Bits quânticos

Adenilton Silva

1 de setembro de 2020

Seção 1

Bits quânticos

Bits quânticos

qubits

- Um **bit quântico** é um vetor unitário complexo bidimensional.

$$|v\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ onde } || \, |v\rangle \, || = 1$$

Bits quânticos

qubits

- Um **bit quântico** é um vetor unitário complexo bidimensional.

$$|v\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ onde } || \, |v\rangle \, || = 1$$

- O conjunto $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ é uma base ortonormal denominada **base computacional**.

$$|0\rangle \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } |1\rangle \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Combinação linear

- Um **ket** $|x\rangle$ representa um vetor.

Combinação linear

- Um **ket** $|x\rangle$ representa um vetor.
- $|v\rangle$ é uma **combinação linear** dos vetores $|v_1\rangle, \cdots, |v_n\rangle$ se

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i |v_i\rangle$$

.

Combinação linear

- Um **ket** $|x\rangle$ representa um vetor.
- $|v\rangle$ é uma **combinação linear** dos vetores $|v_1\rangle, \cdots, |v_n\rangle$ se

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i |v_i\rangle$$

.

- O **espaço gerado** por um conjunto de vetores S é formado por todas as combinações lineares de vetores em S.

Combinação linear

- Um **ket** $|x\rangle$ representa um vetor.
- $|v\rangle$ é uma **combinação linear** dos vetores $|v_1\rangle, \cdots, |v_n\rangle$ se

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i |v_i\rangle$$

.

- O **espaço gerado** por um conjunto de vetores S é formado por todas as combinações lineares de vetores em S.
- Um conjunto de vetores $S = \{|s_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ é **linearmente dependente** se existirem conficientes a_i não todos nulos tais que $\sum_{i=1}^{n} a_i |s_i\rangle = 0$.

Combinação linear

- Um **ket** $|x\rangle$ representa um vetor.
- $|v\rangle$ é uma **combinação linear** dos vetores $|v_1\rangle, \cdots, |v_n\rangle$ se

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i |v_i\rangle$$

.

- O **espaço gerado** por um conjunto de vetores S é formado por todas as combinações lineares de vetores em S.
- Um conjunto de vetores $S = \{|s_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ é **linearmente dependente** se existirem conficientes a_i não todos nulos tais que $\sum_{i=1}^{n} a_i |s_i\rangle = 0$.
- Uma **base** de um espaço S é um conjunto de vetores que gera S e é linearmente independente.

Produto interno

- Um **produto interno** $\langle v_1|v_2\rangle$ é uma função que recebe pares de vetores e retorna um número complexo e satisfaz as propriedades:
  1. $\langle v|v\rangle$ é um número real não negativo;
  2. $\langle v_1|v_2\rangle = \overline{\langle v_2|v_1\rangle}$
  3. $\langle v_1|\left(a\,|v_2\rangle + b\,|v_3\rangle\right) = a\langle v_1|v_2\rangle + b\langle v_1|v_3\rangle$

Bases ortonormais

- Dois vetores $|v_1\rangle, |v_2\rangle$ são **ortogonais** se $\langle v_1|v_2\rangle = 0$.

Bases ortonormais

- Dois vetores $|v_1\rangle, |v_2\rangle$ são **ortogonais** se $\langle v_1|v_2\rangle = 0$.
- Um conjunto $\{|\beta_1\rangle, \cdots, |\beta_n\rangle\}$ é **ortonormal** se para todo i, j $\langle \beta_i|\beta_j\rangle = \delta_{ij}$, onde

$$\delta ij = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} .$$

Bits quânticos

qubits

- O conjunto $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ é uma base ortonormal denominada base computacional.
- Escolhendo a base compucional,

$$a|0\rangle + b|1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Bits quânticos

qubits

- O conjunto $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ é uma base ortonormal denominada base computacional.
- Escolhendo a base compucional,

$$a|0\rangle + b|1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

- Seja $|v\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, definimos o bra $|v\rangle^\dagger = \langle v| = \begin{bmatrix} \overline{a_1}, \cdots, \overline{a_n} \end{bmatrix}$
- $\langle v_1|v_2\rangle = \langle v_1|\,|v_2\rangle$

Superposição

1. Um bit quântico $|v\rangle$ está em superposição em relação a base computacional se $|v\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$ com a e b diferentes de zero.

Superposição

1. Um bit quântico $|v\rangle$ está em superposição em relação a base computacional se $|v\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$ com a e b diferentes de zero.
2. Qual a quantidade de informação que pode ser armazenada em um qubit?

Medição

- Não podemos visualizar o estado $a|0\rangle + b|1\rangle$ de um qubit, para obter informações é necessário realizar uma medição.

Medição

- Não podemos visualizar o estado $a|0\rangle + b|1\rangle$ de um qubit, para obter informações é necessário realizar uma medição.
- Medições possuem um efeito computacional, pois alteram o estado de um qubit.

Medição

- Não podemos visualizar o estado $a|0\rangle + b|1\rangle$ de um qubit, para obter informações é necessário realizar uma medição.
- Medições possuem um efeito computacional, pois alteram o estado de um qubit.
- Para realizar a medição de um estado $|v\rangle$ devemos
  1. Escolher uma base $\{|u\rangle, |u^{\perp}\rangle\}$.
  2. Escrever o estado como uma combinação linear dos elementos da base

$$|v\rangle = a|u\rangle + b|u^{\perp}\rangle$$

Medição

- Não podemos visualizar o estado $a|0\rangle + b|1\rangle$ de um qubit, para obter informações é necessário realizar uma medição.
- Medições possuem um efeito computacional, pois alteram o estado de um qubit.
- Para realizar a medição de um estado $|v\rangle$ devemos
  1. Escolher uma base $\{|u\rangle, |u^{\perp}\rangle\}$.
  2. Escrever o estado como uma combinação linear dos elementos da base
  $$|v\rangle = a|u\rangle + b|u^{\perp}\rangle$$
  3. Realizar a medição obtendo
  $$\begin{cases} |u\rangle, \text{ com probabilidade } |a|^2 \\ |u^{\perp}\rangle, \text{ com probabilidade } |b|^2 \end{cases}$$

Medição

- Após a medição o bit quântico irá colapsar para o resultado da medição.

Medição

- Após a medição o bit quântico irá colapsar para o resultado da medição.
- Ao realizar uma medição de um qubit $|v\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$.

$$\begin{cases} |0\rangle\,, \text{ com probabilidade } |a|^2, \text{ após a medição } |v\rangle = |0\rangle \\ |1\rangle\,, \text{ com probabilidade } |b|^2, \text{ após a medição } |v\rangle = |1\rangle \end{cases}$$

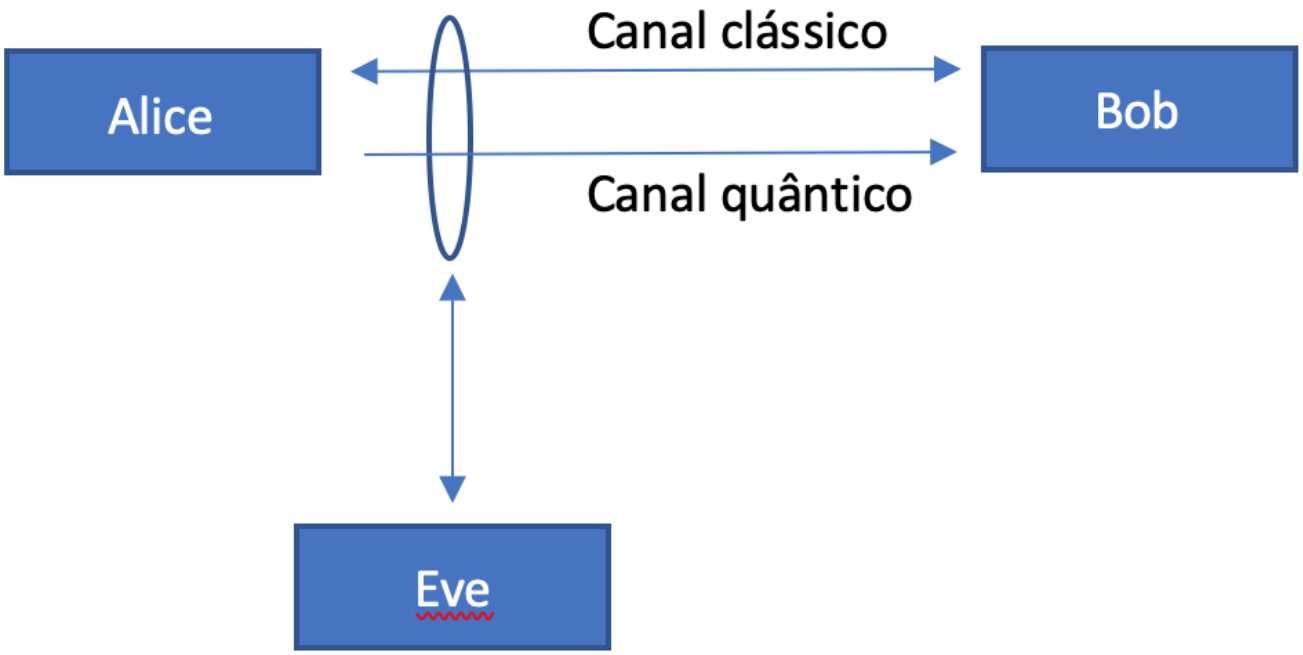
Bits quânticos representam probabilidades?

- $|v\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$ não representa uma distribuição de probabilidades.
- $|v\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$ é um estado definido.

Seção 2

Protocolo de distribuição de chaves

Um protocolo para distribuição de chaves privadas



- Alice e Bob desejam criar uma chave (cadeia binária) secreta.

BB84

- Alice gera aleatoriamente dois strings binários de comprimento n a e b.

BB84

- Alice gera aleatoriamente dois strings binários de comprimento n a e b.
- Para cada $a_i b_i$ Alice cria o estado quântico $|v_{a_i b_i}\rangle$, onde

$$\begin{aligned} |v_{00}\rangle &= |0\rangle \\ |v_{10}\rangle &= |1\rangle \\ |v_{01}\rangle &= |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |v_{11}\rangle &= |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \end{aligned} \tag{1}$$

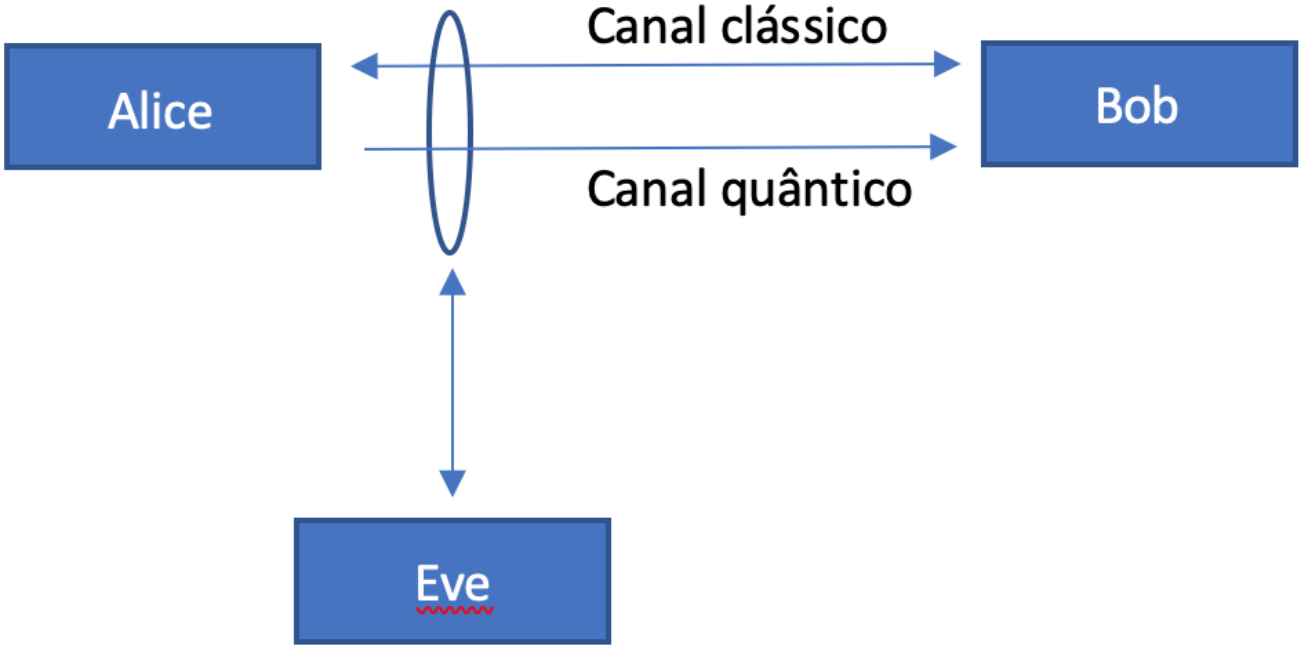
- Para recuperar o string a é necessário possuir os qubits e o string b (para determinar a base em que será realizada a medição).

BB84

- Alice envia apenas os qubits para Bob.
- Para cada qubit Bob escolhe aleatoriamente uma das bases $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ou $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ pare realizar a medição.
- Bob informa a Alice a base utilizada e ele mantém apenas os bits em que as bases coincidem.
- Bob e Alice checam através do canal clássico se uma fração dos bits coincidem.

BB84

Como Eve pode interceptar os dados?



Seção 3

O espaço dos bits quânticos

Fase global

- $a|0\rangle + b|1\rangle$ e $a'|0\rangle + b'|1\rangle$ representam o mesmo estado se

$$a|0\rangle + b|1\rangle = c(a'|0\rangle + b'|1\rangle),$$

  onde $c = e^{i\theta}$.
- $c = e^{i\theta}$ é denominado **fase global**.
- Existe uma diferença entre o espaço dos qubits e o espaço vetorial complexo onde os qubits são representados.

Fase relativa

- A fase relativa de um bit quântico é o número $e^{i\phi}$ que satisfaz a/b $= e^{i\phi}|a|/|b|$.
- Estados com fases relativas diferentes representam diferentes qubits.
- $e^{i\theta}\,|v1\rangle$ e $|v_1\rangle$ representam o mesmo estado.
- $1\sqrt{2}(e^{i\theta}\,|0\rangle + |1\rangle)$ e $1\sqrt{2}(|0\rangle + |1\rangle)$ representam qubits diferentes.

Exemplos de qubits

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$
$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$
$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i\,|1\rangle)$$
$$|-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i\,|1\rangle)$$

Seção 4

Representação geométrica de um qubit

Esfera de Bloch

- Um qubit $e^{i\phi_1} a\,|0\rangle + e^{i\phi_2} b\,|1\rangle$ pode ser descrito como $a\,|0\rangle + e^{i\phi} b\,|1\rangle$.
- Como $|a|^2 + |b|^2 = 1$ existe um θ onde $cos(\theta) = a$ e $sen(\theta) = b$.
- Logo $a\,|0\rangle + e^{i\phi} b\,|1\rangle = cos(\theta)\,|0\rangle + e^{i\phi} sen(\theta) b\,|1\rangle$.

Esfera de Bloch

- O estado $cos(\theta)\,|0\rangle + e^{i\phi} sen(\theta) b\,|1\rangle$ pode ser representado em uma esfera.