№1

Рассчитаем дисперсию из приведенной формулы:

$$\sigma^2 = \left(\frac{\sigma_1^2}{n}\right) + \left(\frac{\sigma_2^2}{m}\right)$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{25}\right) + \left(\frac{0.5}{25}\right) = 0.06$$

$$\sigma = \sqrt{0.06} \approx 0.245$$

Чтобы построить доверительный интервал 1 - α, нам нужно найти значения a и b такие, что $P(a < \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \tau}{\sigma} < b) = 1 - \alpha$. Так как выражение $\frac{X - Y - \tau}{\sigma}$ имеет стандартное нормальное распределение, мы можем использовать стандартное нормальное распределение, чтобы найти a и b.

Для 95% доверительного интервала (α = 0.05) нормального распределения мы имеем a = -1,96 и b = 1,96. Таким образом, 95%-процентный доверительный интервал для τ задается формулой:

$$(\bar{X} - \bar{Y}) - b * \sigma < \mu 1 - \mu 2 < (\bar{X} - \bar{Y}) - a * \sigma$$

$$(\bar{X} - \bar{Y}) - 1.96 * 0.245 < \mu 1 - \mu 2 < (\bar{X} - \bar{Y}) + 1.96 * 0.245$$

*Остальное в коде

№2

Для построения асимптотического доверительного интервала уровня $1 - \alpha$ для параметра θ, будем использовать теорему об асимптотическом поведении крайних членов вариационного ряда.

Для этого мы берем выборку размера n из симметричного распределения относительно нуля, упорядочиваем элементы выборки и обозначаем через X_r r-ый элемент вариационного ряда, а через X_{n+1-s} (n+1-s)-ый элемент вариационного ряда.

Затем мы построим две статистики:

$$U_1 = nF(X_r) \sim \Gamma(r, 1);$$

$$U_2 = n(1 - F(X_{n+1-s})) \sim \Gamma(s, 1)$$

Для уровня доверия 1 − α мы найдем квантили порядка $\frac{\alpha}{2}$ для каждой из статистик: u_1, u_2.

Затем мы найдем такие значения θ_1 и θ_2 , что $P\left(\frac{U_1}{u_1} > \theta_1\right) = \frac{\alpha}{2}$ и $P\left(\frac{U_2}{u_2} > \theta_2\right) = \frac{\alpha}{2}$. Тогда асимптотический доверительный интервал для θ будет $[-(\theta_1/u_1), \theta_2/u_2]$.

Для нахождения θ_1 и θ_2 мы решаем уравнения:

$$P\left(\frac{U_1}{u_1} > \theta_1\right) = \frac{\alpha}{2} => \theta_1 = u_1/\Gamma^{-1}(r, \frac{\alpha}{2});$$

$$P\left(\frac{U_2}{u_2} > \theta_2\right) = \frac{\alpha}{2} => \theta_2 = u_2/\Gamma^{-1}(s, \frac{\alpha}{2}),$$

где $\Gamma^{-1}(r, \alpha/2)$ и $\Gamma^{-1}(s, \alpha/2)$ - квантили гамма-распределения с параметрами r и s и уровнем доверия $\frac{\alpha}{2}$.

Итак, мы получили асимптотический доверительный интервал уровня $1-\alpha$ для параметра θ:

$$\left[-\frac{u_1}{\Gamma^{-1}\left(r,\frac{\alpha}{2}\right)};\ \frac{u_2}{\Gamma^{-1}\left(s,\frac{\alpha}{2}\right)}\right].$$