GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

Fakultät für
Physik

Bachelorarbeit

Spezialisierungspraktikum

angefertigt von

Roland Simon Zimmermann

aus Recklinghausen

am Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation

Bearbeitungszeit: 1. April 2009 bis 15. Juli 2009

Erstgutachter/in: Prof. Dr. Ulrich Parlitz

Zweitgutachter/in: nicht vorhanden

Zusammenfassung

Hier werden auf einer halben Seite die Kernaussagen der Arbeit zusammengefasst.

Stichwörter: Physik, Bachelorarbeit

Abstract

Here the key results of the thesis can be presented in about half a page.

Keywords: Physics, Bachelor thesis

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur

Symbol	Bedeutung
N	Anzahl der Einheiten im Reservoir $\mathbf{W}$
α	Verlustrate des *Leaky Integrators*
β	Parameter für den Lernvorgang mittels *Tikhonov Regularisierung.*
$\rho(\mathbf{W}))$	Spektralradius von $\mathbf{W}$
$\sigma(\mathbf{W})$	Singulärwert von $\mathbf{W}$
ν_{max}	Maximalwert des hinzugefügten Rauschens $\nu(n)$ für die Erhöhung der Stabilität.
$[\cdot\,;\,\cdot]$	Vertikales Aneinanderfügen von Vektoren/Matrizen

1 Einführung

2 Theorie

2.1 Berkley Modell

Das *Barkley Modell*, welches 1990 von Dwight Barkley vorgestellt wurde, ist ein System aus gekoppelten Reaktionsdiffusionsgleichungen. Dies sind partielle Differentialgleichungen (*PDE*) zweiter Ordnung welche einen Diffusionsterm besitzen. Das *Barkley Modell* beschreibt ein erregbares und oszillierendes Medium. Das Modell besteht aus zwei Variablen u, v die den *PDEs*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D \cdot \nabla^2 u + \frac{1}{\epsilon}(1-u)\left(u - \frac{v+b}{a}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= u^\alpha - v, \end{aligned} \tag{2.1}$$

unterliegen. Dabei ermöglicht $\alpha = 1$ dem System *periodische* Wellenmuster auszubilden und $\alpha = 3$ bedingt ein *chaotisches* Verhalten. Die Variable u durchläuft hierbei eine schnellere Dynamik als die hemmende Variable v [1, 4].
Die Parameter ϵ, b und a charakterisieren das Verhalten des Systems und werden in der gesamten folgenden Arbeit - sofern keine anderen Angaben existieren - als

$$\begin{aligned} a &= 0.8, \\ b &= 0.01, \\ \epsilon &= 0.02 \end{aligned}$$

festgelegt.
Zudem wird das Modell in dieser Arbeit in zwei Dimensionen betrachtet, sodass $u(t, x, y)$ und $v(t, x, y)$ skalare zeitabhängige Felder sind.
Zur Simulation des System werden zunächst die *PDE*s zeitlich mit einem Zeitschritt Δt und örtlich mit einer Gitterkonstante Δx diskretisiert. Zur Beschreibung des

Diffusionstermes wird eine fünf-Punkte Methode

$$\nabla^2 u(t)_{i,j} \simeq \frac{u(t)_{i-1,j} + u(t)_{i+1,j} + u(t)_{i,j-1} + u(t)_{i,j+1} - 4u(t)_{i,j}}{\Delta x^2} =: \Sigma(t)_{i,j} \tag{2.2}$$

nach [1] verwendet. Dabei stehen die tiefergestellten Indizes für den diskretisierten Ort der *x-y-Ebene*. Für kleine Zeitschritte Δt ist ein *explizites Eulerverfahren*

$$\begin{aligned} u(t+1)_{i,j} &= u(t)_{i,j} + \Delta t \cdot \frac{\partial u}{\partial t}, \\ v(t+1)_{i,j} &= v(t)_{i,j} + \Delta t \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.3}$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}_{i,j} &= D \cdot \Sigma(t)_{i,j} + \frac{1}{\epsilon}(1 - u(t)_{i,j}) \left(u(t)_{i,j} - \frac{v(t)_{i,j} + b}{a} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t}_{i,j} &= u(t)_{i,j}^3 - v(t)_{i,j} \end{aligned} \tag{2.4}$$

ausreichend genau. Im Folgenden wird zudem, in Analogie zu [4], die Diffusionskonstante auf $D = 1/25$, die Gitterkonstante auf $\Delta x = 0.1$ und die Zeitkonstante auf $\Delta t = 0.01$ gesetzt.

2.2 Mitchell-Schaeffer Modell

Das *Mitchell-Schaeffer Modell* ist ebenso wie das *Barkley Modell* ein System aus gekoppelten partiellen Differentialgleichungen. Es ist vorgeschlagen worden, um eine phänomenologisches Beschreibung der Aktionspotentiale auf der Membran von Herzzellen zu liefern. Das Modell wird durch die Membranspannung $v(t)$ und eine Kontrollvariable $h(t)$, welche das Verhalten der beteiligten Ionenkanäle steuert, definiert. Hierbei wird die Spannung als dimensionslose Größe dargestellt, die Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann [15].

Diese Dynamik wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla \cdot (D \nabla v) + \frac{h v^2 (1 - v)}{\tau_{in}} - \frac{v}{\tau_{out}}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= \begin{cases} \frac{1-h}{\tau_{open}}, & \text{wenn } v \leq v_{gate} \\ \frac{-h}{\tau_{close}}, & \text{wenn } v \geq v_{gate} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.5}$$

beschrieben. Dabei stehen die Parameter $\tau_{in}, \tau_{out}, \tau_{open}, \tau_{close}$ für Zeitkonstanten, welche die Form des Aktionspotentials modifizieren. Die ersten beiden Konstanten beschreiben die Geschwindigkeit, mit der die Ionen durch die Membran strömen, und die letzten beiden die Geschwindigkeit mit der sich die verantwortlichen Ionenkanäle öffnen beziehungsweise schließen. Zusätzlich stellt die Konstante v_{gate} eine Grenzspannung dar. Beim Über- und Unterschreiten dieser Grenze ändert sich der der jeweilige Zustand der Ionenkanäle , indem $h(t)$ angepasst wird. Im Rahmen dieser Arbeit werden, soweit keine anderen Angaben vorhanden sind, die Parameter durch die Werte aus Tabelle 2.1 in Analogie zu [15] festgesetzt. Dabei ist allerdings τ_{open} auf 20 [2, S. 134ff.] reduziert worden, da mit dieser Wahl ein chaotischeres Verhalten, ähnlich zum *Barkley-Modell*, erzeugt wird. Dies erschwert die mögliche Vorhersage der Entwicklung, wodurch eine anspruchsvolle Herausforderung erzeugt wird.

τ_{in}	τ_{out}	τ_{open}	τ_{close}	v_{gate}
0.3	6.0	20	150	0.13

Tab. 2.1: Verwendete Zeitkonstaten und Grenzspannung v_{gate} für die Betrachtung des *Mitchell-Schaeffer Modells*

Der erste Summand der zeitlichen Ableitung von v beschreibt ein Diffusionsverhalten, welches durch die Diffusionsmatrix $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(D_x, D_y)$ beschrieben wird. Die Einführung dieser Matrix erlaubt im Allgemeinen die Verwendung von zwei verschiedenen Diffusionskontanten D_x, D_y, welche Richtungsabhängig sind [17]. Im Folgenden wird für diese allerdings der gleichen Wert $D_x = D_y = D$ gesetzt.

Die meisten, auf zellulärer Ebene aufgestellten, Gleichungen haben eine hohe Komplexität. Hierdurch werden numerische Berechnungen sehr aufwendig. In der Herleitung dieses Modells sind einige vereinfachende Annahmen eingeflossen, wodurch die Komplexität und somit auch der numerische Aufwand reduziert worden sind. Trotz des phänomenologischen Charakters des *Mitchell-Schaeffer Modells* besitzen die Parameter eine physiologische Interpretation. Zudem ist es in der Lage wichtige Eigenschaften des Aktionspotentials im Vergleich zu anderen Modellen gut wiederzugeben [17].

Analog zu der Betrachtung des *Barkley Modells* sind für die numerische Betrach-

tung die beiden *PDE*s erneut in einem expliziten Verfahren mittels

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}_{i,j} &= D \cdot \Sigma(t)_{i,j} + \frac{h(t)_{i,j} v(t)_{i,j}^2 (1 - v(t)_{i,j})}{\tau_{in}} - \frac{v(t)_{i,j}}{\tau_{out}} \\ \frac{\partial h}{\partial t}_{i,j} &= \begin{cases} \frac{1-h(t)_{i,j}}{\tau_{open}}, & \text{wenn } v(t)_{i,j} \leq v_{gate} \\ \frac{-h(t)_{i,j}}{\tau_{close}}, & \text{wenn } v(t)_{i,j} \geq v_{gate} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.6}$$

diskretisiert worden. Dabei werden im Folgenden die Integrationskonstanten $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.01$ und die Diffusionskonstante $D_x = D_y = D = 5 \times 10^{-3}$ genutzt.

2.3 Delay Reconstruction

Die *Delay Reconstructions* (Verzögerung-Konstruktionen) können benutzt werden um Zeitreihen zu analysieren und den Phasenraum des ursprünglichen Systems zu rekonstruieren. Hierbei wird ein Signal $s(t)$ an diskreten Zeitpunkten betrachtet, sodass sich das diskrete Signal $s_n = s(n\Delta t)$ ergibt. Eine *Delay Reconstruction* erzeugt hier raus ein Signal, in welchem die Informationen m vorheriger Zeitpunkte mit dem Abstand τ enthalten sind. Somit wird eine höhere dimensionale Zeitreihe $\vec{z}_n \in \mathbf{R}^m$ durch

$$\vec{z}_n = \left(s_{n-(m-1)\tau}, s_{n-(m-2)\tau}, \ldots, s_n\right) \tag{2.7}$$

konstruiert. Bei einer ausreichend hohen Wahl der Rekonstruktionsimension m ist es hiermit möglich den Phasenraum des Attraktors zu rekonstruieren. Für die Wahl der Verzögerungszeit τ gibt es keine rigorose mathematische Definition oder Beschreibung, sondern es existieren verschiedene Ansätze zur Ermittlung des optimalen Wertes. Ein populärer Ansatz, welcher in dieser Arbeit verwendet besteht darin τ durch das Auffinden der ersten Nullstelle von der Autokorrelationsfunktion

$$AUC(\tau) = \sum_{l}^{N-\tau} (s_l - \bar{s})(s_{l+\tau} - \bar{s}) \tag{2.8}$$

zu ermitteln. Dies lässt sich dadurch motivieren, dass durch das hinzunehmen des Signals der Zeitreihe die um diesen Wert von τ verschoben ist, am meisten neue Information hinzugefügt wird, da die Selbstähnlichkeit des Signals am geringsten ist [12, 30 ff.]

2.4 Nächste Nachbar Vorhersage

Das Ziel der *nächsten Nachbar Vorhersage* ist es den funktionalen Zusammenhang $F : X \to Y$ zu finden, welcher Daten der Menge $X \in \mathbb{R}^n$ auf Elemente aus $Y \in \mathbb{R}^m$ eindeutig abbildet. Hierfür wird angenommen, dass die Funktion F lokal stetig ist. Zudem werden hierfür Daten benötigt, anhand derer der Zusammenhang erlernt werden kann.
Zu Beginn werden Paare $(\vec{x}, \vec{y}) \in X \times Y$ aus einem *Trainingsdatensatz* gebildet und eine Suchstruktur über die x-Werte gebildet. Nun kann diese Struktur genutzt werden, um für ein gegebenes $\vec{x}$ den wahrscheinlichsten Wert $\vec{y}$ zu suchen. Hierfür werden, unter der Annahme der lokalen Stetigkeit, die Datenpunkte $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_k$ aus der zuvor angelegten Suchstruktur ausgewählt, welche den geringsten Abstand $d(\vec{x}, \vec{x_i})$ zu $\vec{x}$ besitzen.
Diesen k Datenpunkten ist jeweils ein eindeutiger Wert $\vec{y}_i$ zuvor zugeordnet werden. Damit kann nun eine Approximation für den zu $\vec{x}$ gehörigen Wert $\vec{y}$ erstellt werden, indem beispielsweise ein gewichteter Mittelwert der $\vec{y}_i$ genutzt wird. Hierzu kann jedem der k nächsten Nachbarn $(\vec{x}_i, \vec{y}_i)$ ein Gewicht $w_i(\vec{x})$ nach

$$w_i(\vec{x}) = \frac{v_i}{\sum_j v_j}, \text{ mit } v_i = \frac{1}{||\vec{x}_i - \vec{x}||}$$

zugeordnet werden. Diese Definition erfüllt $\sum_i w_i = 1$ und ordnen zudem fernen Nachbarn ein geringeres Gewicht zu. Die dabei auftretende Norm $||\dots|||$ wird im Folgenden als euklidisch angenommen, sofern keine weiteren Angaben existieren. Somit ergibt sich für die gewichtete Vorhersage

$$F(\vec{x}) = \vec{y} = \sum_i^k \vec{y}_i \left(\sum_j \frac{||\vec{x}_i - \vec{x}||}{||\vec{x}_j - \vec{x}||} \right)^{-1} . \tag{2.9}$$

Der Schlüssel in der Bewältigung einer solchen Aufgabe liegt hauptsächlich in der Art und Weise, wie die k nächsten Nachbarn gesucht werden. Hierbei wird im Folgenden der Algorithmus K-D-TREE ebenso betrachtet wie ein naiver Ansatz. Bei diesem naiven Ansatz (*brute force*) werden die nächsten Nachbarn aus dem unsortierten Trainingsdatensatz durch pures Ausprobieren aller möglichen Punkte ermittelt.

2.4.1 k-d-tree

Ein K-D-TREE ist eine Spezialform eines Binärbaumes, und eine oftmals genutzte Methode um Suchvorgänge in Datenstrukturen durchzuführen. Das zugrundeliegende Prinzip eines solchen Baumen ist, dass wenn der Punkt P_1 weit entfernt von P_2 liegt, aber P_3 nahe an P_2 liegt, so folgt daraus, dass P_1 und P_3 weit voneinander entfernt liegen müssen. Durch eine solche Argumentation muss bei einem solchem Suchvorgang die Distanz zweier Punkte seltener berechnet werden, wodurch Rechenzeit eingespart werden kann.

Der Suchvorgang besteht aus zwei Phasen. Zuerst wird die Aufbauphase des Baumes durchgeführt, bei der die Trainingsdaten einsortiert und damit ein Suchindex erzeugt wird. Anschließend folgt die Suchphase, bei der der zuvor erstellte Suchindex nach dem nächsten Nachbarn durchsucht wird.

In der Aufbauphase wird zuerst eine Dimensionen ausgewählt und der Median der Daten in dieser Dimension bestimmt. Anschließend werden die Datenpunkte anhand dieses Wertes in eine Menge unterteilt die nur größere oder nur kleinere Elemente bezogen auf jene Dimension beinhaltet. Die beiden Mengen bilden die ersten Äste des Baumes. Nun wird dieser Schritt rekursiv auf alle Äste angewendet, und die hierbei zum Vergleich genutzte Dimension iteriert [7]. Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis eine bestimmte maximale Anzahl N_{max} an Knotenpunkten pro Ast erreicht wird. Ab dieser unteren Grenze wird das Erstellen des Binärbaumes beendet. Ab dieser Grenze benötigt der Zugriff auf die verschiedenen Elemente und das Aufteilen in neue Äste mehr Zeit, als das Berechnen der Abstände zwischen den verbleibenden N_{max} Knoten und dem Suchpunkt. Eine beispielhafte Darstellung des Verfahrens ist in Abbildung 2.1 zu finden.

Die Suchphase wird nun wieder rekursiv durchgeführt. Hierbei werden wieder iterierend die verschiedenen Dimensionen verglichen, und sich somit immer weiter im Suchbaum nach unten ein Weg gebahnt [7]. In der untersten Ebene, also wenn nur noch eine Suche zwischen maximal N_{max} Elemente durchgeführt werden muss, wird nun die *brute force*-Suche genutzt. In dieser Arbeit ist für alle Anwendungen diese Schwelle auf $N_{max} = 40$ gesetzt worden.

Diese Methode zeichnet sich durch eine Laufzeit, welche sich wie $\mathcal{O}(\log(N))$ verhält, aus [3]. Dies ist geringer, als die Laufzeit eines naiven Suchvorgangs, welche

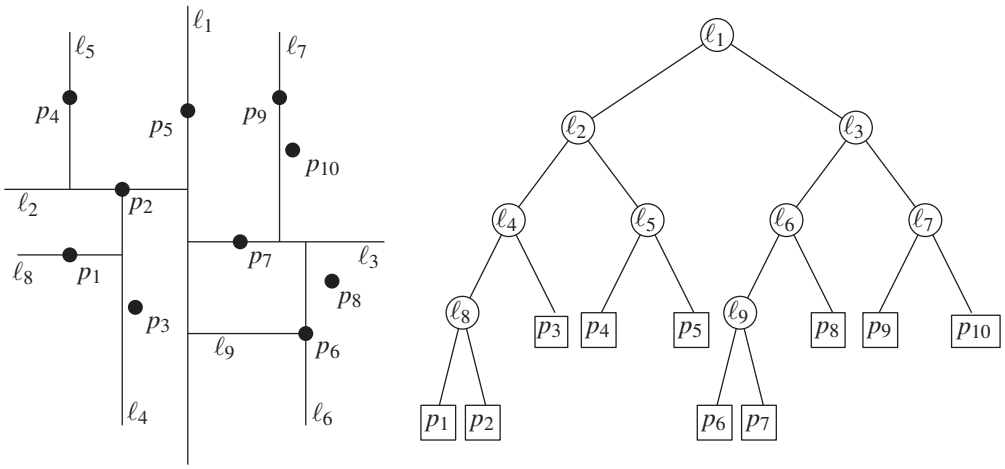


Abb. 2.1: Exemplarische Darstellung eines K-D-TREES für $d = 2$ Dimensionen. In der linkten Hälfte ist die graphische Interpretation der Aufteilung und in der rechten der Aufbau des entstehenden Baumes zu finden [7].

sich wie N verhält. Es hat sich allerdings gezeigt, dass wenn d hinreichend groß ist, diese Vorteile geringer werden, und ab einer gewissen Dimensionalität die Suche langsamer als ein naiver Suchvorgang abläuft.

2.5 Radiale Basisfunktionen

Eine weitere Methode um einen solchen funktionalen Zusammenhang $F : X \to Y$ zu finden, welcher Daten der Menge $X \in \mathbb{R}^n$ auf Elemente aus $Y \in \mathbb{R}^m$ eindeutig abbildet, bieten die *radialen Basisfunktionen* an. Auch hierfür Daten benötigt, anhand derer der Zusammenhang erlernt werden kann. Diese Trainingsdaten sollen im Folgenden aus N Datensätzen bestehen.

Bei diesem Ansatz wird die gesuchte Funktion F als Linearkombination aus vielen radialen Funktionen approximiert. Dafür werden l Elemente $\{\vec{x}_i\}, i = 1, ..., l$ aus den Trainingsdaten ausgewählt und diese als so genannte *Zentren* $\{\vec{z}_i\}$ genutzt. Hiermit lassen sich die Funktionen als $\phi_i(\vec{x}) = \phi(||\vec{x} - \vec{z}_i||), i = 1, \ldots, l$ darstellen [6]. Eine mögliche Wahl der Basisfunktionen sind zum Beispiel Gaußfunktionen

$$\phi_i(\vec{x}) = \exp\left(-\frac{||\vec{x} - \vec{z}_i||}{\sigma_i^2}\right).$$

Die Linearkombination führt zu dem Ansatz

$$\vec{y} = F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{l} \vec{\omega}_i \phi(||\vec{x} - \vec{z}_i||). \tag{2.10}$$

Die $\vec{\omega}_i \in \mathbb{R}^m$ stehen hierbei für die *Gewichtsvektoren* der einzelnen Basisfunktionen ϕ_i im Rahmen der Linearkombination.

Das Ziel besteht jetzt darin die Gewichtsvektoren ω_i approximativ zu bestimmen. Dafür werden zunächst drei Matrizen definiert, durch die das Problem ausgedrückt werden kann.
Die Matrix $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times m}$ repräsentiert die Funktionswerte der Abbildung und beinhaltet als Zeilen die N verschiedenen Funktionswerte $\vec{y}_i$ der Trainingsdaten

$$\mathbf{Y} := \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{N1} & \dots & y_{Nm} \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Die Matrix $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^{l \times m}$ beinhaltet dagegen als Zeilen die Gewichtsvektoren

$$\mathbf{\Omega} := \begin{pmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{l1} & \dots & \omega_{lm} \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Die dritte Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times m}$ repräsentiert Anwendungen der radialen Basisfunktionen auf die Trainingsdaten

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{Nm} \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

wobei die einzelnen Elemente als $A_{ij} := \phi(||\vec{x}_i - \vec{y}_j||)$ definiert sind.
Damit lässt sich das Problem durch

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Omega} \tag{2.14}$$

ausdrücken [6]. Da die Matrizen $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{A}$ konstruiert sind, besteht die Aufgabe lediglich darin die Matrix $\mathbf{\Omega}$ der Gewichte zu ermitteln. Der naheliegende Ansatz,

das direkte ermitteln der Inversen $\mathbf{A}^{-1}$ stellt sich dafür aus ungeeignet heraus, da das Problem meistens überkonditioniert ist. Daraus ergibt sich eine schlechtere Voraussage der zukünftigen Funktionswerte. Stattdessen ist es geschickter das Problem als eine lineare Optimierungsaufgabe zu betrachten, bei der der Fehler $||\mathbf{A}\omega_i - \vec{y_i}||^2$ minimiert werden soll.
Durch die Verwendung der *Moore-Penrose Pseudoinversen* $\mathbf{A}'$ wird hierbei zugleich gewährleistet, dass die Lösung ausgewählt wird, die zudem auch die kleinsten Gewichte besitzt. Dies hilft den Effekt des *Overfittings* zu vermeiden [6]. Mit diesem Ansatz ergibt sich die Lösung zu

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{Y}. \tag{2.15}$$

Um nun Funktionswerte vorherzusagen wird der Zusammenhang aus für die zuvor ermittelten Gewichte genutzt.

2.6 Neural Networks

2.6.1 Überblick über Neural Networks

In den letzten Jahren hat die Technik der Neuronalen Netzwerke erneut stark an Popularität gewonnen. Dies liegt zum einen an der gestiegenen verfügbaren Rechenleistung und zum anderen an der Entwicklung hierfür notwendiger Algorithmen.
Allgemein lassen sich diese Netze in zwei große Gruppen aufteilen: die der Feed Forward Neural Networks und die der Recurrent Neural Networks, welche im Folgenden als FFNN respektive RNN bezeichnet werden.

Ein FFNN besteht aus mehreren Ebenen, welche jeweils aus verschiedenen nichtlinearen Einheiten zusammengesetzt sind. Die erste dieser Ebenen wird zur Eingabe und die letzte zur Ausgabe eines Signals genutzt. Eine Schematische Darstellung ist im linken Teil der Abbildung 2.2 zu finden. Die Einheiten zweier benachbarter Ebenen sind mit individuellen Gewichten vollständig in Richtung der Ausgabe verbunden. Dies bedeutet, dass jedes Einheit x_i^n sein Signal an alle Einheiten der folgenden Ebene x_j^{n+1} mit einem individuellen Gewicht $w_{i\to j}^n$ weitergibt. Zwischen den Einheiten innerhalb einer Ebene bestehen keinerlei Verbindungen.
Damit ein solches Netzwerk Vorhersagen treffen kann, müssen die Gewichte in einem Trainingsvorgang angepasst werden. Dies wurde durch die Entwicklung des

Backpropagation-Algorithmus stark vereinfacht. Hierbei werden die Gewichte so angepasst, dass eine Kostenfunktion minimiert wird [5, S. 225-290].

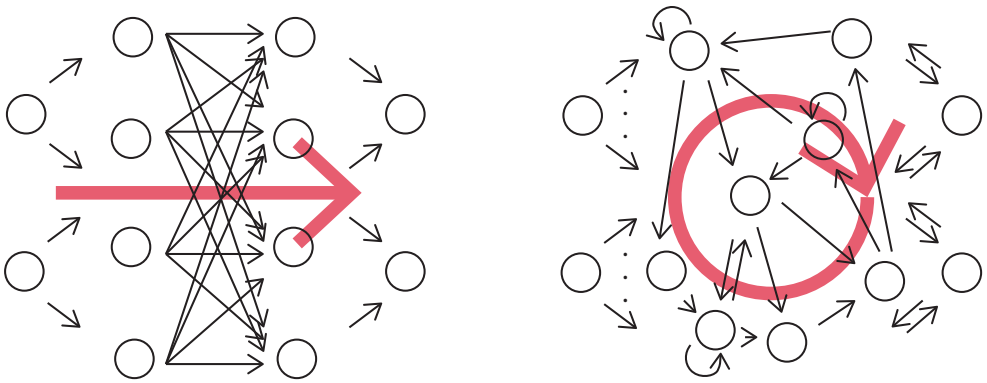


Abb. 2.2: Schematische Darstellung eines FFNN mit vier Ebenen (links) und eines RNN (rechts) mit ihren jeweiligen Verbindungen und der Eingangs- und Ausgangsebene. Der Informationsfluss ist in rot eingetragen (nach [9]).

Ein RNN hat einen ähnlichen Aufbau, doch hier können alle Einheiten an alle anderen Einheiten Signale weitergeben und von diesen erhalten. Die schematische Struktur ist im rechten Teil der Abbildung 2.2 dargestellt. Dies kann die Vorhersage in bestimmten Anwendungsbeispielen wie der Text- und Sprachanalyse verbessern. Ein Nachteil ist, dass zum Trainieren nicht mehr der einfachere Backpropagation-Algorithmus genutzt werden kann, sondern eine für RNNs abgewandelte Form genutzt werden muss. Für den prominenteste Algorithmus werden die verschiedenen Zustände die das RNN im Laufe der Signal-Propagation annimmt nacheinander betrachtet und auf diese zeitliche Entwicklung anschließend der Backpropagation-Algorithmus angewendet. Diese Methode ist unter dem Namen Backpropagation through Time (BTT) bekannt. Sie ist zum einen rechenaufwendiger und zum anderen auch instabiler, da das Verschwindenden und auch das Explodieren des Gradienten der Kostenfunktion deutlich wahrscheinlicher als bei der gewöhnlichen Backpropagation ist [9, 16].

2.7 Echo State Network

2.7.1 Überblick

Um die (Leistungs)Probleme der RNN zu umgehen, wurden als mögliche Lösung die Echo State Networks von H. Jäger vorgeschlagen [8]. Etwa zeitgleich wurde von W. Maas das Modell der *Liquid State Machines* vorgeschlagen. In diesem Modell steht der biologische Hintergrund im Fokus, doch sind die Ergebnisse denen der Echo State Networks sehr ähnlich [14].

2.7.2 Aufbau

Ein ESN ist eine Spezialform eines RNNs. Hierbei wird eine auf dem ersten Blick eigenartige Entscheidung getroffen: Während des gesamten Trainingsvorganges werden die Verbindungen der einzelnen Einheiten größtenteils nicht verändert. Es wird versucht durch das *Echo* der vorherigen Signale, welche noch im Netzwerk gespeichert sind, diese Signale zu rekonstruieren - hieraus ergibt sich auch der Name [13]. Im Folgenden wird der Aufbau und anschließend die Funktionsweise eines solchen Netzwerkes nach [11] beschrieben.

Allgemein bildet das Netzwerk S ein zeitliches Signal $\vec{u}(n) \in \mathbb{R}^{N_u}$ auf eine zeitlich variable Ausgabe $\vec{y}(n) \in \mathbb{R}^{N_y}$ für die Zeiten $n = 1, ..., T$ ab. Zudem besitzt das System ein sogenanntes Reservoir aus N nicht-linearen Einheiten. Der innere Zustand des Netzwerkes wird durch diese Einheiten beschrieben und als $s(n) \in \mathbb{R}^N$ bezeichnet.
Die Verbindungen der inneren Einheiten untereinander werden durch die Gewichtsmatrix $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ beschrieben. Das Eingangssignal wird zusammen mit einem *Bias* $b_{in} \in \mathbb{R}$ durch die Matrix $\mathbf{W}_{in} \in \mathbb{R}^{N \times (N_u+1)}$ auf die inneren Einheiten weitergeleitet.

Die zeitliche Entwicklung der inneren Zustände berechnet sich nach der Vorschrift

$$\vec{s}(n) = (1 - \alpha) \cdot \vec{x}(n-1) + \alpha \cdot f_{in} \left(\mathbf{W}_{in}[b_{in}; \vec{u}(n)] + \mathbf{W}\vec{x}(n-1) \right), \tag{2.16}$$

wobei f_{in} eine beliebige (meistens *sigmoid*-förmige) Transferfunktion ist, und $[\cdot\,;\,\cdot]$ das vertikale Aneinanderfügen von Vektoren beziehungsweise Matrizen bezeichnet. Für diese Zustandsgleichung wurde das Modell eines *Leaky Integrator Neurons* genutzt, wobei $\alpha \in (0, 1]$ die Verlustrate beschreibt. Für $\alpha = 1$ ergibt sich als Spezialfall

ein gewöhnliches Neuron

$$\vec{s}(n) = f_{in}\left(\mathbf{W}_{in}[b_{in}; \vec{u}(n)] + \mathbf{W}\vec{x}(n-1)\right). \tag{2.17}$$

Da für manche Anwendungsfälle auch eine direkte Rückkopplung wünschenswert ist, kann das System noch um eine Ausgabe-Rückkopplung erweitert werden. Diese verbindet die Ausgabe erneut mit den inneren Einheiten durch die Matrix $\mathbf{W}_{fb} \in \mathbb{R}^{N \times N_y}$. Somit ergibt sich

$$\vec{s}(n) = (1-\alpha) \cdot \vec{x}(n-1)\alpha \cdot f_{in}\left(\mathbf{W}_{in}[b_{in}; \vec{u}(n)] + \mathbf{W}\vec{x}(n-1) + \mathbf{W}_{fb}\vec{y}(n)\right) \tag{2.18}$$

als Zustandsgleichung.

An Hand der inneren Zustände lassen sich nun noch die sogenannten erweiterten inneren Zustände $x(n) = [b_{out}; \vec{s}(n); \vec{u}(n)] \in \mathbb{R}^{1+N_u+N}$ definieren, wobei b_{out} ein *Bias* für die Ausgabe darstellt.

Aus diesen erweiterten inneren Zuständen kann nun die Ausgabe $\vec{y}(n)$ konstruiert werden. Dies kann entweder im Sinne einer Linearkombination durch die Ausgangsmatrix $\mathbf{W}_{out} \in \mathbb{R}^{(1+N_u+N)\times N_y}$ oder durch andere nicht lineare Klassifizierer wie beispielsweise einer Support Vector Machine (SVM) durchgeführt werden. Im Folgenden wird nur der Fall einer Linearkombination betrachtet, da sich für die anderen Methoden ein analoges Verfahren ergibt. In diesem Fall berechnet sich die Ausgabe mittels

$$\vec{y}(n) = f_{out}\left(\mathbf{W}_{out}\vec{x}(n) = \mathbf{W}_{out}[b_{out}; \vec{s}(n); \vec{u}(n)]\right), \tag{2.19}$$

wobei f_{out} die Transferfunktion der Ausgabe ist.

Während die Matrix $\mathbf{W}_{out}$ durch den Trainingsvorgang bestimmt wird, werden die Matrizen $\mathbf{W}_{in}$ und $\mathbf{W}$ a priori generiert und festgelegt. Hierbei hat sich für das Generieren der Eingangsmatrix eine zufällige Anordnung von zufälligen Gleitkommazahlen zwischen -1.0 und 1.0 als geschickt herausgestellt. Falls ein Feedback gewünscht ist, also Gleichung (2.18) genutzt wird, wird $\mathbf{W}_{fb}$ gleichartig konstruiert. Auf das Generieren der inneren Matrix $\mathbf{W}$ wird in Abschnitt 2.7.4 genauer eingegangen.

2.7.3 Trainingsvorgang

Nachdem der Aufbau des Netzwerkes beschrieben ist, ergibt sich nun die Frage, wie der Trainingsvorgang durchgeführt wird.

Hierfür wird für die Zeiten $n = 0, ..., T_0$ das ESN mit dem Signal $\vec{u}(n)$ betrieben, wobei T_0 die *transiente Zeit* beschreibt. Hierdurch soll das System aus seinem zufällig gewähltem Anfangszustand in einen charakteristischen Zustand übergehen. Anschließend wird das System für Zeiten $n < T$ weiter betrieben und die erweiterten Zustände $\vec{x}(n)$ als Spalten in der *Zustandsmatrix* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{(1+N_u+N)\times T}$ gesammelt. Analog dazu werden die gewünschten Ausgaben $\vec{y}(n)$ nach dem Anwenden der Inversen f_{out}^{-1} der Ausgabe-Transferfunktion f_{out} auch als Spalten in der *Ausgabematrix* $Y \in \mathbb{R}^{N_y \times T}$ gesammelt. Nun wird eine Lösung der Gleichung

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}_{out}\mathbf{X} \tag{2.20}$$

für $\mathbf{W}_{out}$ gesucht. Hierfür stehen mehrere Verfahren zur Verfügung, von denen zwei prominente erwähnt sein sollen. Zum einen kann die Lösung durch eine *Tikhonov Regularisierung* mittels der Regularisierung $\beta \cdot ||\vec{W}_{out,i}||^2$ der Gewichtsmatrix mit der Konstante β erhalten werden. Hierbei steht $\vec{W}_{out,i}$ für die jeweils i-te Zeile der Gewichtsmatrix. Das Verfahren

$$\mathbf{W}_{out} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^T \left(\mathbf{X}\mathbf{X}^T + \beta I\right)^{-1} \tag{2.21}$$

ist sehr leistungsstark, aber auch teilweise numerisch instabil. Bei geeigneter Wahl von β können die besten Ergebnisse hinsichtlich der Genauigkeit der Vorsage erzielt werden [13]. Deshalb wird in dieser Arbeit auch nur dieses Lösungsverfahren verwendet. Die weiteren Lösungsansätze für das Gleichungssystem sind aus Gründen der Vollständigkeit angegeben.

Zum anderen kann zur Lösung die *Moore-Penrose-Pseudoinverse* $\mathbf{X}'$ genutzt werden, sodass für die Ausgabematrix

$$\mathbf{W}_{out} = \mathbf{Y}\mathbf{X}' \tag{2.22}$$

folgt. Dieses Verfahren ist zwar sehr rechenaufwendig aber dafür numerisch stabil [10, 13]. Nichts desto trotz, kann allerdings auf Grund des Fehlens einer Regularisierung leicht der Effekt des Overfittings auftreten.

Um diesen Effekt bei der Verwendung der Psuedoinversen zu reduzieren, kann in der Zustandsgleichung (2.16) beziehungsweise (2.18) eine leichte normalverteilte Störung $\vec{\nu}(n)$ der Größenordnung 1×10^{-1} bis 1×10^{-5} addiert wird. Falls die *Tikhonov Regularisierung* zur Lösung verwendet wird, erhöht die Verwendung der zufälligen Störung die Stabilität der Vorhersage des System. Dieser Ansatz beruht auf Empirie, da eine mathematische Begründung hierfür noch nicht vollständig gelungen ist [8, 13].

Zusammenfassend ergibt sich somit der folgende Funktionsablauf für die Anwendung eines ESN:

1. Zufälliges Generieren der Matrizen $\mathbf{W}_{in}, \mathbf{W}_{fb}$ und Konstruktion der Matrix $\mathbf{W}$
2. Einspeisen des Signals $u(n)$ und Konstruktion der Zustandsmatrix $\mathbf{X}$ und der Ausgabematrix $\mathbf{Y}$
3. Berechnung der Ausgabematrix $\mathbf{W}_{out}$
4. Einspeisen des Signals $u(n)$ für Vorhersagen des Signales $y(n)$ für $n > T$

2.7.4 Theoretischer Hintergrund

Um die mathematischen Eigenschaften beschreiben zu können, sind zuerst zwei Definitionen nötig [18].

Definition 1 (Kompatibler Zustand)**.** *Sei $S : X \times U \to X$ ein* ESN *mit der Zustandsgleichung $\vec{x}_{n+1} = F(\vec{x}_n, \vec{u}_{n+1})$. Eine Folge von Zuständen $(\vec{x}_n)_n$ ist kompatibel mit der Eingangsfolge $(\vec{u}_n)_n$, wenn $\vec{x}_{n+1} = F(\vec{x}_n, \vec{u}_{n+1}), \forall n \leq 0$ erfüllt ist.*

Definition 2 (Echo State Eigenschaft (ESP))**.** *Ein* ESN *$S : X \times U \to X$ besitzt die Echo State Eigenschaft genau dann wenn eine Nullfolge $(\delta_n)_{n \geq 0}$ existiert, sodass für alle Zustandsfolgen $(\vec{x}_n)_n, (\vec{x}'_n)_n$ die kompatibel mit der Eingangsfolge $(\vec{u}_n)_n$ sind gilt, dass $\forall n \geq 0 ||x_n - x'_n|| < \delta_n$*

Dies bedeutet, dass nachdem das Netzwerk lang genug betrieben worden ist, der Zustand nicht mehr von dem beliebig gewähltem Anfangszustand abhängt. Diese Eigenschaft ist notwendig, damit das ESN Vorhersagen treffen kann [9].

Nun stellt sich die Frage, wann ein Netzwerk diese Eigenschaft besitzt. Es wird schnell klar, dass dies hauptsächlich durch die Gewichtsmatrix $\mathbf{W}$ bestimmt wird. Betrachtet man die Zustandsgleichung des Netzwerkes, so lässt sich auf Grund des *Banachschen Fixpunktsatzes* erkennen, dass die *ESP* für alle Eingänge $\vec{u}_n$ vorliegt, sobald $||\vec{x}_{n+1} - \vec{x}'_{n+1}|| < ||\vec{x}_n - \vec{x}'_n||$ für zwei kompatible Zustände $\vec{x}_n \neq \vec{x}'_n$ erfüllt ist [8]. Hieraus ergibt sich, dass die *ESP* vorliegt, wenn

$$|1 - \alpha(1 - \sigma_{max}(\mathbf{W}))| < 1 \tag{2.23}$$

erfüllt ist, wobei $\sigma_{max}(\mathbf{W})$ der größte Singulärwert ist [11].
Weitergehend ist bekannt, dass für Systeme bei denen der Spektralradius $\rho(\mathbf{W}) > 1$ ist diese Eigenschaft nicht vorliegen kann, sofern $\vec{u}_n = 0$ möglich ist [8, 11].

Hieraus ergab sich lange Zeit die falsche Annahme, dass für Systeme mit $\rho(\mathbf{W}) < 1$ die Eigenschaft stets garantiert ist. Wie allerdings gezeigt werden konnte, ist dies nicht der Fall [18]. Stattdessen konnte gezeigt werden, dass eine hinreichende Bedingung durch

$$\rho(\alpha|\mathbf{W}| + (1 - \alpha)\mathbf{I}) < 1 \tag{2.24}$$

gegeben ist - wobei als Betrag der Matrix hier das elementweise Betragsnehmen gemeint ist. Diese Bedingung ist weniger einschränkend als Gleichung (2.23) [18].

Weitergehend hat sich in Experimenten gezeigt, dass eine dünnbesetze Gewichtsmatrix $\mathbf{W}$ zu reicheren Dynamiken innerhalb des Reservoirs führen kann [8]. Eine solche dünnbesetze Matrix bedeutet, dass nicht mehr jedes Neuron mit jedem anderen Neuron verbunden ist, sondern dass nur noch ein relativer Anteil ϵ dieser Verbindungen vorhanden ist. Da durch eine größere Anzahl an verschiedenen internen Dynamiken vielfältigere Funktionen besser approximiert werden können, kann die Vorhersagequalität durch einen Geringen ϵ Wert erhöht werden.

Darauf basierend kann nun eine Methode nach [18] angegeben werden, um die Gewichtsmatrix $\mathbf{W}$ zu konstruieren:

1. Generiere zufällige Matrix $\mathbf{W}$ mit $|\mathbf{W}| = \mathbf{W}$ bei der in jeder Zeile nur ϵ Einträge ungleich 0 sind.

2. Skaliere $\mathbf{W}$, sodass Gleichung (2.24) erfüllt ist.
3. Wechsel zufällig das Vorzeichen von ungefähr der Hälfte aller Einträge.

Statt dieser Vorschrift wurde zuvor oftmals $\mathbf{W}$ zufällig generiert und anschließend nur $\rho(\mathbf{W})$ statt $\rho(|\mathbf{W}|)$ skaliert, was mit unter zu instabilen Systemen geführt hat. Da allerdings auch für Systeme mit einem Spektralradius > 1 die *ESP* beobachtet werden kann für nicht verschwindende Eingänge $\vec{u}_n$, ist es ratsam auch effektive Spektralradien jenseits 1 auszuprobieren.

3 Anwendungen

Die zuvor in Kapitel 2 eingeführten Methoden werden nun durch drei verschiedene Szenarien ausprobiert und verglichen. Hierbei liegt der Fokus auf der Verwendung und Erprobung der ESNs. Da die klassischen Methoden der *nächsten Nachbarn* und der *radialen Basisfunktionen* bereits seit längerer Zeit bekannt sind und populäre Lösung solcher Problemfälle darstellen, dienen sie als Bezugsgröße.

Jedes der drei Szenarien wird sowohl auf ein *Barkley*-System als auch auf ein System nach dem *Mitchell-Schaeffer*-Modell angewendet. Diese Systeme bestehen aus 150 Gitterpunkten und nutzen die zuvor beschriebenen Parameter. Für ihre Startverteilung werden die Felder der beiden Systemvariablen in 100 Quadrate unterteilt, und diese mit Zufallswerten zwischen 0 und 1 initialisiert. Anschließend werden die Systeme über 2000 Zeitschritte ($\hat{=}$400.0 Zeiteinheiten) simuliert um ein transientes Verhalten abzuwarten. Durch das weitere Simulieren der Systeme werden die Test und Trainingsdaten ermittelt. Dabei wird für das *Barkley* eine Samplingzeit von 0.1 und für das *Mitchell-Schaeffer*-Modell von 1.0 Zeiteinheiten benutzt.

Die erste Aufgabe besteht darin aus der Kenntnis einer der beiden Systemvariablen die andere Unbekannte zu ermitteln. Dabei wird die Spannungsvariable als Quelle genutzt. Dies ist in den zuvor eingeführten Modellen jeweils die Größe, welche den Diffusionsterm beinhaltet; also die u-Variable im *Barkley*-Modell und die v-Variable im *Mitchell-Schaeffer*-Modell.
Im zweiten Szenario werden die Techniken verwendet um aus Messdaten einer simulierten Fernfeldmessung der Spannungsvariable diese wiederherzustellen. Diese Fernfeldmessung wird durch eine gaußsche Unschärfe simuliert.
Abschließend wird die Spannungsvariable der inneren Punkte eines Quadrates nur durch die Kenntnis der Randwerte des Systems vorhergesagt.

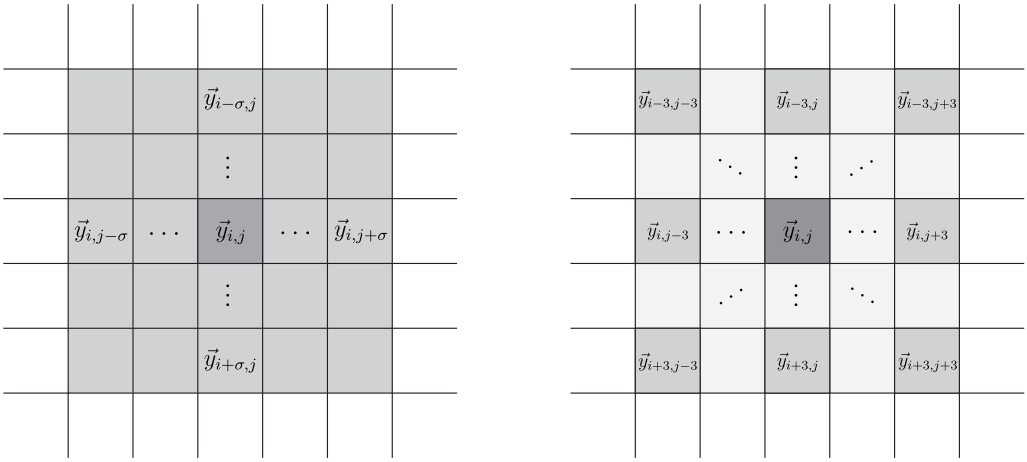
3.1 Allgemeines Vorgehen

Das Ziel aller drei Aufgaben besteht jeweils darin ein zweidimensionales Feld vorherzusagen. Eine naheliegende Möglichkeit dies zu schaffen besteht darin wirklich den gesamten Inhalt des 150×150 Einheiten großen Feldes auf einmal vorherzusagen. Da dabei die Ausgabe der Vorhersage aus einem 22500-dimensionalen Vektor besteht werden sehr viele Trainingsdaten benötigt, um genügend Informationen über eine solch hochdimensionale Ausgabe zu erhalten. Um dieses Problem zu umgehen wird stattdessen ein Verfahren benutzt, bei dem jeder Punkt einzeln vorhergesagt wird. Dies hat zudem den Vorteil, dass aus einer monströsen Vorhersage, welche mitunter viel Arbeitsspeicher verbrauchen würde, in viele kleine Vorhersagen aufteilt. Hierdurch sinkt der zur Berechnung benötigte Bedarf an Arbeitsspeicher drastisch.

Des Weiteren kann angenommen werden, dass die Dynamiken einen ausgeprägten lokalen Charakter besitzen, sodass zumindest bei den ersten beiden Aufgaben weit entfernte Punkte keinen unmittelbaren Einfluss auf die Vorhersage haben. Darauf basierend kann eine sogenannte *Messsondentechnik* entwickelt und genutzt werden. Hierbei werden nicht nur die Informationen an einem Punkt (i, j) für die Vorhersage, sondern auch die benachbarten Punkte, welche in einem Quadrat um (i, j) liegen, genutzt. Eine Veranschaulichung ist in 3.1a zu finden. Die Größe des Quadrates wird durch den Parameter σ bestimmt, und ergibt sich zu σ^2. Da direkt Nachbarn unter Umständen durch den geringen Abstand sehr ähnliche Informationen beinhalten können, wird zudem ein Parameter $\Delta\sigma$ eingeführt, welche den Abstand zweier benachbarter Punkte, deren Information simultan verwendet werden, angibt. Eine beispielhafte Darstellung hiervon ist für $\sigma = 5, \Delta\sigma = 2$ in Abbildung 3.1b dargestellt. Dabei werden nur die Zeitreihen der Gitterpunkte genutzt, welche dunkelgrau hinterlegt sind, und die hellgrauen Informationen verworfen.
Durch dieses Vorgehen kann für jeden Gitterpunkt ein $\left\lceil \frac{\sigma}{\Delta\sigma} \right\rceil^2$-dimensionaler Eingabevektor erstellt und für die ersten beiden Vorhersage-Aufgaben genutzt werden.

3.1.1 Echo State Network

Echo State Networks besitzen viele verschiedene Hyperparameter, welche die Qualität der Vorhersage beeinflussen können. Dazu zählen nach 2.7 die Reservoirgröße N, der Spektralradius ρ, die Verlustrate α, die Amplitude der zufälligen Störung ν, die Stärke der Regularisierung λ und der Anteil der vorhandenen internen Verbin-



(a) Messsonde ohne Abstände zwischen den Messpunkten

(b) Messonde mit einem Abstand von zwei Einheiten zwischen den Messpunkten

Abb. 3.1: Illustration der verwendeten *Messsondentechnik*. Abbildung 3.1a deutet an, wie aus einem σ^2 großem Quadrat um den eigentlichen Messpunkt Daten für die Vorhersage genutzt werden. Dagegen ist in Abbildung 3.1b das Verfahren für $\sigma = 5$ und $\Delta\sigma = 2$ dargestellt, sodass insgesamt die Information aus 9 Punkten genutzt wird.

dungen ϵ. Da es zum aktuellen Zeitpunkt noch keinen zufriendenstellenden mathematischen Algorithmus für das das selbstständige optimale Einstellen eines ESNs gibt, müssen die Parameter manuell ermittelt werden. Hierfür wird in dieser Arbeit eine GridSearch benutzt. Bei diesem Verfahren wird der Hyperparameterraum in festgelegten Schritten abgetastet und die Leistung des somit entstehenden Netzwerke evaluiert und somit die besten Parameter ermittelt. Durch die hohe Anzahl der einstellbaren Hyperparameter und die nicht zu vernachlässigende Rechenzeit für das Trainieren und Evaluieren eines Netzwerkes, ist es nicht sinnvoll diese Suche für alle Datenpunkte gleichzeitig durchzuführen. Stattdessen wird zuerst unter der Annahme, dass die Dynamik sich lokal an allen Punkten ähnlich verhält, ein Punkt in der Mitte des Feldes ausgewählt, und nur versucht dieses einen einzelnen Punkt vorherzusagen. Diese Aufgabe kann deutlich schneller berechnet werden, sodass nun die optimalen Hyperparameter mit einer GridSearch gesucht werden können. Anschließend können die Hyperparameter des zuvor ermittelten ESN für die Vorhersage aller Punkte genutzt werden.

3.1.2 Klassische Methoden

Die klassischen Methoden sind nicht von alleine aus in der Lage zeitlich ausgeprägte Dynamiken vorherzusagen, da den Methoden a priori keine Informationen über die vorherigen Zustände vorliegen. Um dieses Problem zu lösen können Verzögerungs-Koordinaten mittels der in Abschnitt 2.3 beschriebenen *Delay Reconstruction* für die in Abschnitt 3.1 beschriebenen Vektoren aufgestellt werden. Die über die Autokorrelation ermittelte zeitliche Verzögerung τ ist für beide Systeme in Tabelle 3.1 dargestellt.

$\tau_{Barkley}$	$\tau_{Mitchell-Schaeffer}$
0.64 Zeiteinheiten	2.38 Zeiteinheiten

Tab. 3.1: Verwendete zeitliche Verzögerung τ für die *Delay Reconstruction* für das *Mitchell-Schaeffer*- und das *Barkley*-Modell

4 Diskussion

5 Fazit

6 Ausblick

7 Danksagungen

Literaturverzeichnis

[1] D. Barkley. Barkley model. *Scholarpedia*, 3(11):1877, 2008. doi: 10.4249/scholarpedia.1877. revision #91029.

[2] Ezio Bartocci, Pietro Lio, and Nicola Paoletti. *Computational Methods in Systems Biology: 14th International Conference, CMSB 2016, Cambridge, UK, September 21-23, 2016, Proceedings*, volume 9859. Springer, 2016.

[3] Jon Louis Bentley. Multidimensional binary search trees used for associative searching. *Communications of the ACM*, 18(9):509–517, 1975.

[4] Sebastian Berg, Stefan Luther, and Ulrich Parlitz. Synchronization based system identification of an extended excitable system. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 21(3):033104, 2011.

[5] Cristopher M. Bishop. *Pattern Recognition andMachine Learning*. Springer, Cambridge, 2006. ISBN 0-387-31073-8.

[6] D.S. Broomhead and D Lowe. Multi-variable functional interpolation and adaptive networks. *Complex Systems*, 2:321–355.

[7] Mark De Berg, Marc Van Kreveld, Mark Overmars, and Otfried Cheong Schwarzkopf. Computational geometry. In *Computational geometry*, pages 1–17. Springer, 2000.

[8] H. Jäger. The “echo state“ approach to analysing and training recurrent neural networks - with an erratum note. *GMD Report*, 148, 2001/2010.

[9] H. Jäger. A tutorial on training recurrent neural networks, covering bppt, rtrl, ekf and the “echo state network“ approach. *GMD Report*, 159:48 ff., 2002.

[10] H. Jäger. Long short-term memory in echo state networks: Details of a simulation study. Technical report, Jacobs University Bremen - School of Engineering and Science, 2012.

[11] H. Jäger, M. Lukoševičiusa, D. Popovici, and U. Siewert. Optimization and applications of echo state networks with leaky- integrator neurons. *Neural Networks*, 20:335–352, 2007.

[12] Holger Kantz and Thomas Schreiber. *Nonlinear time series analysis*, volume 7. Cambridge university press, 2004.

[13] M. Lukoševičiusa and H. Jäger. Reservoir computing approaches to recurrent neural network training. *Computer Science Review*, 3(3):127–149, 2009.

[14] Wolfgang Maass. Liquid State Machines: Motivation, Theory, and Applications. In *Computability in Context*, pages 275–296. Imperial College Press, 2011.

[15] Colleen C Mitchell and David G Schaeffer. A two-current model for the dynamics of cardiac membrane. *Bulletin of mathematical biology*, 65(5):767–793, 2003.

[16] R. Pascanu, T. Mikolov, and Y. Bengio. On the difficulty of training recurrent neural networks. *Proceedings of the 30th International Conference on Machine Learning*, 28, 2013.

[17] Hugo Talbot, Stéphanie Marchesseau, Christian Duriez, Maxime Sermesant, Stéphane Cotin, and Hervé Delingette. Towards an interactive electromechanical model of the heart. *Interface focus*, 3(2):20120091, 2013.

[18] I. Yildiz, H. Jäger, and S. Kiebel. Re-visiting the echo state property. *Neural Networks*, 35:1–9, 2012.