Дано:

Температура стенки: $T_{ст} := 200\ K$

Начальная температура потока и теплопередающей стенки: $T_{нач} := 290\ K$

Температура потока на входе в теплообменник: $T_0 := 150\ K$

Длина поверхности теплообмена: $L := 10\ м$

Периметр теплообмена со стороны прямого потока: $П := 0.1\ м$

Площадь проходного сечения для потока: $S := 0.005\ м^2$

Массовый расход прямого потока: $G := 0.15\ \frac{кг}{с}$

Массовый расход обратного потока: *(его ведь нет)* $G_2 := 0.2\ \frac{кг}{с}$

Плотность материала теплопередающей стенки: $\rho_{ст} := 8000\frac{кг}{м^3}$

Площадь поперечного сечения теплопередающей стенки: $S_{ст} := 0.002\ м^2$

Зависимость теплоемкости потока: $C_{p1} = 0.7 + \frac{0.3}{T}\ \frac{кДж}{кг \cdot K}$

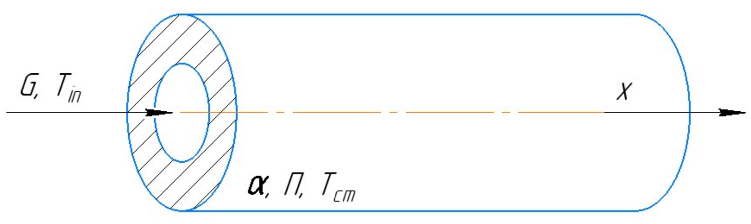
Зависимость теплопередающей стенки: $C_{ст} = 0.1 + 0.012 \cdot T \frac{кДж}{кг \cdot K}$

Плотность потока: $\rho_l = \frac{1200}{T}\ \frac{кг}{м^3}$

Коэффициент теплоотдачи со стороны прямого потока: $\alpha_1 = 33 + \frac{1000}{T}\ \frac{Вт}{м^2 \cdot K}$

Требуется: Рассчитать процесс охлаждения однопоточного теплообменника до средней температуры стенки, равной 200К методом сосредоточения параметров по координате (ступенчатое сосредоточение) и конечно-разностным методом. Построить зависимости от времени температуры потока на выходе из теплообменника и среднеинтегральной температуры стенки.

Вид однопоточного ТОА:



Метод ступенчатого сосредоточения:

Система уравнений для нестационарного случая имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \tau} + a\dfrac{\partial T}{\partial x} = b(T_{ст} - T_0) \\ \dfrac{\partial T_{ст}}{\partial \tau} = (T - T_{ст}) \end{cases}$$

Где $a = \dfrac{G \cdot T_0}{\rho_l \cdot S \cdot L}$ $b = \dfrac{\alpha \cdot П}{\rho \cdot S \cdot c_{p1}}$

$t_0 = \dfrac{\rho_{cm} \cdot S_{cm} \cdot C_{cm}}{\alpha \cdot П}$ $\tau = \dfrac{t}{t_0}$ $x = \dfrac{X}{L}$

Начальные условия: $T|_{\tau=0} = T_{нач}$ $T_{ст}|_{\tau=0} = T_{нач}$

Граничные условия: $T|_{x=0} = T_0$

Усредняем теплофизические параметры для средней температуры:

$T_{cp} := 200\ K$ (дана по условию) *Тогда*

$C_{p1} := 0.7 + \dfrac{0.3}{T_{cp}} = 0.702$ $C_{cm} := 0.1 + 0.012 \cdot T_{cp} = 2.5$

$\rho_l := \dfrac{1200}{T_{cp}} = 6$ $\alpha_1 := 33 + \dfrac{1000}{T_{cp}} = 38$ $\dfrac{Вт}{м2 \cdot K}$

Характерное время процесса:

$$t_0 := \frac{S_{cm} \cdot C_{cm} \cdot \rho_{cm}}{\alpha_1 \cdot П} = 10.526\ c$$

Коэффициенты:

$a := \dfrac{G \cdot T_0}{\rho_l \cdot S \cdot L} = 75$ $b := \dfrac{\alpha_1 \cdot П}{\rho_l \cdot S \cdot C_{p1}} = 180.565$

Поскольку коэффициенты a и b существенно больше 1, то исходная система упрощается отбрасыванием производной по времени в первом уравнении системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} = N(T_{cm} - T) \\ \dfrac{\partial T_{cm}}{\partial \tau} = T - T_{cm} \end{cases}$$

Где $N := \dfrac{b}{a} = 2.408$ - число единиц переноса теплоты

Поскольку число единиц переноса теплоты больше 1, то используется ступенчатое сосредоточение с определяющей температурой на выходе T' = T|x=1. После интегрирования получается система:

$$\begin{cases} T|_{x=1} - T_0 = N(\widetilde{T}_{cm} - \widetilde{T}) \\ \dfrac{d\widetilde{T}_{cm}}{d\tau} = \widetilde{T} - \widetilde{T}_{cm} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \widetilde{T} - T_0 = N(\widetilde{T}_{cm} - \widetilde{T}) \\ \dfrac{d\widetilde{T}_{cm}}{d\tau} = \widetilde{T} - \widetilde{T}_{cm} \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выражается

$$(1+N)\widetilde{T} = T_0 + N\widetilde{T}_{cm}$$

$$\widetilde{T} = \frac{T_0 + N\widetilde{T}_{cm}}{1+N}$$

И подставляется во второе уравнение системы. В итоге получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\widetilde{T}_{cm}}{d\tau} = \frac{T_0 - \widetilde{T}_{cm}}{1+N}$$

Среднеинтегральная температура потока – температура на выходе, имеет следующий вид:

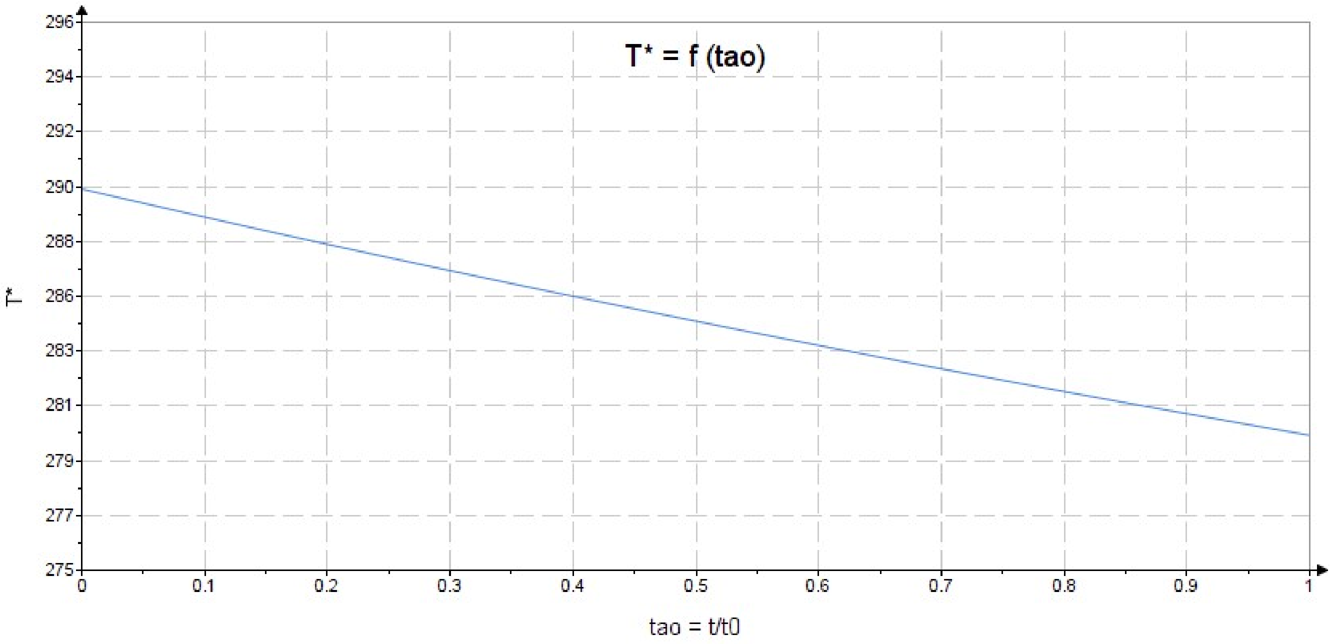
$$\widetilde{T} = \frac{T_0 + N(T_0 + (\widetilde{T}_{cm}^0 - T_0)e^{\frac{-\tau}{N+1}})}{1+N} = T_0 + \frac{N(\widetilde{T}_{cm}^0 - T_0)e^{\frac{-\tau}{N+1}}}{1+N}$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$T_{кон} = T_{нач} + \frac{N \cdot \left(T_{ст} - T_{нач}\right) e^{\frac{-\tau}{N+1}}}{1+N}$$

Ввод

$$X_1 := \tau \qquad Y_1 := T_{нач} + \frac{N \cdot \left(T_{нач} - T_{ст}\right) e^{\frac{-\tau}{N+1}}}{1+N}$$



Метод конечных разностей:

При использовании конечно-разностной схемы, учитывающей изменение теплофизических параметров, применяется следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} = N(T_{cm} - T) \\ \dfrac{\partial T_{cm}}{\partial \tau} = \beta(T - T_{cm}) \end{cases}$$

Коэффициенты в этих уравнениях определяются следующим образом:

$$N = \frac{\alpha_1 \cdot \Pi \cdot L}{G \cdot C_{p1}} = \frac{\left(33 + \dfrac{1000}{T}\right) \cdot 10 \cdot 0.1}{0.15 \cdot \left(0.7 + \dfrac{0.3}{T}\right)} = \frac{33\ \ T + 1000}{0.105\ \ T + 0.045}$$

$$\beta = \frac{\alpha \cdot \Pi \cdot t_0}{\rho_{cm} \cdot C_{cm} \cdot S_{cm}} = \frac{\left(33 + \dfrac{1000}{T}\right) \cdot 10 \cdot 11.677}{8000 \cdot 0.002 \cdot \left(0.1 + 0.012 \cdot T_{ct}\right)} = \frac{240.8\ \ T + 7300}{0.012\ \ T_{cm} \cdot T + 0.1\ \ T}$$

Неявная конечно-разностная схема для этой системы имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{\Delta x} = N_{i-1}^{j}(T_{cm,i-1}^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}), \\ i = 2,\ldots,n+1 \\ \dfrac{T_{cm,i}^{j+1} - T_{cm,i}^{j}}{\Delta \tau} = \beta_i^j (T_i^{j+1} - T_{cm,i}^{j+1}), i = 1,\ldots,n+1 \\ j = 1,\ldots,m \end{cases}$$

Поэтому коэффициенты определятся следующим образом: $\mathrm{ORIGIN} := 1$

$n := 15$ $m := 15$ $i := 1..n$ $j := 1..m$

$T_{i,j} := 0$ $T_{ct_{i,j}} := 0$

$T_{i,1} := \text{for } i \in 2..n \ \| \ 290$ $T_{1,1} := 150$ $T_{ct_{i,1}} := \text{for } i \in 1..n \ \| \ 290$

$$T = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad T_{ct} = \begin{bmatrix} 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$N_{i,1} := \frac{33\ T_{i,1} + 1000}{0.105\ T_{i,1} + 0.045} = \begin{bmatrix} 376.701 \\ 346.614 \\ 346.614 \\ 346.614 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \beta_{i,1} := \frac{240.8\ T_{i,1} + 7300}{0.012 \cdot T_{ct_{i,1}} \cdot T_{i,1} + 0.1\ T_{i,1}} = \begin{bmatrix} 80.857 \\ 74.294 \\ 74.294 \\ 74.294 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$\delta x := 0.2$ $\qquad\qquad$ $\delta t := 0.1$

$x := 0$ $\qquad\qquad$ $t := 0$

$$A := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 2..15 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} N \leftarrow \dfrac{33\ T_{i,j} + 1000}{0.105\ T_{i,j} + 0.045} \\ \beta \leftarrow \dfrac{240.8\ T_{i,j} + 7300}{0.012 \cdot T_{ct_{i,j}} \cdot T_{i,j} + 0.1\ T_{i,j}} \\ T_{ct_{i,j}} \leftarrow \dfrac{T_{ct_{i,j}} + \delta t \cdot \beta \cdot T_{i,j+1}}{1 + \delta t \cdot \beta} \\ T_{i,j} \leftarrow T_{i-1,j} + \delta x \cdot N \cdot \left(T_{ct_{i-1,j}} - T_{i-1,j} \right) \end{array} \right. \\ T_{ct} \end{array} \right.$$

$$A = \begin{bmatrix} 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 290 & 277.521 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 290 & 0 & 265.963 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 290 & 0 & 0 & 255.31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 245.539 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 236.625 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 228.538 & 0 & 0 & 0 & \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 221.242 & 0 & 0 & \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 214.696 & 0 & \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 208.854 & \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$B := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 2..15 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} N \leftarrow \dfrac{33\ T_{i,j} + 1000}{0.105\ T_{i,j} + 0.045} \\ \beta \leftarrow \dfrac{240.8\ T_{i,j} + 7300}{0.012 \cdot T_{ct_{i,j}} \cdot T_{i,j} + 0.1\ T_{i,j}} \\ T_{ct_{i,j}} \leftarrow \dfrac{T_{ct_{i,j}} + \delta t \cdot \beta \cdot T_{i,j+1}}{1 + \delta t \cdot \beta} \\ T_{i,j} \leftarrow T_{i-1,j} + \delta x \cdot N \cdot \left(T_{ct_{i-1,j}} - T_{i-1,j}\right) \end{array} \right. \\ T \end{array} \right.$$

$$B = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 276.298 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 263.825 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 252.539 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 242.389 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 233.321 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 225.274 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 218.178 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 211.964 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 206.555 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 290 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$C := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..15 \\ \quad \left\| C_i \leftarrow A_{i,i} \right. \\ C \end{array} \right. \qquad D := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..15 \\ \quad \left\| D_i \leftarrow B_{i,i} \right. \\ D \end{array} \right. \qquad \tau := \left\| \begin{array}{l} \tau_1 \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 2..15 \\ \quad \left\| \tau_i \leftarrow \tau_{i-1} + \dfrac{1}{14} \right. \\ \tau \end{array} \right.$$

Ввод

$X_1 := \tau \qquad X_2 := \tau \qquad Y_1 := C \qquad Y_2 := D$