Que matrizes representam operadores quânticos válidos?

Adenilton Silva

Seção 1

Introdução

- $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido.
- $\tilde{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido?

$$\tilde{H} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) =$$

- $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido.
- $\tilde{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido?

$$\tilde{H} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

- $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido.
- $\tilde{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido?

$$\tilde{H}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \vec{0}$$

Seção 2

Operadores quânticos devem preservar a norma dos vetores!

Operadores unitários

$$\| \, |v\rangle \, \| = |v\rangle^{\dagger} \cdot |v\rangle = \langle v|v\rangle$$

Operadores unitários

$$\| \, |v\rangle \, \| = |v\rangle^\dagger \cdot |v\rangle = \langle v|v\rangle$$

$$\| U \, |v\rangle \, \| = (U \, |v\rangle)^\dagger \cdot U \, |v\rangle = \langle v|U^\dagger U|v\rangle$$

Operadores unitários

$$\| \, |v\rangle \, \| = |v\rangle^\dagger \cdot |v\rangle = \langle v|v\rangle$$

$$\| U \, |v\rangle \, \| = (U \, |v\rangle)^\dagger \cdot U \, |v\rangle = \langle v|U^\dagger U|v\rangle$$

- Se $U \cdot U^\dagger = I$, então $\| \, |v\rangle \, \| = \| U \, |v\rangle \, \|$

Operadores unitários

$$\| \, |v\rangle \, \| = |v\rangle^{\dagger} \cdot |v\rangle = \langle v|v\rangle$$

$$\| U \, |v\rangle \, \| = (U \, |v\rangle)^{\dagger} \cdot U \, |v\rangle = \langle v|U^{\dagger} U|v\rangle$$

- Se $U \cdot U^{\dagger} = I$, então $\| \, |v\rangle \, \| = \| U \, |v\rangle \, \|$
- Um operador U é **unitário** se $U \cdot U^{\dagger} = I$
- Todo operador quântico sobre um qubit pode ser representado por uma matriz unitária 2×2

Seção 3

Exemplos de operadores quânticos

Exemplos de operadores quânticos sobre um qubit

$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
$H\lvert 0\rangle = \frac{\lvert 0\rangle + \lvert 1\rangle}{\sqrt{2}}$	$X\lvert 0\rangle = \lvert 1\rangle$	$Z\lvert 0\rangle = \lvert 0\rangle$
$H\lvert 1\rangle = \frac{\lvert 0\rangle - \lvert 1\rangle}{\sqrt{2}}$	$X\lvert 1\rangle = \lvert 0\rangle$	$Z\lvert 1\rangle = -\lvert 1\rangle$
$-\boxed{H}-$	$-\boxed{X}-$	$-\boxed{Z}-$

Exemplo de operação sobre dois qubits

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} CNOT\,|00\rangle &= |00\rangle \\ CNOT\,|01\rangle &= |01\rangle \\ CNOT\,|10\rangle &= |11\rangle \\ CNOT\,|11\rangle &= |10\rangle \end{aligned}$$