



Preparação de estados quânticos

Adenilton J. da Silva
www.cin.ufpe.br/~ajsilva

24 de setembro de 2020

Seção 1

Introdução

Preparação de estados quânticos

- Objetivo. Transferir informação de um computador para um dispositivo quântico.

$$(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \rightarrow a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle + \dots + a_{m-1} |m-1\rangle$$

Preparação de estados quânticos

- ▶ Objetivo. Transferir informação de um computador para um dispositivo quântico.

$$(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \rightarrow a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle + \dots + a_{m-1} |m-1\rangle$$

- ▶ Devido ao teorema da não clonagem é necessário retransferir a informação sempre que ela for necessária.

Preparação de estados quânticos

- ▶ Objetivo. Transferir informação de um computador para um dispositivo quântico.

$$(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \rightarrow a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle + \dots + a_{m-1} |m-1\rangle$$

- ▶ Devido ao teorema da não clonagem é necessário retransferir a informação sempre que ela for necessária.
- ▶ Decoerência da informação não permite que a transferência seja realizada antecipadamente.

Preparação de estados quânticos

- ▶ Objetivo. Transferir informação de um computador para um dispositivo quântico.

$$(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \rightarrow a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle + \dots + a_{m-1} |m-1\rangle$$

- ▶ Devido ao teorema da não clonagem é necessário retransferir a informação sempre que ela for necessária.
- ▶ Decoerência da informação não permite que a transferência seja realizada antecipadamente.
- ▶ O custo para inicializar um estado quântico pode dominar o custo total de um algoritmo.

Preparação de estados quânticos

Mottonen, Mikko, et al. "Transformation of quantum states using uniformly controlled rotations." arXiv preprint quant-ph/0407010 (2004).

Preparação de estados quânticos

- ▶ Dado um vetor 2^n dimensional (a_0, \dots, a_{2^n-1}) .
- ▶ Desejamos determinar um circuito U , onde $U|0\rangle^{\otimes n} = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m |m\rangle$

Seção 2

Preparação de um estado com 1 bit quântico

Preparação de estados quânticos

Um qubit

$$a |0\rangle + b |1\rangle$$

Preparação de estados quânticos

Um qubit

The diagram illustrates the transformation of a qubit state. At the top, the general state is given as $a|0\rangle + b|1\rangle$, where a is in a blue box and b is in a red box. Two curved arrows point downwards from these boxes to the corresponding terms in the exponential form below. The bottom equation is $e^{ix_0} \cos(\gamma) |0\rangle + e^{ix_1} \text{sen}(\gamma) |1\rangle$, where the first term is in a blue box and the second term is in a red box.

$$a|0\rangle + b|1\rangle$$
$$e^{ix_0} \cos(\gamma) |0\rangle + e^{ix_1} \text{sen}(\gamma) |1\rangle$$

Escreva os números na forma exponencial

Preparação de estados quânticos

Um qubit

$$a|0\rangle + b|1\rangle$$
$$e^{ix_0} \cos(\gamma) |0\rangle + e^{ix_1} \text{sen}(\gamma) |1\rangle$$

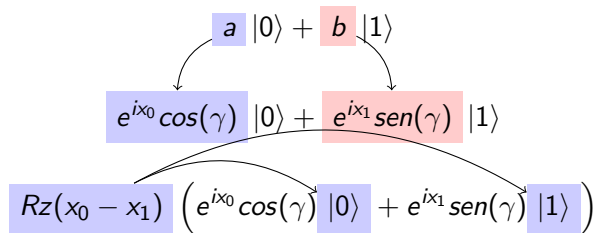
$$R_z(x_0 - x_1) \left(e^{ix_0} \cos(\gamma) |0\rangle + e^{ix_1} \text{sen}(\gamma) |1\rangle \right)$$

Escreva os números na forma exponencial

Aplicar $R_z(-\theta_0)$,
 $-\theta_0 = x_0 - x_1$

Preparação de estados quânticos

Um qubit



Escreva os números na forma exponencial

Aplicar $R_z(-\theta_0)$,
 $-\theta_0 = x_0 - x_1$

Preparação de estados quânticos

Um qubit

Escreva os números na forma exponencial

$$\begin{aligned} & a|0\rangle + b|1\rangle \\ & \downarrow \\ & e^{ix_0}\cos(\gamma)|0\rangle + e^{ix_1}\sin(\gamma)|1\rangle \\ & \downarrow \\ & Rz(x_0 - x_1) \left(e^{ix_0}\cos(\gamma)|0\rangle + e^{ix_1}\sin(\gamma)|1\rangle \right) \\ & \downarrow \\ & e^{ix_0}\cos(\gamma)e^{-i\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)}|0\rangle + e^{ix_1}\sin(\gamma)e^{i\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)}|1\rangle \end{aligned}$$

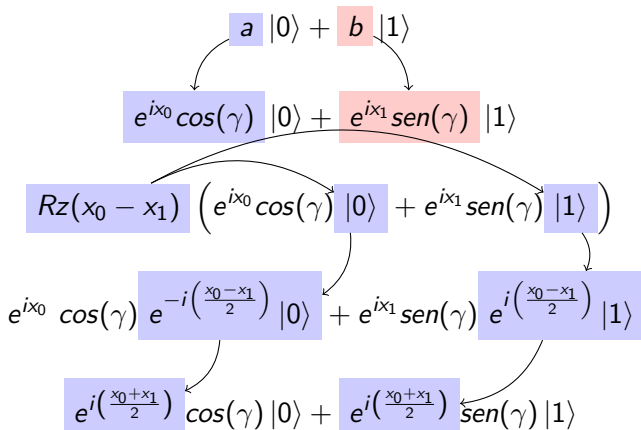
Aplicar $Rz(-\theta_0)$,
 $-\theta_0 = x_0 - x_1$

$$\begin{aligned} Rz(\theta)|0\rangle &= e^{-i\theta/2}|0\rangle \\ Rz(\theta)|1\rangle &= e^{i\theta/2}|1\rangle \end{aligned}$$

Preparação de estados quânticos

Um qubit

Escreva os números na forma exponencial



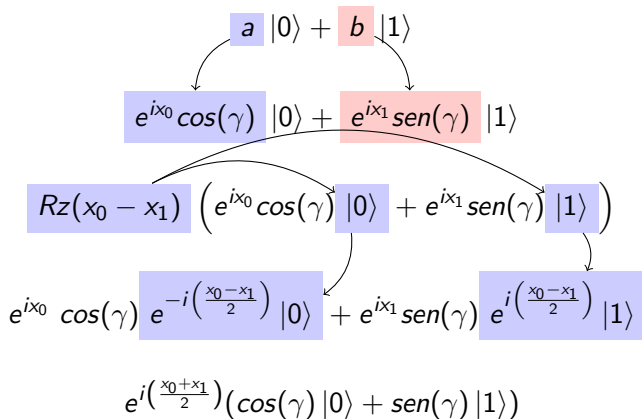
Aplicar $R_z(-\theta_0)$,
 $-\theta_0 = x_0 - x_1$

$$R_z(\theta)|0\rangle = e^{-i\theta/2}|0\rangle$$
$$R_z(\theta)|1\rangle = e^{i\theta/2}|1\rangle$$

$$e^{ix_0} \cdot e^{-i\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)}$$
$$e^{ix_1} \cdot e^{i\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)}$$

Preparação de estados quânticos

Um qubit


$$\begin{aligned} & a|0\rangle + b|1\rangle \\ & \downarrow \\ & e^{ix_0}\cos(\gamma)|0\rangle + e^{ix_1}\sin(\gamma)|1\rangle \\ & \downarrow \\ & Rz(x_0 - x_1) \left(e^{ix_0}\cos(\gamma)|0\rangle + e^{ix_1}\sin(\gamma)|1\rangle \right) \\ & \downarrow \\ & e^{ix_0}\cos(\gamma)e^{-i\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)}|0\rangle + e^{ix_1}\sin(\gamma)e^{i\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)}|1\rangle \\ & \downarrow \\ & e^{i\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)}(\cos(\gamma)|0\rangle + \sin(\gamma)|1\rangle) \end{aligned}$$

Escreva os números na forma exponencial

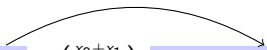
Aplicar $Rz(-\theta_0)$,
 $-\theta_0 = x_0 - x_1$

$$\begin{aligned} Rz(\theta)|0\rangle &= e^{-i\theta/2}|0\rangle \\ Rz(\theta)|1\rangle &= e^{i\theta/2}|1\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{ix_0} \cdot e^{-i\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)} &= e^{i\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)} \\ e^{ix_1} \cdot e^{i\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)} &= e^{i\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)} \end{aligned}$$

Preparação de estados quânticos


Um qubit


$$Ry(-\theta_1) \left(e^{i\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)} (\cos(\gamma) |0\rangle + \sin(\gamma) |1\rangle) \right)$$

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 2 \cdot \gamma \\ Ry(\theta_1) |0\rangle &= \cos(\gamma) |0\rangle + \sin(\gamma) |1\rangle \\ Ry(\theta_1)^\dagger &= Ry(-\theta_1)\end{aligned}$$

Preparação de estados quânticos

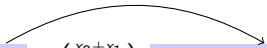
Um qubit


$$Ry(-\theta_1) \left(e^{i\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)} (\cos(\gamma) |0\rangle + \sin(\gamma) |1\rangle) \right)$$
$$= e^{i\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)} (|0\rangle)$$

$$\theta_1 = 2 \cdot \gamma$$
$$Ry(\theta_1) |0\rangle = \cos(\gamma) |0\rangle + \sin(\gamma) |1\rangle$$
$$Ry(\theta_1)^\dagger = Ry(-\theta_1)$$

Preparação de estados quânticos

Um qubit


$$Ry(-\theta_1) \left(e^{i\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)} (\cos(\gamma) |0\rangle + \sin(\gamma) |1\rangle) \right)$$

$$= e^{i\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)} (|0\rangle)$$

$$Rz(-\theta_2) e^{i\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)} (|0\rangle) = |0\rangle$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 2 \cdot \gamma \\ Ry(\theta_1) |0\rangle &= \cos(\gamma) |0\rangle + \sin(\gamma) |1\rangle \\ Ry(\theta_1)^\dagger &= Ry(-\theta_1) \end{aligned}$$

$$-\theta_2 = x_0 + x_1$$

Preparação de estados quânticos

Um qubit

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle =$$

Preparação de estados quânticos

Um qubit

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = e^{ix_1}\cos(\gamma)|0\rangle + e^{ix_2}\sin(\gamma)|0\rangle$$

Preparação de estados quânticos

Um qubit

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = e^{ix_1}\cos(\gamma)|0\rangle + e^{ix_2}\sin(\gamma)|0\rangle$$
$$\theta_0 = x_1 - x_0, \theta_1 = 2 \cdot \gamma, \theta_2 = -(x_0 + x_1)$$

Preparação de estados quânticos

Um qubit

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = e^{ix_1}\cos(\gamma)|0\rangle + e^{ix_2}\sin(\gamma)|0\rangle$$
$$\theta_0 = x_1 - x_0, \theta_1 = 2 \cdot \gamma, \theta_2 = -(x_0 + x_1)$$

$$R_z(-\theta_2)R_y(-\theta_1)R_z(-\theta_0)(a|0\rangle + b|1\rangle) = |0\rangle$$

Preparação de estados quânticos

Um qubit

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = e^{ix_1}\cos(\gamma)|0\rangle + e^{ix_2}\sin(\gamma)|0\rangle$$
$$\theta_0 = x_1 - x_0, \theta_1 = 2 \cdot \gamma, \theta_2 = -(x_0 + x_1)$$

$$Rz(-\theta_2)Ry(-\theta_1)Rz(-\theta_0)(a|0\rangle + b|1\rangle) = |0\rangle$$

$$\boxed{Rz(\theta_0)Ry(\theta_1)Rz(\theta_2)|0\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle}$$

Seção 3

Preparação de estado com
múltiplos bits quânticos

Preparação de estados quânticos

Dois qubits

$$a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle + a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle$$

Preparação de estados quânticos

Dois qubits

$$a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle + a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle$$

Preparação de estados quânticos

Dois qubits

$$a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle + a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle$$
$$\sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2} \left(\frac{a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle}{\sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2}} \right) + \sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2} \left(\frac{a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle}{\sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2}} \right)$$

Preparação de estados quânticos

Dois qubits

$$a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle + a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle$$

$$\sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2} \left(\frac{a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle}{\sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2}} \right) + \sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2} \left(\frac{a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle}{\sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2}} \right)$$

Preparação de estados quânticos

Dois qubits

$$a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle + a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle$$

$$\sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2} \left(\frac{a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle}{\sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2}} \right) + \sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2} \left(\frac{a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle}{\sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2}} \right)$$

$$|0\rangle (e^{ix_0} \cos(\gamma_1) |0\rangle + e^{ix_1} \sin(\gamma_1) |1\rangle)$$

$$|1\rangle (e^{ix_2} \cos(\gamma_2) |0\rangle + e^{ix_3} \sin(\gamma_2) |1\rangle)$$

Preparação de estados quânticos

Dois qubits

$$a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle + a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle$$

$$\sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2} \left(\frac{a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle}{\sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2}} \right) + \sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2} \left(\frac{a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle}{\sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2}} \right)$$

$$|0\rangle (e^{ix_0} \cos(\gamma_1) |0\rangle + e^{ix_1} \sin(\gamma_1) |1\rangle)$$

$$-\theta_1 = x_0 - x_1, \alpha_1 = 2 \cdot \gamma_1$$

$$|1\rangle (e^{ix_2} \cos(\gamma_2) |0\rangle + e^{ix_3} \sin(\gamma_2) |1\rangle)$$

$$-\theta_2 = x_2 - x_3, \alpha_2 = 2 \cdot \gamma_2$$

Preparação de estados quânticos

Dois qubits

$$a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle + a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle$$

$$\sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2} \left(\frac{a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle}{\sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2}} \right) + \sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2} \left(\frac{a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle}{\sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2}} \right)$$

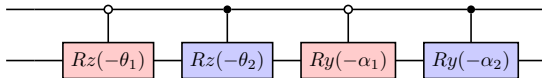
$$|0\rangle (e^{ix_0} \cos(\gamma_1) |0\rangle + e^{ix_1} \sin(\gamma_1) |1\rangle)$$

$$-\theta_1 = x_0 - x_1, \alpha_1 = 2 \cdot \gamma_1$$

$$|1\rangle (e^{ix_2} \cos(\gamma_2) |0\rangle + e^{ix_3} \sin(\gamma_2) |1\rangle)$$

$$-\theta_2 = x_2 - x_3, \alpha_2 = 2 \cdot \gamma_2$$

$$a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle + a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle$$



$$e^{i(x_0+x_1)} \sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2} |00\rangle + e^{i(x_2+x_3)} \sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2} |10\rangle$$

Preparação de estados

dois qubits

$$e^{i(x_0+x_1)} \sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2} |00\rangle + e^{i(x_2+x_3)} \sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2} |10\rangle$$

Preparação de estados

dois qubits

$$e^{i(x_0+x_1)} \sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2} |00\rangle + e^{i(x_2+x_3)} \sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2} |10\rangle$$

$$e^{i(x_0+x_1)} \cos(\gamma_0) |00\rangle + e^{i(x_2+x_3)} \sin(\gamma_0) |10\rangle$$

Preparação de estados

dois qubits

$$e^{i(x_0+x_1)} \sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2} |00\rangle + e^{i(x_2+x_3)} \sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2} |10\rangle$$

$$e^{i(x_0+x_1)} \cos(\gamma_0) |00\rangle + e^{i(x_2+x_3)} \sin(\gamma_0) |10\rangle$$

$$-\theta_0 = (x_0 + x_1) - (x_2 + x_3), \alpha_0 = 2 \cdot \gamma_0$$

Preparação de estados

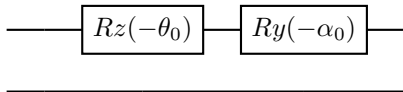
dois qubits

$$e^{i(x_0+x_1)} \sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2} |00\rangle + e^{i(x_2+x_3)} \sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2} |10\rangle$$

$$e^{i(x_0+x_1)} \cos(\gamma_0) |00\rangle + e^{i(x_2+x_3)} \sin(\gamma_0) |10\rangle$$

$$-\theta_0 = (x_0 + x_1) - (x_2 + x_3), \alpha_0 = 2 \cdot \gamma_0$$

$$e^{i(x_0+x_1)} \sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2} |00\rangle + e^{i(x_2+x_3)} \sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2} |10\rangle$$

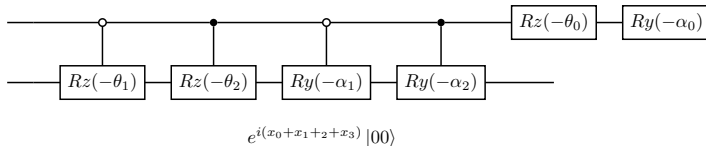


$$e^{i(x_0+x_1+x_2+x_3)} |00\rangle$$

Preparação de estados

dois qubits

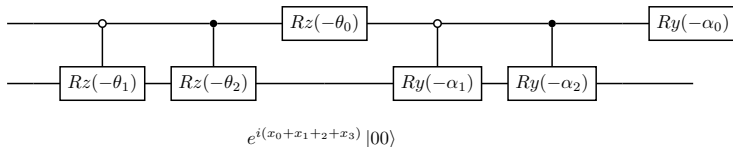
$$a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle + a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle$$



Preparação de estados

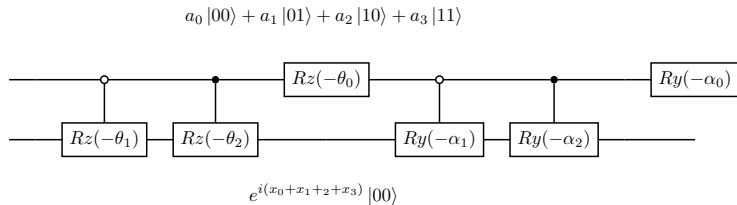
dois qubits

$$a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle + a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle$$



Preparação de estados

dois qubits

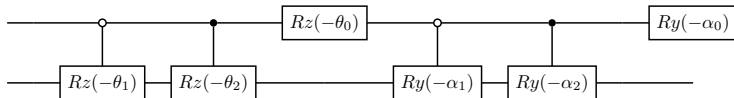


O circuito inverso irá transformar $e^{i(x_0+x_1+x_2+x_3)} |00\rangle$ em
 $a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle + a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle$

Preparação de estados

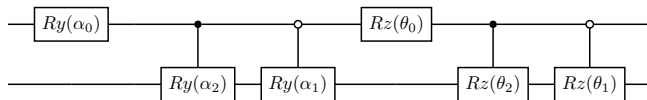
dois qubits

$$a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle + a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle$$



$$e^{i(x_0+x_1+2+x_3)} |00\rangle$$

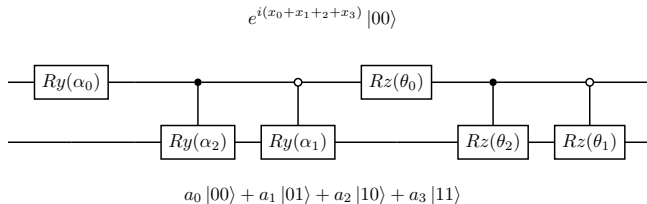
$$e^{i(x_0+x_1+2+x_3)} |00\rangle$$



$$a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle + a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle$$

Preparação de estados

dois qubits



Preparação de estados quânticos

Um algoritmo baseado em (quant-ph/0407010)

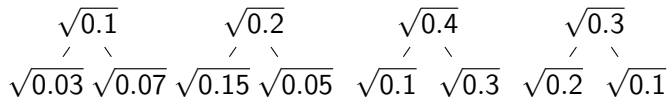
$$\sqrt{0.03} \sqrt{0.07} \sqrt{0.15} \sqrt{0.05} \sqrt{0.1} \sqrt{0.3} \sqrt{0.2} \sqrt{0.1}$$

(a) Árvore de estados

(b) Árvore de ângulos.

Preparação de estados quânticos

Um algoritmo baseado em (quant-ph/0407010)

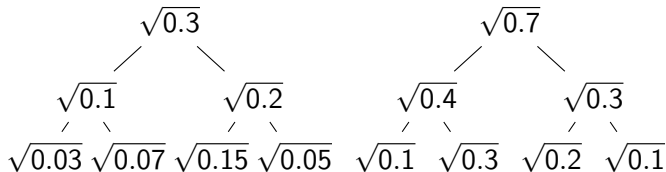


(a) Árvore de estados

(b) Árvore de ângulos.

Preparação de estados quânticos

Um algoritmo baseado em (quant-ph/0407010)

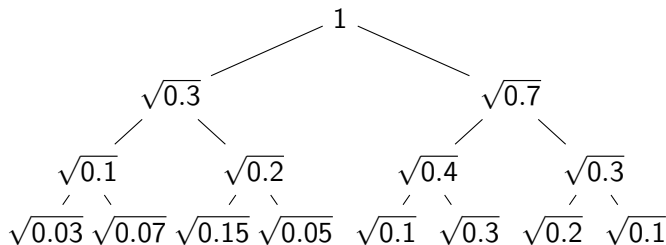


(a) Árvore de estados

(b) Árvore de ângulos.

Preparação de estados quânticos

Um algoritmo baseado em (quant-ph/0407010)

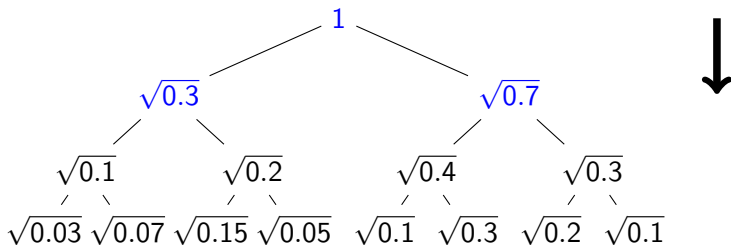


(a) Árvore de estados

(b) Árvore de ângulos.

Preparação de estados quânticos

Um algoritmo baseado em (quant-ph/0407010)



(a) Árvore de estados

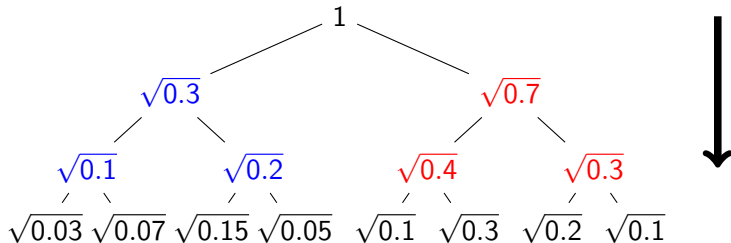
α_0

$$R_y(\alpha_0)|0\rangle = \sqrt{0.3}|0\rangle + \sqrt{0.7}|1\rangle$$

$$\alpha_0 = 2 \cdot \text{asen}\left(\frac{\sqrt{0.7}}{1}\right)$$

Preparação de estados quânticos

Um algoritmo baseado em (quant-ph/0407010)



(a) Árvore de estados

$$\alpha_0 \quad \sqrt{0.3}|0\rangle R_y(\alpha_1)|0\rangle + \sqrt{0.7}|1\rangle R_y(\alpha_2)|0\rangle$$

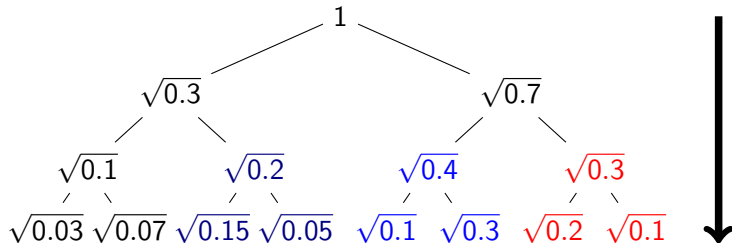
$$\alpha_1 \quad \alpha_2$$

$$\alpha_1 = 2 \cdot \text{asen} \left(\frac{\sqrt{0.2}}{\sqrt{0.3}} \right)$$

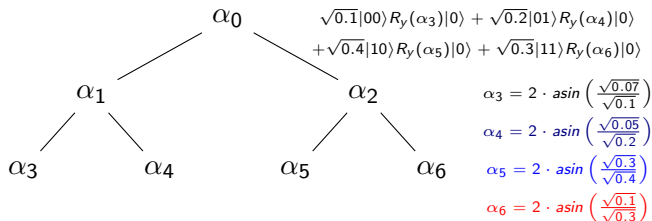
$$\alpha_2 = 2 \cdot \text{asen} \left(\frac{\sqrt{0.3}}{\sqrt{0.7}} \right)$$

Preparação de estados quânticos

Um algoritmo baseado em (quant-ph/0407010)



(a) Árvore de estados



Preparação de estados quânticos

Um algoritmo baseado em (quant-ph/0407010)

- $O(2^n)$ operações para preparar um estado com n bits quânticos;

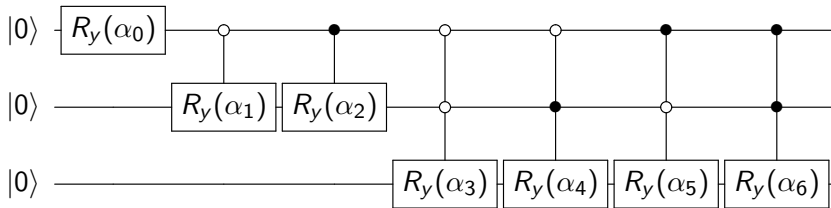


Figura: Circuito para carregar um vetor real de dimensão 8 em um dispositivo quântico.