Que matrizes representam operadores quânticos válidos?

Adenilton Silva

Seção 1

Introdução

- $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido.
- $\tilde{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido?

$$\tilde{H}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) =$$

- $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido.
- $\tilde{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido?

$$\tilde{H} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

- $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido.
- $\tilde{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é um operador quântico válido?

$$\tilde{H} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \vec{0}$$

Seção 2

Operadores quânticos devem preservar a norma dos vetores!

Operadores unitários

$$\| \, |v\rangle \, \|^2 = |v\rangle^\dagger \cdot |v\rangle = \langle v|v\rangle$$

Operadores unitários

$$\| \, |v\rangle \, \|^2 = |v\rangle^\dagger \cdot |v\rangle = \langle v|v\rangle$$

$$\| U \, |v\rangle \, \|^2 = (U \, |v\rangle)^\dagger \cdot U \, |v\rangle = \langle v|U^\dagger U|v\rangle$$

Operadores unitários

$$\| \, |v\rangle \, \|^2 = |v\rangle^\dagger \cdot |v\rangle = \langle v|v\rangle$$

$$\| U \, |v\rangle \, \|^2 = (U \, |v\rangle)^\dagger \cdot U \, |v\rangle = \langle v|U^\dagger U|v\rangle$$

- Se $U \cdot U^\dagger = I$, então $\| \, |v\rangle \, \| = \| U \, |v\rangle \, \|$

Operadores unitários

$$\| \left|v\right\rangle \|^2 = \left|v\right\rangle^\dagger \cdot \left|v\right\rangle = \langle v|v\rangle$$

$$\| U \left|v\right\rangle \|^2 = (U \left|v\right\rangle)^\dagger \cdot U \left|v\right\rangle = \langle v|U^\dagger U|v\rangle$$

- Se $U \cdot U^\dagger = I$, então $\| \left|v\right\rangle \| = \| U \left|v\right\rangle \|$
- Um operador U é **unitário** se $U \cdot U^\dagger = I$
- Todo operador quântico sobre um qubit pode ser representado por uma matriz unitária 2×2

Seção 3

Exemplos de operadores quânticos

Exemplos de operadores quânticos sobre um qubit

Matrizes de Pauli

$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$	$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
$X \lvert 0 \rangle = \lvert 1 \rangle$	$Y \lvert 0 \rangle = -i \lvert 1 \rangle$	$Z \lvert 0 \rangle = \lvert 0 \rangle$
$X \lvert 1 \rangle = \lvert 0 \rangle$	$Y \lvert 1 \rangle = i \lvert 0 \rangle$	$Z \lvert 1 \rangle = - \lvert 1 \rangle$
$-\boxed{X}-$	$-\boxed{Y}-$	$-\boxed{Z}-$

Exemplos de operadores quânticos sobre um qubit

$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
$H\|0\rangle = \frac{\|0\rangle + \|1\rangle}{\sqrt{2}}$	$S\|0\rangle = \|0\rangle$
$H\|1\rangle = \frac{\|0\rangle - \|1\rangle}{\sqrt{2}}$	$S\|1\rangle = i\|1\rangle$
	

Exemplos de operadores quânticos sobre um qubit

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta/2) & -isen(\theta/2) \\ -isen(\theta/2) & cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta/2) & -sen(\theta/2) \\ sen(\theta/2) & cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix}$$

Exercício

- Mostre que todo operador quântico sobre um qubit pode ser escrito como $U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta)$.

$$U = \begin{bmatrix} e^{i(\alpha-\beta/2-\delta/2)} cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) & -e^{i(\alpha-\beta/2+\delta/2)} sen\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ e^{i(\alpha+\beta/2-\delta/2)} sen\left(\frac{\gamma}{2}\right) & e^{i(\alpha-\beta/2+\delta/2)} cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Exercício

- Mostre que

$$\text{se}\quad \begin{array}{l} U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta) \\ A = R_z(\beta) R_y(\gamma/2) \\ B = R_y(-\gamma/2) R_z(-(\delta+\beta)/2) \\ C = R_z((\delta-\beta)/2) \end{array}\ ,$$

então $ABC = I$ e $AXBXC = U$

Decomposição espectral

Todo operador quântico U pode ser escrito como $U = \sum_a a\,|a\rangle$, onde a é o autovalor associado ao autovetor $|a\rangle$.

Funções de operadores

Seja $A = \sum_a |a\rangle$ a decomposição espectral de um operador A, então $f(A) = \sum_a f(a) |a\rangle$

Exercício

Determine $\sqrt{H}$ e $\sqrt{Z}$