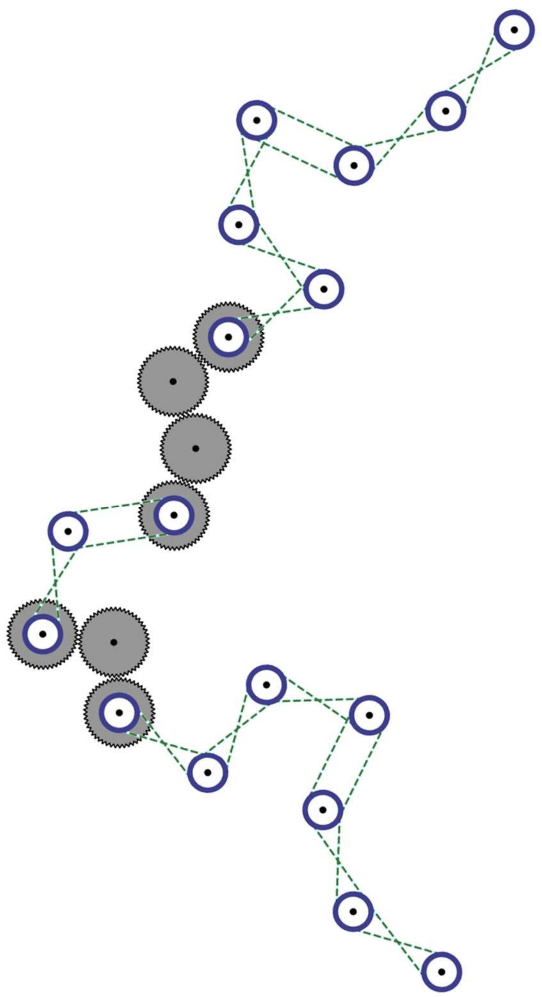
Die Arithmetik hinter dem Getriebe-rätsel

~ ~ ~

Und dessen Zusammenhang mit der
„schönsten Gleichung“
der Welt

Alexander Prinz



Kurzfassung

Diese Arbeit befasst sich mit dem aus vielen Intelligenztest oder Rätselmedien bekannten Getrieberätsel und der diesem zugrunde liegenden Arithmetik.

Interessanter Weise können viele Rätsel durch reines Rechnen einfacher/eleganter gelöst werden. In diesem Fall vereinfacht das in dieser Arbeit vorgestellte Lösungsschema das Lösen dieses Rätsel enorm entgegen dem gedanklich visualisierend mechanischen Lösen, wie man es auf intuitive „nichtmathematische“ Weise tun würde.

Es wird gezeigt, dass alle im Rätsel enthaltenen Freiheitsgarde einfach verstanden und in Zahlen übersetzt werden können. Ein Rechnen mit diesen Zahlen auf vorgestellte Weise führt dann zu einer sehr viel schnelleren und allgemeinen Lösung, welche ausführliche erarbeitet und präsentiert wird.

Eine Besonderheit liegt dabei darin, dass eine Verallgemeinerung der EULER'schen Identität als Teil der Lösung benutzt wird.

Unkorrigierte Erstfassung

Author: Alexander Prinz

Email: a_prinz@web.de

GitHub: https://github.com/FlatEric86

Homepage: https://www.alexander-prinz-art.de

Köthen, 14.06.2021

Inhalt

Einleitung

Viele Rätselmedien (Hefte, Internetseiten, Apps etc.) bergen dieses interessante und je nach Schwierigkeitsgrad durchaus nicht immer einfach, oder sagen wir besser, schnell zu lösende Rätsel. Nicht einfach bzw. schnell zu lösen deshalb, da der/die Rätselnde oft den „gedanklich mechanischen“ Lösungsweg geht.
Ziel des Rätsels ist es, denn Drehsinn des letzten Rads anhand des gegebenen Drehsinnes des ersten Rads sowie aller involvierten Radverbünde zu ermitteln. Der allgemeine Lösungsansatz der Meisten wird nun darin bestehen, den Drehsinn jedes Rades angefangen vom Ersten schrittweise auf das jeweils folgende Nachbarrad zu übertragen. Dies kann jedoch schnell dazu führen, dass man sich „vertut“, etwa, weil man den Drehsinn des zuvor beobachteten Rads schlicht vergessen hat, oder eine Schemaänderung wie Riemenverbünde für zusätzliche Irritationen sorgt.
Die beiden folgenden Abbildungen zeigen zwei Realisierungen eines solchen Rätsels mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden.

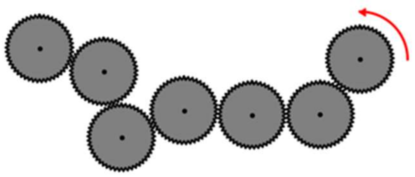


Abbildung 1:
Einfaches Rätsel. Das Rätsel besteht nur aus 7 Zahnrädern, welche direkt miteinander verbunden sind. Der Drehsinn des ersten Rads ist durch den roten Pfeil als linksdrehend deklariert. Der Drehsinn des letzten Rads, als Lösung des Puzzles, ist ebenfalls linksdrehend.

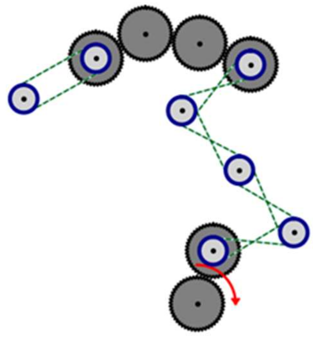


Abbildung 2:
Schwierigeres Rätsel. Das Rätsel besteht zum einen allgemein aus 10 Räder. Zum anderen gibt es Riemenverbunde im System. Diese sind zudem nochmals unterscheidbar zwischen ungekreuzten Riemenverbunden, sowie gekreuzten.
Die hinzugekommenden Freiheitsgrade scheinen die Lösung entgegen dem einfachen Fall aus Abbildung 1 um einiges zu erschweren.

Dabei ist in Abbildung 1 die einfachste Art des Rätsels zu sehen. In diesem Fall besteht das Rätsel nur aus aneinander gereihten Zahnrädern. Der Lösungsweg ist nun oft einfach der, den Drehsinn des einen Rads auf das nächste zu übertragen. Dann fällt nach schon kurzer Zeit das alternierende Muster bzgl. des Folgeraddrehsinns relativ zum Nachbarrad auf.

Der Drehsinn des aktuell betrachteten Rads verhält sich nämlich immer invers zum vorhergehenden. Aus dem Deduktiven wird nun ein induktives Lösungsvorgehen.
In Abbildung 2 ist eine Erweiterung des einfachen Rätsels zu sehen. Nämlich derart, dass nun nicht alle Räder nur aneinandergereihte Zahnräder sind, sondern zusätzliche Riemenverbünde enthalten sind. Diese „brechen" das einfache alternierende Muster, da zumindest im Fall eines ungekreuzten Riemenverbunds das Folgerad den Drehsinn des Nachbarrads beibehält.

Im Folgenden werden wir nun genauer auf die einzelnen Komponenten eingehen und in eine mathematische Modellierung übergehen. Wir werden dann verstehen, dass alle Komponenten und dessen Einfluss auf das System bzw. die Lösung mathematisch durch Zahlen beschrieben werden können. Diese Zahlen werden durch eine geeignete Lösungsfunktion bzw. Gleichung derart miteinander verrechnet, dass eben durch pures Rechnen auf die Lösung geschlossen werden kann.

Das einfache Rätsel (nur Zahnräder)

Im einfachsten Fall besteht das Rätsel nur aus Zahnrädern, welche alle nacheinander geschaltet miteinander verbunden sind.
Die Abbildung 3 zeigt eine solche Rätselrealisierung mit 5 Zahnrädern. Das erste Zahnrad und dessen Drehsinn sind durch einen roten Pfeil deklariert. Jedes folgende Zahnrad mit Ausnahme des Letzten sind einem blauen Pfeil zugeordnet. Das letzte Zahnrad und dessen Drehsinn sind durch einen grünen Pfeil deklariert. Die Pfeile bilden dabei auf den Drehsinn des jeweiligen Rads ab.

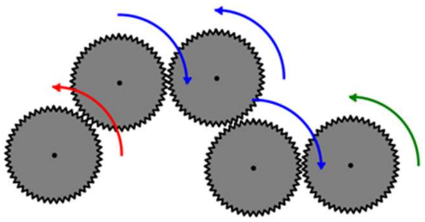


Abbildung 3:
Einfaches Rätsel mit 5 Zahnrädern und ihren jeweiligen Drehrichtungen gezeigt durch Pfeile.
Das Rätsel besteht aus 5 miteinander verbundenen Zahnrädern. Das erste Zahnrad ist mit einem roten Pfeil deklariert und hat einen linksorientieten Drehsinn. Die darauf folgenden Zahnräder sind bis auf das letzte mit blauen Pfeilen deklariert. Das letzte Zahnrad wurde mit einem grünen Pfeil versehen.
Jede Drehrichtung eines Rads entspricht immer der zu ihr inversen Drehrichtung seines Nachbarn.

Es fällt schnell auf, dass jeder Pfeil als Nachfolger eines Vorhergehenden immer den inversen Drehsinn relativ des Vorhergehenden hat.

Man kann also induktiv von jedem Zahnrad und dessen Drehsinn auf den des Folgerads schließen.

Nun überlegen wir uns, welche Parameter es hierbei zu beachten gibt.

Zum einen ist das die Anzahl aller Zahnräder, welche wir w (**w**heels) nennen wollen. Zum anderen haben wir den Drehsinn des ersten Zahnrads – wir nennen ihn d_0 (**d**irection), sowie den Drehsinn des letzten Zahnrads, welchen wir d_1 nennen, zu beachten.

Dass wir den Index 1 für den Drehsinn des letzten Rads nehmen, soll uns nicht irritieren. Denn wir werden gleich erkennen, dass nur diese 3 Parameter ausreichen, um das Rätsel vollständig zu beschreiben. Uns werden dabei gar nicht die Drehrichtungen der Räder zwischen dem Ersten und dem Letzten interessieren. Deshalb benutzen wir den Index 1 nicht als Abbildung auf das erste Folgerad, sondern immer auf das Letzte. Denn, da wir nun wissen, dass sich der Drehsinn des Folgerads immer invers zu dem des aktuell betrachteten Zahnrads verhält, stecken alle benötigten Informationen alleine schon im Drehsinn des ersten Zahnrads, sowie der Anzahl aller Zahnräder.

Wir können nämlich erkennen, dass der Drehsinn, des letzten Zahnrads in jedem Fall dem des ersten entspricht, genau dann, wenn die Anzahl w aller Zahnräder eine ungerade Zahl ist. Für den komplimentären Fall, also, dass w eine gerade Zahl ist, kehrt sich der Drehsinn immer um.

In den folgenden Abbildungen kann das ganze nochmals anhand mehrerer Beispiele nachvollzogen werden.

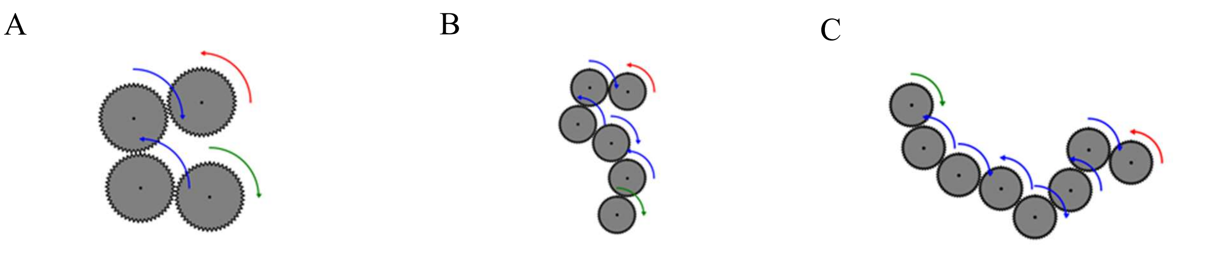


Abbildung 4:
3 Realisierungen des einfachen Rätsels mit unterschiedlicher jedoch immer gerader Anzahl an Zahnrädern.
Zu sehen sind 3 unterschiedliche Realisierungen des einfachen Rätseln. A enthält 4 Zahnräder, B 6 und C 8. d_0 ist in jeder der 3 Realisierungen immer linksorientiert. d_1 hat in jedem Fall immer einen Rechtsdrehsinn.

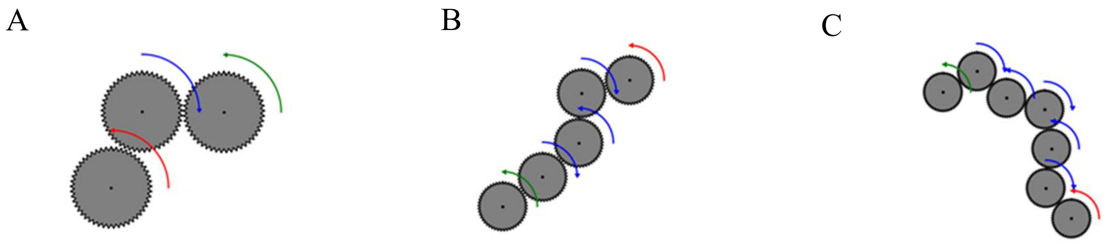


Abbildung 5:
3 Realisierungen des einfachen Rätsels mit unterschiedlicher jedoch immer ungerader Anzahl an Zahnrädern.
Zu sehen sind 3 unterschiedliche Realisierungen des einfachen Rätseln. A enthält 3 Zahnräder, B 5 und C 7. d_0 ist in jeder der 3 Realisierungen immer linksorientiert. d_1 hat in jedem Fall immer den identischen Drehsinn.

Die Logik des einfachen Rätsels

In diesem Abschnitt wollen wir nun etwas genauer auf die Logik bzw. dem Muster hinter dem einfachen Rätsel eingehen.
Wir kennen nun alle Freiheitsgrade bzw. systembestimmenden Parameter und deren logische/mechanische Einflüsse zueinander.

Wir wollen nochmal zusammenfassen, dass diese Parameter folgende sind:

d_0 := Drehsinn des ersten Rads
w := Anzahl der im System vorhanden Räder
d_1 := Drehsinn des letzten Rads

Zudem haben wir festgestellt, dass der Drehsinn des ersten Rads also genau dann invers zum Drehsinn des letzten Rads ist, wenn w gerade ist, und ansonsten dem des Ersten entspricht. Folgerichtig, können wir also behaupten, dass es eine Menge D gibt, welche die beiden einzigen Drehsinnorientierungen (links, rechts) definiert und auch als Lösungsmenge dienen kann, da sowohl d_0 als auch d_1 in ihr enthalten sind.
Sie sei nun:

$$D := \{left, right\} \tag{1}$$

Nun können wir eine Abbildung f definieren, welche dazu dienen wird, sowohl von der Anzahl der Räder w als auch vom Drehsinn d_0 des ersten Zahnrads auf den Drehsinn des letzten Zahnrads d_1 abzubilden.
Hierzu definieren wir noch die Menge aller möglichen w als:

$$W \subsetneq \mathbb{N} \setminus 0 \tag{2}$$

Es handelt sich also schlichtweg um eine (echte) Teilmenge der natürlichen Zahlen, wobei wir die 0 nicht mit in die Menge einbeziehen wollen...wo nichts ist, dreht sich eben auch nichts. *Eine Bemerkung, die wohl beweisorientierte MathematikerInnen weniger begeistern wird...*

Wir definieren nun unsere Abbildung f folgend:

$$f : D \times W \to D; (d_0, w) \longmapsto d_1 \tag{3}$$

Wir wissen aber, dass weniger die Anzahl w als solches, sondern stattdessen ob w gerade oder ungerade ist, entscheidend ist. Das geht natürlich aus der Anzahl implizit hervor. Der Drehsinn des letzten Rads definiert sich nur durch eine der beiden Möglichkeiten w = gerade oder w = ungerade und eben dem Drehsinn des ersten Rades.

Wir können nun eine Abbildungsvorschrift für f finden und sie folgend formulieren:

$$f(d_0, w) := \begin{cases} d_1 \neq d_0 \ ; \ if w =: \ even \\ d_1 = d_0 \ ; \ if w =: \ odd \end{cases} \tag{4}$$

Sie würde sich also etwa folgend lesen:
Wenn w eine gerade Zahl ist, so gib als Lösung d_1 das Element aus D zurück, dass ungleich der Eingabe d_0 ist. Für den komplementären Fall, also wenn w ungerade ist, gibt das Element aus D zurück, das identisch d_0 ist - also d_0 selber.

Wenn man nun also ein solches einfaches Rätsel lösen möchte, muss man lediglich die Anzahl der Räder bestimmen und aus ihr ableiten, ob es sich dabei um eine gerade oder ungerade Anzahl handelt.
Da der Drehsinn des ersten Rads bekannt ist, kann man nun direkt von diesem unter Berücksichtigung ob w gerade oder ungerade ist, auf d_l schließen. Das sollte selbst dann nicht schwerfallen, wenn es sich um sehr viele Räder handeln würde. Es müssen eben nur die Räder gezählt werden.

Die Arithmetik hinter dem einfachen Rätsel

Im vorhergehenden Teil haben wir das logische Muster des einfachen Rätsels erkannt und eine Funktion definiert, welche anhand des Drehsinns des ersten Zahnrads sowie dem Zustand, ob die Anzahl aller Zahnräder gerade oder ungerade ist, auf den Drehsinn des letzten Zahnrads abbildet.
Diese Funktion ist jedoch sehr „unarithmetisch". Wir operieren auf eine Menge (D), welche als Elemente keine Zahlen enthält. Zudem passieren weitere logische Abfragen, da geprüft werden muss, ob w gerade oder ungerade ist. Dies lässt sich natürlich auch mathematisch über den Restwert beim Teilen durch 2 Prüfen. So hat jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ geteilt durch die 2 einen Restwert gleich 0 genau dann, wenn n gerade ist. Andernfalls ist der Restwert ungleich Null. Mit der Modulo-Operation lässt sich dies natürlich realisieren. Dennoch sollte es doch einen „schöneren" Weg geben.
Denn eigentlich wollen wir durch reine Arithmetik - eben durch pures Rechnen mit Zahlen - auf die Lösung kommen. Jedoch verbietet dies noch der Fakt, dass die wichtige Menge D nur aus logischen/semantischen Definitionen der beiden möglichen Drehsinnrichtungen besteht. Um nun mit diesen dennoch rechnen zu können, transformieren wir diese in wohldefinierte Zahlenwerte um.
Zunächst käme wohl jedem sofort die Menge der binären Zahlen in den Sinn, welche durch {0, 1} definiert ist. So könnte man die 0 der linken Drehrichtung zuordnen und 1 der Rechten. Wir werden aber eine andere binäre Menge verwenden, welche sich wesentlich besser als Bestand zur Lösung dieses Problems erweisen wird. Wir werden sie $\widetilde{D}$ nennen, da sie eine transformierte Menge von D ist. Sie soll nun den linken Drehsinn als die -1 enthalten und den rechten als die 1. ihre Elemente heißen $\tilde{d}$.

Die Transformationsvorschrift sei:

Sei T die Abbildung zum Transformieren von D zu $\widetilde{D}$, dann ist sie folgend definiert:

$$T(d_i) := \begin{cases} -1;\ if\ d_1 = left \\ 1;\ else \end{cases} \tag{5}$$

Es ist nun also $\widetilde{D}$:= {-1, 1}.

Nun sind alle Parameter rein numerischer Natur und wir wollen direkt mit ihnen rechnen um so auf die Lösung zukommen. Natürlich müssen wir den Lösungszahlenwert anschließend wieder in seinen semantischen Wert zurück transformieren.
Dazu können wir einfach die Rücktransformationsvorschrift definieren als:

$$\hat{T}(\tilde{d}_i) := \begin{cases} left\ ;\ if\ \tilde{d}_1 = -1 \\ right;\ else \end{cases} \tag{6}$$

Wir wollen nun also jene Funktion finden, welche unseren zuvor transformierten Wert seitens des Drehsinns des ersten Rads, sowie der Anzahl aller Räder w auf die Lösung abbildet.

Sie sei nun folgend definiert:

$$\tilde{f} : \tilde{D} \times W \to \tilde{D}; (\tilde{d}_o, w) \longmapsto \tilde{d}_1 \tag{7}$$

Sie ist also sehr analog zu der Funktion f und unterscheidet sich zu ihr eben nur durch die Transformation der Menge D zu $\tilde{\mathrm{D}}$. Die Menge W, welche alle möglichen Anzahlen von Zahnrädern enthält, muss nicht transformiert werden. Es handelt sich schon um Zahlenwerte und diese können wir genauso in unserem Lösungsschema verwenden.
Allerdings ist die Funktionsvorschrift nun selbstverständlich eine ganz andere. Wir wollen alle Parameter und ihre Abhängigkeiten als Gleichung formulieren. Und zwar so, dass der Parameter $\tilde{\mathrm{d}}_1$ nun gleich dem Parameter $\tilde{\mathrm{d}}_0$ sein soll, genau dann, wenn also w eine ungerade Zahl ist. Andernfalls soll $\tilde{\mathrm{d}}_1$ ungleich $\tilde{\mathrm{d}}_0$ sein.

Wir implementieren dazu $\tilde{d}_0$ als (unabhängigen) Faktor in unsere Gleichung und formulieren einen korrespondierenden Faktor g als Funktion von w als jenen Faktor, der die Information ob w gerade oder ungerade ist direkt auf $\tilde{d}_0$ wirken lässt. Und zwar ebenso, dass sich $\tilde{d}_0$ nicht ändert, wenn w ungerade ist → g muss dann folglich 1 sein, und $\tilde{d}_0$ ändert, wenn w gerade ist. Das Ganze kann über einen simplen Vorzeichenwechsel von $\tilde{d}_0$ geschehen. Und genau das ist der Grund, warum wir die beiden Zahlen -1 und 1 als Kodierung für den Drehsinn gewählt haben. Denn für den Fall, dass $\tilde{d}_0 = 1$ muss g = 1 sein, wenn w ungerade ist. Ist nun $\tilde{d}_0 = -1$ und w ungerade, so ergibt die Multiplikation von $\tilde{d}_0$ mit g = 1 also gewünscht -1.
Für den Fall, dass w gerade ist, soll g nun -1 ergeben. Denn dann ergibt die Multiplikation von $\tilde{d}_0$ mit g = -1 ein Vorzeichenwechsel von $\tilde{d}_0$.
Wir müssen nun also eine Funktion g finden, welche die Information ob w gerade oder ungerade ist, auf die Menge {-1, 1} abbildet. Wobei konkret gelten soll:

$$g : W \to \{-1, 1\} \tag{8}$$

Mit der (semantischen) Vorschrift:

$$g(w) := \begin{cases} -1; \ if \ w \ is \ even \\ \ \ 1; \ else \end{cases} \tag{9}$$

Für die Funktion $\tilde{f}$ können wir nun allgemein formulieren:

$$\tilde{f}(\tilde{d}_0, w) := \tilde{d}_0 \cdot g(w) \tag{10}$$

Bleibt nun also nur noch eine geeignete arithmetische Funktionsvorschrift für g zu finden, welche die bereits genannten Forderungen erfüllen soll. Und zwar, ohne jegliche logische Abfragen oder einer Modulo-Operation.

Hierzu bedienen wir uns der EULER'schen Formel. Sie ist:

$$e^{i\varphi} = cos(\varphi) + isin(\varphi) \tag{11}$$

Wobei i die imaginäre Einheit definiert, cos den Cosinus und sin den Sinus.
φ ist der Phasenwinkel.

Wir betrachten die Gleichung aber nur für spezielle φ, nämlich ganzzählige Vielfache von der Kreiszahl π. Für diese Fälle fällt generell der Imaginärteil $i \cdot \sin(\varphi)$ weg, da er für jeden dieser Fälle immer 0 ergibt, wohingegen der Realteil cos (φ) immer -1 oder 1 ist, und zwar abhängig davon ob der ganzzählige Faktor zu π gerade oder ungerade ist.
Prinzipiell ließe sich g also bereits durch den Cosinus definieren. Ich bevorzuge aber aus wenig objektiven da eher kosmetischen Gründen lieber die EULER'sche Formel. Wir kommen aber noch zum Cosinus…und einer weiteren Möglichkeit.

Schauen wir aber erstmal genauer auf die nun für diesen Fall spezielle Form der EULER'schen Formel und substituieren dafür φ durch $\pi \cdot n$. Dann können wir BTW für den speziellen Fall w = 1 sogar eine Gleichung formulieren, welche viele MathematikerInnen als die schönste Gleichung der Welt bezeichnen und ich – wenn auch keine Mathematiker - dies sehr nachempfinden kann.
Es ist nämlich nun (mit: $\varphi = \pi \cdot n \, und \;\; n = 1$):

$$e^{i\varphi} = e^{i\pi n} = e^{i\pi} \tag{12}$$

Es gilt – bekannt als die EULER'sche Identität:

$$e^{i\pi} = -1 \tag{13}$$

Wie bereits erarbeitet gilt dies aber für alle $n \in \mathbb{N}$ welche ungerade sind. Also:

$$e^{i\pi n} = -1; \; if \;\; n \; is \; an \; odd \; integer \tag{14}$$

Aus der EULER'schen Formel können wir ebenfalls erkennen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, welches gerade ist, das Ergebnis 1 ist, da der Cosinus von $\pi \cdot n$ für alle n gerade immer 1 und der Imaginärteil durch den Sinus von $\pi \cdot n = 0$ ist.
Somit können wir verallgemeinern:

$$e^{i\pi n} = \begin{cases} -1; \; if \;\; n \; is \; an \; odd \; integer \\ \;\;\, 1; \; if \;\; n \; is \; an \; even \; integer \end{cases} \tag{15}$$

Halten wir nun also fest, dass die Gleichung betrachtet als Funktion ideal für unseren Zweck ist. Sie gibt nur Werte aus {-1, 1} aus und das in Abhängigkeit des Faktors n im Exponenten hinsichtlich ob gerade oder ungerade.
Jedoch können wir nicht direkt n durch w substituieren. Da die Rückgabe so noch genau invers zu unserer Anforderung ist. Denn wir wollen eben nicht, dass die Funktion -1 zurückgibt, wenn w ungerade ist, da sonst der Drehsinn von $\tilde{d}_0$ invertiert werden würde. Und für gerade w würde ebenso das Gegenteil von der gewünschten Anforderung passieren.
Der Trick ist nun so simple wie mächtig; wir addieren zu dem w noch eine 1 hinzu. Selbstverständlich würde eine Subtraktion mit dieser, Gleiches bewirken. Vom Prinzip her machen wir also aus n eine gerade Zahl, wenn w ungerade ist, indem wir eine 1 zu w hinzuaddieren und aus n eine ungerade Zahl, wenn w gerade wäre und wir ihr eine 1 hinzuaddieren.
Unsere Funktion g können wir nun folgend definieren:

$$g(w) := e^{i\pi(w+1)} \tag{16}$$

Und können nun g in $\tilde{f}$ (siehe Gleichung 10) durch die Vorschrift von g substituieren:

$$\tilde{f}(\tilde{d}_0, w) := \tilde{d}_0 \cdot e^{i\pi(w+1)} \tag{17}$$

Somit ist also:

$$\tilde{d}_1 = \tilde{d}_0 \cdot e^{i\pi(w+1)} \tag{18}$$

Um dennoch nun auch den Cosinus mit einzubeziehen, können wir also aufgrund der Gleichheit von der speziellen EULER‘schen Gleichung und dem Cosinus <u>in diesem speziellen Fall</u>:

$$e^{i\pi(w+1)} = cos(\pi(w+1)) \Longleftrightarrow w \in \mathbb{N} \tag{19}$$

…Behaupten, dass gilt:

$$\tilde{d}_1 = \tilde{d}_0 \cdot cos(\pi \cdot (w+1)) \tag{20}$$

Bis auf die Transformationen zwischen D und $\tilde{D}$ ist die Lösung nun also komplett arithmetischer Natur. Es müssen keine logischen Abfragen getätigt werden.

Allerdings muss man zugeben, dass, auch wenn der Faktor $e^{i\pi(w+1)}$ oder eben auch $\cos(\pi \cdot (w+1))$ recht elegant scheint, das Rechnen damit nicht maximal einfach ist. Wir definieren maximal einfach so, dass wir das Problem mit einem einfachen Taschenrechner lösen könnten, auch wenn er keine komplexen Zahlen verarbeiten könnte, oder eine Cosinusfunktion implementiert hätte.
Deshalb möchte ich hier noch eine Lösung vorstellen, welche nun auch dieses Problem löst.

$$\tilde{d}_1 = \tilde{d}_0^w \cdot (-\tilde{d}_0)^{(w+1)} \tag{21}$$

Diese Gleichung enthält keine „komplizierten“ Funktionen mehr. Ein Taschenrechner müsste lediglich das Potenzieren können. Aber diese Gleichung lässt sich auch ohne ausgesprochen große Mühe „im Kopf“ lösen.
$\tilde{d}_0$ ist generell eine Zahl aus {-1, 1}. Diese wird nun durch die beiden Exponenten w und w+1 potenziert, wobei der zweite Faktor noch bzgl. des Vorzeichens invertiert wird. Wir wissen, dass jede Potenz der 1 mit einem ganzzahligen Exponenten immer die 1 ergibt. Da die 1 mit sich selbst multipliziert, egal wie oft, eben immer 1 ist. Die Besonderheit liegt bei der Potenzierung für den Fall $\tilde{d}_0$ = -1. Potenziert man die -1 mit dem Exponenten n, dann ergibt sich -1 genau dann, wenn n ungerade ist, und 1 für jeden geraden Exponenten $n \in \mathbb{N}$. Das ist also genau jene Modellierung, welche wir für unseren Fall benötigen.
Allerdings gefällt mir persönlich diese Gleichung weniger gut, da sie nicht so einfach erklärbar ist, wie die beiden vorhergehenden Gleichungen.

Erweiterung des Rätsels (Zahnräder und Riemenverbundsysteme)

Bisher hat das Puzzle nur Zahnräder implementiert. Die Einzigen Freiheitsgarde waren somit nur der Drehsinn des ersten Rads sowie die Anzahl aller im System vorhandenen Zahnräder.
Oft findet man das Getrieberätsel aber in einer erweiterten Form, bei der auch Riemenverbundsysteme implementiert sind. In der folgenden Abbildung ist ein solches Puzzle zu sehen.

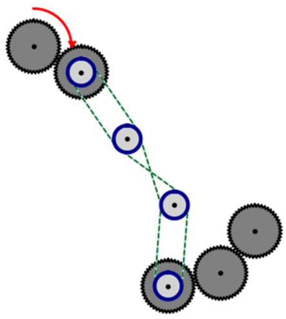


Abbildung 6:
Schwierigers Rätsel.
Während die bisherigen Rätsel nur aus direkt miteinander verbundenen Zahnrädern bestanden, sind nun Riemenverbundsysteme implementiert. Es gibt Adapterräder, welche von Zahnradverbundsystemen auf Riemensysteme adaptieren können und reine Riemenverbundsysteme.
Ein weiteres – und wichtiges – Merkmal ist, dass Riemenverbundsysteme durch ungekreuzt verlaufende Riemen, als auch durch gekreuzt verlaufende Riemen definiert sein können.

Zu den uns bereits bekannten Zahnrädern gesellen sich nun also auch Riemen, welche über zwei weitere Arten von Rädern laufen. So gibt es Räder, welche sowohl Zähne besitzen als auch einen Riemen aufnehmen können. Sie sind quasi Adapter zwischen reinen Zahnrädern und reinen Riemenrädern. Und es gibt Räder, welche nur Riemen aufnehmen können und keine Zähne besitzen (müssen).
Zu erkennen ist zudem, dass es gekreuzte wie auch ungekreuzte Riemen gibt. Es scheint sich also um zwei weitere Freiheitsgrade zu handeln. Nun sollten wir noch untersuchen, welche Auswirkungen diese Riemenverbünde auf das System haben.
Wir haben festgestellt, dass sich bei Zahnradnachbarn, jeder Nachbar invers zu seinem Partner dreht. Nun können wir auch jedem Rad, selbst wenn es kein reines Zahnrad ist, wieder einen Nachbarn zuordnen und seinen Drehsinn aus dem Partner ableiten. Jedoch gibt es nun eine Besonderheit. Denn während die Drehrichtung bei Zahnradnachbarn immer invers zum Partner ist, ist dies zumindest bei nichtgekreuzten Riemenverbunden nicht der Fall. Bei diesen Fällen ist der Drehsinn beider Partner gleich. Dies ist in der folgenden Abbildung veranschaulicht.

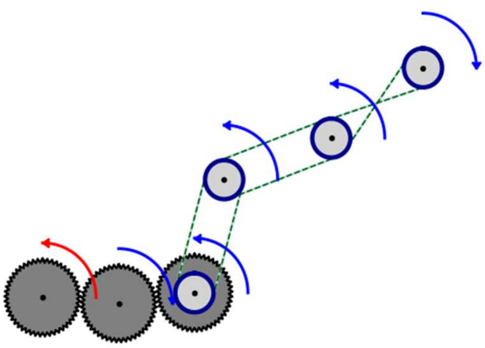


Abbildung 6:
Drehsinnabhängigkeit bzgl. der Art der Räder.
Währen bei den reinen Zahnradsystem ein generell alternierendes Muster bzgl. des Drehsinns von Folgerädern zu ihren Nachbarn zu sehen war, ist dieses Muster hier nicht mehr der Fall. Während zwischen den Rädern 1, 2 und 3 – da Zahnräder bzw. Adapterrad im Fall 3 – der Drehsinn eines jeden Folgerads invers zum letzten Nachbar ist, bleibt der Drehsinn beim Rad 4 erhalten. Der ungekreuzte Riemen sorgt für einen Beibehalt des Drehsinns zu jedem Folgenachbarn. Deshalb dreht sich auch Rad 5 mit eben diesem Drehsinn. Erst das letzte Rad (6) erhält wieder einen relativ zum vorhergehenden Nachbarn inversen Drehsinn. Dies liegt daran, dass der Riemenverbund zwischen beiden Räder ein gekreuzter Verbund ist.

Die ersten beiden Räder sind die bereits uns bekannten Zahnräder. Das dritte Rad ist ein Adapterrad. Alle weiteren Räder sind reine Riemenräder.

Zwischen den ersten 3 Rädern zeichnet sich das bekannte alternierende Muster seitens des Drehsinns ab. Jedes Folgerad dreht invers zum vorhergehenden. Jedoch wird dieses Muster durch das vierte Rad gebrochen, welches sich nämlich gleich zu dem vorhergehenden Rad dreht. Der Grund ist der ungekreuzte Riemenverbund zwischen dem dritten und vierten Rad. Auch zwischen dem vierten und fünften Rad passiert keine Invertierung des Drehsinns, da auch in diesem Fall der Riemenverbund ungekreuzt ist. Erst zwischen dem vorletzten und letzten Rad wird der Drehsinn wieder vertauscht. In diesem Fall handelt es sich zwar auch um einen Riemenverbund. Allerdings ist dieser in diesem Fall gekreuzt.

Während also ein ungekreuzter Riemenverbund den Drehsinn des einen Rads nichtinvers auf das Folgerad überträgt, wird der Drehsinn beim gekreuzten Rad immer zum Nachbarn invertiert.

In der folgenden Abbildung sind einige Riemenverbundsystemkonfigurationen ungekreuzter Natur dargestellt.

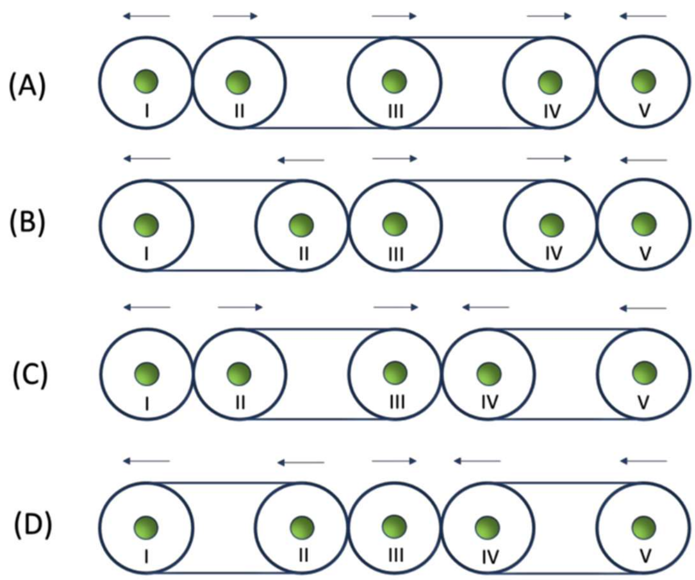


Abbildung 7:
Einige Riemenverbundsystemkonfigurationen.
Die Abbildung zeigt einige Riemenverbundsystemkonfigurationen für den Fall w = 5. Gekreuzte Riemenverbunde sind in diesem Fall nicht implementiert, da ausschließlich ungekreuzte Riemenverbunde untersucht werden sollen.
Die Pfeile repräsentieren den Drehsinn jedes Rades. Im Fall A enthält das Riemenverbundsystem sogar 3 Räder und somit implizit 2 Riemen.

Zu sehen sind 4 verschiedene Realisierungen von Riemenverbundsystemen unter der Bedingung, dass zwei Radpartner durch einen Riemen verbunden sein sollen und dieser ungekreuzt verläuft.
Die Abbildung zeigt nochmal die bereits besprochenen Muster des übertragenen Drehsinns auf Nachbarräder. Wir wollen deshalb nicht auf weitere unnötige Erklärungen zu dieser Abbildung eingehen, sondern das relevante Muster anhand der nächsten Abbildung extrahieren.

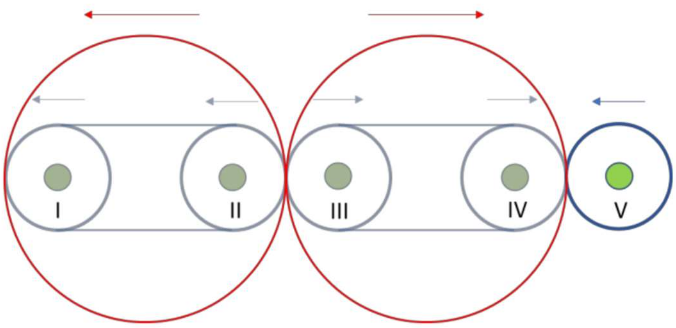


Abbildung 8:
Vereinfachungsschema mit zwei unterschiedlichen Riemenverbundsystemen.
Riemenverbundsysteme lassen sich vereinfachen indem jedes Verbundsystem aus einem gleichläufigen Riemenverbund aus n vielen Verbundpartnern zu einem virtuellen Zahnrad transformiert werden. Hier gibt es zwei Verbundpartner bestehend aus Paar 1 Rad I und II, sowie Paar 2 bestehend aus Rad III und IV. Die roten Kreise sollen andeuten, dass jedes der beiden Riemenverbundpartner als ein virtuelles Zahnrad gesehen werden kann. Dabei ist der Drehsinn dieses virtuellen Zahnrads gleich dem des Riemenverbundsystems.

Dieses Muster besteht nun nämlich darin, Riemenverbundsystem mit ungekreuzt verlaufenden Riemen durch „virtuelle Zahnräder“ zu ersetzen. Ziel dabei ist nämlich, unsere schon entwickelte Lösung für das vereinfachte Rätsel, welches eben nur aus Zahnrädern besteht, zu nutzen, um auch diese Erweiterung des Rätsels damit zu lösen. Wir modellieren jetzt aus den Riemenverbundsystemen virtuelle Zahnräder und fügen sie den echten Zahnräder zu. Am Ende sollten wir unsere Lösungsformel also auch für diese Rätselerweiterung nutzen können.
Abbildung 9 zeigt noch eine weitere Abstraktion bzw. Transformation eines nun aus 3 Räder bestehenden Riemenverbundsystems zu einem virtuellen Zahnrad.
Ein solches System lässt sich verallgemeinern. So können n aufeinander folgende Räder zusammen mit n-1 Riemen gleicher Laufrichtung zu einem solchen Riemenverbundsystem zusammengefasst und als ein virtuelles Zahnrad, welches das System substituiert, verstanden werden.

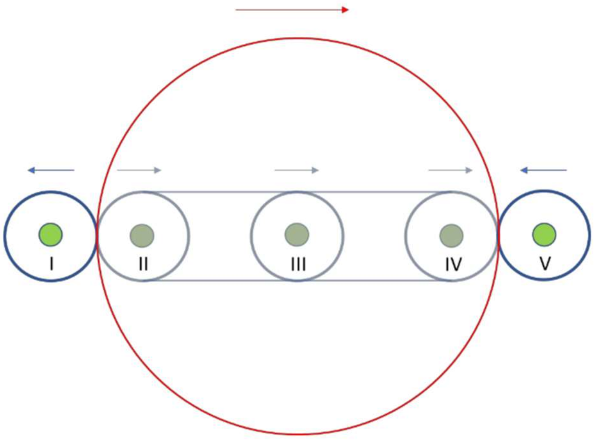


Abbildung 9:
Vereinfachungsschema mit einem Riemenverbundsystem.
In diesem Fall existieren 3 Räder und zwei zu ihnen korrespondierende Riemen mit gleicher Laufrichtung. Diese Einheit bzw. dieses System kann als ein virtuelles Zahnrad verstanden und modelliert werden.

Die Erweiterung der Lösungsgleichung

Wir wollen nun unsere bereits für das einfache Rätsel entwickelte Lösungsformel erweitern, um auch die erweiterte Form des Rätsels mit den zusätzlichen Riemenverbundsystemen als zusätzliche Freiheitsgrade modellieren zu können.

Unsere Lösungsformel funktioniert aber nur auf Systemen aus Zahnrädern, da in diesem Fall schließlich gilt, dass sich der Drehsinn eines jeden Rads auf das nächste invertiert überträgt und somit ein alternierendes Muster besteht.

Allerdings konnten wir bereits feststellen, dass ein Riemenverbundsystem also ein System aus n Nachbarrädern und n-1 Riemen mit gleicher Laufrichtung (ungekreuzter Riemen!) zu einem virtuellen Zahnrad zusammen gefasst werden kann.Wir werden darauf gleich noch genauer eingehen, zuvor jedoch noch untersuchen, wie wir denn mit einem Riemenverbund ungekreuzter Riemen umgehen müssen. Die simple Antwort zuerst: Wir ignorieren sie einfach! Warum aber können wir dieses Problem so labidar behandeln?

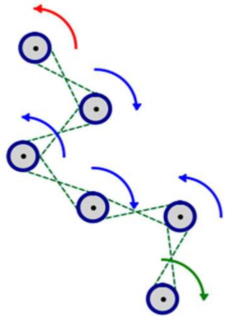


Abbildung 10:
Riemenverbundsystem mit ausschließlich gekreuzt verlaufenden Riemen .
Dieses Beispiel besteht aus 6 Rädern, welche alle durch Riemen miteinander verbunden sind. Jeder Riemen verläuft dabei gekreuzt. Da der Riemen gekreuzt verläuft, invert sich der Drehsinn eines jeden Rads zu seinem Folgerad.
Prinzipiell unterscheidet sich dieser Fall nicht von dem Fall, wenn es sich stattdessen um reine Zahnräder handeln würde.

In Abbildung 10 ist zu sehen, dass bei allen Riemenverbundsystem, da gekreuzt verlaufend der Drehsinn eines jeden Rads zu seinem Folgenachbarn invertiert wird. Also genau das Verhalten zeigt, wie es auch unter reine Zahnradverbundsystemen passiert. Die Modellierung/Vereinfachung wäre hier also, sie so zu behandeln, als wären sie einfach Zahnräder. Das Ignorieren bezieht sich nun darauf, dass wir wieder eine Zahl finden wollen, welche wir in unsere Lösungsfunktion eingeben wollen. Beim einfachen Fall war dies neben dem Drehsinn $\tilde{d}_0$ des ersten Rads eben die Anzahl aller Zahnräder w. Nun substituieren wir die Anzahl aller Räder durch die Anzahl aller virtuellen Zahnräder.

Diese ergibt sich einfach durch die Anzahl aller Räder w abgezogen der Anzahl aller ungekreuzten Riemen.

Denn, da wir alle gekreuzten Riemenverbundsystem einfach als normale Zahnradpaare betrachten und modellieren, entfernen wir einfach virtuell die Riemenverbundsysteme, welche keine Veränderung seitens des Übertragungsdrehsinns verursachen.

Wobei wir uns genauso gut auch vorstellen können, dass wir aus den Riemenverbundsystemen mir ungekreuzten Riemen – wie bereits erkannt - ein virtuelles Zahnrad modellieren und in das System einfügen. Und genau das passiert, wenn wir von der Anzahl aller vorhandenen Räder die Anzahl ungekreuzter Riemen abziehen.

Schauen wir uns dazu nochmal die Abbildung 11 an, welche eigentlich identisch zu Abbildung 8 ist:

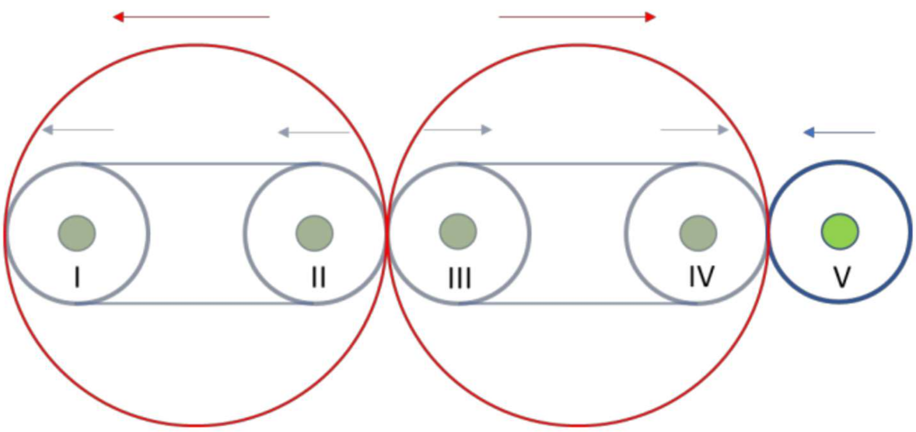


Abbildung 11:
Vereinfachung durch Virtualisierung.
Das System besteht aus insgesamt 5 Rädern. Es gibt jedoch zwei Riemenverbundsystem, welche jeweils zu einem virtuellen Zahnrad zusammengefasst werden können. Die Anzahl aller echten, wie auch virtuellen Zahnräder, wäre demnach 1 + 2 = 3, da Rad V ein Zahnrad ist (auch wenn es genauer gesehen ein Adapterrad ist). Es zeigt sich, das die Lösung also allgemein, die Anzahl aller Räder abgezogen der Anzahl der ungekreuzten Riemen ist.

Sie besteht aus 5 Rädern, wovon eines (Index = V) ein Adapterrad (also Zahnrad) ist, und alle Weiteren in zwei Riemenverbünden bestehen. Wir können nun aus den beiden Riemenverbundsystem wieder jeweils ein virtuelles Zahnrad machen. Die Anzahl aller Zahnräder (Echte, wie auch virtuelle) ist nun die Anzahl aller echten, also 1, plus der Anzahl aller Virtuellen. Die Virtuellen ergeben sich hier aus jeweils zwei Rädern und einem Riemen. Das ist aber eben genau die Differenz aller Räder im System minus der (ungekreuzten) Riemen.

Wir können nun unsere bekannte Lösungsformel verallgemeinern und die Anzahl aller Räder w durch die Anzahl aller Räder w minus der Anzahl aller ungekreuzten Riemen – wir nennen sie k_u – substituieren.

Sie ist dann:

$$\tilde{d}_1 = \tilde{d}_0 \cdot e^{i\pi(w-k_u+1)} \tag{22}$$

Somit kann natürlich auch die Cosinusform erweitert werden zu:

$$\tilde{d}_1 = \tilde{d}_0 \cdot cos(\pi \cdot (w - k_u + 1)) \tag{23}$$

Die 3. Version (ohne komplexe Exponentialfunktion, ohne Cosinus) kann nun ebenfalls verallgemeinert werden zu:

$$\tilde{d}_1 = \tilde{d}_0^{(w-k_u)} \cdot (-\tilde{d}_0)^{(w-k_u+1)} \tag{24}$$

Denn, auch wenn nun gar keine ungekreuzten Riemen im System sind → $k_u = 0$ haben die Gleichungen weiterhin ihre Gültigkeit, da sie ja dann auf den speziellen Fall zum Lösen des einfachen Rätsels, welches nur Zahnräder enthält, „zusammenfallen“.

Intention und Schlusswort

Es ist interessant wie sich manche Dinge und eben auch solche profanen Rätsel oft in einfache Mathematik übersetzen und somit auf solche Weise eleganter und schneller lösen lassen. Als ich das erste Mal mit diesem Rätsel bei einen IQ-Test in Berührung kam, brauchte ich zum Lösen jedenfalls ziemlich lange. Ich habe es natürlich erst einmal auf die herkömmliche Art probiert und eben durch gedankliches Vorstellen und Drehen der Räder die Lösung erarbeitet. Allerdings wurde mir dabei klar, dass das Ganze schneller zu Lösen sein muss. Also durch einen abstrakteren und eben mathematischen Ansatz.

Das war dann der Grund mich eben auf diese Art damit zu beschäftigen.

Es war mir wichtig, diese kleine Ausarbeitung nicht unnötig kompliziert zu machen. Ziel ist das Erreichen von LeserInnen, welche sich mit eher noch leicht gehaltener Mathematik beschäftigen wollen. Daher habe ich Beweise völlig ausgelassen. Man möge mir daher bitte verzeihen.

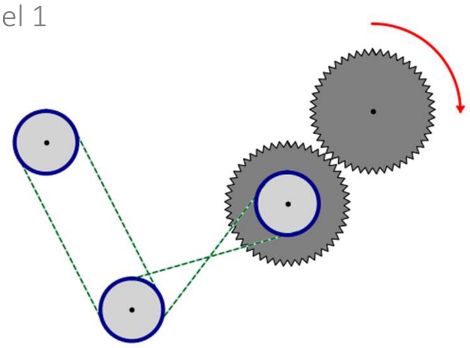
Zudem hatte ich mich dazu entschlossen, auf keine passenden literarischen Arbeiten zu verweisen, da ich zum Einen nichts zu diesem Gesamtthema gefunden hatte (Diesen Problem scheint wohl in der Mathematik zu trivial zu sein, als dass sich irgendjemand bereits damit beschäftigen wollte), zum Anderen überlasse ich es den LeserInnen selber auf Wunsch etwa seitens des Sinus/Cosinus, komplexer Zahlen, EULER‘sche Formel/Identität etc. eigene Recherchen zu betreiben.

Anhang

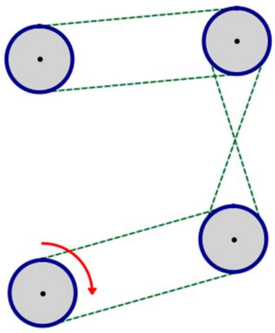
Im Folgenden sind einige verschiedene Rätselrealisierung zu finden, um selbstständig die Gleichungen prüfen zu können.

Viel Spaß beim Rätseln und Rechnen 😉!

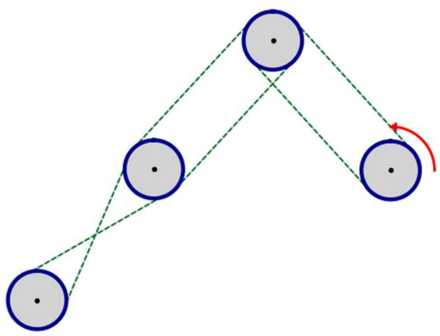
Rätsel 1



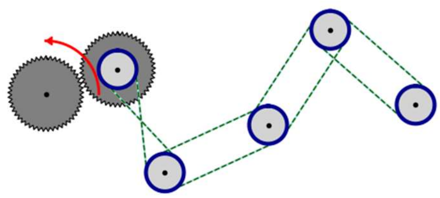
Rätsel 2



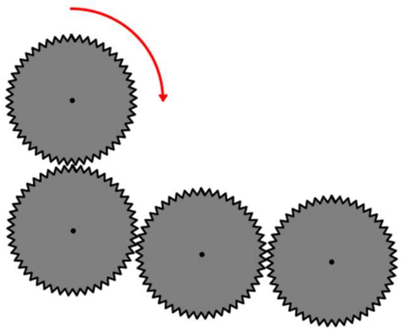
Rätsel 3



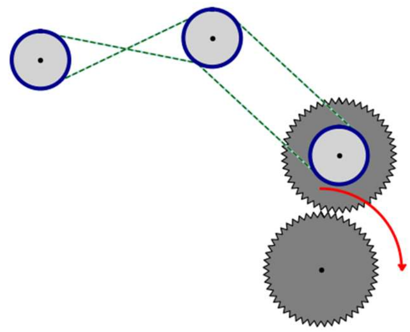
Rätsel 4



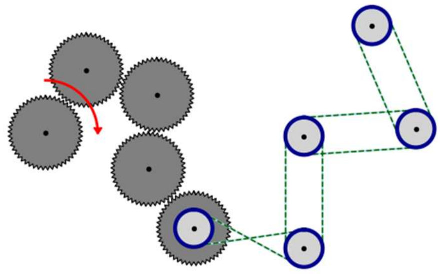
Rätsel 5



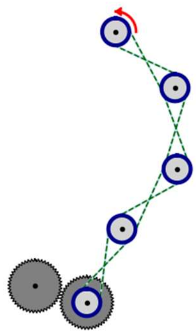
Rätsel 6



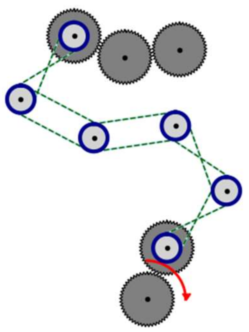
Rätsel 7



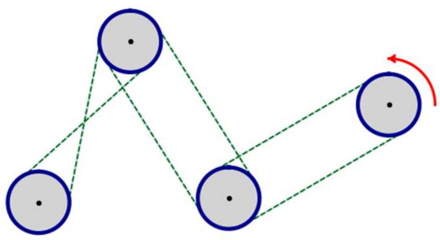
Rätsel 8



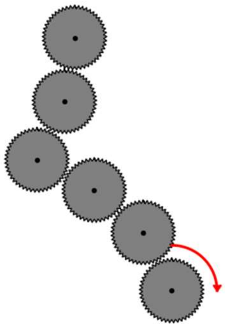
Rätsel 9



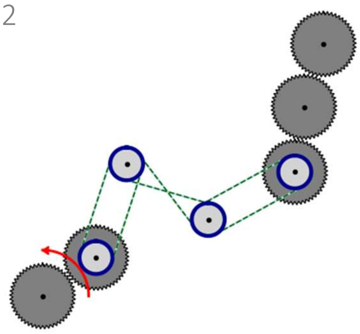
Rätsel 10



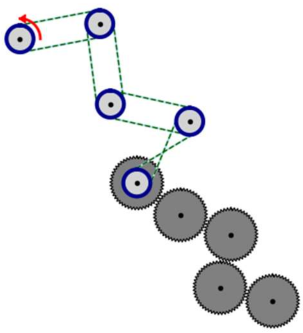
Rätsel 11



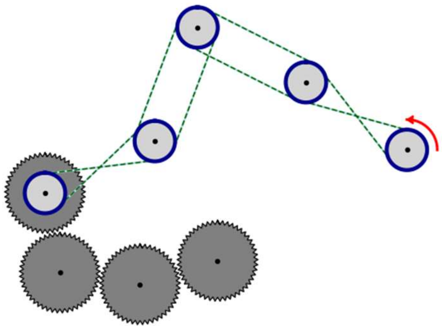
Rätsel 12



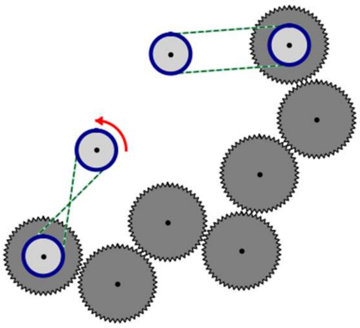
Rätsel 13



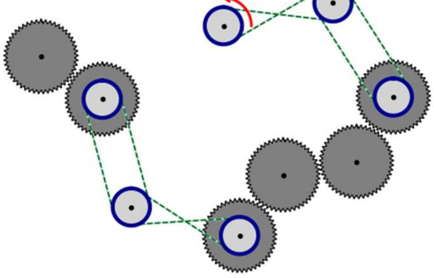
Rätsel 14



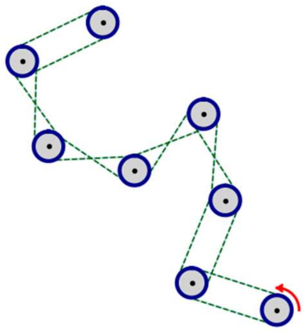
Rätsel 15



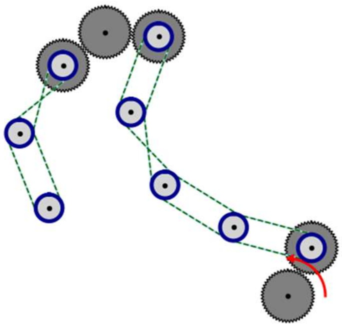
Rätsel 16



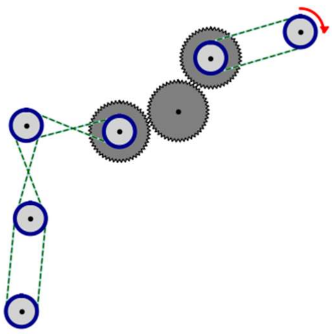
Rätsel 17



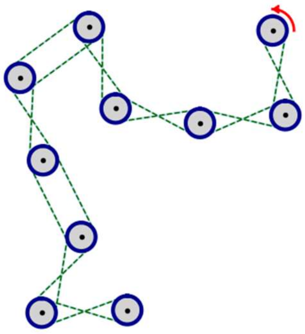
Rätsel 18



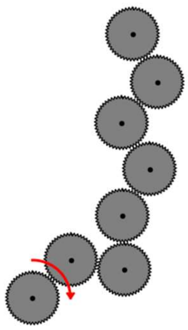
Rätsel 19



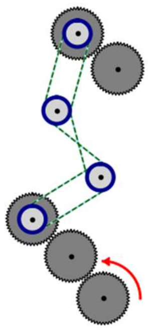
Rätsel 20



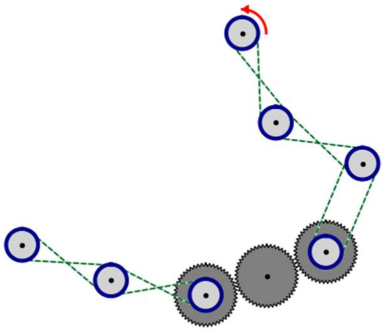
Rätsel 21



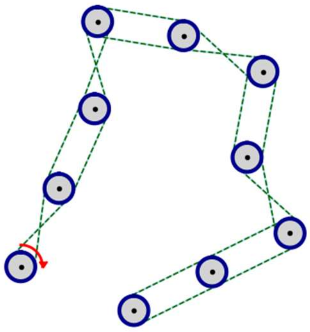
Rätsel 22



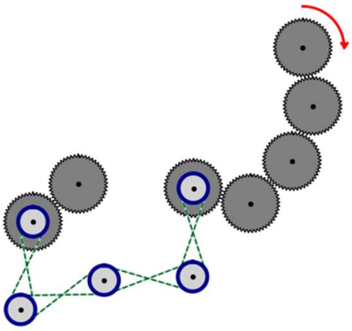
Rätsel 23



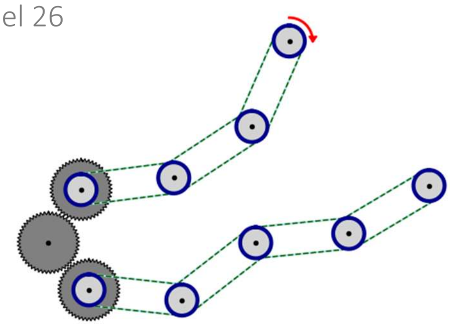
Rätsel 24



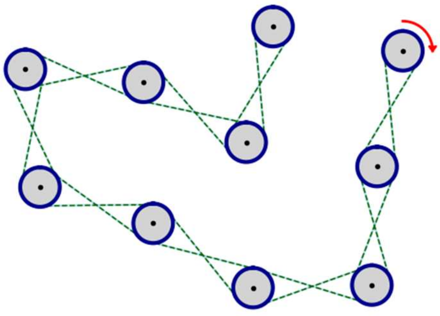
Rätsel 25



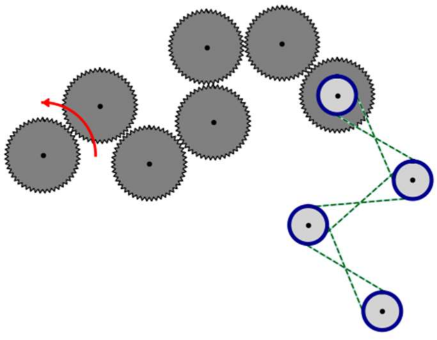
Rätsel 26



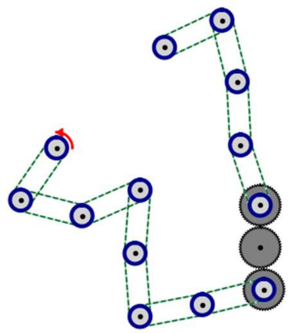
Rätsel 27



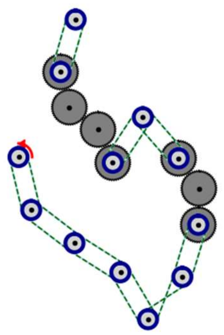
Rätsel 28



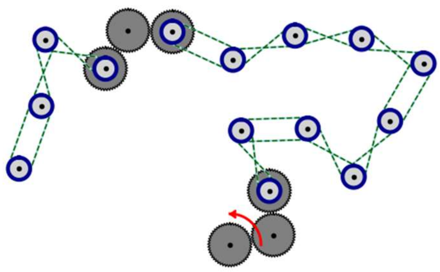
Rätsel 29



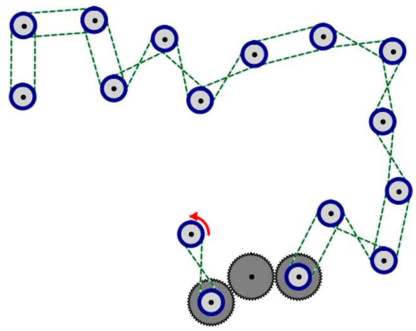
Rätsel 30



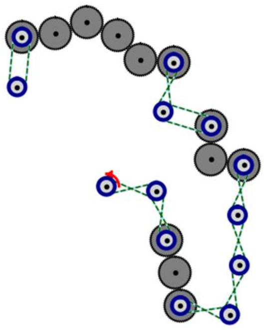
Rätsel 31



Rätsel 32



Rätsel 33



Rätsel 34