Exercícios Propostos[1]

⚠ *Translação dos eixos coordenados*

1. Use uma translação dos eixos coordenados para a nova origem indicada.

(a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0 \,, \quad O' = (-1, 3)$
(b) $3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 8 = 0 \,, \quad O' = (-2, 1)$
(c) $xy - 3x + 4y - 13 = 0 \,, \quad O' = (-4, 3)$

2. Use uma translação dos eixos coordenados para eliminar os termos de primeiro grau.

(a) $2x^2 + y^2 + 16x - 4y + 32 = 0$
(b) $3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$
(c) $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 30y + 175 = 0$
(d) $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y + 14 = 0$

3. Para cada uma das cônicas abaixo, determine o foco (ou focos), reta diretriz (se for parábola) e assíntotas (se for hipérbole).

(a) $2x = y^2 + 8y + 22$
(b) $4x^2 + y^2 = 16$
(c) $y^2 - x^2 = 4$
(d) $x^2 = 4y - 2y^2$
(e) $9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$
(f) $x^2 + 4x + 28 = 8y$
(g) $y^2 + 2y = 4x^2 + 3$
(h) $y^2 + 2y + 12x + 25 = 0$
(i) $2y^2 - 3x^2 - 4y + 12x + 8 = 0$

4. Encontre uma equação para a cônica que satisfaça as condições abaixo:

(a) parábola: foco $(-4, 0)$; diretriz $x = 2$
(b) elipse: focos $(\pm 2, 0)$; vértices $(\pm 5, 0)$
(c) elipse: focos $(0, 2)$ e $(0, 6)$; vértices $(0, 0)$ e $(0, 8)$
(d) hipérbole: focos $(0, \pm 3)$; vértices $(0, \pm 1)$
(e) hipébole: vértices $(\pm 3, 0)$; assíntotas $y = \pm 2x$

⚠ *Coordenadas polares e rotações*

5. Resolva os exercícios abaixo.

(a) Determine as coordenadas retangulares do ponto cujas coordenadas polares são $(r, \theta) = \left(3, \frac{\pi}{3}\right)$.
(b) Determine as coordenadas polares do ponto cujas coordenadas retangulares são $(x, y) = (-1, 1)$.

[1] Resolva os exercícios sem omitir nenhuma passagem em seus cálculos. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. **Data máxima de entrega: 03/07/2024 até 14:00 horas**

6. Sabendo que a rotação das coordenadas (x, y) para (x', y') é dada por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, onde $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é a *matriz de rotação no sentido anti-horário*, resolva os exercícios abaixo.

(a) Determine as novas coordenadas dos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ quando os eixos coordenados são girados de um ângulo de 30^{o} no sentido anti-horário.

(b) Determine qual a rotação do plano xy em que as coordenadas do ponto $P = (\sqrt{3}, 1)$ são $P' = (\sqrt{3}, -1)$.

⚠ *Rotação dos eixos coordenados*

7. Transforme a equação dada usando uma rotação de θ dos eixos coordenados no sentido anti-horário.

(a) $3x^2 + xy + 3y^2 - 5 = 0, \quad \theta = 45^{\text{o}}$

(b) $2x^2 + 8xy - 1 = 0, \quad \theta = 30^{\text{o}}$

8. Dada a quádrica $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, o ângulo θ de rotação (no sentido anti-horário) que elimina o termo xy é dado por $\cot(2\theta) = (A - C)/B$. Use esse resultado para eliminar o termo xy a partir de uma rotação dos eixos coordenados.

(a) $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}\, x = 1$

(b) $9x^2 + 3xy + 9y^2 = 5$

(c) $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$

(d) $x^2 + 2\sqrt{3}\, xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}\, x - 8y = -32$

9. Utilizando translações e rotações, reduza a equação a uma forma mais simples e identifique a cônica correspondente. Especifique a medida em radianos do ângulo de rotação utilizado e os parâmetros geométricos da cônica (a, b e/ou c), e esboce seu gráfico.

(a) $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 7 = 0$

(b) $x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0$

(c) $x^2 + 3\sqrt{3}\, xy + 4y^2 - 1 = 0$

(d) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 1 = 0$

(e) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$

(f) $5x^2 + 2xy + 2y^2 + 2 = 0$