Semana 10 - Material de Apoio

Texto editatado da apostila Geometria Analítica e Vetorial, de Miranda et al. O texto completo pode ser baixo no site da UFABC ou em nossa biblioteca do Moodle.

9 MUDANÇA DE COORDENADAS ORTOGONAIS NO PLANO

Como sabemos, um sistema de coordenadas Σ no plano é um conjunto de dois vetores linearmente independentes $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ (ou seja uma base E para $\mathbb{V}^2$) e um ponto O, chamado de origem do sistema de coordenadas.

Sabemos de modo geral que um ponto fixo P ao ser representado em diferentes sistemas de coordenadas possuirá coordenadas distintas. Esse fato foi usado inúmeras vezes ao escolhermos um sistema de coordenadas para representarmos um problema: o mote era que através de uma escolha adequada para o sistema de coordenadas podemos simplificar diversos problemas de geometria analítica.

Neste capitulo iremos um pouco além e entenderemos a relação entre a representação em diferentes sistemas de coordenadas através das mudanças de coordenadas, isto é, de algumas transformações que nos permitem identificar os objetos geométricos nos diferentes sistemas. Mas antes de irmos ao caso geral concentraremos nossos esforços num tipo especial de mudanças de coordenadas, as transformações ortogonais e em especial a *translação* e *rotação*.. Estas apresentam-se como transformações de fundamental importância para nós uma vez que levam sistemas de coordenadas cartesianos em sistemas cartesianos.

9.1 TRANSLAÇÃO

Uma translação é uma mudança de coordenadas entre dois sistemas $\Sigma = (O, B = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2))$ e $\Sigma' = (O', B' = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2))$ na qual as bases B e B' são iguais, isto é, apenas O e O' diferem.

Fixado um ponto P do espaço, qual a relação entre as coordenadas (x, y) de P no sistema Σ e as coordenadas (x', y') de P no sistema Σ'?

Sejam (h, k) as coordenadas do ponto O' no sistema Σ. Temos então que, na base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $\overrightarrow{OP} = (x, y)$, $\overrightarrow{O'P} = (x', y')$ e $\overrightarrow{OO'} = (h, k)$. Como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$, temos que $(x, y) = (x', y') + (h, k)$. Dessa forma a mudança de coordenadas de Σ' para Σ assume a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

onde (h, k) as coordenadas do ponto O' no sistema de coordenadas sistema Σ_1.

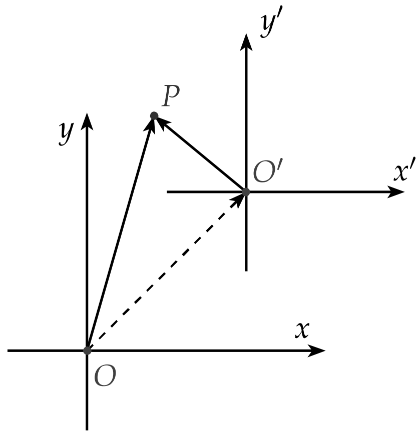


Figura 9.1: Translação

9.2 ELIMINAÇÃO DOS TERMOS LINEARES DE UMA EQUAÇÃO QUADRÁTICA

Vamos agora usar a translação para simplificar a equação $f(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, eliminando seus os termos lineares.

As equações das translações são

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

Substituindo na equação de segundo grau temos:

$$A\left(x' + h\right)^2 + B\left(y' + k\right)^2 + C\left(x' + h\right)\left(y' + k\right) + D\left(x' + h\right) + E\left(y' + k\right) + F = 0$$

expandindo temos:

$$\begin{aligned} &Ah^2 + Chk + 2Ahx' + Chy' + Dh + Bk^2 + Ckx' + 2Bky' + Ek+ \\ &+A(x')^2 + Cx'y' + Dx' + B(y')^2 + Ey' + F = 0 \end{aligned}$$

Agrupando os termos

$$\begin{aligned} &A(x')^2 + B(y')^2 + Cx'y' + (2Ah + Ck + D)\,x' + (Ch + 2Bk + E)\,y'+ \\ &+Ah^2 + Bk^2 + Chk + Dh + Ek + F = 0 \end{aligned} \tag{9.1}$$

Queremos que os termos lineares se anulem, logo

$$\begin{aligned} 2Ah + Ck + D &= 0 \\ Ch + 2Bk + E &= 0 \end{aligned}$$

Se o sistema tiver solução, então teremos resolvido o problema. Isso ocorre por exemplo se

$$\begin{vmatrix} 2A & C \\ C & 2B \end{vmatrix} = 4AB - C^2 \neq 0$$

Caso o determinante se anule, podemos não ter nenhuma solução (sistema impossível) ou um número infinito de soluções (sistema indeterminado).

Notemos também que os coeficientes dos termos de grau dois não se alteram e que o termo constante F' vale $f(h,k) = Ah^2 + Bk^2 + Chk + Dh + Ek + F = 0$

Exemplo 9.1 Achar uma translação que elimine os termos lineares da equação:

$$x^2 - 5xy - 11y^2 - x + 37y + 52 = 0$$

Solução: Se substituirmos $x = x' + h$ e $y = y' + k$. Teremos

$$\left(x'+h\right)^2 - 5\left(x'+h\right)\left(y'+k\right) - 11\left(y'+k\right)^2 - \left(x'+h\right) + 37\left(y'+k\right) + 52 = 0 \tag{9.2}$$

Donde temos:

$$\begin{aligned}(x')^2 - 5x'y' - 11(y')^2 + (2h - 5k - 1)x' - (5h + 22k - 37)y' + \\ + \left(h^2 - 5hk - 11k^2 - h + 37k + 52\right) = 0\end{aligned}$$

Como queremos que os termos em x' e em y' se anulem, devemos ter para isso

$$\begin{aligned} 2h - 5k - 1 &= 0 \\ 5h + 22k - 37 &= 0 \end{aligned}$$

O sistema linear acima possui uma única solução $[h = 3, k = 1]$. E logo a equação 9.2 se simplifica a

$$(x')^2 - 5x'y' - 11(y')^2 + 69 = 0$$

□

Exemplo 9.2 Simplifique a equação $g(x,y) = 4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$.

Solução: Usemos agora o deduzido imediatamente antes do Exemplo 9.2.

Sejam

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}.$$

Para termos os termos lineares nulos, devemos ter

$$\begin{cases} 8h - 4k + 12 = 0 \\ -4 + 14k + 6 = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo esse sistema linear chegamos a $h = -2$ e $k = -1$

Temos, assim, que $F' = g(-2, -1) = 4(-2)^2 - 4(-2)(-1) + 7(-1)^2 + 12(-2) + 6(-1) - 9 = -24$. Logo a equação no sistema Σ' fica

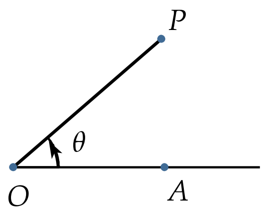
$$4(x')^2 - 4x'y' + 7(y')^2 - 24 = 0$$

$\square$

2.7 COORDENADAS POLARES

Nesta seção estudaremos uma nova forma de descrever a localização de pontos no plano euclideano $\mathbb{E}^2$: as coordenadas polares. A principal motivação para a utilização desse sistema de coordenadas é que, neste sistema, curvas com algum tipo de simetria em relação a origem O do plano, como por exemplo o círculo e a elipse, podem ser descritas de maneira mais simples que nos sistemas de coordenadas vetoriais.

Num sistema de coordenadas polares um ponto P é localizado no plano em relação a uma semi-reta $\overrightarrow{OA}$. A origem O dessa semi reta é denominada origem do sistema de coordenadas polares ou **polo** e a semi-reta $\overrightarrow{OA}$ é dito **eixo polar**.



As coordenadas de um ponto P num sistema de coordenadas polares é um par (r, θ), onde r é a distância do ponto ao polo, isto é, $r = d(O, P)$ e θ é o ângulo orientado que a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ faz com a semi-reta $\overrightarrow{OA}$. Claramente a posição do ponto fica bem determinada se conhecemos r e θ. O par (r, θ) é denominado **coordenadas polares** do ponto P, e neste caso escreveremos simplesmente $P : (r, \theta)$

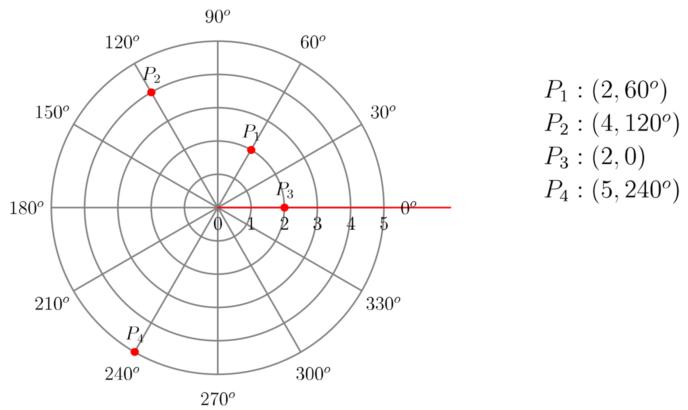
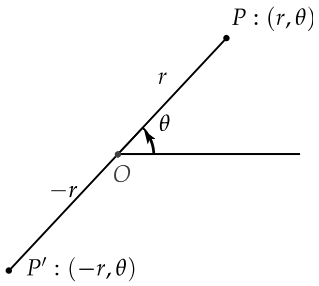


Figura 2.7: Coordenadas polares

Como θ é o ângulo orientado entre o eixo OA e a reta OP seus valores podem ser positivo ou negativo conforme a orientação no sentido anti-horário ou horário do ângulo.

Por outro lado, o raio r, sendo a distância de P a origem, é naturalmente um número real positivo, porém podemos estender seu significado de modo a termos raios negativos. Para isso convencionamos que o ponto $(-r, \theta)$ com $r > 0$ deve ser construído do seguinte modo: construímos uma semi-reta faz uma ângulo θ com o eixo polar e estendemos essa semi-reta. marcarmos o ponto $(-r, \theta)$ como sendo o ponto sobre a extensão da semi reta que dista r do polo O.



Uma diferença fundamental entre os sistemas de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas polares é que em coordenadas polares um ponto P pode ser descrito por uma infinidade de coordenadas. Por exemplo, a origem O é descrita por todas as coordenadas da forma $(0, \theta)$., enquanto que um ponto $P : (r, \theta)$ distinto da origem é descrito por todas as coordenadas da forma $(r, \theta + 2\pi n)$ e $(-r, \theta + \pi(2n+1))$.

Todo ponto distinto da origem possui pelo menos uma coordenada na qual o raio é positivo e o angulo θ esteja entre $0 \leq \theta < 2\pi$. Denominamos esse par como o **conjunto principal de coordenadas polares** do ponto em questão.

2.7.1 Relação entre Coordenadas Cartesianas e Polares

A cada sistema de coordenadas polares podemos associar um sistema cartesiano escolhendo como a origem o polo, o eixo x como o eixo polar e o eixo y como a reta perpendicular ao eixo polar passando pela origem. Esse sistema de coordenadas é chamado **sistema cartesiano associado** . Quando, ao tratarmos de coordenadas polares, nos referirmos as coordenadas x, y, eixos x ou y, etc. de um sistema cartesiano este sempre será o sistema cartesiano associado.

Observe a Figura 2.8:

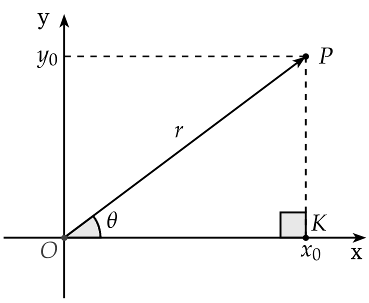


Figura 2.8: Coordenadas polares

É fácil ver que:

$$x_0 = r\cos(\theta)$$
$$y_0 = r\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$r = \pm\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$
$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{y_0}{x_0}$$

Assim temos que as coordenadas polares e as coordenadas cartesianas do sistemas associado se relacionam segundo a seguinte tabela:

Coordenadas Cartesianas	*Coordenadas Polares*
$(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$	(r, θ)
(x, y)	$(\sqrt{x^2+y^2}, \mathrm{arctg}(\frac{y}{x}))$

Exemplo 2.38 Determinar as coordenadas retangulares do ponto P cujas coordenadas polares são $(3, 120^o)$

Solução: Neste caso $r = 3$ e $\theta = 120^o$ logo as coordenadas são:

$$x = r\cos(\theta) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \tag{2.11}$$

$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}. = \frac{3\sqrt{3}}{2} \tag{2.12}$$

Ou seja, $P : \left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ □

Exemplo 2.39 Determinar as coordenadas polares do ponto cujas coordenadas retangulares são $(1, -1)$.

Solução: Temos que $r = \pm\sqrt{1+1} = \pm\sqrt{2}$ e que $\theta = \mathrm{arctg}(-1)$ .Para $0 \leq \theta < 2\pi$. temos que $\theta = \frac{7}{4}\pi$.

Logo o conjunto principal de coordenadas do ponto é $\left(1, \frac{7}{4}\pi\right)$.

Outras coordenadas possíveis para o ponto são $\left(1, \frac{7}{4}\pi + 2\pi n\right)$ e $\left(-1, \frac{7}{4}\pi + \pi\,(2\pi n + 1)\right)$.

□

Exemplo 2.40 Determinar a equação retangular do lugar geométrico cuja equação polar é

$$r = \frac{2}{1 - \cos\theta}$$

Solução: A equação dada é equivalente a $r - r\cos\theta = 2$. Substituindo r e $r\cos\theta$ temos:

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} - x = 2$$

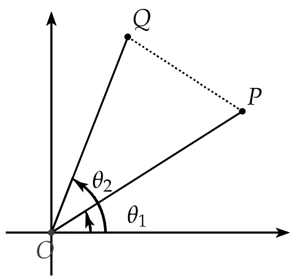
Transpondo x e elevando ao quadrado temos

$$x^2 + y^2 = (2 + x)^2$$

que simplifica para $y^2 = 4(x + 1)$ (uma parábola). □

Exemplo 2.41 Mostre que a distância d entre os pontos (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2) em coordenadas polares é

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$



Solução: Usando a lei dos cossenos temos:

$$\begin{aligned} \|PQ\|^2 &= \|OP\|^2 + \|OQ\|^2 - 2\|OP\|^2\|OQ\|\cos(\theta_2 - \theta_1) && (2.13)\\ &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1) && (2.14) \end{aligned}$$

E consequentemente a distância do ponto P ao ponto Q é:

$$\|PQ\| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

□

9.3 ROTAÇÃO

Considere no plano um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. A rotação de Σ por um ângulo α corresponde a um sistema de coordenadas $\Sigma' = (O, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ onde os vetores $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ são iguais aos vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ girados de α no sentido anti-horário.

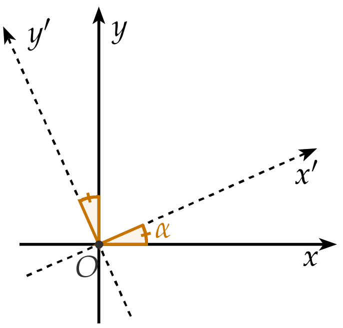


Figura 9.2: Rotação

Em coordenadas polares temos o seguinte. Considere um ponto P de coordenadas (r, θ). Substituindo θ por $\theta - \alpha$ rotacionamos o ponto P pelo angulo α (Por quê?). Ou seja, definindo um novo sistema de coordenadas polares por $r' = r$ e $\theta' = \theta - \alpha$, obtemos um sistema de coordenadas polares rotacionado de α.

A partir da identificação do sistema polar com o sistema cartesianas associado temos que as coordenadas (x, y) de P obedecem:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Por outro lado, denotando por (x', y') as coordenadas de P no sistema cartesiano rotacionado temos então:

$$x' = r\cos(\theta - \alpha)$$
$$y' = r\,\mathrm{sen}\,(\theta - \alpha)$$

e assim

$$
\begin{aligned}
x' &= r\cos\theta\cos\alpha + r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha\\
y' &= r\cos\alpha\operatorname{sen}\theta - r\cos\theta\operatorname{sen}\alpha.
\end{aligned}
$$

Como $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$ segue que

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha\\
y' &= -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha,
\end{aligned}
$$

o que relaciona as coordenadas (x, y) de P no sistema Σ com as coordenadas (x', y') de P no sistema cartesiano Σ' rotacionado de um ângulo α.

Em notação matricial temos:

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

Calculando a transformação inversa (matriz inversa) segue então que

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}
$$

Donde:

$$
\begin{aligned}
x &= x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha\\
y &= x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha,
\end{aligned}
$$

Eliminemos agora o termo misto de $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ através de rotação.

Queremos achar uma rotação por um ângulo α tal que a equação acima se reduza a

$$
A'x^2 + B'y^2 + D'x + E'y + F' = 0
$$

Substituindo $x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha$ e $y = y'\cos\alpha + x'\operatorname{sen}\alpha$ em $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ teremos:

$$
\begin{aligned}
&A\left(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha\right)^2 + B\left(y'\cos\alpha + x'\operatorname{sen}\alpha\right)^2 +\\
&+C\left(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha\right)\left(y'\cos\alpha + x'\operatorname{sen}\alpha\right) + D\left(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha\right) +\\
&+E\left(y'\cos\alpha + x'\operatorname{sen}\alpha\right) + F = 0
\end{aligned}
$$

Expandindo:

$$\begin{aligned}
&A(x')^2\cos^2\alpha - Ax'y'2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + A(y')^2\operatorname{sen}^2 + \\
&+B(y')^2\cos^2\alpha + Bx'y'2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + B(x')^2\operatorname{sen}^2 + \\
&+Cx'y'\cos^2\alpha + C(x')^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - C(y')^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - Cx'y'\operatorname{sen}^2\alpha + \\
&+Dx'\cos\alpha - Dy'\operatorname{sen}\alpha + Ey'\cos\alpha + Ex'\operatorname{sen}\alpha + F = 0
\end{aligned}$$

Donde chegamos a:

$$A'x^2 + B'y^2 + C'x'y' + D'x + E'y + F' = 0,$$

onde:

$$\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\alpha + B\operatorname{sen}^2\alpha + C\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha \\
B' &= B\cos^2\alpha + A\operatorname{sen}^2\alpha - C\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha \\
C' &= C\cos^2\alpha - C\operatorname{sen}^2\alpha - 2A\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + 2B\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha \\
D' &= D\cos\alpha + E\operatorname{sen}\alpha \\
E' &= E\cos\alpha - D\operatorname{sen}\alpha \\
F' &= F
\end{aligned}$$

Para eliminar o termo misto devemos ter

$$C' = C\cos^2\alpha - C\operatorname{sen}^2\alpha - 2A\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + 2B\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha$$

seja zero, ou seja queremos que

$$C' = C\cos 2\alpha - (\operatorname{sen} 2\alpha)(A - B) = 0$$

E assim:

$$\cot(2\alpha) = \frac{A - B}{C}$$

Um modo mais fácil de lembrar dessas equações é notar que $A' + B' = A + B$ e que

$$\begin{aligned}
A' - B' &= A\cos^2\alpha + B\operatorname{sen}^2\alpha + C\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - \left(B\cos^2\alpha + A\operatorname{sen}^2\alpha - C\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\right) \\
&= A\cos^2\alpha - B\cos^2\alpha - A\operatorname{sen}^2\alpha + B\operatorname{sen}^2\alpha + 2C\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha.
\end{aligned}$$

Usando as formulas de ângulo duplo $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos(2\theta)$ e $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}(2\theta)$ temos

$$\begin{aligned}
A' - B' &= A'\cos 2\alpha - B'\cos 2\alpha + C'\operatorname{sen} 2\alpha \\
&= \left(A' - B'\right)\cos 2\alpha + C'\operatorname{sen} 2\alpha.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} A' - B' &= C \operatorname{sen} 2\alpha \left(\frac{A - B}{C} \frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} + 1 \right) \\ &= C \operatorname{sen} 2\alpha \left(\cot^2 (2\alpha) + 1 \right). \end{aligned}$$

Assim

$$A' - B' = C \csc (2\alpha).$$

Desse modo, para acharmos A' e B' temos de resolver o sistema

$$\begin{cases} A' + B' &= A + B \\ A' - B' &= C \csc (2\alpha) = C \sqrt{\left(\frac{A - B}{C} \right)^2 + 1} \end{cases}$$

Exemplo 9.3 Simplifique a equação $g(x, y) = 4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$

Solução: Como vimos na seção anterior a translação

$$\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

elimina os termos lineares e transforma a equação para

$$4 (x')^2 - 4x'y' + 7 (y')^2 - 24 = 0$$

$h = -2$ e $k = -1$

Então uma rotação por $\cot (2\alpha) = \dfrac{A - B}{C} = \dfrac{-3}{-4} = \dfrac{3}{4}$ irá eliminar o termo misto. Note que se $\cot (2\alpha) = \dfrac{3}{4}$, então o ângulo α está no primeiro quadrante e $\csc 2\alpha = \dfrac{5}{4}$. (Só para sua curiosidade $\alpha \simeq 26.565$)

Logo

$$\begin{cases} A'' + B'' = A' + B' = 11 \\ A'' - B'' = C \csc (2\alpha) - 5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear temos que $A'' = 3$ e $B'' = 8$ e logo a equação fica

$$\begin{aligned} 3 (x'')^2 + 8 (y'')^2 &= 24 \\ \frac{(x'')^2}{8} + \frac{(y'')^2}{3} &= 1 \end{aligned}$$

(Como veremos depois, uma elipse horizontal) □

9.4 EQUAÇÕES GERAL DO SEGUNDO GRAU NO PLANO

Através do uso de translações e rotações do sistema de coordenadas, podemos observar que as equações de elipses, parábolas, hipérboles e circunferências podem ser escritas na forma $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$. No entanto, nem toda equação nessa forma representa uma dessas cônicas. Por exemplo, a equação $x^2 - y^2 = 0$, ou de modo mais conveniente $(x + y)(x - y) = 0$, representa duas retas concorrentes: $x + y = 0$ e $x - y = 0$.

É um bom exercício observar que podemos dividir equações quadráticas do tipo $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, em três grupos de acordo com as curvas que elas representam:

- Equações do *tipo elíptico*, onde $C^2 - 4AB < 0$: vazio, ponto, circunferência ou elipse;
- Equações do *tipo parabólico*, onde $C^2 - 4AB = 0$: vazio, reta, união de duas retas paralelas ou parábola;
- Equações do *tipo hiperbólico*, onde $C^2 - 4AB > 0$: união de duas retas concorrentes ou hipérbole.

Exemplo 9.4 Exemplos de equações quadráticas em x, y:

1. Equações do tipo elíptico:
   - $x^2 + y^2 + 1 = 0$: Vazio;
   - $x^2 + y^2 = 0$: Ponto;
   - $x^2 + y^2 - 1 = 0$: Circunferência;
   - $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$: Elipse.
2. Equações do tipo parabólico:
   - $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 0$: Uma reta;
   - $(x + y)(x + y + 1) = x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$: União de duas retas paralelas;
   - $x - y^2 = 0$: Parábola.
3. Equações do tipo hiperbólico:
   - $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 = 0$: União de duas retas concorrentes;
   - $(x + y)(x + y + 1) = x^2 - y^2 - 1 = 0$: Hipérbole.

Para uma identificação exata da curva representada pela equação devemos através de translações e rotações obter uma equação simplificada, isto é, sem termos lineares e misto. Para isso, sugerimos o seguinte método:

1. Verifique se existe termo misto, isto é, se $C \neq 0$. Se $C = 0$, complete quadrado e faça uma translação para finalizar a simplificação da equação.
2. Caso $C \neq 0$, proceda como indicado no capítulo de Mudança de Coordenadas, para eliminar os termos de primeiro grau via translação.

   Observação 9.5 *Podemos, nesse ponto, chegar a um sistema incompatível. Nesse caso, partimos para o próximo passo sem nada fazer.*
3. Como feito no capítulo de Mudança de Coordenadas, eliminamos agora o termo misto via rotação.

Como vimos no exercício 2.3, é possível através de translações eliminar os termos lineares de $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (com certeza) se $4AB - C^2 \neq 0$.

9.4.1 Caso $4AB - C^2 \neq 0$

Nesse caso a simplificação segue via translação e rotação.

Exemplo 9.6 Reduzir a equação $x^2 - 5xy - 11y^2 - x + 37y + 52 = 0$.

Solução: Fazemos a translação $x = x' + h$ e $y = y' + k$ e queremos que os coeficientes de x' e y' se anulem. Para isso teremos que

$$\begin{cases} 2h - 5k - 1 = 0 \\ 5h + 22k - 37 = 0 \end{cases}$$

Cujas soluções são $h = 3$ e $k = 1$. Ou seja a nova origem é o ponto $(3, 1)$ e nesse sistema a equação fica

$$(x')^2 + 5x'y' + 11\,(y')^2 + 69 = 0$$

Para eliminar o termo misto devemos rotar a equação por

$$\cot(2\theta) = -12/5$$

E a equação após a rotação fica sendo

$$A''\,(x'')^2 + B\,(y'')^2 = 69$$

Onde $A'' + B'' = A' + B'$ e $A'' - B'' = B'\sqrt{\cot(2\theta) + 1}$ e assim

$$A'' = -\frac{23}{2} \text{ e } B'' = \frac{3}{2}$$

e a equação se reduz a

$$\frac{x''}{6} + \frac{y''}{46} = 1$$

□

9.4.2 Caso $4AB - C^2 = 0$

Neste caso não tentaremos eliminar os termos lineares e passaremos direto ao termo misto. Para eliminar o termo misto faremos uma rotação pelo ângulo dado por

$$\cot(2\alpha) = \frac{A - B}{C}$$

Exemplo 9.7 $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 15x + 17y + 15 = 0$

Solução: Neste caso $4AB - C^2 = 0$. Eliminaremos o termo misto rotacionando por um ângulo de

$$\cot(2\theta) = \frac{A-B}{C} = -\frac{7}{24}$$

Neste caso temos um triângulo de lados -7, 24 e 25. e desta forma $\operatorname{sen}(2\theta) = 24/25$ e $\cos(2\theta) = -7/25$

Também sabemos que

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{1+\cos(2\theta)}$$

e logo $\operatorname{tg}(\theta) = 24/18 = 4/3$ e logo $\operatorname{sen}(\theta) = 4/5$ e $\cos(\theta) = 3/5$ e as equações da rotação ficam

$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta$ $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'$$

e

$$y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$$

e a equação reduzida pode ser calculada pelas equações

$$A' + B' = A + B = 25$$
$$A' - B' = C\csc(2\alpha) = -25$$

e logo $A' = 0$ e $B' = 25$ e a equação se reduz a

$$25(y')^2 - 38\left(\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'\right) - 34\left(\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right) + 71 = 0$$

$$25(y')^2 - 50x' + 10y' + 71 = 0$$

Completando os quadrados temos

$$\left(y' + \frac{1}{5}\right)^2 = 2\left(x' - \frac{7}{5}\right)$$

□