

COMPUTERGESTÜTZTES WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN  
SOMMERSEMESTER 2016

---

**Projekt 007**  
**Pendel Periodenverdopplung**

---

Name: Roland Zimmermann  
Matrikelnummer: 21426901  
Mail Adresse: roland.zimmermann@stud.uni-goettingen.de  
  
Abgabetermin: 11.07.2016

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Fragestellung</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Theorie</b>	<b>4</b>
3.1	Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung . . . . .	4
3.2	Bifurkationsdiagramm . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Aufbau und Funktionsweise der Simulation</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Auswertung der Ergebnisse</b>	<b>5</b>
5.1	Überprüfung der Fehler der Simulation . . . . .	5
5.2	Phasendiagramme in Abhängigkeit von $f$ . . . . .	7
5.3	Orbit-Bifurkationsdiagramm . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>9</b>
6.1	Bifurkationsdiagramm . . . . .	10
	<b>Literatur</b>	<b>10</b>

---

# 1 Einleitung

Diese Arbeit befasst sich mit dem Verhalten eines periodisch angetriebenen, gedämpften Pendels, dessen Auslenkung  $\Theta$  und Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist. Die Dämpfung wird durch den Dämpfungsparameter  $q$ , die Stärke des periodischen Antriebs mit  $f$  und dessen Frequenz mit  $\Omega$  bezeichnet wird.

Somit gehorcht dieses physikalische System dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= -\sin(\Theta) - q\omega + f \cdot \cos(\Omega t), \\ \frac{d\Theta}{dt} &= \omega,\end{aligned}$$

wie in der analytischen Mechanik gezeigt werden kann (siehe [3, S.5-7]).

## 2 Fragestellung

Die Hauptaufgabe besteht darin das System der gekoppelten Differentialgleichungen zu lösen beziehungsweise zu integrieren. Hierfür wird das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung benutzt. Das hierfür geschriebene Programm soll die Parameter  $q$ ,  $\Omega$ ,  $f$  über die Kommandozeile einlesen und anschließend die Winkelvariable  $\Theta_n$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_n$  zu dem jeweiligen Zeitpunkt

$$t_n = \frac{2\pi}{\Omega}n$$

abspeichern. Der Abstand zwischen den Zeitpunkten wird extra so gewählt, dass er mit der Schwingungsperiode des periodischen Antriebes übereinstimmt: wenn das System in eine periodische Dynamik übergeht, sollte dessen Schwingungsperiode ein Vielfaches der Antriebsperiode sein.

Hierfür sollen im Folgenden die Parametereinstellungen  $\Omega = 3/4$  und  $q = 1/3$  betrachtet werden. Zudem werden die Startbedingungen  $\Theta(t = 0) = 0$  und  $\omega(t = 0) = \Omega$  benutzt.

Anschließend wird in einem zweiten Teil ein *Orbit-Bifurkationsdiagramm* erstellt werden. Hierfür wird die Punkteschar  $\Theta_n$  für verschiedene Antriebsstärken  $f$  zwischen 1.35 und 1.45 grafisch aufgetragen. Hieraus sollen daraufhin die Antriebsstärken bestimmt werden, bei denen die ersten beiden *Periodenverdopplungen* [4, S. 353-360] auftreten.

Abschließend wird versucht ein Kriterium zum automatischen Detektieren der *Periodenverdopplungen* zu finden und in das bestehende Programm zu implementieren.

Alle Programmteile werden hierbei in *C++* programmiert. Die grafischen Darstellungen mit *gnuplot* in Verbindung mit shell-Scripts durchgeführt.

---

## 3 Theorie

### 3.1 Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung

Zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen wie  $y'(x) = F(x, y)$  gibt es eine Vielzahl von Lösungs-Algorithmen. Die bekannteste Familie ist hierbei allerdings die der Runge-Kutta-Verfahren. Im Folgenden wird das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung benutzt. Dieses berechnet die Ableitung gemittelt über vier verschiedene Stellen für eine erhöhte Genauigkeit [1, S. 34f]. Somit ergibt sich iterativ

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \mathcal{O}(\Delta x^5), \\k_1 &= \Delta x \cdot F(y_i, x_i), \\k_2 &= \Delta x \cdot F\left(y_i + \frac{k_1}{2}, x_i + \frac{1}{2}\Delta x\right), \\k_3 &= \Delta x \cdot F\left(y_i + \frac{k_2}{2}, x_i + \frac{1}{2}\Delta x\right), \\k_4 &= \Delta x \cdot F(y_i + k_3, x_i + \Delta x),\end{aligned}$$

wobei  $\Delta x$  die Schrittweite der Integration bezeichnet. Der größte Vorteil dieses Verfahrens ist die hohe Konvergenzrate, da die Fehler des Algorithmus in der Größenordnung von  $\Delta x^5$  liegen. Dies erlaubt eine präzisere Lösung des Problems über eine große Zeitspanne, ohne dass zu kleine Integrationsschritte gewählt werden müssen. Dies wirkt sich positiv auf die Laufzeit des Integrators aus.

### 3.2 Bifurkationsdiagramm

Das Ziel eines Bifurkationsdiagrammes ist es die Stabilität und die Anzahl der Fixpunkte einer Dynamik, in Abhängigkeit von einem äußeren Parameter  $f$  zu untersuchen. Gleichmaßen kann damit auch die Periodenlänge einer periodischen Bewegung untersucht werden. Letzteres wird in diesem Projekt später durchgeführt werden.

Hierfür wird das System für einen Parameterwert  $f$  über eine längere Zeit integriert, so dass dessen Werte irgendwann in periodische Punkte übergehen. Dieses Verfahren wird nun für verschiedene Werte  $f$  zwischen einem minimalen  $f_{min}$  und maximalen  $f_{max}$  iteriert, und die so ermittelten Punkte in Abhängigkeit von  $f$  grafisch aufgetragen (siehe Abbildung 3).

Hierbei kann nun die Anzahl der entstehenden periodischen Punkte beobachtet werden: Bei jeder Aufgabelung des entstehenden Baumes entsteht ein neuer Satz dieser - die Schwingungsperiode verdoppelt sich. Dies wird mit dem Begriff *Periodenverdopplung* bezeichnet.

---

## 4 Aufbau und Funktionsweise der Simulation

Für die beiden Hauptaufgaben wurde jeweils ein eigenes Programm geschrieben (*pendulum* zur Berechnung von  $\Theta$  und  $\omega$  und *bifurcation* zum Erstellen des *Orbit-Bifurkationsdiagramms*). Diese konnten sich allerdings den größten Teil ihres Codes, nämlich das Einlesen der Parameter und die eigentliche Integration teilen. Zur eigentlichen Integration wurde das oben beschriebene *Runge-Kutta-Verfahren* implementiert. Hierbei wurde der Integrationsschritt  $\Delta t$  als  $2\pi/(\Omega \cdot n)$  für ein ganzzahliges  $n$  erlaubt. Für die Berechnungen hat sich  $n = 5000$  als geeignet erwiesen (siehe 5.1).

Hierbei konnte bei niedrigerem  $\Delta t$  kein relevanter Genauigkeitsgewinn bemerkt werden, und die Rechenzeit hielt sich auf einem gewöhnlichen, aktuellen Computer auch in einem erträglichen Rahmen (für alle Simulationen zusammen wenige Minuten). Diese Form für  $\Delta t$  wurde gewählt, da die Werte für  $\omega$  und  $\Theta$  meistens zu den Zeiten  $t_n$  (siehe Oben) benötigt werden, und mit dieser Schrittweite ein relativ genaues Erreichen dieser möglich ist.

Bei der Ermittlung der Daten für das *Bifurkationsdiagramm* musste die Integration für verschiedene Werte von  $f$  durchgeführt werden. Hierfür genügte es eine weitere Schleife zu den bisherigen Funktionen hinzuzufügen. Zudem wurden hierbei erst Werte für viele Zeitschritte (siehe 5.2) berechnet, um eine transiente Bewegung zu vermeiden, und anschließend die letzten 100 Zeitpunkte  $t_n$  ausgewertet.

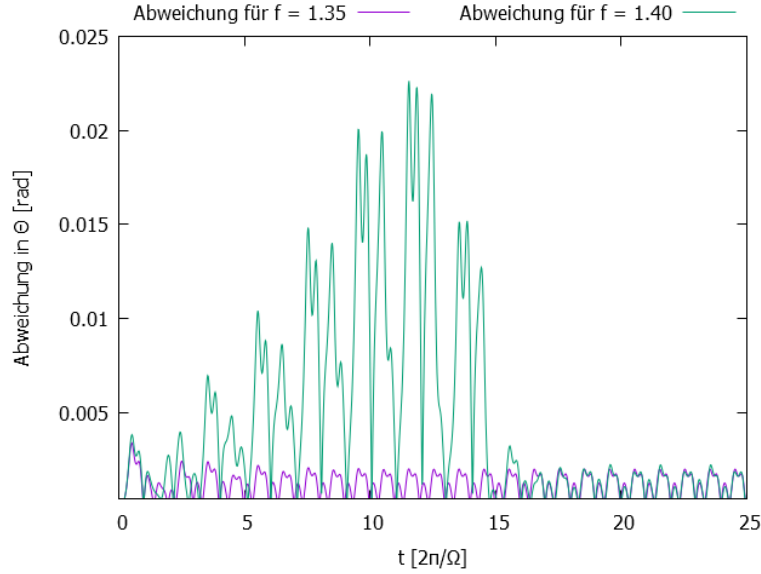
Diese Zahl wurde gewählt, damit die Periodenverdopplung gut erkennbar und die einzelnen Punkte noch mit dem Auge differenzierbar sind. Hierfür wurden diese jeweils in einem Objekt der *C++*-Klasse *vector* zwischengespeichert, wobei überprüft wurde, dass nicht zwei mal der gleiche Wert hintereinander gespeichert wird, um den Speicherbedarf gering zu halten.

Um die Periodenverdopplungen automatisch zu erkennen wird wie folgt verfahren: Für eine  $f$ -Iteration überprüfe nach der Integration alle in dem *vector* zwischengespeicherten Werte für  $\Theta$  auf  $n$ -fache Periodizität. Wurde somit eine neue Periode  $n$  ermittelt, welche von der vorher ermittelten abweicht, wird dies dem Benutzer ausgegeben.

## 5 Auswertung der Ergebnisse

### 5.1 Überprüfung der Fehler der Simulation

Wie bei jeder numerischen Berechnung zur Lösung eines Problems sollten die Ergebnisse nicht als exakt angesehen werden, da (durch die endliche Rechenzeit bedingt, Gleitkommarechnung, etc.) numerische Fehler im Laufe der Berechnung auftreten. Wird ein System (wie hier) über einen längeren Zeitraum betrachtet, kann dies zu größeren Abweichungen von der wirklichen Lösung führen.



**Abbildung 1:** Verlauf des relativen Fehlers zwischen der Simulation mit  $\Delta t_1$  und der mit  $\Delta t_2$  als Zeitschritt für  $f = 1.35$  und  $f = 1.40$ . Bemerkbar ist die Beschränktheit des Fehlers bei  $\approx 0.0025$  rad, nach einer größeren vorherigen Abweichung.

Zur Überprüfung der Korrektheit kann im Allgemeinen zum einen die analytische Lösung, als auch bestimmte Erhaltungsgrößen (beispielsweise die Energie) betrachtet werden. Dies ist in diesem Fall leider nicht möglich, da es weder eine Erhaltungsgröße (wegen des Antriebes und der Reibung) noch eine analytische Lösung (bedingt durch die Nicht-Linearität) gibt.

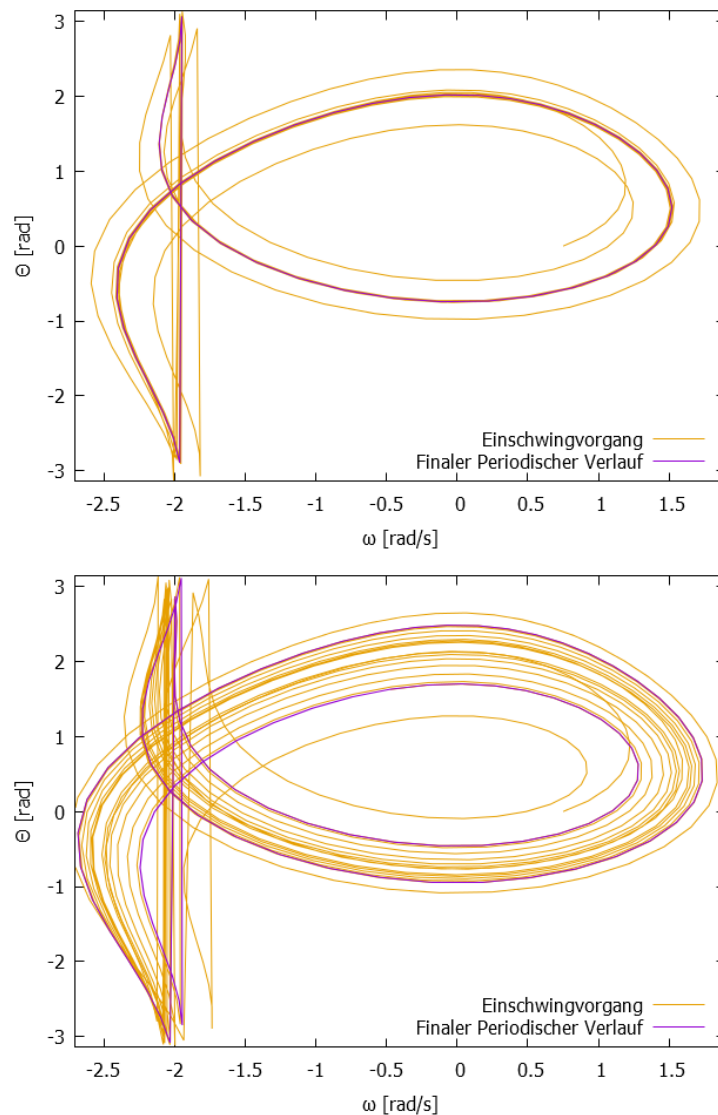
Um die numerische Genauigkeit trotzdem abschätzen zu können wurde für verschiedene Anregungsstärken  $f$  die Simulation über eine gewisse Zeit mit der Schrittweite  $\Delta t_1$  laufen gelassen. Parallel dazu wurde für die gleichen Parameter die Simulation mit  $\Delta t_2 = \Delta t/100$  durchgeführt. Betrachtet man die absolute Abweichung dieser beiden Ergebnisse, so gibt sie Auskunft über die Präzision der Simulation.

Dies wurde für zwei verschiedene äußere Erregungen  $f$  in Abbildung 1 durchgeführt, wobei  $\Delta t_1 = 2\pi/(\Omega \cdot 5000)$  gesetzt wurde. Es ist zu erkennen, dass die Berechnung für größere  $f$ -Werte zuerst während des Einschwingens ungenauer, der Fehler allerdings begrenzt ist. Nachdem das System einmal eingeschwungen ist, wächst dieser nicht weiter an, sondern sinkt sogar unter eine Grenze, die für alle untersuchten Anregungen identisch war. Diese beträgt  $0.0025$  [rad], was  $0.04\%$  des Maximalwertes entspricht.

Die stärkeren Abweichungen während des Einschwingens stellen im weiteren Verlauf der Arbeit auch kein Problem mehr da, da dort das periodische, nicht transiente Verhalten untersucht wird. Da der Fehler nahe null ist, spricht dafür, dass die Differentialgleichung korrekt numerisch integriert wurde. Eine weitere Präzisionsgewinnung würde nun nur noch im Austausch gegen sehr hohe Rechenzeiten erfolgen, welcher nicht verhältnismäßig sind.

## 5.2 Phasendiagramme in Abhängigkeit von $f$

Um weitere Aussagen über die Korrektheit der Lösung treffen zu können, können auch noch die Phasendiagramme genutzt und verglichen werden. Diese erlauben es auch die Systeme besser zu verstehen, und sinnvolle Parameter für die Bestimmung des Bifurkationsdiagramm im späteren Verlauf zu ermitteln. Die Trajektorien des Pendels im Phasenraum können für verschiedene äußere Antriebe  $f$  mittels der von *pendulum* generierten Daten aufgetragen werden (siehe Abbildung 2).



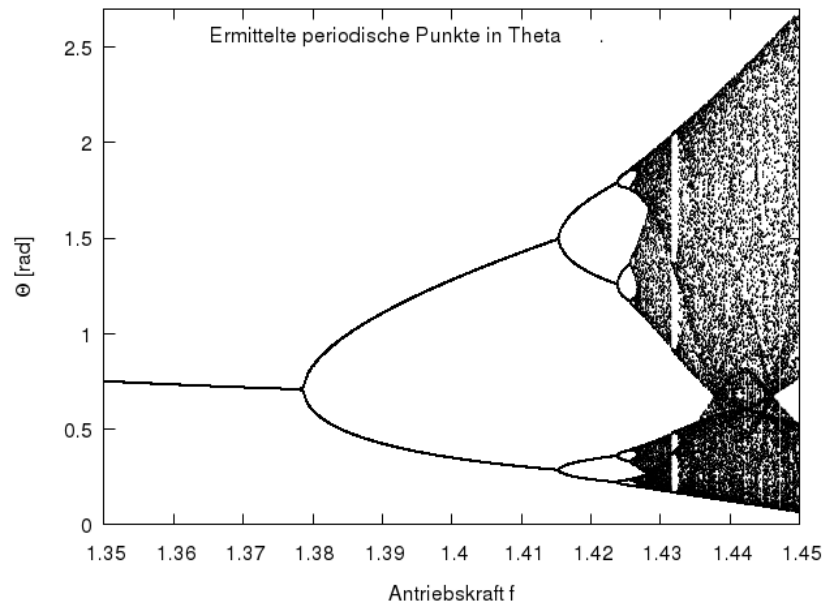
**Abbildung 2:** Phasenraumdiagramm von  $\Theta$  und  $\omega$  für  $f = 1.35$  (oben) und  $f = 1.40$  (unten). Der Einschwingvorgang (in violett) und die periodische Dynamik (in gelb) sind dargestellt - eine periodische Bewegung ist erkennbar.

Es wurden zur Berechnung die Startbedingungen  $\Theta(t = 0) = 0$  und  $\omega(t = 0) = \Omega$  benutzt, da für dieses auch das *Bifurkationsdiagramm* später erstellt wird.

Hierbei zeigen sich Verläufe, welche ein analoges Verhalten wie vorhandene Literaturverläufe ([2, S. 169ff], [5], [6]) aufzeigen. Zudem ergibt sich, dass das System für nicht zu große  $f$ -Werte nach einiger Zeit in eine stabile Oszillation übergeht. Es zeigt sich, dass für die betrachteten Parameter eine stabile Periode nach 100 Sekunden ( $f = 1.35$ ) bzw. 180 Sekunden ( $f = 1.40$ ) eingestellt hat. Hieraus kann qualitativ geschlossen werden, dass für größere  $f$ -Anregungen das System länger integriert werden muss, um transiente Bewegungen zu vermeiden. Dies ist für die weitere Auswertung noch relevant.

### 5.3 Orbit-Bifurkationsdiagramm

Um die Daten für das Bifurkationsdiagramm zu erstellen wird das zuvor beschriebene Programm *bifurcation* benutzt. Dabei zeigten sich nach einigem Ausprobieren und der vorherigen Betrachtung der Fehlerverläufe und der Phasendiagramme die Kombination aus  $\Delta t = 2\pi/(\Omega \cdot 5000)$  und der Schrittweite der  $f$ -Iteration mit 0.0001 als geeignete Parameter. Hierbei kann ein Verlauf in der grafischen Darstellung (siehe Abbildung 3) gut erkannt werden, bei einer akzeptablen Rechenzeit.



**Abbildung 3:** Orbit-Bifurkationsdiagramm zur Verdeutlichung des Einflusses des Parameters  $f$  auf die Periode des Systems in Anbetracht der Periodenverdopplung.

Zudem wurde das System zuerst 5000 Sekunden lang integriert, um etwaiges transientes Verhalten zu vermeiden - dieser Zeitabschnitt wurde bewusst deutlich höher gewählt, als die vorherige Analyse aus den Phasendiagrammen nahegelegt hat, um auch bei den



---

höchsten zu betrachtenden  $f$ -Werten ein stabiles periodisches Verhalten ermittelt wird. Dies scheint geglückt zu sein, da in dem Diagramm kein 'Ausschmieren' der Punkte zu beobachten ist, sondern die einzelnen charakteristischen Punkte scharf definiert sind.

Hier raus lassen sich grafisch die Parameter  $f$  bestimmen, bei denen die ersten beiden Periodenverdopplungen auftreten. Diese lauten etwa  $f_1 = 1.375$  und  $f_2 = 1.415$ . Der zuvor implementierte Algorithmus zur Erkennung der Periodenverdopplung gibt die Werte  $f_1 = 1.3769$  und  $f_2 = 1.4147$  mit einer Genauigkeit von  $\pm 0.0001$  (Schrittweite der  $f$ -Iteration) an. Weitere Verdopplungen treten bei  $f_3 = 1.424$  und  $f_4 = 1.4259$  auf.

Hierbei ist noch anzumerken, dass dieser Mechanismus nur bei den ersten vier Verdopplungen funktioniert - anschließend überlappen und vermischen sich die einzelnen 'Zweige' des Diagrammes so stark, dass diese simple Betrachtung nicht mehr ausreicht, und keine zuverlässige Bestimmung der Periode und damit auch keine weitere Periodenverdopplung festgestellt werden kann. Zudem wurde beobachtet, dass der Abstand zwischen zwei Periodendopplungen stark sinkend ist, und scheinbar gegen einen Wert konvergiert.

Dieses Diagramm zeigt sehr gut, wie das System für Antriebe für  $f \in [1.35, 1.376]$  längerer Laufzeit die Periode des Antriebes übernimmt. Für größere  $f$  findet das Phänomen der *Periodenverdopplung* statt. Hierbei geht das System in einen periodischen Zustand mit doppelter Periode über. Dies geschieht erneut an jeder weiteren Aufgabelung in dem *Bifurkationsdiagramm*. Somit ist erkenntlich, dass das System für  $f$ -Werte nahe an 1.45 oder gar darüber hinaus sich sehr chaotisch verhält.

Eine exemplarische Untersuchung dieses Diagrammes für  $f \in [1.45, 1.47]$  (aus Platzgründen hier nicht angegeben) zeigte: Das Diagramm wurde schlagartig deutlich stärker zerklüftet und sprang zwischen einem deutlich größeren  $\Theta$ -Intervall hin und her. Dies deutet stark auf einen chaotischen Übergang hin.

## 6 Diskussion

Die verwendete Integrationsmethode der Differentialgleichung scheint diese System erfolgreich lösen zu können. Die Simulationsergebnisse geben ein analoges Verhalten zu den Literaturangaben aus - ein genauer Vergleich kann nicht durchgeführt werden, da keine Literaturwerte für genau die benutzten Parameter  $q$  und  $\Omega$  gefunden wurden. Allgemein hätte man eine Präzisionserhöhung durch das Erhöhen des Integrationsverfahrens (Runge-Kutta höherer Ordnung als vier) oder durch das Reduzieren des Zeitschritts erreichen können. Da das Integrationsverfahren festgesetzt war, konnte dies in diesem Rahmen nicht getan werden. Die Zeitschritte konnten auch nicht nennenswert weiter reduziert werden, auf Grund der hierfür benötigten Rechenzeit für das Bifurkationsdiagramm. Zwar würde jede einzelne Berechnung nicht übermäßig lange, allerdings die Gesamtberechnung auf Grund der Anzahl der Iterationen, dauern.

---

## 6.1 Bifurkationsdiagramm

Die Generation des *Bifurkationsdiagrammes* kann als gelungen angesehen werden, da sein Verlauf Diagrammen aus der Literatur [6] entspricht. Die hier dargestellte Form ist relativ aussagekräftig und kann die Periodenverdopplung gut visualisieren. Die hierbei verwendete Auflösung mit 1000 Iterationen in  $f$  ist für die ersten Periodenverdopplungen definitiv ausreichend. Für höhere  $f$ -Werte, nahe an 1.45 wäre eine noch größere Auflösung unter Umständen geeigneter gewesen, allerdings wurde hier rauf aus Gründen der Rechenzeit verzichtet. Zudem ist nichtsdestotrotz auch in diesem Bereich das Verhalten gut erkennbar. Eine bessere Darstellung hätte man noch durch grafische Aufbereitung der Messpunkt-Wolke erhalten können, doch das Verhältnis aus Erkenntnisgewinn und Arbeitsaufwand davon wurde als zu gering für dieses Projekt eingeschätzt.

## Literatur

- [1] Andres Honecker, Thomas Pruschke, Salvatore R. Manmana,  
*Scriptum zur Vorlesung: Computergestütztes wissenschaftliches Rechnen.*  
Göttingen, Sommersemester 2016
- [2] Harvey Gould et al.  
*Computer Simulation Methods.*  
Worcester, 2007
- [3] Gray D. Davidson,  
*The Damped Driven Pendulum: Bifurcation Analysis of Experimental Data.*  
Woodstock (Portland), Dezember 2011
- [4] Steven H. Strogatz  
*Nonlinear Dynamics and Chaos.*  
Cambridge, 2000
- [5] Thomas Gasenzer ,  
<http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~gasenzer/index.php?n1=teaching&n2=chaos>.  
Aufrufdatum: 06.07.2016
- [6] Kulkarni P. R., Dr. Borkar V. C  
*Oscillations in Damped Driven Pendulum: A Chaotic System.*  
erschienen in *IJSIMR*, Volume 3, Issue 10, 2015