L'essentiel

- **Une unité de traitement numérique** réalise sur les nombres d'une séquence des opérations élémentaires d'addition (ou de soustraction), de multiplication par une constante et de retard (décalage temporel d'un ou plusieurs échantillons).

- À **tout traitement numérique linéaire** sur des séquences de nombres, on peut associer une équation de récurrence qui permet de calculer la séquence de sortie $\{y_n\}$ à partir des séquences d'entrée $\{x_n\}$ et de sortie antérieure $\{y_{n-1}\}$:

$$y_n = a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \ldots + b_1y_{n-1} + b_2y_{n-2} + \ldots.$$

- **Si l'échantillon y_n de sortie dépend** exclusivement des échantillons d'entrée x_n, x_{n-1}, x_{n-2},..., l'algorithme est dit non récursif.

- **Si l'échantillon y_n de sortie dépend** des échantillons antérieurs de sortie y_{n-1}, y_{n-2}, ..., l'algorithme est dit récursif.

- **Les approximations suivantes des dérivées** première et seconde permettent de passer de l'équation différentielle modélisant le système à son équation de récurrence :

$$\frac{dy(nT_E)}{dt} \leftrightarrow \frac{y_n - y_{n-1}}{T_E} \qquad \frac{d^2y(nT_E)}{dt^2} \leftrightarrow \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{T_E^2}.$$

- **La transformée en z d'une séquence de nombres $\{x_n\}$** est un outil particulièrement adapté à l'étude des systèmes échantillonnés :

$$X(z) = x_0 + x_1z^{-1} + x_2z^{-2} + \ldots + x_nz^{-n} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} x_nz^{-n}.$$

- **Un retard d'une période d'échantillonnage** correspond à une multiplication par z^{-1}.

- **La fonction de transfert $H(z)$ d'un système échantillonné** est égale au rapport de la transformée en z de la séquence de sortie et de la transformée en z de la séquence d'entrée : $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$.

- **Les réponses d'un système échantillonné** à une séquence de type impulsion unité et une séquence de type échelon sont appelées respectivement réponse impulsionnelle et réponse indicielle.

- **La fonction de transfert $H(z)$** d'un système échantillonné est égale à la transformée en z de sa réponse impulsionnelle.

QCM

Pour chaque question, indiquez la ou les bonnes réponses.

1 On échantillonne, à partir de la date $t = 0$ s et à la fréquence $f_E = 4$ kHz, un signal $x(t) = 2\cos(2\pi ft)$ avec $f = 1$ kHz.

- ❑ **a)** $x_0 = 0$.
- ❑ **b)** Pour tout n impair, $x_n = 0$.
- ❑ **c)** $f_E = 4$ kHz est la plus petite fréquence d'échantillonnage compatible avec le critère de Shannon.

2 On considère $X(z) = \dfrac{3z+1}{z-1}$, la transformée en z d'une séquence $\{x_n\}$.

- ❑ **a)** Pour $n \geq 0$, x_n vérifie l'expression $x_n = 3u_n + \delta_n$.
- ❑ **b)** La valeur initiale x_0 est égale à 3.
- ❑ **c)** La valeur finale $x_F = \lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

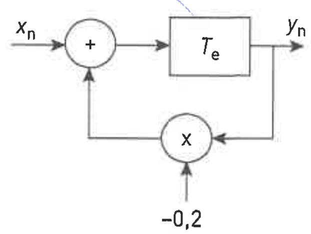
3 Un système échantillonné est décrit par l'équation : $y_n = 4x_n - x_{n-2}$.

- ❑ **a)** Il s'agit d'un algorithme récursif.
- ❑ **b)** La fonction de transfert correspondante est $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = 4z^2 - 1$.
- ❑ **c)** La séquence {4, 0, −1, 0, 0, ...} correspond à sa réponse impulsionnelle.

4 Un système échantillonné est caractérisé par sa transmittance $H(z) = \dfrac{z+3}{2z-1}$.

- ❑ **a)** L'équation de récurrence de ce système est : $y_n = 0{,}5(x_n - y_{n-1})$.
- ❑ **b)** Il s'agit d'un système de type non récursif.
- ❑ **c)** L'équation de récurrence de ce système est : $y_n = 0{,}5(x_n + y_{n-1}) + 1{,}5x_{n-1}$.

5 Un système est caractérisé par la structure suivante :



- ❑ **a)** $y_n = x_n - 0{,}2y_{n-1}$.
- ❑ **b)** sa réponse impulsionelle est {0 ; 1 ; −0,2 ; 0 ; 0 ; ...}.
- ❑ **c)** sa transmittance est $H(z) = \dfrac{1}{z+0{,}2}$.

Exercice résolu — Système numérique du second ordre

Un moteur asynchrone alimenté par un onduleur est asservi numériquement en vitesse. Le cadencement du calcul se fait à une fréquence $f_E = 20$ kHz et le système étudié est identifiable à un système du second ordre numérique, modélisable par l'équation de récurrence suivante :

$$s_n = 1{,}921s_{n-1} - 0{,}9238s_{n-2} + 0{,}0028e_n$$

où e_n et s_n correspondent respectivement aux valeurs, à l'instant nT_E, de la consigne et de la fréquence de rotation du moteur toutes deux exprimées en tr/min.