

TRABALHO FINAL DE MATEMÁTICA DISCRETA – 2023.1

Esse trabalho final consiste em solucionar as questões destacadas do livro Fundamentos da Matemática Discreta de David J. Hunter.

Nas questões de implementação, deverão ser realizados testes com diferentes valores dos parâmetros. Além disso, a linguagem de implementação deverá ser C/C++ e não poderão ser utilizadas bibliotecas prontas. Trabalhos que forem implementados em outras linguagens terão nota atribuída como zero. Bibliotecas gráficas para plotagem dos gráficos são permitidas, assim como a utilização de Excel, Java, Python para tal fim.

Entrega: Código fonte do trabalho e o relatório contendo no máximo 5 páginas. O arquivo a ser enviado deverá ser no formato .ZIP com nome dado:

NOMESOBRENOMEALUNO1-NOMESOBRENOMEALUNO2.ZIP

Data de entrega: 29/06/2023 até às 16:59h (após esse horário a nota será automaticamente zero).

O trabalho pode ser realizado em **DUPLA**.

Referência: [1] Hunter, D.J. Fundamentos da Matemática Discreta. LTC, 2011.

Descrição das Questões

para as seguintes cadeias na gramática?

Exemplo 6.17:

enquanto Ana pula.
corre ou ele nada.

e ou Ana nada ou Silas salta.
pula enquanto ela corre ou Silas salta
cai.

derivação no Exercício 10, desenhe a correspondente.

gramática que contenha ambas as construções “então” e “ou ... ou”. Mostre uma derivação que use ambas as construções.

que toda linguagem que é reconhecida pelo autômato deve ser uma linguagem terminal. (Prove esse fato.) Explique por que a afirmação é falsa.

Construa um autômato de palavras que aceita certo tipo de frases, como por exemplo nomes de pessoas, rótulos de advertência, operadores de marketing etc.

Em Hauser et al. [12], os autores argumentam que o uso da recursão é uma característica humana. Leia esse artigo. Projete um experimento para testar a hipótese de que os humanos entendem recursão. Teste esse experimento e publique os resultados.

Faça experiências com tradutores automáticos da internet, seja traduzindo texto para uma linguagem que você conhece, seja traduzindo de uma linguagem intermediária. Que estruturas gramaticais o programa tende a traduzir? Que estruturas ele não traduz de maneira adequada?

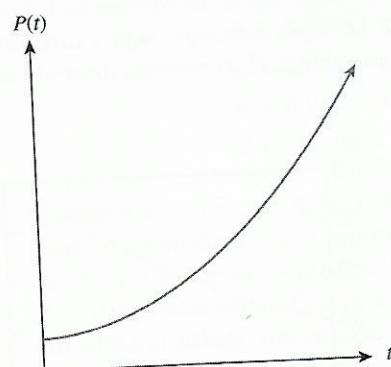
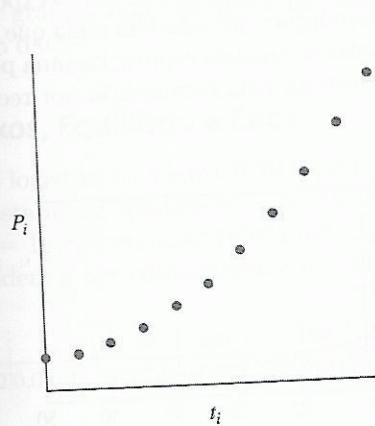
maneira apropriada? Dê um palpite de como o programa funciona.

6.4 Modelos Populacionais a Tempo Discreto

Nesta seção vamos explorar como ideias de partes anteriores do livro podem explicar como populações mudam com o tempo. O estudo de crescimento populacional se aplica em muitas disciplinas: sociologia e economia (populações humanas), biologia e medicina (organismos ou doenças em populações), química e física (populações de partículas ou substâncias) e assim por diante.

Se você já cursou Cálculo, provavelmente viu alguns modelos de crescimento populacional usando equações diferenciais. Esses tipos de modelos são chamados de modelos a *tempo contínuo*, porque eles consideram que o tempo t passa de maneira contínua; o modelo tenta prever o tamanho da população em qualquer tempo t em um intervalo aberto de números reais. Essa abordagem tem a vantagem de admitir soluções *analíticas*. Você pode usar integrais para encontrar a fórmula de uma função $P(t)$ que descreve a população em termos de t .

Porém calcular integrais analiticamente pode ser bastante difícil, e às vezes mesmo impossível. Assim, aqui iremos evitar o uso de cálculo usando *modelos a tempo discreto*. No lugar de considerar o tempo como uma variável contínua, o veremos como uma sequência t_0, t_1, t_2, \dots de “instantâneos” regulares, em que $t_i - t_{i-1} = \Delta t$ é um incremento fixo de tempo. Quanto menor for Δt , mais nosso modelo se aproximarará de um modelo a tempo contínuo. Graficamente, um modelo a tempo discreto irá produzir uma sequência de pontos, enquanto



Um modelo a tempo discreto produz uma sequência de pontos $(t_0, P_0), (t_1, P_1), (t_2, P_2), \dots$ (à esquerda), enquanto um modelo a tempo contínuo resulta em uma função $P(t)$ definida sobre um intervalo real (à direita).

um modelo a tempo contínuo resulta em uma função $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Veja a Figura 6.18.

Você pode estar preocupado que modelos a tempo discreto podem não ser realistas. Mas na prática muitos modelos a tempo contínuo não podem ser resolvidos sem recorrer a algum tipo de método numérico (como o método de Euler), e esses métodos geralmente fornecem aproximações quebrando o tempo em intervalos discretos. De fato, uma solução numérica para um modelo a tempo contínuo é na verdade uma aproximação a tempo discreto.

A abordagem a tempo discreto tem a vantagem de permitir que usemos pensamento relacional e recursivo para entender dinâmica de populações. Além disso, modelos a tempo discreto são naturais de serem implementados em um computador, assim gráficos e simulações são fáceis de ser produzidos.

6.4.1 Modelos Recursivos para Crescimento Populacional

O crescimento populacional é um fenômeno recursivo. A observação fundamental é que a população de amanhã depende (pelo menos em parte) da população de hoje. Em outras palavras, a população P_n depende das populações P_{n-1} , P_{n-2} etc. Essa observação resulta na seguinte definição recursiva geral:

$$P_n = \begin{cases} \text{a população inicial} & \text{se } n = 0 \\ \text{alguma função dos } P_i \text{ com } i < n & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Na verdade, essa definição recursiva nada mais é do que uma relação de recorrência, em notação ligeiramente diferente. Usamos P_n para indicar a população no tempo $t_n = n\Delta t$, para $n \geq 0$. Usamos subscritos porque a alternativa, $P(n)$, poderia dar a (falsa) impressão de que estamos falando na população no tempo n .

Exemplo 6.18 Já discutimos antes um modelo a tempo discreto de crescimento de populações: os coelhos de Fibonacci (Capítulo 3). Na notação anterior, seja t medido em meses, com $\Delta t = 1$ mês. Seja P_n o número de coelhos

existentes no tempo $t_n = n\Delta t = n$. Então podemos reescrever a Definição 3.1 da seguinte maneira:

$$P_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ P_{n-1} + P_{n-2} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Se você está atento, pode ter percebido que nessa definição começamos indexando os números de Fibonacci em 0, enquanto na Definição 3.1 a indexação começa em 1. Em geral, faz mais sentido para um modelo de população começar no tempo $t = 0$, de modo que t possa representar o tempo decorrido.

Exemplo 6.19 Um modelo muito útil para crescimento populacional provém da hipótese de que, em cada passo, a população aumenta por um fator constante $r > 0$. Em outras palavras,

$$P_n = \begin{cases} A & \text{se } n = 0 \\ rP_{n-1} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

em que A é a população no tempo $t = 0$. Vimos relações de recorrência similares no Capítulo 3. É fácil provar por indução que a população no tempo $t_n = n\Delta t$ é $P_n = Ar^n$. Esse modelo *exponencial* de população se aplica a uma ampla série de situações; nós o vimos aplicado a juros compostos no Exemplo 3.3.

A constante r é chamada um *parâmetro*. Podemos mudar o comportamento do modelo escolhendo valores diferentes do parâmetro r . Para $r > 1$, $P_n = Ar^n$ aumenta sem limite à medida que o tempo cresce (isto é, $P_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$). Tal escolha de parâmetro modela um *crescimento exponencial*. Por outro lado, escolhendo o parâmetro $r < 1$ obtemos um comportamento inteiramente diferente: $P_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, modelando *decaimento exponencial*. A Figura 6.19 ilustra a diferença entre crescimento ($r = 1,03$) e decaimento ($r = 0,97$) para uma população inicial $A = 25$.

O modelo de crescimento exponencial se ajusta bem a populações que não têm nada que as impeça de crescer. O próximo modelo representa uma população cujo tamanho é restrito pela competição por recursos limitados.

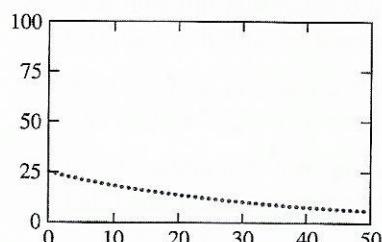
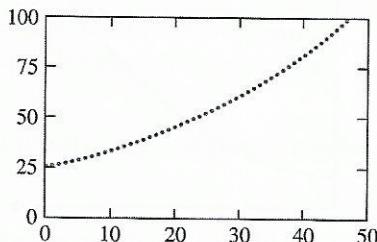


Figura 6.19 Os gráficos de P_n em função de n para o modelo exponencial com $A = 25$ e $0 \leq n \leq 50$. O gráfico da esquerda mostra crescimento exponencial com $r = 1,03$, enquanto o gráfico da direita mostra decaimento exponencial com $r = 0,97$.

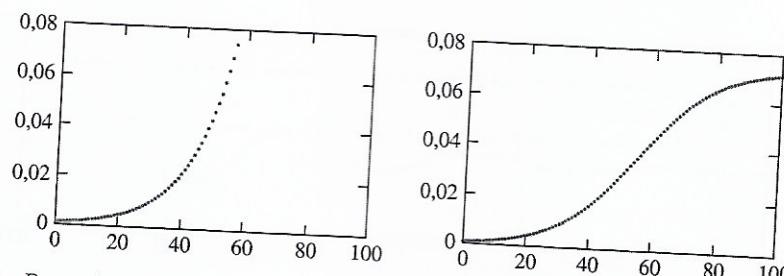


Figura 6.20 Gráficos de P_n em função de n para os modelos exponencial (à esquerda) e logístico (à direita) de crescimento populacional. Para ambos os modelos, $A = 0,001$ e $r = 1,08$.

Exemplo 6.20 Seja P_n dada pela seguinte fórmula:

$$P_n = \begin{cases} A & \text{se } n = 0 \\ rP_{n-1}(1 - P_{n-1}) & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Aqui, $0 \leq A \leq 1$ e $0 \leq r \leq 4$. Fica como exercício mostrar que essas condições garantem que $0 \leq P_n \leq 1$ para todo $n \geq 0$. Como P_n nunca pode exceder 1, podemos considerar P_n representando a porcentagem de uma população máxima fixa no tempo $n\Delta t$. Esse modelo é frequentemente chamado de modelo *logístico* de população.

A definição recursiva no Exemplo 6.20 é muito similar à do Exemplo 6.19; a única diferença é a presença do termo $(1 - P_{n-1})$. Esse fator fica pequeno à medida que P_n se aproxima de 1, assim ele pode modelar um fenômeno que restringe o crescimento para populações grandes, como competição por comida ou *habitat*.

A Figura 6.20 mostra uma comparação entre esses dois modelos para $A = 0,001$ e $r = 1,08$. Perceba que, para pequenos valores de n (até aproximadamente $n = 40$), os dois modelos produzem resultados bem similares. Porém, à medida que n aumenta, o modelo exponencial continua a aumentar mais e mais rápido, enquanto o crescimento do modelo logístico começa a estacionar. Aparentemente, o termo $(1 - P_{n-1})$ começa a ter um efeito perceptível no gráfico uma vez que a população ultrapassa algo como 0,02.

6.4.2 Pontos Fixos, Equilíbrio e Caos

O gráfico do modelo logístico na Figura 6.20 sugere que a população pode estabilizar quando $n \rightarrow \infty$. De fato, para $A = 0,001$ e $r = 1,08$, a seguinte tabela indica que os valores de P_n tendem a aproximadamente 0,0741.

n	0	1	2	3	...	99	100	...	199	200
P_n	0,001	0,0011	0,0012	0,0013	...	0,0721	0,0723	...	0,0741	0,0741

A definição a seguir ajudará a explicar esse fenômeno.

Definição 6.14 Seja $f: X \rightarrow X$ uma função. Um elemento $a \in X$ é chamado um *ponto fixo* se $f(a) = a$.

Dada uma função $f(x)$, podemos encontrar os pontos fixos resolvendo a equação $f(a) = a$.

Exemplo 6.21 Encontre os pontos fixos de $f(x) = x^2$, uma função $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Solução: As únicas soluções da equação $a^2 = a$ sobre os números reais são $a = 0$ e $a = 1$, portanto esses são os pontos fixos. ◇

Agora considere o modelo logístico com $A = 0,001$ e $r = 1,08$. A parte recursiva da definição de P_n expressa que

$$P_n = 1,08P_{n-1}(1 - P_{n-1}) \text{ se } n > 0.$$

Em outras palavras, dado P_{n-1} para $n > 0$, podemos calcular P_n avaliando a função

$$f(x) = 1,08x(1 - x)$$

em $x = P_{n-1}$. O modelo logístico é um tipo de *sistema de função iterada*, pois a sequência que ele gera pode ser obtida aplicando repetidamente a função f . Os pontos fixos dessa função são fáceis de ser calculados.

$$\begin{aligned} x &= 1,08x(1 - x) \\ x &= 1,08x - 1,08x^2 \\ 0 &= 0,08x - 1,08x^2 \\ 0 &= x(0,08 - 1,08x) \end{aligned}$$

Portanto $x = 0$ e $x = 0,08/1,08 \approx 0,0741$ são os pontos fixos. Faz sentido que o comportamento a longo prazo do modelo estabilize no ponto fixo 0,0741, pois, uma vez que P_{n-1} atinge esse valor, P_n será o mesmo que P_{n-1} . Quando um sistema atinge um estado em que a população não muda mais, dizemos que ele está em *equilíbrio*.

Encontrar pontos fixos de um sistema de função iterada pode às vezes dar uma pista a respeito do comportamento a longo prazo. Porém, em geral, os

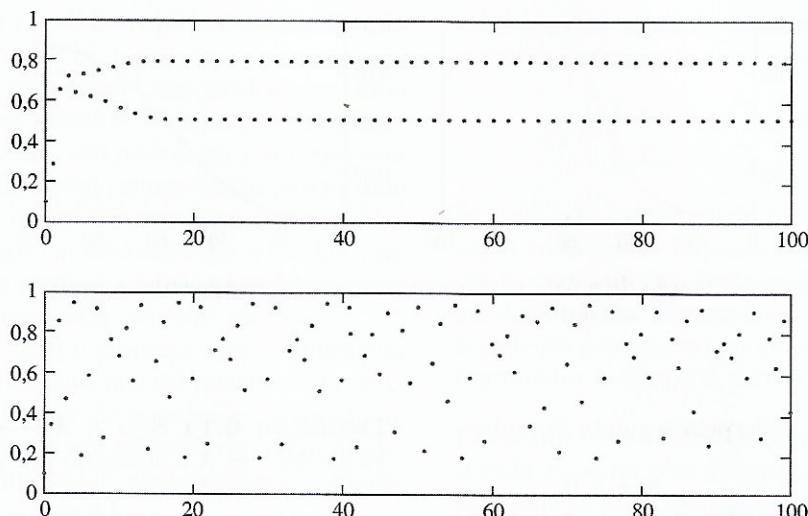


Figura 6.21 Dois gráficos de P_n em função de n para o modelo logístico com $A = 0,1$. O gráfico de cima mostra uma sequência periódica no caso $r = 3,2$, enquanto o gráfico de baixo mostra uma sequência caótica para $r = 3,8$.

pontos fixos não contam toda a história. A Figura 6.21 mostra dois gráficos do modelo logístico em que a população deixa de convergir para um único ponto fixo. O gráfico de cima mostra o que acontece quando $r = 3,2$ e $A = 0,1$. Uma inspeção cuidadosa do gráfico revela que, uma vez que n é maior que 20, o valor de P_n se alterna entre dois valores: aproximadamente 0,8 e 0,5. Dizemos que o comportamento a longo prazo desse sistema é *periódico*.

O gráfico de baixo mostra um comportamento bastante diferente para $r = 3,8$ e $A = 0,1$. Como não há padrão óbvio para essa sequência, ela pode ser chamada de *caótica*. O estudo do caos é profundo e fascinante; sistemas caóticos podem explicar muitos fenômenos aparentemente aleatórios na natureza.

6.4.3 Sistemas Predador–Presa

O paradigma recursivo de modelagem de populações se estende naturalmente para sistemas de diversas populações inter-relacionadas. A relação entre predadores e suas presas é um exemplo clássico. O predador (tradicionalmente representado por raposas) depende de sua presa (tradicionalmente coelhos) para comida, enquanto a sobrevivência da presa é limitada pelo sucesso do predador. Essa competição é naturalmente autorrefrente, isto é, recursiva.

Exemplo 6.22 Seja F_n a população de um predador (raposas), e seja R_n a população de sua presa (coelhos). Sejam dados os valores iniciais R_0 e F_0 . Para $n > 0$, sejam R_n e F_n dados pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} R_n = rR_{n-1}(1 - R_{n-1}) - aR_{n-1}F_{n-1} \\ F_n = F_{n-1} + bR_{n-1}F_{n-1} - cF_{n-1} \end{cases}$$

O parâmetro r é o fator de crescimento da população de coelhos. Perceba que se não houvesse raposas ($F_n = 0$ para todo n), estariam assumindo que a população de coelhos seguiria o modelo logístico. Assim, as restrições em R_0 e r são as mesmas que no Exemplo 6.20, a saber, $0 \leq R_0 \leq 1$ e $0 \leq r \leq 4$.

Por outro lado, estamos assumindo que as raposas dependem dos coelhos para sua alimentação. Na ausência de coelhos ($F_n = 0$ para todo n), a população de raposas irá se extinguir. Portanto o parâmetro c é a taxa de morte associada. Escolhendo $0 < c \leq 1$, garantimos que a população de raposas decairá exponencialmente na ausência de coelhos.

Para entender os parâmetros a e b , recorde que o número de maneiras de formar um par coelho/raposa de R coelhos e F raposas é RF , pelo princípio da multiplicação. Portanto, o número de eventos de predação (raposas comendo coelhos) deve ser proporcional a $R_{n-1}F_{n-1}$. O parâmetro a mede o quanto eficientes são as raposas em comer coelhos; é por isso que o termo $aR_{n-1}F_{n-1}$ é subtraído da população de coelhos em cada etapa. Analogamente, o termo $bR_{n-1}F_{n-1}$ é adicionado à população de raposas a cada etapa, assim o parâmetro b mede o grau segundo o qual comer coelhos impede as raposas de morrer de fome.

Não fomos muito cuidadosos a respeito das unidades associadas a esses quatro parâmetros; na prática, deve-se modificar os parâmetros ou redimensionar os tamanhos de população para que o modelo se ajuste a observações empíricas.

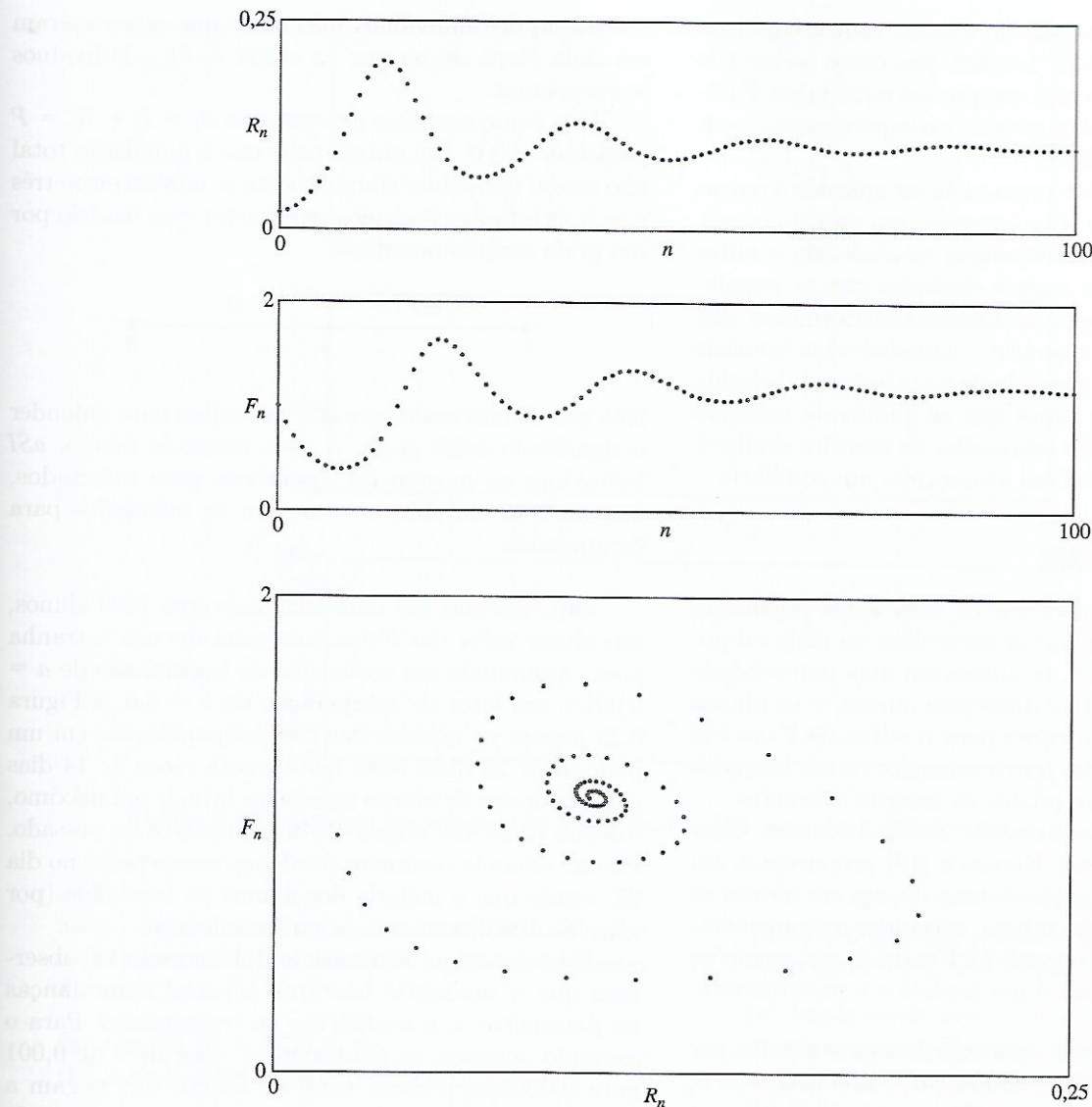


Figura 6.22 Gráficos de R_n contra n , F_n contra n e F_n contra R_n para o modelo predador-presa.

A Figura 6.22 mostra o comportamento desse sistema quando $R_0 = 0,02$, $F_0 = 1$, $r = 1,5$, $a = 0,3$, $b = 2$, $c = 0,2$ e $0 \leq n \leq 100$. Os dois gráficos de cima mostram como as populações de raposas e coelhos mudam com o tempo. Note que ambas as populações aumentam e diminuem, com os picos da população de raposas ocorrendo logo após os picos da população de coelhos. Isso parece correto intuitivamente: as raposas se dão bem quando há muitos coelhos, mas então os coelhos são comidos, então as raposas passam por um tempo difícil até que os coelhos começem a se recuperar e assim por diante.

Para essa escolha de parâmetros, parece que ambas as populações estão convergindo para certos valores de equilíbrio. O gráfico de F_n contra R_n na Figura 6.22 mostra como os pares ordenados (R_n, F_n) espiralam rumo a esse ponto de equilíbrio quando $n \rightarrow \infty$.

Podemos calcular pontos fixos para o modelo predador-presa quase da mesma maneira que fizemos para modelo logístico. A principal diferença é que qualquer ponto fixo deve ser um par ordenado (x, y) , em que x é a quantidade de coelhos e y é a quantidade de raposas. Podemos considerar a definição recursiva do Exemplo 6.22 um sistema de função iterada de x e y , e assim os pontos fixos devem satisfazer o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x = 1,5x(1-x) - 0,3xy \\ y = y + 2xy - 0,2y \end{cases}$$

Resolver esse sistema é um exercício fácil: os únicos pontos fixos são $(0, 0)$, $(1/3, 0)$ e $(1/10, 7/6)$. O primeiro é trivial, o segundo corresponde ao modelo logístico (se

raposas) e o terceiro está de acordo com o equilíbrio aparente da Figura 6.22. Lembre que, como no modelo logístico, pontos fixos nem sempre são equilíbrios. Parâmetros diferentes podem produzir comportamento oscilatório ou mesmo caótico.

O modelo predador-presa pode ser aplicado a outras relações competitivas. Por exemplo, um modelo econômico envolvendo uma tecnologia estabelecida e outra emergente pode ter a mesma dinâmica que as populações de coelhos e raposas abordadas anteriormente. [23] Uma tecnologia nova emergente (o predador) se beneficia invadindo a quota de mercado da tecnologia estabelecida (a presa). O modelo prevê que as quotas de mercado dessas duas tecnologias irão oscilar de maneira similar à da Figura 6.22 até no final alcançarem um equilíbrio.

6.4.4 O Modelo SIR

Frequentemente os membros de uma única população homogênea podem se mover entre duas ou mais subpopulações. Por exemplo, os alunos em uma universidade se dividem entre vários diferentes cursos, e os alunos podem mudar de um curso para o outro. O Exercício 20 da Seção 2.1 dá um outro exemplo: carros alugados podem se mover entre pontos de locação diferentes.

Em seu artigo seminal de 1927, Anderson Gray McKendrick e William Kermack [18] propuseram um modelo para a propagação de uma doença em termos de três subpopulações: suscetíveis, infectados e recuperados. O modelo SIR de Kermack-McKendrick usa equações diferenciais. O seguinte é um modelo a tempo discreto.

Exemplo 6.23 Suponha que uma doença se espalha por uma população de P indivíduos. No tempo $n\Delta t$, seja S_n o número de indivíduos que são suscetíveis de pegar a doença, seja I_n o número daqueles que estão infectados e seja R_n o número daqueles que se recuperaram da doença (e portanto estão imunizados). Vamos assumir que inicialmente alguns indivíduos foram infectados e nenhum se recuperou ainda, de modo que $0 < I_0 \leq P$, $R_0 = 0$ e $S_0 = P - I_0$. Para $n > 0$, sejam S_n , I_n e R_n dados pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} S_n = S_{n-1} - aS_{n-1}I_{n-1} \\ I_n = I_{n-1} + aS_{n-1}I_{n-1} - bI_{n-1} \\ R_n = R_{n-1} + bI_{n-1} \end{cases}$$

O parâmetro a é o coeficiente de transmissão; seu valor modela o quanto provável é que a doença seja transmitida quando um indivíduo infectado encontra um suscetível. Pela regra da multiplicação, o número de possíveis encontros suscetível/infectado é $S_{n-1}I_{n-1}$, logo o termo $aS_{n-1}I_{n-1}$ representa o número de indivíduos recém-infectados na etapa de tempo n . O parâmetro b

é a fração dos indivíduos infectados que se recuperam em cada etapa de tempo; na etapa n , bI_{n-1} indivíduos se recuperam.

Fica como exercício mostrar que $S_n + I_n + R_n = P$ para todo $n \geq 0$. Em outras palavras, a população total não muda; indivíduos simplesmente se movem entre três possíveis estados. Podemos representar esse modelo por um grafo simples orientado



Não precisamos realmente dos subscritos para entender o significado desse grafo. A cada etapa de tempo, aSI indivíduos se movem de suscetíveis para infectados, enquanto bI indivíduos se movem de infectados para recuperados.

Suponha que, em uma faculdade com 1200 alunos, um aluno volta das férias com uma doença estranha nova. Assumindo um coeficiente de transmissão de $a = 0,001$ e um fator de recuperação de $b = 0,6$, a Figura 6.23 mostra os gráficos das três subpopulações em um período de 25 dias. Note que demora cerca de 14 dias para o número de alunos infectados atingir seu máximo, e depois de 25 dias o surto da doença parece ter passado. Porém, olhando o número de alunos recuperados no dia 25, vemos que a maioria dos alunos da faculdade (por volta de 1000) terminou pegando a doença.

Em seu artigo, Kermack e McKendrick [18] observaram que o modelo é bastante sensível a mudanças no parâmetro a , o coeficiente de transmissão. Para o exemplo anterior, se mudarmos o valor de a de 0,001 para 0,0005, o número total de alunos que pegam a doença cai de 1000 para cerca de 50. Reduzir o coeficiente de transmissão de 50% acarreta uma redução de 95% no número total de casos. Essa observação matemática tem uma implicação importante em saúde pública: controlar — ainda que apenas um pouco — os fatores que causam a propagação de uma doença pode ter uma grande influência em se a doença se tornará uma epidemia ou não.

Exercícios 6.4

1. Escreva uma fórmula relacionando as sequências dadas pela Definição 3.1 e pelo Exemplo 6.18.
2. As substâncias radioativas decaem exponencialmente. Por exemplo, uma amostra de carbono-14 (^{14}C) vai perder metade de sua massa a cada 5730 anos. (Em outras palavras, a meia-vida do ^{14}C é 5730

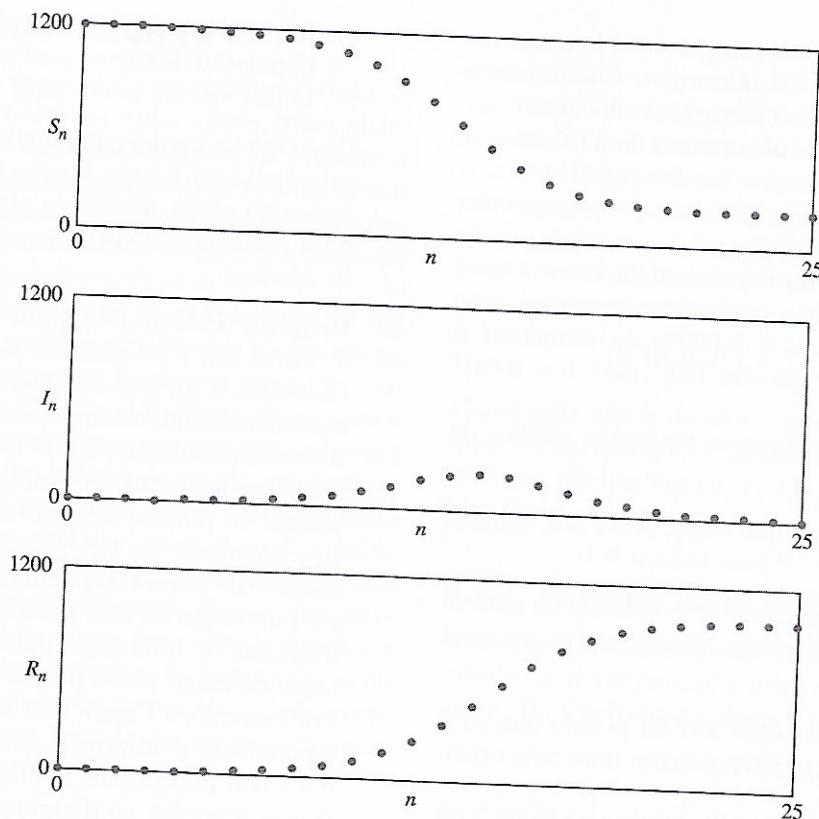


Figura 6.23 Gráficos das três populações no modelo SIR para $a = 0,001$; $b = 0,6$; $I_0 = 1$ e $P = 1200$.

anos.) Seja A a massa inicial da amostra. Modele o decaimento do ^{14}C usando um modelo a tempo discreto...

- (a) usando $\Delta t = 5730$ anos.
- (b) usando $\Delta t = 1$ ano.

3. Seja P_n definida como no Exemplo 6.20. Demonstre que $0 \leq P_n \leq 1$ para todo $n \geq 0$. (Dica: Use indução em n , e use o fato de que o valor mínimo de $f(x) = x - x^2$ no intervalo $[0,1]$ é $1/4$.)
4. Implemente o modelo logístico (Exemplo 6.20) usando uma planilha. Teste sua implementação recriando os gráficos da Figura 6.21. Usando $A = 0,1$, encontre um valor de r tal que P_n pareça alternar ciclicamente entre quatro valores diferentes quando $n \rightarrow \infty$.
5. Seja r uma constante com $0 < r < 1$. Encontre todos os pontos fixos (em termos de r) da função $f(x) = r(1 - x)$.
6. Considere o seguinte modelo de população a tempo discreto:

$$P_n = \begin{cases} A & \text{se } n = 0 \\ r(1 - P_{n-1}) & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Tanto a população inicial A quanto o parâmetro r estão entre 0 e 1, não inclusivo.

- (a) Implemente esse modelo em uma planilha, e experimente diferentes valores de r e A . Descreva o comportamento de longo prazo.
- (b) Seja x_∞ o ponto fixo que você encontrou no Exercício 5. Demonstre que

$$P_{n-1} \geq x_\infty \Rightarrow P_n \leq x_\infty \quad \text{e} \quad P_{n-1} \leq x_\infty \Rightarrow P_n \geq x_\infty.$$

- (c) Suponha que $P_{n-1} \neq x_\infty$. Demonstre que

$$|x_\infty - P_n| < |x_\infty - P_{n-1}|.$$

- (d) As partes (b) e (c) confirmam suas observações da parte (a)? Explique.

7. Encontre todas as soluções do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x = 1,5x(1-x) - 0,3xy \\ y = y + 2xy - 0,2y \end{cases}$$

8. Implemente o modelo SIR (Exemplo 6.23) []

- (a) Verifique sua implementação recriando os gráficos da Figura 6.23.

- (b) Experimente diferentes valores de I_0 , o número inicial de estudantes infectados. Como o valor de I_0 influencia a propagação da doença?
- (c) Experimente diferentes valores do parâmetro b , a taxa de recuperação. Lembre que $0 < b < 1$. Como este parâmetro afeta a propagação das doenças?
- (d) Para a situação do Exemplo 6.23, o que é mais eficiente: reduzir o coeficiente de transmissão em 10% (para $a = 0,0009$) ou aumentar a taxa de recuperação em 10% (para $b = 0,66$)? Explique.
- (e) Quais são as implicações em saúde pública da parte (d)?
9. No modelo SIR (Exemplo 6.23), prove por indução que $S_n + I_n + R_n = P$ para todo $n \geq 0$.
10. Explique por que em qualquer ponto fixo do modelo SIR o número de indivíduos infectados deve ser igual a zero.
11. No Exercício 20 da Seção 2.1, foi pedido que você modelasse a seguinte situação com uma rede orientada:

Uma companhia de aluguel de carros possui três filiais na Cidade do México: uma no Aeroporto Internacional, uma em Oficina Vallejo e outra no Centro da cidade. Os clientes podem deixar os veículos em qualquer uma das filiais. Com base em experiência prévia, a companhia espera que, ao fim de cada dia, 40% dos carros que começam o dia no Aeroporto irão terminar no Centro, 50% irão retornar ao Aeroporto e 10% estarão em Oficina Vallejo. Da mesma forma, 60% dos carros de Oficina Vallejo terminarão o dia no Centro, com 30% retornando à Oficina Vallejo e 10% ao Aeroporto. Finalmente, 30% dos carros do Centro terminarão em cada uma das outras localizações, com 40% permanecendo na filial do Centro.

Essa situação pode ser investigada usando-se um modelo de população a tempo discreto.

- (a) Indique por A_n , V_n e D_n o número de carros no Aeroporto, em Oficina Vallejo e no Centro, respectivamente, no dia n . Escreva um sistema de três equações (como no Exemplo 6.23) dando A_n , V_n e D_n como funções de A_{n-1} , V_{n-1} e D_{n-1} .
- (b) Suponha que inicialmente $A_0 = 1000$, $V_0 = 0$ e $D_0 = 0$. Use seu sistema de equações para calcular A_2 , V_2 e D_2 .
- (c) Resolva um sistema de três equações em três variáveis para encontrar todos os pontos fixos do sistema.

- (d) Implemente seu sistema em uma planilha. A população de carros para alugar parece se estabilizar em um ponto fixo?

Esse tipo de modelo de população — em que cada subpopulação é uma função linear das subpopulações na etapa de tempo anterior e a população total permanece constante — é chamado de *cadeia de Markov*.

12. **Projeto:** (Este projeto é uma extensão do Exercício 4. Parta daí.) No modelo logístico de população (Exemplo 6.20), valores diferentes de r dão origem a diferentes comportamentos a longo prazo. Quando $n \rightarrow \infty$, a população pode se estabilizar em um único ponto, pode alternar ciclicamente entre dois ou mais valores ou pode se comportar de maneira caótica. Um *diagrama de bifurcação* é um gráfico com o domínio de valores do parâmetro r no eixo horizontal e a população no eixo vertical. Um ponto (r, P) no diagrama de bifurcação indica que P é uma população de longo prazo para o valor r do parâmetro. Por exemplo, a Figura 6.21 sugere que para $r = 3,2$ a população se alterna ciclicamente entre os valores 0,8 e 0,5, portanto os pontos $(3,2; 0,8)$ e $(3,2; 0,5)$ devem aparecer no diagrama de bifurcação. Além disso, devemos esperar muitos pontos diferentes da forma $(3,8; P)$, já que o comportamento para $r = 3,8$ parece caótico.
- Usando uma planilha ou outro *software*, gere um diagrama de bifurcação para o Exemplo 6.20. O domínio no eixo horizontal deve ser $0 \leq r \leq 4$. Experimente criar diagramas de bifurcação de outros modelos de população.
13. **Projeto:** (Requer Cálculo.) Encontre uma discussão sobre o método de Euler em um livro-texto de Cálculo. Mostre que você pode substituir uma equação diferencial por um modelo a tempo discreto usando uma relação de recorrência. Encontre um exemplo específico e compare a solução que você encontra através do método de Euler com a solução do análogo a tempo discreto.
14. **Projeto:** Crie seu próprio modelo a tempo discreto para um conjunto de subpopulações para o qual você dispõe de dados. (Por exemplo, as subpopulações de diferentes cursos na sua universidade, ou a participação em diversas organizações.) Implemente seu modelo em um planilha. Faça experiências com os parâmetros do seu modelo para fazer com que ele se ajuste aos seus dados com uma precisão razoável. Use álgebra para encontrar os pontos fixos do seu modelo. Você pode fazer previsões baseadas no seu modelo?