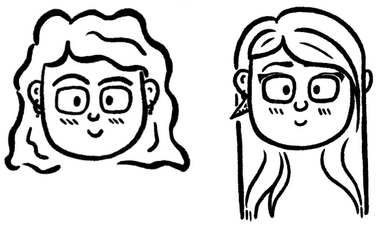
LA RATIOTHEQUE
Projet Maths-info

Flavie Enrico et Anastasiya Balan

Semestre 3 - IMAC



PARTIE PROGRAMMATION

Élément codé	Demandé ?	Codé ?	Fonctionnel ?	Solution ?
Classe ratio	X	X	X	
Irréductibilité	X	X	X	
Somme de deux rationnels	X	X	X	
Produit de deux rationnel	X	X	X	
Inverse d'un rationnel	X	X	X	
Division de rationnels	X	X	X	
$\sqrt{\frac{a}{b}}$	X	X	X	
$\cos(\frac{a}{b})$	X	X	X	
$\left(\frac{a}{b}\right)^k$	X	X	X	
$\exp\left(\frac{a}{b}\right)$	X	X	X	
Pourcentage	X	X	X	
log	X	X	X	
convert_float_to_ratio	X	X	X	
Gestion des nombres négatifs convert_float_to_ratio	X			X
Modification convert_float_to_ratio pour valeurs très grandes	X			X
Moins unaire	X	X	X	
Valeur absolue	X	X	X	
Partie entière	X			X
Produit d'un nombre en virgule flottante avec un rationnel et inversement	X	X	X	
Opérateurs de comparaison	X	X	X	
Fonction d'affichage	X	X	X	
Exemples montrant que tout fonctionne	X	X	X	
Tests unitaires	X	X	X	
Template	Bonus			
Constexpr	Bonus			
Cmake	X	X	X	
Readme.md	X	X	X	
Doxygen	X	X	X	
Exceptions	X	X	X	
Assert	X	X	X	
Variadics	Bonus			

PARTIE MATHÉMATIQUES

1 La surcharge des opérateurs

1.1 La multiplication

Soient $a, b, c, d,\ a, b \neq 0$,on cherche à calculer $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$.

$\Leftrightarrow \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ Je cherche à simplifier le dénominateur, afin que la fraction inchangée, je multiplie le dénominateur (et donc le numérateur aussi) par $\frac{d}{c}$ $(\forall c \neq 0)$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Ainsi diviser par un rationnel revient à multiplier par l'inverse de ce même rationnel.

Et du point de vue informatique ? On pourrait surcharger l'opérateur $\div$ (division) en utilisant l'opérateur classique /. Cependant regardons le temps d'exécution :

Pour la multiplication, 1.3 ns

Pour la division, 5.8 ns

C'est donc plus intéressant de diviser en passant par la multiplication.

1.2 La racine d'un rationnel

$\forall b \neq 0$,on cherche à calculer $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

La première possibilité consisterait à écrire la racine comme un exposant.

$\sqrt{x} = x^R$

$\sqrt{x}^2 = (x^R)^2$

$x^1 = x^{2R}$

$1 = 2R$

$2R = 1$

$R = \frac{1}{2}$

Ainsi on peut écrire $\sqrt{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$, ou de façon générale, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$

Cette solution a l'avantage informatique de ne pas passer par une approximation de la racine carrée et de généraliser la formule à toutes les racines n. Mais elle demande de recoder la fonction de puissance d'un rationnel pour des puissances qui ne sont plus des entiers, mais des rationnels eux mêmes.

Une deuxième méthode consiste à décomposer la racine d'un rationnel en 2 racines d'entiers.

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \times \frac{1}{b}}$ car la racine carrée d'un produit est le produit d'une racine carrée.

$\Leftrightarrow \sqrt{a} \times \frac{1}{\sqrt{b}}$car la racine carrée d'un produit est le produit d'une racine carrée

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

1.3 La puissance d'un rationnel

On cherche à calculer $\forall b \neq 0$,et $k\in N,\left(\frac{a}{b}\right)^k$

$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \prod_{n=1}^{k} \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots \times \frac{a}{b} = \frac{\prod_{n=1}^{k} a}{\prod_{n=1}^{k} b} = \frac{a^k}{b^k}$

Ainsi, pour calculer la puissance d'un rationnel, je calcule la puissance du numérateur sur la puissance du dénominateur.

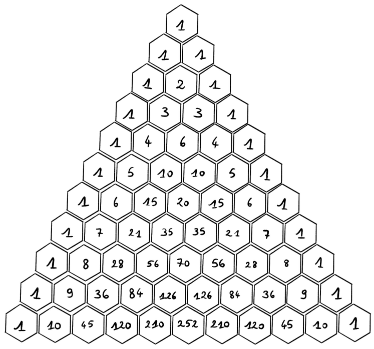
"Mesdames, c'était vraiment bien, on veut quelque chose de plus difficile." D'accord.

1.4 Le cosinus d'un rationnel

Cette fois-ci on cherche à calculer, $\forall b \neq 0, \cos\left(\frac{a}{b}\right)$.

De mémoire, aucune formule de trigonométrie ne pourrait nous aider à exprimer le cosinus avec un rationnel simplifié. Croyant une erreur de notre part, nous avons creusé jusqu'à trouver une solution, que nous allons développer ci-dessous.

Accrochez-vous bien à votre chaise, ça frise le divin. Introduisons la notion du triangle isocèle de Pascal



1										n = 1
1	1									n = 2
1	2	1								n = 3
1	3	3	1							n = 4
1	4	6	4	1						n = 5
1	5	10	10	5	1					n = 6
1	6	15	20	15	6	1				n = 7
1	7	21	35	35	21	7	1			n = 8
1	8	28	56	70	56	28	8	1		n = 9
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	n = 10

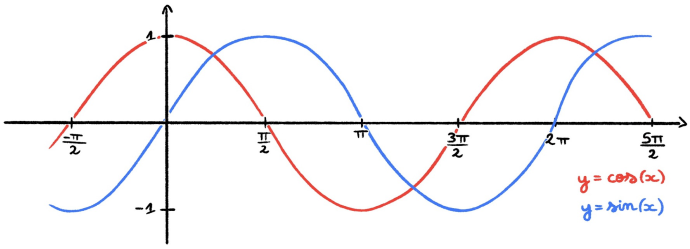
On remarque le schéma suivant :

a	b
	a+b

On a i lignes et j colonnes. Soit $[i;j] = [i-1;j] + [i-1;j-1]$

Lorsqu'on cherchera à calculer, $\forall b \neq 0, \cos\left(\frac{a}{b}\right)$, on cherchera en réalité $\cos\left(\frac{a\pi}{b}\right)$.

Par ailleurs, on prendra l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ car on observe une symétrie des valeurs sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ puis sur $[\pi; 2\pi]$.



1^e étape : écrire le polynôme correspondant en alternant les signes

exemple : Pour n(=b) = 5, soit $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Je prends le polynome composé des coefficients de la diagonale ascendante dont le premier coefficient est celui de la ligne n =5. Je n'oublie pas d'alterner les signes de la diagonale

1										n = 1
1	1									n = 2
1	2	1								n = 3
1	3	3	1							n = 4
1	4	6	4	1						n = 5
1	5	10	10	5	1					n = 6
1	6	15	20	15	6	1				n = 7
1	7	21	35	35	21	7	1			n = 8
1	8	28	56	70	56	28	8	1		n = 9
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	n = 10

J'ai donc, $+x^2 - 3x + 1 = 0$

2^eétape : résoudre l'équation

Comment trouver les racines de polynômes de degré n ? C'est facile, parce qu'on a bien écouté pendant les cours de maths et qu'on a bien réalisé les TP. On utilise la méthode QR, qu'on ne redétaillera ici (cf votre correction du td_polynome)

exemple : ici les 2 racines valent $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

3^eétape : Pour avoir le résultat, on applique la formule suivante : $4\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ avec k allant de 1 au nombre de racines

$4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ soit $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ soit $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

On a donc pu exprimer un cosinus comme un rationnel.

Ayant bien compris l'emploi sur un exemple, il faut maintenant généraliser la méthode pour la coder.

Commençons par implémenter le triangle de Pascal comme une matrice $a_{i,j}$ NxN si on va jusqu'à n=N, en complétant les cases vides par des 0.

Par la suite, je constitue le polynôme de degré i. $P(x) = a_{n,1}x^i - a_{n-1,2}x^{i-1} + a_{n-2,3}x^{i-2} - a_{n-3,4}x^{i-3}...$

On prendra bien le soin d'alterner les signes dans la notation générale.

Comment connaître le degré du polynôme ? Si n est pair, $deg(P) = n/2$; si n est impair, $deg(P) = \frac{n+1}{2}$

Pour généraliser : $deg(P) = int(\frac{n+1}{2})$

Pour cela nous proposons d'écrire : (avec i augmentant de 2 pas à chaque fois)

$$\sum_{i=0}^{N} a_{n-i,i+1}x^{deg(P)-i} - a_{n-(i+1),i+2}x^{deg(P)-(i+1)}$$

En c++ :

for (int i=0; i¡N; i+=2){

somme += a[n-i, i+1]*pow(x,(int((n+1)/2)-i))-a[n-(i+1),i+2]*pow(x,(int((n+1)/2)-(i+1)));

}

On résout l'équation avec la méthode QR vue en cours.

Puis on résout $4\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = x_k$ avec k allant de 1 au nombre de racine.

Vous êtes impressionné ou pas ?

1.5 L'exponentiel d'un rationnel

Après s'être senti tout puissantes d'avoir trouvé une solution à l'expression du cosinus en rationnel, nous étions prêtes à en découdre pour trouver une solution de l'expression de l'exponentielle en rationnel.

Anticipation...! C'est pas possible.

Après s'être assuré que ça ne l'était pas, on a voulu s'attaquer à démontrer que l'exponentiel d'un rationnel est irrationnel, pour être sûres, juste au cas où...

Mais comment démontrer cela ? Vous êtes prêt ou pas ?

On a tout d'abord cherché la démonstration plus connue suivante : e est irrationnel. En partant de cette démonstration on pourrait généraliser à $exp(\frac{a}{b})$

D'autant plus que la démonstration de l'irrationnalité de e part de l'utilisation des formules de Taylor Lagrange. On utilise l'expression de Taylor Lagrange pour $exp(x)$. On aurai juste à remplacer dans l'expression x par $\frac{a}{b}$.

En quelques mots, on utilise un raisonnement par l'absurde en supposant que $exp(\frac{a}{b}) = \frac{c}{d}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} ... + \frac{x^n}{n!}$$

Le raisonnement par l'absurde consiste à montrer que d'un côté on a un résultat entier et de l'autre qu'il est nécéssairement ¡ 1.

On ne s'attardera pas sur les calculs car nous avons trouvé la démonstration de l'irrationnalité de e déjà difficile. Celle ci inclut beaucoup de simplification que nous n'avons pas réussi à faire en remplaçant 1 par $\frac{a}{b}$.

Ainsi dans nos calculs, on passera par une forme flottante qu'on convertira en rationnel. Mais nous, on trouve ça pas mal.

2 Algorithme de conversion d'un réel en float

Est venu le moment dans le projet de décortiquer l'algorithme de convertion d'un float en rationnel.

La première étape a été de le tester. On a donc pu s'assurer que l'utilisation qu'on en fait et la bonne et que nos exemples fonctionnent.

L'étape suivante a été de comprendre son profond fonctionnement : "Pourquoi ça fonctionne ?", et pour avoir passé plusieurs heures dessus, ça a été une des parties difficiles du projet. L'essentiel a été compris : le rôle de la condition d'arrêt et celui de la partie récursive.

Par la suite, nous avons compris que la première fois que notre x (réel), à convertir passait dans la dernière condition de l'algorithme (si $x \geq 1$) sépare la partie entière de la partie décimale.

Par exemple : le nombre 8.625, la première fois on en extraira le 8 + 0.625 et on continuera à travailler avec le 0.625. C'est un bon moyen de séparer la partie entière de la partie décimale.

Enfin, la 3e condition (si $x < 1$) est intéressante car elle permet simplement d'enlever l'infinité de chiffres après la virgule. Cette ligne fait passer les float infinis à des float finis.

Par exemple : 0.18181818181818.... $\frac{1}{1.18181818181818} = 5.5$

Cette condition se réalisera jusqu'à ce que l'opération d'inversion $\frac{1}{x}$ donne un entier, ou jusqu'à ce que le nombre d'itérations sera dépassé.

Ces deux parties de l'algorithme se répondent nécessairement.

On a par ailleurs essayé de comprendre cet algorithme en l'expriment grâce aux suites.

On a noté les sorties de l'algorithme et avons noté un schéma récurrent (on notera a_n un coefficient de la suite):

$$a_n + \frac{1}{a_{n-1+\frac{1}{a_{n-2}+\frac{1}{a_{n-3}+\cdots}}}}$$

On a donc :

$$a_{n+3} = a_{n+2} + \frac{1}{a_{n+1}}$$

Le a_{n+2} correspond à notre dernière condition (si $x \geq 1$).

Le a_{n+1} correspond à l'inversion $\frac{1}{x}$de la 3e condition (si $x < 1$).

Et l'opération $\frac{1}{a_{n+1}}$correspond) la puissance -1 de la 3e condition (si $x < 1$).

Par ailleurs, l'idée pour que cet algorithme prenne en charge les nombres négatif est à l'entrée de tester si le float de départ est positif ou négatif, de stocker une variable (un booléen par exemple) qui contient cet information. De réaliser l'algorithme comme déjà codé et à la fin, de multiplier par -1 si le float de départ était négatif.

Les limites de représentation des entiers en c++ peut être réglé en utilisé sans long int par exemple, d'où l'intérêt de transformer notre classe en un template pour supporter ce changement de type.

En effet, les grands nombres (et les très petits) se représentent assez mal avec notre classe rationnel. Pour corriger ce problème, deux solutions s'offrent à nous:

- pour les nombres très grands d'abord, nous pourrions séparer leur partie entière ce qui nous donnerai un int et une partie décimale plus facilement représentable.

- pour les nombres très petits maintenant, nous pourrions les représenter comme étant : $0, a_1a_2a_3... \times 10^{-X}$