0;i<m;i++)
12        {
13            data[i] = new double[n];
14        }
15    }
16
17    //creates a new nXm matrix and initializes all values with defaultValue
18    matrix::matrix(size_t n, size_t m, double defaultValue)
19    {
20        this->n = n;
21        this->m = m;
22        data = new double*[m];
23        for (size_t i=0;i<m;i++)
24        {
25            data[i] = new double[n];
26            for (size_t j=0;j<n;j++)
27            {
28                data[i][j] = defaultValue;
29            }
30        }
31    }
32
33    //destructor
34    matrix::~matrix()
35    {
36        delete data;
37    }
38
39    //sets the value in the nth row, mth column
40    void matrix::set_value(size_t n, size_t m, double value)
41    {
42        data[n][m] = value;
43    }
44
45    //returns the value in the nth row, mth column
46    double matrix::get_value(size_t n, size_t m)
47    {
48        return data[n][m];
49    }
50

```

---

```

51 //returns the number of rows
52 size_t matrix::get_n()
53 {
54     return this->n;
55 }
56
57 //returns the number of columns
58 size_t matrix::get_m()
59 {
60     return this->m;
61 }
62 }

```

### Quellcode: matrix.cpp

```

1 #include "linear_system.h"
2 #include "square_matrix.h"
3 #include <iostream>
4 #include <fstream>
5 #include <cmath>
6 #include <vector>
7
8 using namespace std;
9
10 namespace numerical
11 {
12     void multiply_matrix_vector(matrix& matrix, vector<double> &xVec, vector<double>
        &result)
13     {
14         result.clear();
15         double val;
16         for (size_t y = 0; y<matrix.get_n(); y++)
17         {
18             val = 0.0;
19             for (size_t x = 0; x<matrix.get_m(); x++)
20             {
21                 val += matrix.get_value(y, x) * xVec.at(x);
22             }
23             result.push_back(val);
24         }
25     }
26
27     //calculates one SOR step the for system coeff_matrix * x = b with the relaxation
        parameter alpha
28     double linear_system_solve_sor_step(square_matrix& coeff_matrix, vector<double> &x,
        vector<double> &b, double alpha)
29     {
30         //the new value of the current item
31         double new_value;
32         //a helper variable to store a needed sum of items in the loop
33         double sum;
34
35         //loop over all items and calculate the next elemt of x
36         for (size_t k = 0; k<coeff_matrix.get_n(); k++)
37         {
38             sum = 0.0;
39
40             //splitted the one loop into two separte loops for better performance.
41             //one of the loops is already using the new values while the other one is using
                the old one
42             for (size_t i = 0; i<k; i++)
43             {
44                 sum += coeff_matrix.get_value(k, i)*x.at(i);

```

---

```

45     }
46     for (size_t i = k + 1; i < coeff_matrix.get_n(); i++)
47     {
48         sum += coeff_matrix.get_value(k, i) * x.at(i);
49     }
50     new_value = (1.0 - alpha) * x.at(k) + alpha / coeff_matrix.get_value(k,
51         k) * (b.at(k) - sum);
52
53     //update the new x value
54     x.at(k) = new_value;
55 }
56
57 //calculate the residue now
58 double residue = 0.0;
59 vector<double> testVector;
60 multiply_matrix_vector(coeff_matrix, x, testVector);
61 for (size_t k = 0; k < coeff_matrix.get_n(); k++)
62 {
63     residue += pow(testVector.at(k) - b.at(k), 2);
64 }
65
66 //return the length of the residue vector
67 return sqrt(residue);
68 }
69
70 //tries to solve the linear equation coeff_matrix * x = b for x iterative with the
71 //SOR method untill either:
72 //1) the residues are lower than the specified error_threshold
73 //2) the residues of 50 following iterations have been increasing => propably no
74 //convergence for this system
75 //returns the needed iterations
76
77 size_t linear_system_solve_sor(square_matrix& coeff_matrix, vector<double> &x,
78     vector<double> &b, double alpha, double error_threshold)
79 {
80     //contains the value of the residues of the current iteration. start with a high
81     //number because of the if-comparison below
82     double error = 1000000000;
83     //contains the value of the residues of the previous iteration. start with a high
84     //number because of the if-comparison below
85     double old_error;
86     //counter of the needed iterations
87     size_t iteration = 0;
88
89     //contains how often the residues of two following iterations have been increasing
90     size_t residue_increased_counter = 0;
91
92     //loop, until a solution has been found
93     while (true)
94     {
95         //swap the old and the current error value
96         old_error = error;
97         //increase the number of needed iterations
98         iteration++;
99
100        //calculate the next SOR step
101        error = linear_system_solve_sor_step(coeff_matrix, x, b, alpha);
102
103        //check for exit condition 1)
104        if (error < error_threshold)
105        {
106            return iteration;
107        }
108    }

```

---

```
102     else if (error > old_error)
103     {
104         //exit condition 2
105         if (residue_increased_counter > 50){
106             return iteration;
107         }
108         residue_increased_counter++;
109     }
110     else
111     {
112         //reset the counter for the second exit condition.
113         residue_increased_counter=0;
114     }
115 }
116 }
117 }
```

**Quellcode:** linear\_system.cpp