2. Préciser les valeurs de a pour lesquelles le filtre est stable. Pour la suite d
l'exercice, on prendra $a = 0{,}5$.

3.1 Pour $0 \leq n \leq 5$, représenter la réponse indicielle unitaire du filtre à un
séquence d'entrée $\{x_n\}$ telle que $x_n = 1$ pour tout $n \geq 0$ et $x_n = 0$ pour $n < 0$.

3.2 À quel type de réponse analogique peut-on rapprocher cette répons
indicielle ? En déduire la nature (passe-bas, passe-haut, passe-bande) d
filtre réalisé et préciser la valeur de son amplification statique H_0.

4. La séquence d'entrée est désormais constituée des échantillons x_n prélevés,
la fréquence $f_E = 2$ kHz et à partir de la date $t = 0$ s, sur le signal $x(t) = \sin(2\pi f$
avec $f_1 = 0{,}1 f_E$.

4.1 Déterminer l'expression de $x_n = x(nT_E)$.

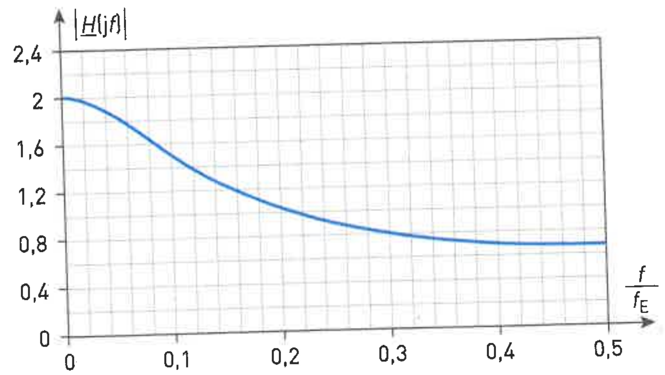
4.2 À l'aide d'un tableur, calculer, pour $0 \leq n \leq 19$, les échantillons y_n disponibl
en sortie du filtre.

4.3 Représenter, pour $0 \leq n \leq 19$, les échantillons x_n et y_n.

4.4 En déduire l'amplification H_1 introduite par le filtre à la fréquence f_1 lorsqu
le régime permanent est établi.

5.1 Établir l'expression de la fonction de transfert complexe $\underline{H}(jf)$ et montrer qu
son module peut s'écrire : $\left|\underline{H}(jf)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1{,}25 - \cos\left(2\pi \dfrac{f}{f_E}\right)}}$.

5.2 $\left|\underline{H}(jf)\right|$ varie en fonction de la fréquence réduite $\dfrac{f}{f_E}$ comme suit :



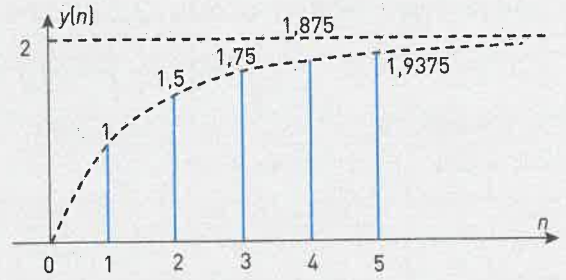
Déterminer la fréquence de coupure à –3 dB du filtre.

Correction

1. On a $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{1}{z-a} = \dfrac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$ donc $Y(z) - az^{-1}Y(z) = z^{-1}X(z)$. L'opérateur
représentant un retard d'un échantillon, on en déduit l'équation de récurren
du filtre : $y_n = x_{n-1} + ay_{n-1}$. Il s'agit d'un filtre récursif car y_n dépend de y_{n-1}.

2. $H(z)$ ne présente qu'un seul pôle réel : $z_1 = a$. Par conséquent, le filtre est stable si $|a| < 1$.

3.1 L'équation de récurrence permet de déterminer la réponse indicielle suivante du filtre:



3.2 On retrouve une réponse analogue à celle d'un système analogique de type passe-bas (courbe en pointillés) d'amplification statique $H_0 = 2$.

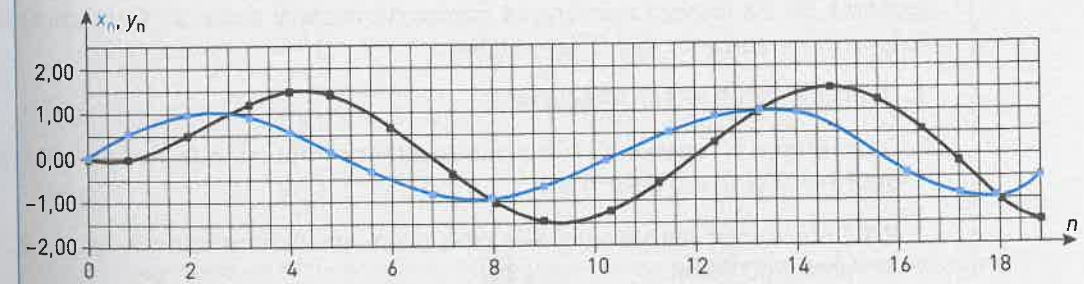
4.1 On a : $x_n = x(nT_E) = \sin(2\pi f_1 T_E n) = \sin(2\pi.0{,}1f_E.T_E n) = \sin(0{,}2\pi n)$.

4.2 L'équation de récurrence du filtre permet de déterminer les valeurs de y_n suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_n	0	0	0,59	1,24	1,57	1,37	0,69	–0,24	–1,07	–1,49

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y_n	–1,33	–0,67	0,25	1,08	1,49	1,33	0,67	–0,25	–1,08	–1,49

4.3



4.4 À la fréquence f_1, l'amplification introduite en régime établi par le filtre est $H_1 = \dfrac{Y_{max}}{X_{max}} = \dfrac{1{,}5}{1} = 1{,}5$.

5.1 En effectuant le changement de variable $z = e^{j\omega T_E}$, avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation du signal d'entrée et T_e la période d'échantillonnage, on a :
$\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{e^{j\omega T_E} - 0{,}5} = \dfrac{1}{\cos(\omega T_E) - 0{,}5 + j\sin(\omega T_E)}$.