

Que matrizes representam operadores quânticos válidos?

Adenilton Silva

Seção 1

Introdução

- ▶ $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido.
- ▶ $\tilde{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido?

$$\tilde{H} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) =$$

- ▶ $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido.
- ▶ $\tilde{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido?

$$\tilde{H} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

► $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido.

► $\tilde{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido?

$$\tilde{H} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \vec{0}$$

Seção 2

Operadores quânticos devem preservar a norma dos vetores!

Operadores unitários

$$\| |v\rangle \|^2 = |v\rangle^\dagger \cdot |v\rangle = \langle v|v\rangle$$

Operadores unitários

$$\| |v\rangle \|^2 = |v\rangle^\dagger \cdot |v\rangle = \langle v|v\rangle$$

$$\| U |v\rangle \|^2 = (U |v\rangle)^\dagger \cdot U |v\rangle = \langle v|U^\dagger U|v\rangle$$

Operadores unitários

$$\| |v\rangle \|^2 = |v\rangle^\dagger \cdot |v\rangle = \langle v|v\rangle$$

$$\| U |v\rangle \|^2 = (U |v\rangle)^\dagger \cdot U |v\rangle = \langle v|U^\dagger U|v\rangle$$

► Se $U \cdot U^\dagger = I$, então $\| |v\rangle \| = \| U |v\rangle \|$

Operadores unitários

$$\| |v\rangle \|^2 = |v\rangle^\dagger \cdot |v\rangle = \langle v|v\rangle$$

$$\| U |v\rangle \|^2 = (U |v\rangle)^\dagger \cdot U |v\rangle = \langle v|U^\dagger U|v\rangle$$

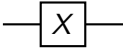
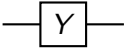

- ▶ Se $U \cdot U^\dagger = I$, então $\| |v\rangle \| = \| U |v\rangle \|$
- ▶ Um operador U é **unitário** se $U \cdot U^\dagger = I$
- ▶ Todo operador quântico sobre um qubit pode ser representado por uma matriz unitária 2×2

Seção 3



Exemplos de operadores quânticos

Exemplos de operadores quânticos sobre um qubit

Matrizes de Pauli

$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$	$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
$X 0\rangle = 1\rangle$	$Y 0\rangle = -i 1\rangle$	$Z 0\rangle = 0\rangle$
$X 1\rangle = 0\rangle$	$Y 1\rangle = i 0\rangle$	$Z 1\rangle = - 1\rangle$
		

Exemplos de operadores quânticos sobre um qubit

$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
$H 0\rangle = \frac{ 0\rangle + 1\rangle}{\sqrt{2}}$	$S 0\rangle = 0\rangle$
$H 1\rangle = \frac{ 0\rangle - 1\rangle}{\sqrt{2}}$	$S 1\rangle = i 1\rangle$
	

Exemplos de operadores quânticos sobre um qubit

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix}$$

Exercício

- Mostre que todo operador quântico sobre um qubit pode ser escrito como $U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta)$.

$$U = \begin{bmatrix} e^{i(\alpha-\beta/2-\delta/2)} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) & -e^{i(\alpha-\beta/2+\delta/2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ e^{i(\alpha+\beta/2-\delta/2)} \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) & e^{i(\alpha-\beta/2+\delta/2)} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Exercício

► Mostre que

$$U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta)$$

se

$$\begin{aligned} A &= R_z(\beta) R_y(\gamma/2) \\ B &= R_y(-\gamma/2) R_z(-(\delta + \beta)/2) , \\ C &= R_z((\delta - \beta)/2) \end{aligned}$$

então $ABC = I$ e $AXBXC = U$

Decomposição espectral

Todo operador quântico U pode ser escrito como $U = \sum_a a |a\rangle\langle a|$, onde a é o autovalor associado ao autovetor $|a\rangle$.

Funções de operadores

Seja $A = \sum_a |a\rangle$ a decomposição espectral de um operador A ,
então $f(A) = \sum_a f(a) |a\rangle$

Exercício

Determine \sqrt{H} e \sqrt{Z}