Hausaufgabe zur Vorlesung "Numerische Strömungsmechanik" SoSe 16

Abgabe: 5.8.2016 bis 15:00

Name: ________________________________

Matrikelnummer: __________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte	/2	/7	/5	/4	/6	/14	/38

Die fertigen Aufgaben im Stil eines Praktikumsprotokolls (inklusive Ausdrucke ausführlich kommentierter Programmcodes) können entweder im Institut für Geophysik abgegeben oder als pdf an `cfd.geo@phys.uni-goettingen.de` geschickt werden. Geben Sie auf Ihrer Ausarbeitung auch Name und Matrikelnummer an.

Aufgabe 1

In einem Rechteck wird (etwa durch einen Ventilator) ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}$ angefacht. Zwei (gegenüberliegende) Seiten des Rechtecks sind wärmeisolierend, die anderen beiden Seiten haben festgelegte Temperaturen. In dieser Aufgabe geht es darum, die zweidimensionale Temperaturverteilung in dem Rechteck zu bestimmen. Nach einer geeigneten Entdimensionalisierung lautet das Problem für das Temperaturfeld $T(t,x,y)$ mit der Peclet-Zahl Pe:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Pe\,\vec{v}_0 \cdot \nabla T = \nabla^2 T \tag{1}$$

$$\vec{v}_0 = (\pi \sin(2\pi x)\cos(\pi y), -2\pi\cos(2\pi x)\sin(\pi y)) \tag{2}$$

$$T(t,x,0) = 0 \quad , \quad T(t,x,1) = 1 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial T}{\partial x}(t,1,y) = 0 \tag{3}$$

$$T(0,x,y) = y \tag{4}$$

Ist $\vec{v}_0$ divergenzfrei? Skizzieren Sie $\vec{v}_0$.

2 Punkte

Aufgabe 2

Schreiben Sie ein Programm, das diese dimensionslose Gleichung mit dem FTCS-Schema integriert. Achten Sie darauf, daß die räumliche Diskretisierung insgesamt zweiter Ordnung bleibt. Sinnvolle Parameter für Tests sind $Pe = 2$, $\Delta t = 0.001$, $N_x = N_y = 10$. Dabei ist Δt die Größe des Zeitschrittes und das zu berechnende Gebiet wird auf einem $(N_x + 1) \times (N_y + 1)$ Gitter diskretisiert, wobei die Punkte auf dem Rand die Indizes 0 und N_x bzw. N_y haben.

7 Punkte

Aufgabe 3

Es stellt sich nun die Frage, ob das Programm auch fehlerfrei ist. Da wir das ursprüngliche Problem nicht analytisch lösen können, wählen wir ein beliebiges $T^*(x, y)$ das die Randbedingungen erfüllt, und setzen es in die Gleichung ein. T^* ist nur dann eine Lösung, wenn wir noch einen Quellterm $Q(x, y)$ einführen:

$$Pe\ \vec{v}_0 \nabla T^* = \nabla^2 T^* + Q$$

Wie muß Q für $T^* = \cos(\pi x)\sin(\pi y) + y$ gewählt werden? Führen Sie das Q in Ihr Programm ein und testen Sie, ob dann die Zeitintegration auch wirklich in die stationäre Lösung T^* läuft. Den Fehler in der numerischen Lösung berechnen wir als $\sqrt{\sum_{ij}(T_{ij} - T^*_{ij})^2}$, wobei die Summe über alle Gitterpunkte läuft. Wie verhält sich der Fehler als Funktion der Auflösung N_x falls $N_x = N_y$?

5 Punkte

Aufgabe 4

Ab jetzt ist wieder $Q = 0$ und es geht um das System (1)-(4). Visualisieren Sie das Temperaturfeld für $Pe = 2$, $N_x = N_y = 30$, $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$ zu den Zeiten $t = 0.005$, 0.05, und 0.5. Wiederholen Sie dasselbe für $Pe = 10$.

4 Punkte

Aufgabe 5

Testen Sie mit Ihrem Programm, welches die maximal zulässigen Zeitschritte bei $Pe = 0.1$, 1 und 10 sind. Was beschränkt die Größe des Zeitschrittes?

6 Punkte

Aufgabe 6

Nun soll die Gleichung mit einem voll impliziten Euler-Schritt, d.h. mit dem BTCS-Schema simuliert werden. Dabei fällt die Lösung eines linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{M}\vec{x} = \vec{b}$ an. Dieses System wird mit dem Gauß-Seidel-Verfahren und Überrelaxation gelöst. Um das Lösungsverfahren zu testen erzeugen Sie erst ein Hilfsprogramm, in dem zu einem beliebig gewählten $\vec{x}$ das $\vec{b}$ ausgerechnet wird, und das dann ausgehend von diesem $\vec{b}$ das $\vec{x}$ wieder findet.

Sei $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U}$, wobei $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{U}$ untere und obere Dreiecksmatritzen und $\boldsymbol{D}$ eine Diagonalmatrix ist. Die Iterierten innerhalb des Verfahrens seien $\vec{x}_n$ mit den zugehörigen Residuen $\vec{r}_n = \boldsymbol{M}\vec{x}_n - \vec{b}$. Mit dem Relaxationsparameter ω wird das Verfahren zu:

$$\vec{x}_n = \vec{x}_{n-1} - \omega(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{D})^{-1}\vec{r}_{n-1}.$$

Bestimmen Sie für $Pe = 10$, $N_x = N_y = 30$, $\Delta t = 100$ das optimale ω, indem Sie $|\vec{r}_n|$ als Funktion von n berechnen und die Anzahl Iterationen bestimmen, die nötig sind, damit $|\vec{r}_n| < 10^{-4}$. Tragen Sie diese Iterationszahl als Funktion von ω auf. Was ist das optimale ω?

Verwenden Sie dann dieses Lösungsverfahren im BTCS-Schema, um die Ergebnisse von Aufgabe 4 für $Pe = 10$ zu reproduzieren. Wie verhalten sich die Laufzeiten des expliziten und impliziten Verfahrens zueinander?

14 Punkte